Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими пріемами разыскиванія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій.

В. Г. Имшенецкаго *).

§ 1. Дифференціальное уравненіе

$$f\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx},\, \ldots,\, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0,\ldots\ldots\ldots(1)$$

гдѣ f есть раціональная цѣлая функція отъ всѣхъ перемѣнныхъ въ нее входящихъ, т. е. отъ x, y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$, можетъ допускать раціональныя рѣшенія, какъ цѣлыя, такъ и дробныя.

Въ XVI т. „Математическаго Сборника", издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ, проф. Н. В. Бугаевъ показалъ, какимъ образомъ можно находить всѣ члены цѣлаго рѣшенія вида

$$y=\alpha x^{\lambda}+\beta x^{\mu}+\ldots+\omega x^{\nu},\ldots\ldots\ldots(2)$$

если такое возможно для уравненія (1), начиная съ члена высшей степени или *старшаго*

$$[y]=\alpha x^{\lambda}$$

и послѣдовательно переходя къ слѣдующимъ βx^{μ}, ..., ωx^{ν}, въ порядкѣ постепенно понижающихся показателей

$$\lambda>\mu>\ldots>\nu.$$

---

*) Посмертное изданіе произведенія найденнаго въ бумагахъ покойнаго Акад. В. Г. Имшенецкаго въ совершенно готовомъ для печати видѣ. Въ рукописяхъ В. Г. Имшенецкаго имѣется еще другая, менѣе обработанная редакція той же статьи, но содержащая интересные варіанты; послѣдніе приведены ниже въ извлеченіи. *Ред.*

Совокупность весьма простыхъ пріемовъ, служащихъ для этой цѣли, авторъ способа называетъ *началомъ наибольшихъ показателей.*

Замѣтимъ, что для примѣненія этого начала требуется замѣна въ дифференціальныхъ уравненіяхъ зависимой перемѣнной, производимая столько разъ, сколько должно быть различныхъ членовъ въ искомомъ цѣломъ рѣшеніи (2). Такъ, найдя старшій членъ ax^{λ}, нужно, для отысканія слѣдующаго низшаго члена, преобразовать дифференціальное уравненіе (1) отъ неизвѣстной y къ z, полагая $y = ax^{\lambda} + z$ и т. д.

§ 2. Хотя проф. Бугаевъ въ заключеніи этого изслѣдованія, о цѣлыхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій, и высказываетъ мнѣніе, что эту работу его можно бы предпослать какъ полезное введеніе къ моей работѣ о дробныхъ рѣшеніяхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами *), но въ своемъ новомъ изслѣдованіи **) онъ имѣетъ въ виду дальнѣйшее распространеніе примѣненія начала наибольшихъ показателей къ разысканію дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій, не ограниченныхъ линейной формой.

Что касается рѣшенія этой задачи въ отношеніи уравненій линейныхъ, то предложенныя мною правила, въ дополненіе данныхъ Ліувилемъ, я думаю, вполнѣ достигаютъ цѣли простѣйшимъ путемъ, съ чѣмъ, мнѣ кажется, согласенъ и проф. Бугаевъ, судя по приведенной выше ссылкѣ въ заключеніи вышеупомянутой его статьи въ Математическомъ Сборникѣ.

По примѣру Ліувилля я не пытался рѣшать подобной задачи для дифференціальныхъ уравненій не линейныхъ.

Съ своей стороны проф. Бугаевъ, предложивъ себѣ общую задачу о нахожденіи рѣшеній дробныхъ дифференціальныхъ уравненій, далъ рѣшеніе ея, дѣйствительно обнимающее, кромѣ линейныхъ, вообще дифференціальныя уравненія раціональнаго вида относительно входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ x, $y\,\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$. Поэтому небезполезно будетъ разсмотрѣть теоретическія основанія его способа, для лучшей оцѣнки практической его стороны, въ сравненіи съ другими возможными пріемами рѣшенія той же задачи.

§ 3. Для соображенія числа различныхъ операцій, требуемыхъ способомъ проф. Бугаева (при отысканіи дробныхъ рѣшеній), постараемся сдѣлать возможно краткій ихъ перечень.

Положимъ, что уравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе вида

$$y = \theta(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

*) LV т. Зап. Имп. Ак. Наукъ. 1887.

**) LVII т. Зап. Имп. Ак. Наукъ. 1891.

съ цѣлой частью

$$\theta(x) = \alpha x^{\lambda} + \beta x^{\mu} + \dots + \omega x^{\nu},$$

расположенной по нисходящимъ степенямъ перемѣнной x, и съ дробной частью $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, въ которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Пусть p означаетъ число членовъ функціи $\theta(x)$, которые, начиная со старшаго, мы получимъ согласно вышеизложенная для цѣлыхъ рѣшеній (§ 1), такъ что послѣ p преобразованій дифференціальныхъ уравненій на основаніи положеній:

$$y = \alpha x^{\lambda} + y_1,\ y_1 = \beta x^{\mu} + y_2, \dots, y_{p-1} = \omega x^{\nu} + y_p \quad . \ . \ . \text{(a)}$$

будемъ имѣть дифференціальное уравненіе

$$f_1\left(x,\ y_p,\ \frac{dy_p}{dx}, \dots, \frac{d^n y_p}{dx^n}\right) = 0,$$

допускающее частное рѣшеніе

$$y_p = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \text{(b)}$$

Полагая теперь

$$y_p = \frac{1}{z},$$

выведемъ изъ предыдущаго дифференціальное уравненіе

$$f_2\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0,$$

допускающее частное рѣшеніе вида

$$z = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \theta_1(x) + \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$$

гдѣ $\theta_1(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ цѣлыя функціи, изъ которыхъ $\varphi_1(x)$ низшей степени чѣмъ $\psi_1(x)$.

