Новый случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ жидкости.

А. М. Ляпунова.

Извѣстно, что вопросъ о движеніи твердаго тѣла въ неограниченной жидкости при отсутствіи внѣшнихъ силъ и при извѣстныхъ предположеніяхъ о характерѣ движенія жидкости зависитъ отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3},$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dy_2}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3},$$

$$\frac{dy_3}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1},$$

гдѣ T есть нѣкоторая квадратичная форма перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ съ постоянными коэффиціентами.

Уравненія эти во всякомъ случаѣ допускаютъ три слѣдующихъ интеграла:

$$T, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{и} \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

[которые въ разсматриваемомъ вопросѣ всегда будутъ независимыми, такъ какъ форма T въ этомъ вопросѣ такова, что при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ обращается въ *опредѣленную* (définie) форму перемѣнныхъ y_1, y_2, y_3], и всякій разъ, когда будетъ найденъ четвертый интегралъ, подобно указаннымъ сейчасъ независящій отъ t и не приводящійся къ ихъ функціи, принципъ послѣдняго множителя, очевидно, приложимый къ разсматриваемой системѣ дифференціальныхъ уравненій, позволитъ интегрированіе ея выполнить посредствомъ квадратуръ.

Клебшъ указалъ три случая, когда такой интегралъ можетъ быть найденъ подъ видомъ цѣлой функціи величинъ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 не выше второй степени (Math. Ann., Bd. 3).

Всѣ эти случаи относятся къ слѣдующему типу формы T:

$$\begin{aligned} T = \ & \frac{1}{2}(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2) \\ & + b_1 x_1 y_1 + b_2 x_2 y_2 + b_3 x_3 y_3 \\ & + \frac{1}{2}(c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + c_3 y_3^2), \end{aligned}$$

и первый изъ нихъ характеризуется условіемъ, что соотвѣтственные элементы двухъ какихъ-либо столбцовъ таблицы

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{matrix}$$

равны между собою.

Если это имѣетъ мѣсто напр. по отношенію ко второму и третьему столбцамъ, такъ что

$$a_2 = a_3, \qquad b_2 = b_3, \qquad c_2 = c_3,$$

то четвертымъ независимымъ интеграломъ можетъ служить y_1.

Второй изъ указанныхъ Клебшемъ случаевъ характеризуется равенствами

$$b_1 = b_2 = b_3$$

вмѣстѣ съ условіемъ, что при надлежащемъ выборѣ постоянныхъ a и τ коэффиціенты a_1, a_2, a_3 выражаются формулами

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \tau c_2 c_3, \\ a_2 &= a + \tau c_3 c_1, \\ a_3 &= a + \tau c_1 c_2. \end{aligned}$$

Для того, чтобы случай этотъ не заключался въ предыдущемъ, коэффиціенты c_1, c_2, c_3 должны быть всѣ различными.

При этомъ условіи четвертымъ независимымъ интеграломъ будетъ служить функція

$$\tau(c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Наконецъ, третій случай Клебша характеризуется условіями

$$b_1 = b_2 = b_3,$$
$$c_1 = c_2 = c_3,$$

при которыхъ, если между величинами a_1, a_2, a_3 существуютъ различныя, четвертымъ независимымъ интеграломъ можетъ служить функція

$$a_2a_3x_1^2 + a_3a_1x_2^2 + a_1a_2x_3^2 - c(a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2),$$

гдѣ c есть общая величина коэффиціентовъ c_1, c_2, c_3.

Когда a_1, a_2, a_3 всѣ различны, случай этотъ не заключается въ предыдущихъ, но, если угодно, его можно разсматривать, какъ нѣкоторый предѣльный второго, отъ котораго можно къ нему перейти, измѣняя c_2, c_3, a и τ такъ, чтобы $c_2 - c_1$ и $c_3 - c_1$ дѣлались безконечно-малыми, a и τ — безконечно-большими, а a_1, a_2, a_3 оставались неизмѣнными. Указанный сейчасъ интегралъ получится тогда, какъ предѣлъ нѣкоторой линейной комбинаціи четырехъ цѣлыхъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ второму случаю.