Ясно, что задача вновь получила теперь свой первоначальный общій видъ, и весь кругъ требуемыхъ ею операцій завершенъ, такъ что при дальнѣйшемъ ея развитіи тѣ-же виды операціи лишь будутъ повторяться. Поэтому, если дѣйствительно данное уравненіе (1) допускаетъ раціональное дробное рѣшеніе, то оно, поэтому способу, получится въ видѣ непрерывной дроби

$$y = \theta(x) + \cfrac{1}{\theta_1(x) + \cfrac{1}{\theta_2(x) + \cdots + \cfrac{1}{\theta_k(x)}}}.$$

Мы видѣли, что, еще не приступая къ вычисленію функціи $\theta_1(x)$, потребуется произвести, на основаніи положеній (a) и (b), $p+1$ преобразованій дифференціальнаго уравненія, если p означаетъ число членовъ функціи θ. Подобнымъ образомъ, если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ означаютъ числа членовъ функцій $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_k(x)$, то прежде вычисленія послѣдней изъ нихъ потребуется

$$(p+1)+(p_1+1)+\ldots+(p_{k-1}+1)$$

преобразованій дифференціальнаго уравненія, да вычисленіе всѣхъ членовъ $\theta_k(x)$ потребуетъ $p_k - 1$ преобразованій, такъ что всѣхъ преобразованій дифференціальнаго уравненія для вычисленія непрерывной дроби y потребуется

$$N = (p+1)+(p_1+1)+\ldots+(p_{k-1}+1)+(p_k-1).$$

Отсюда видно, что число требуемыхъ преобразованій дифференціальнаго уравненія будетъ въ большинствѣ случаевъ значительное, между тѣмъ какъ эти преобразованія, въ особенности для уравненій нелинейныхъ, довольно сложны.

Кромѣ того неудобно не имѣть критерія, по которому можно было бы судить, когда раціональныхъ дробныхъ рѣшеній вовсе не можетъ быть, чтобы не предпринимать напрасно сложныхъ вычисленій.

§ 4. Итакъ, при всей замѣчательной простотѣ своей теоріи способъ проф. Бугаева можетъ оказываться неудобопримѣнимымъ по только что указаннымъ причинамъ.

На уравненіяхъ линейныхъ мы показали, какъ устраняется излишняя сложность при рѣшеніи той-же задачи и какимъ образомъ получается ясное указаніе, если оно (линейное уравненіе) не имѣетъ предполагаемаго дробнаго рѣшенія.

Поэтому умѣстно показать здѣсь аналогичные пріемы рѣшенія поставленнаго вопроса, если не во всѣхъ случаяхъ, то для довольно обширнаго класса уравненій нелинейныхъ.

Разсмотримъ дифференціальное уравненіе

$$Ly'' + (M + 2Ny)\,y' + Py^2 + Qy + R = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

гдѣ удареніями обозначаются производныя по x, такъ что, напримѣръ, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx}$, а L, M, N, P, Q, R суть данныя цѣлыя функціи отъ x.

Уравненіе (I), очевидно, можно еще написать въ такомъ видѣ

$$(Ly)'' + (M_1y)' + (Q_1y) + (Ny^2)' + (P_1y^2) + R = 0, \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{II})$$

гдѣ:

$$M_1 = M - 2L', \quad Q_1 = Q - M' + L'', \quad P_1 = P - N'.$$

Докажемъ слѣдующую теорему:

„Если уравненіе (I), или что то-же (II), допускаетъ раціональное *дробное* рѣшеніе $y = \frac{u}{v}$, то всегда можно составить дифференціальное уравненіе того-же типа какъ (I) и съ тѣмъ-же коэффиціентомъ R члена безъ неизвѣстной функціи, т. е. уравненіе

$$lz'' + (m + 2nz)\,z' + pz^2 + qz + R = 0, \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{III})$$

въ которомъ цѣлые коэффиціенты l, m, n, p и q прочихъ членовъ можно опредѣлить такъ, чтобы этому уравненію (III) принадлежало раціональное *цѣлое* рѣшеніе, представляющее числитель u дробнаго рѣшенія уравненія (I), если знаменатель v этого рѣшенія опредѣленъ какъ такой общій дѣлитель функцій L_1, M_1 и Q_1, наивысшей степени, квадратъ котораго дѣлитъ функціи N и P_1".

Доказательство. Уравненіе (III) сначала можно написать такимъ образомъ

$$(lz)'' + (m_1z)' + q_1z + (nz^2)' + (p_1z^2) + R = 0, \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{IV})$$

гдѣ будемъ имѣть:

$$m_1 = m - 2l', \quad q_1 = q - m' + l'', \quad p_1 = p - n', \quad . \; . \; . \; . \; (\mathrm{V})$$

а потомъ слѣдующимъ

$$\left[v \cdot l \cdot \frac{z}{v}\right]'' + \left[vm_1 \cdot \frac{z}{v}\right]' + vq_1 \cdot \frac{z}{v} + \left[v^2n \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^2\right]' + v^2p_1 \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^2 + R = 0. \; (\mathrm{VI})$$

Полагая теперь

$$vl = L, \quad vm_1 = M_1, \quad vq_1 = Q_1, \quad v^2n = N, \quad v^2p_1 = P_1, \quad . \; (\mathrm{VII})$$

можно удовлетворить этимъ условіямъ, такъ чтобы функціи l, m_1, q_1, n и p_1 были цѣлыми, если v будетъ такой общій дѣлитель L, M_1 и Q_1, квадратъ котораго дѣлитъ N и P_1. При томъ изъ всѣхъ дѣлителей, удовлетворяющихъ только что высказаннымъ условіямъ, мы примемъ какъ значеніе v такой, котораго степень наивысшая (короче сказать *наибольшій* общій дѣлитель L, M_1, Q_1, квадратъ котораго дѣлитъ N и P_1).

Вслѣдствіе равенствъ (VII) уравненія (II) и (VI) между собою тожественны, такъ-же какъ ихъ рѣшенія, такъ что вообще

$$y = \frac{z}{v}.$$

Но такъ какъ, по условію, уравненіе (II) допускаетъ дробное рѣшеніе

$$y = \frac{u}{v}$$

то, слѣдовательно, уравненіе (III) допускаетъ цѣлое рѣшеніе

$$z = u,$$

что и требовалось доказать.

Замѣтимъ далѣе, что, опредѣливъ значенія l, m_1, q_1, n и p_1 изъ условій (VII), какъ сказано выше, мы найдемъ изъ уравненій (V) значенія:

$$m = m_1 + 2l', \quad q = q_1 + m' - l'', \quad p = p_1 + n'.$$

Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія

$$z = \frac{u_1}{v_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VIII)}$$

Въ самомъ дѣлѣ, допуская противное, можно было бы составить уравненіе

$$l_2\zeta'' + (m_2 + 2n_2\zeta)\,\zeta' + p_2\zeta^2 + q_2\zeta + R = 0,$$

или

$$(l_2\zeta)'' + (m_3\zeta)' + q_3\zeta + (n_2\zeta^2)' + p_3\zeta^2 + R = 0,$$

гдѣ

$$m_3 = m_2 - 2l_2', \quad q_3 = q_2 - m_2' + l_2'', \quad p_3 = p_2 - n_2',$$

съ такими цѣлыми коэффиціентами l_2, m_3, q_3, n_2, p_3, что послѣднее уравненіе допускало бы цѣлое рѣшеніе

$$\zeta = u_1.$$

Для этого необходимо и достаточно, по вышедоказанному, только выполнить условія:

$$v_1 l_2 = l, \quad v_1 m_3 = m_1, \quad v_1 q_3 = q_1, \quad v_1^2 n_2 = n, \quad v_1^2 p_3 = p_1,$$

вслѣдствіе которыхъ v_1 должно быть такимъ общимъ дѣлителемъ l, m_1 и q_1, квадратъ котораго дѣлитъ n и p_1.

Однако легко убѣдиться, что требуемаго дѣлителя, какъ цѣлой функціи отъ x, не можетъ быть или, лучше сказать, онъ равенъ постоянной величинѣ, ибо, умножая первыя три изъ послѣднихъ равенствъ на v, а два послѣднія на v^2 и принимая въ соображеніе (VII), получимъ

$$vv_1 \cdot l_2 = L\,,\ \ vv_1 \cdot m_3 = M_1\,,\ \ vv_1 \cdot q_3 = Q_1\,,\ \ (vv_1)^2 \cdot n_2 = N\,,\ \ (vv_1)^2 p_3 = P_1\,.$$

Чтобы не было противорѣчія между послѣдними равенствами и условіемъ, что v есть наибольшій общій дѣлитель L, M_1 и Q_1, квадратъ котораго дѣлитъ N и P_1, необходимо принять

$$v_1 = \text{const}.$$

Поэтому рѣшеніе (VIII) уравненія (III) не можетъ быть дробнымъ.

§ 5. Прежде чѣмъ мы приведемъ нѣкоторыя дополнительныя замѣчанія къ предыдущему способу, приложимъ его къ дифференціальному уравненію

$$(x^2+1)^3 y\frac{dy}{dx} + (x^2+1)^3 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^2+1)^2 y^2 = x^3 + 2x^2 - 9x - 2\,,$$

представляющему тотъ самый примѣръ, на которомъ проф. Бугаевъ иллюстрируетъ приложеніе своего способа нахожденія раціональнаго дробнаго рѣшенія.

Сравненіе послѣдняго уравненія съ (I) даетъ:

$$L = (x^2+1)^3\,,\qquad M = 0\,,\quad N = \frac{1}{2}(x^2+1)^3\,,$$

$$P = -(x^2+1)^2\,,\quad Q = 0\,,\quad R = -(x^3+2x^2-9x-2)\,,$$

слѣдовательно

$$M_1 = M - 2L' = -12x(x^2+1)^2\,,$$

$$Q_1 = Q - M' + L'' = 6(x^2+1)(5x^2+1)$$

$$P_1 = P - N' = -(3x+1)(x^2+1)^2\,.$$

Отсюда видно, что L, M_1 и Q_1 имѣютъ общій дѣлитель $x^2+1 = v$, на квадратъ котораго, т. е. на $(x^2+1)^2$, дѣлятся N и P_1, и нѣтъ дѣлителя болѣе высокой степени съ подобными-же свойствами.

Поэтому мы получимъ:

$$l=\frac{L}{x^2+1}=(x^2+1)^2,\ m_1=\frac{M_1}{x^2+1}=-12x(x^2+1),\ q_1=\frac{Q_1}{x^2+1}=6(5x^2+1),$$

$$n=\frac{N}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}(x^2+1),\quad p_1=\frac{P_1'}{(x^2+1)^2}=-(3x+1)$$

и задача приведется къ разысканію цѣлаго рѣшенія дифференціальнаго уравненія

$$[(x^2+1)^2z]''-12[x(x^2+1)z]'+6(5x^2+1)z$$
$$+\frac{1}{2}[(x^2+1)z^2]'-(3x+1)z^2=x^3+2x^2-9x-2$$

или

$$(x^2+1)^2z''-4x(x^2+1)z'+2(3x^2-1)z$$
$$+(x^2+1)zz'-(2x+1)z^2=x^3+2x^2-9x-2\,.$$

Примѣняя для этого способъ проф. Бугаева, положимъ, что

$$[z]=\alpha x^\lambda$$

представляетъ *старшій* членъ искомаго цѣлаго рѣшенія.

Тогда высшіе показатели x въ различныхъ членахъ уравненія будутъ:

$$\lambda+2,\quad \lambda+2,\quad \lambda+2,\quad 2\lambda+1,\quad 2\lambda+1,\quad 3\,;$$

сравниваніе ихъ между собою приводитъ къ опредѣленному значенію

$$\lambda=1\,.$$

Затѣмъ, при этомъ значеніи λ, найдемъ для коэффиціента α, сравнивъ въ результатѣ подстановки $z=\alpha x+\cdots$, коэффиціенты при x^3, условіе

$$(\alpha-1)^2=0\,,\quad \text{откуда } \alpha=1\,.$$

Наконецъ преобразованіе послѣдняго дифференціальнаго уравненія посредствомъ подстановки

$$z=\zeta+x$$

дастъ

$$(x^2+1)^2\zeta''+(x^2+1)(\zeta+x)(\zeta'+1)-4x(x^2+1)(\zeta'+1)$$
$$(6x^2-2)(\zeta+x)-(2x+1)(\zeta^2+2x\zeta+x^2)=x^3+2x^2-9x-2\,.$$