Можно замѣтить, что второй и третій случаи могутъ быть замѣнены однимъ, который характеризуется условіями:

$$b_1 = b_2 = b_3,$$
$$\frac{a_2 - a_3}{c_1} + \frac{a_3 - a_1}{c_2} + \frac{a_1 - a_2}{c_3} = 0.$$

Недавно В. А. Стекловымъ указанъ новый случай интегрируемости, въ которомъ, подобно предыдущимъ, четвертый независимый интегралъ также можетъ быть найденъ подъ видомъ цѣлой функціи второй степени величинъ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 (Сообщ. Харьк. Мат. Общ., т. 3 и Math. Ann., Bd. 42).

Случай этотъ В. А. Стекловъ опредѣляетъ условіями

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \sigma c_2c_3, & a_1 &= \sigma^2 c_1(c_2^2 + c_3^2),\\ b_2 &= \sigma c_3c_1, & a_2 &= \sigma^2 c_2(c_3^2 + c_1^2),\\ b_3 &= \sigma c_1c_2, & a_3 &= \sigma^2 c_3(c_1^2 + c_2^2), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

при выполненіи которыхъ разсматриваемыя дифференціальныя уравненія допускаютъ слѣдующій интегралъ:

$$\sigma^2 \mathbf{S} (c_2 - c_3)^2 x_1^2 - 2\sigma \mathbf{S} c_1 x_1 y_1 + \mathbf{S} y_1^2,$$

гдѣ $\mathbf{S}$ означаетъ суммированіе трехъ членовъ, получаемыхъ изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ 1, 2, 3.

Для того, чтобы этими условіями опредѣлялся случай, не заключающійся въ предыдущихъ, постоянное σ не должно быть нулемъ, а коэффиціенты c_1, c_2, c_3 должны быть всѣ различными. При этомъ послѣднемъ условіи указанный сейчасъ интегралъ навѣрно не будетъ функціей трехъ извѣстныхъ.

Къ перечисленнымъ случаямъ интегрируемости я могу здѣсь прибавить еще одинъ.

Случай этотъ характеризуется условіями

$$c_1 = c_2 = c_3 = c,$$

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c},$$

при которыхъ разсматриваемыя дифференціальныя уравненія допускаютъ, какъ нетрудно убѣдиться, слѣдующій интегралъ:

$$\mathbf{S} b_1 [(b_2 + b_3) x_1 + c y_1]^2,$$

не приводящійся къ функціи трехъ извѣстныхъ, если между величинами b_1, b_2, b_3 существуютъ различныя.

Когда b_1, b_2, b_3 всѣ различны, случай этотъ не заключается ни въ одномъ изъ предыдущихъ. Но если случай В. А. Стеклова надлежащимъ образомъ обобщить, указанный сейчасъ будетъ выводиться изъ него, какъ предѣльный, подобно тому, какъ третій случай Клебша выводится изъ второго.

Дѣйствительно, замѣчая, что, каковы бы ни были постоянныя A и B, разсматриваемыя дифференціальныя уравненія отъ замѣны T на

$$T + A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + B(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)$$

не мѣняются, условія (1) можемъ замѣнить слѣдующими:

$$b_1 = b + \sigma c_2 c_3,$$
$$b_2 = b + \sigma c_3 c_1,$$
$$b_3 = b + \sigma c_1 c_2.$$

$$a_1 = a + \sigma^2 c_1 (c_2 - c_3)^2 = a + \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1},$$

$$a_2 = a + \sigma^2 c_2 (c_3 - c_1)^2 = a + \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2},$$

$$a_3 = a + \sigma^2 c_3 (c_1 - c_2)^2 = a + \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3},$$

изъ которыхъ три послѣднихъ вслѣдствіе произвольности постояннаго a равносильны такимъ:

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3}.$$

Чтобы перейти теперь къ указанному мною случаю, должно предположить, что $c_2 - c_1$ и $c_3 - c_1$ дѣлаются безконечно-малыми, а b и σ — безконечно-большими, при томъ — такъ, что b_1, b_2, b_3 остаются неизмѣнными.

Въ заключеніе замѣчу, что послѣдніе два случая могутъ быть замѣнены однимъ, который характеризуется условіями:

$$a_1 - \frac{(b_2 - b_3)^2}{c_1} = a_2 - \frac{(b_3 - b_1)^2}{c_2} = a_3 - \frac{(b_1 - b_2)^2}{c_3},$$

$$\frac{b_2 - b_3}{c_1} + \frac{b_3 - b_1}{c_2} + \frac{b_1 - b_2}{c_3} = 0.$$