Такъ какъ въ предыдущемъ выраженіи z, которое должно быть цѣлымъ, x представляетъ *старшій* членъ, то ζ можетъ быть только постоянной величиной. Обозначивъ ее черезъ a, получимъ для ея опредѣленія слѣдующее условіе

$$(x^2+1)(x+a)-4x(x^2+1)+(6x^2-2)(x+a)-(2x+1)(x^2+2ax+a^2)$$
$$=x^3+2x^2-9x-2\,,$$

или

$$\left.\begin{array}{l} x^3+ax^2\;\;+x\;\;\;+a \\ -4x^3\qquad\quad -4x \\ +6x^3+6ax^2-2x\;\;-2a \\ -2x^3-x^2\;\;\;-2a^2x-a^2 \\ \qquad -4ax^2-2ax \end{array}\right\}=x^3+2x^2-9x-2.$$

Здѣсь члены съ x^3 сократятся; члены съ x^2 сократятся, если $3a-1=2$, т. е. $a=1$; при этомъ значеніи a сокращаются также члены съ x и безъ x.

Итакъ,

$$z=x+1\,,$$

слѣдовательно

$$y=\frac{z}{x^2+1}=\frac{x+1}{x^2+1}$$

§ 6. На основаніи предыдущихъ общихъ выводовъ, подкрѣпленныхъ послѣднимъ примѣромъ, можно заключить, что для разысканія раціональнаго дробнаго рѣшенія, если оно возможно для уравненія вида (I), можно придерживаться слѣдующаго правила:

1) Разыскать алгебраически такого общаго дѣлителя v, наивысшей степени, для L, $M_1=M-2L'$ и $Q_1=Q-M'+L''$, квадратъ котораго дѣлилъ бы N и $P_1=P-N'$.

2) Пріискать цѣлое рѣшеніе $z=u$, для дифференціальнаго уравненія

$$\left(\frac{L}{v}\cdot z\right)''+\left(\frac{M_1}{v}z\right)'+\frac{Q_1}{v}z+\left(\frac{N}{v^2}z^2\right)'+\left(\frac{P_1}{v^2}z^2\right)+R=0\,.$$

Тогда искомое раціональное дробное рѣшеніе уравненія (I) будетъ

$$y=\frac{u}{v}\,.$$

Теперь самъ собою возникаетъ вопросъ о слѣдующихъ двухъ случахъ:
1) если упомянутый выше общій дѣлитель v можетъ имѣть только постоянное значеніе,

2) если при v, равномъ цѣлой функціи отъ x, только что приведенное выше дифференціальное уравненіе (IV) не имѣетъ рѣшенія въ видѣ цѣлой функціи.

Спрашивается, правильно-ли сдѣлать заключеніе, что данное уравненіе (I) и въ томъ и въ другомъ случаѣ не будетъ имѣть раціональныхъ дробныхъ рѣшеній?

Не можетъ быть сомнѣнія, что во второмъ изъ этихъ случаевъ должно дать утвердительный отвѣтъ на предложенный вопросъ. Что-же касается перваго случая, то, чтобы съ увѣренностью отвѣтить на поставленный вопросъ, необходимо предварительно испытывать, нельзя-ли пріискать такого множителя μ (интегрирующаго), по умноженіи на который всѣхъ коэффиціентовъ даннаго уравненія (I), они пріобрѣли бы свойство доставлять, на основаніи даннаго выше правила, значеніе v равное цѣлой функціи отъ x. Ясно, что простѣйшій видъ интегрирующаго множителя μ долженъ представлять неопредѣленную цѣлую положительную степень произведенія всѣхъ тѣхъ-же линейныхъ множителей, которые могутъ входить въ знаменателя дробнаго рѣшенія. Что касается этихъ послѣднихъ, то, подобно тому какъ въ случаѣ линейныхъ уравненій, по теоремѣ Ліувиля не трудно опредѣлить, въ которомъ изъ коэффиціентовъ L, N или P должны заключаться всѣ линейные множители дробнаго раціональнаго рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть это послѣднее имѣетъ видъ:

$$y = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}B},$$

гдѣ $(x-a)$ одинъ изъ линейныхъ множителей знаменателя, входящій въ него въ степени α; A и B цѣлыя функціи отъ x, не дѣлящіяся на $(x-a)$.

Очевидно, будемъ имѣть:

$$y' = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha+1}B_1}, \quad y'' = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha+2}B_2},$$

$$y^2 = \frac{A^2}{(x-a)^{2\alpha}B^2}, \quad yy' = \frac{AA_1}{(x-a)^{2\alpha+1}BB_1}$$

Отсюда видно, что при подстановкѣ этихъ значеній y, y', y'' въ уравненіе (I) линейный множитель $(x-a)$ войдетъ дѣлителемъ въ высшей степени въ томъ членѣ, котораго коэффиціентъ $2N$, если $\alpha > 1$. Въ члены Ly'' и $2Nyy'$ войдетъ дѣлитель $(x-a)$ въ равной степени только для $\alpha = 1$.

На основаніи этихъ соображеній, которыя безполезно развивать въ подробностяхъ, не трудно составить такое произведеніе, въ которое входили-бы всѣ линейные множители знаменателя искомаго дробнаго рѣшенія, причемъ кромѣ ихъ могутъ, конечно, быть введены и посторонніе множители. Принявъ неопредѣленную цѣлую положительную степень этого произведенія за значеніе μ, нужно будетъ только опредѣлить показателя этой степени на основаніи даннаго выше условія для v.

Разсмотримъ для поясненія простой примѣръ:

$$x^2y'' + 12(xy' + 2y) - x^3yy' - 3x^2y^2 = -3x^2.$$

Мы имѣемъ здѣсь:

$$L = x^2\,, \quad M = 12x\,, \quad N = -\frac{1}{2}x^3\,, \quad P = -3x^2 \quad Q = 24\,;$$

поэтому

$$M_1 = M - 2L' = +8x\,, \quad Q_1 = Q - M' + L'' = 14\,, \quad P_1 = -\frac{3}{2}x^2.$$

Слѣдовательно, L, M_1, Q_1 имѣютъ общимъ дѣлителемъ постоянную величину; но отсюда еще не слѣдуетъ, чтобы данное дифференціальное уравненіе не имѣло раціональнаго дробнаго рѣшенія. Для выясненія этого вопроса возьмемъ интегрирующій множитель

$$\mu = x^n,$$

гдѣ n пока неопредѣленное цѣлое число, а степень x взята потому, что въ данномъ уравненіи коэффиціенты при yy' и y'' имѣютъ линейныхъ множителей только равныхъ x. Теперь будемъ имѣть:

$$\mu L = x^{n+2}\,, \ \mu M = 12x^{n+1}\,, \ \mu N = -\frac{1}{2}x^{n+3}\,, \ \mu P = -3x^{n+2}\,, \ \mu Q = 24x^n;$$

поэтому

$$M_1 = \mu M - 2(\mu L)' = -2(n-4)\,x^{n+1}\,,$$

$$Q_1 = \mu Q - (\mu M)' + (\mu L)'' = (n^2 - 9n + 14)\,x^n\,,$$

$$P_1 = \mu P - (\mu N)' = \left(-3 + \frac{n+3}{2}\right)x^{n+2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что x^n, и всякая степень отъ x ниже n-ной, будетъ общимъ дѣлителемъ для μL, M_1 и Q_1.

Далѣе, чтобы высшая степень общаго дѣлителя, возвышенная въ квадратъ, т. е. x^{2n}, дѣлила μN и P_1, необходимо:

1) чтобы $n + 3 - 2n = 3 - n$ равнялось нулю или цѣлому положительному числу,

2) чтобы, при $3 - n = 0$, было $P_1 = 0$.

Такъ какъ послѣднее условіе выполняется, то, полагая $n = 3$, будемъ имѣть:

$$\frac{L\mu}{x^3} = x^2, \quad \frac{M_1}{x^3} = +2x, \quad \frac{Q_1}{x^3} = -4, \quad \frac{\mu N}{x^6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{P_1}{x^6} = 0.$$

Слѣдовательно, заданное дифференціальное уравненіе приведется къ слѣдующему:

$$(x^2z)'' + 2(xz)' - 4z - \left(\frac{1}{2} z^2\right)' = 3x^5 \quad \text{гдѣ } z = x^3 y\,,$$

или

$$x^2z'' + (6x - z)z' = -3x^5.$$

Для послѣдняго дифференціальнаго уравненія по способу наибольшихъ показателей находимъ цѣлое рѣшеніе

$$z = x^3 + 6x\,;$$

слѣдовательно, заданное дифференціальное уравненіе имѣетъ дробное рѣшеніе

$$y = \frac{z}{x^3} = \frac{x^3 + 6x}{x^3} = \frac{x^2 + 6}{x^2} = 1 + \frac{6}{x^2}.$$

Извлеченіе изъ рукописи В. Г. Имшенецкаго, содержащей другую редакцію предыдущей статьи *).

..... Въ заключеніе предыдущихъ замѣтокъ **) кстати будетъ показать, что тѣ пріемы, которые послужили намъ для упрощенія рѣшенія задачи о нахожденіи раціональныхъ дробныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій, могутъ, благодаря лишь небольшому видоизмѣненію, съ успѣхомъ быть приложены для рѣшенія такой-же задачи въ отношеніи одного довольно общаго и небезинтереснаго класса дифференціальныхъ уравненій не линейныхъ.

---

*) Изъ переписки В. Г. Имшенецкаго съ разными лицами видно, что эта рукопись представляетъ набросокъ сообщенія его Ѳ.-Пб—скому Математ. Обществу, сдѣланнаго 15 октября 1891 года. Послѣдняя редакція менѣе обработана авторомъ; тѣмъ не менѣе она содержитъ интересные варіанты его мыслей, заслуживающіе вниманія. Здѣсь трактуется иное дифференціальное уравненіе, болѣе сложное, чѣмъ уравненіе (I), сверхъ того здѣсь есть указаніе на то, что В. Г. Имшенецкій владѣлъ пріемами, которые примѣняются къ болѣе общимъ видамъ дифференціальныхъ уравненій. *Ред.*

**) Эти замѣтки по содержанію совпадаютъ съ тѣмъ, что изложено выше въ §§ 1, 2 и 3. *Ред.*

Этотъ классъ можно характеризовать слѣдующимъ образомъ. Къ нему принадлежатъ уравненія такого общаго вида, что въ нихъ какъ частные случаи заключаются дифференціальныя уравненія, получаемыя при пониженіи дифференціальнаго порядка на единицу однородныхъ дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, любого порядка, съ раціональными коэффиціентами.

Отсюда понятно, что дать способъ находить раціональныя дробныя рѣшенія для дифференціальныхъ уравненій описаннаго класса значитъ въ то-же время показать, какъ находятся для линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами частные интегралы вида $e^{\int y dx}$, гдѣ y есть раціональная дробь.

Къ опредѣленному выше классу принадлежатъ слѣдующія дифференціальныя уравненія съ цѣлыми коэффиціентами: во 1-хъ уравненіе перваго порядка и второй степени

$$N + Py + Qy^2 + R\frac{dy}{dx} = 0\,,$$

на которомъ Лагранжъ въ цитированномъ выше мемуарѣ *) показалъ примѣненіе своего способа интегрированія посредствомъ непрерывныхъ дробей, во 2-хъ уравненіе второго порядка и третьей степени

$$N + Py + Qy^2 + Ry^3 + (S + 2\,Ty)\frac{dy}{dx} + U\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad . \; . \; . \; (\mathrm{a})$$

и такъ далѣе.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ предлагаемаго нами способа, находить раціональныя дробныя рѣшенія, на уравненіи (a), съ цѣлыми коэффиціентами N, S, ..., T, U, такъ какъ пріемы, которые будутъ примѣнены для этой цѣли, безъ затрудненія переносятся на другія уравненія того-же класса.

Уравненіе (a) можно представить такимъ образомъ:

$$\frac{d^2}{dx^2}(Uy) + \frac{d}{dx}(S_1y) + P_1y + \frac{d}{dx}(Ty^2) + Q_1y^2 + Ry^3 + N = 0\,, \; . \; (\mathrm{a}')$$

положивъ

$$S_1 = S - 2\frac{dU}{dx}\,, \quad P_1 = P - \frac{dS}{dx} + \frac{d^2U}{dx^2}\,, \quad Q_1 = Q - \frac{dT}{dx}\,.$$

Теперь можно слѣдующимъ образомъ обнаружить условія, при которыхъ данное дифференціальное уравненіе допускаетъ раціональное дробное рѣшеніе. Для этого допустимъ сначала, что оно, или ему равнозначущее уравненіе (a′), имѣетъ рѣшеніе

$$y = X\,,$$

*) Oeuvres complètes, t. IV.

гдѣ X есть данная цѣлая функція отъ x, и составимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2}{dx^2}(UYz)+\frac{d}{dx}(S_1Yz)+P_1Yz+$$
$$+\frac{d}{dx}(TY^2z^2)+Q_1Y^2z^2+RY^3z^3+N=0\,, \quad \ldots \ldots (a'')$$

гдѣ Y есть данная цѣлая функція отъ x, различная отъ X, а z означаетъ неизвѣстную функцію отъ x.

На основаніи условія, что $y=X$ есть интегралъ уравненія (a′), очевидно, что уравненію (a″) удовлетворяетъ положеніе

$$Yz=X\,;$$

слѣдовательно, уравненіе (a″) имѣетъ раціональное дробное рѣшеніе

$$z=\frac{X}{Y}\,.$$

Обративъ вниманіе на то, какъ составляется уравненіе (a″), допускающее раціональное дробное рѣшеніе, не трудно сдѣлать общія заключенія о разысканіи сначала знаменателя, потомъ числителя дробнаго рѣшенія, если его имѣетъ уравненіе (a), не допускающее цѣлаго рѣшенія.

Это можетъ быть сдѣлано двоякимъ образомъ: въ однихъ случаяхъ *непосредственно*, т. е. съ помощію лишь даннаго уравненія (a); въ другихъ—*посредствомъ* разысканія нѣкотораго *множителя*.

Въ первомъ случаѣ нужно уравненіе (a) привести къ виду (a′) и для многочленовъ U, S_1 и P_1 отыскать общаго наибольшаго дѣлителя D. Далѣе, разложивъ D на линейныхъ множителей получимъ, напр.

$$D=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$$

и составимъ произведеніе

$$Y=(x-a)^{\alpha'}(x-b)^{\beta'}\ldots(x-l)^{\lambda'},$$

гдѣ показатели α', β', ..., λ' опредѣляются слѣдующими условіями: 1) T и Q_1 должны дѣлиться на Y^2, а R на Y^3; 2) α', β', ..., λ' должны имѣть при этомъ наибольшія цѣлыя положительныя значенія, не превосходящія соотвѣтственно α, β, ..., λ.

Полагая въ уравненіи (a′)

$$y=\frac{z}{Y}$$

и введя цѣлые полиномы:

$$\frac{U}{Y}=u\,,\quad \frac{S_1}{Y}=s\,,\quad \frac{P_1}{Y}=p\,,$$

$$\frac{T}{Y^2}=t\,,\quad \frac{Q_1}{Y^2}=q\,,\quad \frac{R}{Y^3}=r\,,$$

получимъ

$$\frac{d^2}{dx^2}(uz)+\frac{d}{dx}(sz)+pz+\frac{d}{dx}(tz^2)+qz^2+rz^3+N=0\,.\,. \quad .\,.\,\text{(b)}$$

Всякому рѣшенію

$$z=X$$

уравненія (b) соотвѣтствуетъ рѣшеніе вида

$$y=\frac{X}{Y}$$

даннаго уравненія (a). Слѣдовательно, если можно 1) найти полиномъ Y, по меньшей мѣрѣ первой степени, удовлетворяющій указаннымъ выше условіямъ и 2) получить *цѣлое* рѣшеніе $z=X$ для уравненія (b), то данное уравненіе (a) имѣетъ раціональное дробное рѣшеніе $y=\frac{X}{Y}$.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда нельзя найти требуемаго полинома Y *непосредственно* съ помощію даннаго уравненія, можно еще попытаться получить его посредствомъ предварительнаго умноженія даннаго уравненія на множитель μ, который можно будетъ назвать *интегрирующимъ*, когда съ помощію коэффиціентовъ уравненія (a), умноженныхъ на μ, требуемый полиномъ Y можетъ быть найденъ.

Пусть $y=\frac{X}{Y}$ представляетъ рѣшеніе дифференціальнаго уравненія (a), имѣющее видъ несократимой дроби, и уравненію $Y=0$ принадлежитъ корень a кратности α, такъ что мы имѣемъ:

$$y=\frac{X}{(x-a)^{\alpha}Y_1}\,,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{X_1}{(x-a)^{\alpha+1}Y_2}\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{X_2}{(x-a)^{\alpha+2}Y_3}\,,\ldots$$

гдѣ полиномы X, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3 не дѣлятся на $(x-a)$.

Внося предыдущее значеніе функціи y и ея производныхъ въ уравненіе (a), легко замѣтить тотъ членъ, гдѣ въ знаменателѣ $(x-a)$ войдетъ въ самой высшей степени. Коэффиціентъ этого члена долженъ содержать всѣхъ различныхъ линейныхъ множителей знаменателя Y дробнаго рѣшенія, по теоремѣ Ліувилля.

На этомъ основанiи неопредѣленная степень этого коэффицiента или, проще, произведенiя его различныхъ линейныхъ множителей, можно принять за значенiе μ интегрирующаго множителя. Что-же касается показателя упомянутой неопредѣленной степени, то онъ можетъ быть найденъ по способу, сходному съ тѣмъ, который показанъ нами въ упомянутой выше статьѣ о нахожденiи рацiональныхъ дробныхъ рѣшенiй линейныхъ уравненiй.

Изъ предыдущаго заключаемъ, что уравненiе (a) не имѣетъ рацiональнаго дробнаго рѣшенiя, 1) если требуемаго полинома Y (который долженъ представлять знаменатель рѣшенiя) нельзя опредѣлить по уравненiю (a) ни непосредственно, ни посредствомъ множителя, или 2) если, найдя полиномъ Y, мы получимъ уравненiе (b), не допускающее цѣлаго рѣшенiя.

Переходимъ къ приложенiямъ.

Примѣръ 1. Дано уравненiе

$$(x+3)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x+3)\left[x^2+2x-9+14(x+3)^4 y\right]\frac{dy}{dx} +$$

$$+(x+3)^8 y^3 - 42(x+3)^4 y^2 - 2(2x^2+6x-3)\,y = x^2-6x+5\,.$$

Прилагая къ этому уравненiю непосредственно предыдущiй способъ, легко убѣждаемся, что такимъ образомъ нельзя найти полинома Y, который представлялъ-бы знаменателя искомаго дробнаго рѣшенiя. Но въ виду коэффицiентовъ при $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ и y^3 заключаемъ, что Y можетъ имѣть линейные множители лишь вида $x+3$; поэтому, умноживъ данное уравненiе на

$$\mu = (x+3)^n,$$

гдѣ n неопредѣленное, будемъ имѣть:

$$U=(x+3)^{n+2},\quad T=-7(x+3)^{n+5},\quad S=-(x+3)^{n+1}(x^2+2x-9),$$

$$R=(x+3)^{n+8},\quad Q=-42(x+3)^{n+4},\quad P=-2(2x^2+6x-3)(x+3)^n,$$

$$N=-(x^2-6x+5)(x+3)^n.$$

Отсюда находимъ:

$$S_1=-(x+3)^{n+1}\left[x^2+2x-9+2(n+2)\right],$$

$$P_1=(x+3)^n\left[-2(2x^2+6x-3)+2(x+1)(x+3)+\right.$$

$$\left.+(n+1)(x^2+2x-9)+(n+2)(n+1)\right],$$

$$Q_1=7(n-1)(x+3)^{n+4},$$

и замѣчаемъ, что $(x+3)^n$ есть общій наибольшій дѣлитель U, S_1 и P_1. Полагая

$$D=(x+3)^n,$$

нужно выполнить условія, чтобы R дѣлилось на D^3, а T и Q_1 на D^2. Нетрудно убѣдиться, что всѣмъ этимъ условіямъ можно удовлетворить, дѣлая

$$n=1.$$

При найденномъ значеніи $n=1$ будемъ имѣть:

$$U=(x+3)^3, \quad T=-7(x+3)^6, \quad S_1=-(x+3)^3(x-1),$$

$$P_1=0, \quad Q_1=0, \quad R=(x+3)^9, \quad N=-(x-1)(x-5)(x+3).$$

Полагая поэтому

$$Y=(x+3)^3$$

и дѣлая

$$y=\frac{z}{Y}=\frac{z}{(x+3)^3},$$

приведемъ данное дифференціальное уравненіе къ слѣдующему виду

$$\frac{d^2z}{dx^2}-7\frac{d}{dx}z^2-\frac{d}{dx}[(x-1)z]+z^3=(x-1)(x-5)(x+3)$$

или

$$\frac{d^2z}{dx^2}-14z\frac{dz}{dx}-(x-1)\frac{dz}{dx}-z+z^3=(x-1)(x-5)(x+3).$$

Найдя извѣстнымъ пріемомъ цѣлое рѣшеніе

$$z=x-1$$

послѣдняго уравненія, получимъ вмѣстѣ съ тѣмъ дробное рѣшеніе

$$y=\frac{x-1}{(x+3)^3}$$

заданнаго уравненія.

Примѣръ 2. Дано линейное уравненіе 3-го порядка

$$x\frac{d^3u}{dx^3}=(x^4+9x^2+12)u.$$

Полагая

$$u=e^{\int ydx},$$

получимъ

$$x\left(\frac{d^2y}{dx^2}+3y\frac{dy}{dx}+y^3\right)=x^4+9x^2+12.$$

Разыскивая дробный интегралъ послѣдняго уравненія и убѣждаясь, что безъ помощи множителя его получить нельзя, беремъ множитель

$$\mu=x^{n-1},$$

по умноженіи на который послѣднее уравненіе можно привести къ такому виду:

$$\frac{d^2}{dx^2}[x^ny]-2n\frac{d}{dx}[x^{n-1}y]+n(n-1)[x^{n-2}y]+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{d}{dx}[x^ny^2]-\frac{3}{2}nx^{n-1}y^2+x^ny^3=(x^4+9x^2+12)x^{n-1}.$$

Здѣсь имѣемъ

$$D=x^{n-2}$$

общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ y въ прямоугольныхъ скобкахъ $[\ldots]$ въ трехъ первыхъ членахъ.

Чтобы x^n и x^{n-1} дѣлились на D^2, а также x^n дѣлилось на D^3, должны быть выполнены неравенства:

$$n-2(n-2)\geqq 0,\quad n-1-2(n-2)\geqq 0,\quad n-3(n-2)\geqq 0$$

или

$$4-n\geqq 0 \quad\text{и}\quad 3-n\geqq 0,$$

откуда слѣдуетъ, что $n=3$, а $\mu=x^2$.

Поэтому будемъ имѣть

$$\frac{d^2}{dx^2}[x^3y]-6\frac{d}{dx}[x^2y]+6xy$$

$$+\frac{3}{2}\frac{d}{dx}[x^3y^2]-\frac{9}{2}x^2y^2+x^3y^3=x^6+9x^4+12x^2,$$

а полагая здѣсь

$$xy=z,$$

по приведеніи получимъ

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+2z+3xz\frac{dz}{dx}-3z^2+z^3=x^6+9x^4+12x^2.$$

Теперь, разыскивая для послѣдняго уравненія цѣлое рѣшеніе и означая старшій его членъ черезъ

$$[z]=ax^{\alpha},$$

находимъ рядъ показателей:

$$\alpha, \quad \alpha, \quad \alpha, \quad 2\alpha, \quad 2\alpha, \quad 3\alpha, \quad 6,$$

сравненіе которыхъ между собою приведетъ къ слѣдующимъ возможнымъ значеніямъ

$$\alpha=0, \quad 6, \quad 3, \quad 2.$$

При нихъ предыдущій рядъ показателей соотвѣтственно обратится въ

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 6; \\ 6, & 6, & 6, & 12, & 12, & 18, & 6; \\ 3, & 3, & 3, & 6, & 6, & 9, & 6; \\ 2, & 2, & 2, & 4, & 4, & 6, & 6; \end{array}$$

слѣдовательно должно принять

$$\alpha=2$$

и

$$[z]=ax^2.$$

Подстановка этого значенія z въ дифференціальное уравненіе и сравненіе коэффиціентовъ x^6 въ обѣихъ частяхъ его даетъ условіе $a^3=1$, откуда $a=1$. Далѣе, дѣлая

$$z=x^2+v,$$

преобразуемъ предыдущее дифференціальное уравненіе въ слѣдующее

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2}+(3x^2-2)\,x\frac{dv}{dx}+(3x^4+2)\,v+$$

$$+3xv\frac{dv}{dx}+3\,(x^2-1)\,v^2+v^3=6x^4+12x^2.$$

Означая черезъ

$$[v]=bx^{\beta}$$

старшій членъ цѣлаго рѣшенія послѣдняго уравненія, получаемъ рядъ показателей

$$\beta, \quad \beta+2, \quad \beta+4, \quad 2\beta, \quad 2\beta+2, \quad 3\beta, \quad 4,$$

сравненіе которыхъ между собою даетъ слѣдующія различныя значенія:

$$\beta = 0\,,\quad 4\,,\quad 2\,,\quad 1\,;$$

но изъ нихъ возможны только первое и послѣднее, дающія ряду показателей соотвѣтственно такой видъ:

$$0\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 0\,,\ 4\,;$$

$$1\,,\ 3\,,\ 5\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 3\,,\ 4\,;$$

поэтому слѣдуетъ принять значеніе $\beta = 0$ и положить

$$v = b = \mathrm{const}.$$

Это значеніе v дѣйствительно удовлетворитъ дифференціальному уравненію при $b = 2$.

Слѣдовательно, мы нашли:

$$v = 2\,,$$

$$z = x^2 + 2\,,$$

$$y = \frac{x^2+2}{x}\,,$$

$$\int y dx = \frac{1}{2}x^2 + \log(x^2)\,,$$

$$u = x^2 e^{\frac{1}{2}x^2}\,.$$

Другой способъ рѣшенія послѣдней задачи. Сначала, отыскивая высшій членъ ax^α цѣлой части рѣшенія y дифференціальнаго уравненія

$$x\left[y'' + 3yy' + y^3\right] = x^4 + 9x^2 + 12$$

и полагая $y = ax^\alpha + \ldots$, находимъ рядъ показателей:

$$\alpha - 1\,,\quad 2\alpha\,,\quad 3\alpha + 1\,,\quad 4\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha)$$

Черезъ сравненіе ихъ находимъ слѣдующія цѣлыя значенія α: $\alpha = 2$, $\alpha = 1$, для которыхъ рядъ (α) даетъ:

$$1\,,\quad 4\,,\quad 7\,,\quad 4\,;$$

$$0\,,\quad 2\,,\quad 4\,,\quad 4\,;$$

слѣдовательно нужно взять $\alpha = 1$; тогда для опредѣленія коэффиціента a получимъ условіе

$$a^3 = 1\,,\ \text{откуда}\ a = 1\,.$$

Полагая теперь $y = x + \eta$, получимъ

$$x\left[\eta'' + 3(\eta + x)(\eta' + 1) + \eta^3 + 3x\eta^2 + 3x^2\eta\right] = 9x^2 + 12$$

или

$$x\left[\eta'' + 3\eta\eta' + 3x\eta' + (3x^2 + 1)\eta + 3x\eta^2 + \eta^3\right] = 6x^2 + 12 .$$

Въ цѣлой части значенія η высшій членъ bx^β, при условіи $\beta < 1$, будетъ нулевой степени; слѣдовательно, должно положить просто

$$\eta = b + \ldots .$$

Но при подстановкѣ b вмѣсто η получается въ уравненіи только *одинъ* высшій членъ $3bx^3$; слѣд. $b = 0$.

Далѣе, замѣчая, что

$$\int E(y)\,dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}, \text{*)}$$

положимъ въ линейномъ уравненіи

$$x\frac{d^3u}{dx^3} = (x^4 + 9x^2 + 12)\,u$$

$$u = e^{\frac{x^2}{2}}v ,$$

что доставитъ,

$$u' = e^{\frac{x^2}{2}}(v' + xv) ,$$

$$u'' = e^{\frac{x^2}{2}}\left(v'' + 2xv' + \left.\begin{array}{l}1\\ +x^2\end{array}\right| v\right) ,$$

$$u''' = e^{\frac{x^2}{2}}\left(v''' + \left.\begin{array}{l}2x\\ +x\end{array}\right| v'' + \left.\begin{array}{l}(x^2+1)\\ +2\\ +2x^2\end{array}\right| v' + \left.\begin{array}{l}2x\\ +x\\ +x^3\end{array}\right| v\right) ,$$

$$xv''' + 3x^2v'' + (3x^3 + 3x)\,v' - (6x^2 + 12)\,v = 0 .$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи

$$v = cx^\gamma + \ldots$$

найдемъ условное уравненіе

$$(\gamma - 2)\,c = 0 ,\ \text{откуда}\ \gamma = 2 ,\ c = \text{const}.$$

Слѣдовательно,

$$u = cx^2e^{\frac{x^2}{2}} ,$$

согласно съ доказаннымъ выше.

---

*) Символъ $E\,(y)$ означаетъ цѣлую часть выраженія y. *Ред.*