Исчисленіе положенія.

А. И. Богуславскаго *).

Глава I.

Алгебраическія дѣйствія надъ величинами направленія и величинами положенія.

§ 1. Понятіе о векторѣ. Алгебраическія дѣйствія съ векторами.

Прямолинейный путь, пройденный точкою при ея перемѣщеніи изъ положенія A въ положеніе B, называется *векторомъ* и обозначается черезъ AB, гдѣ A зовется *началомъ*, а B—*концомъ* вектора.

Векторы различаются длиною и направленіемъ въ пространствѣ. Чтобы различать между собою векторы на плоскости, необходимо принять нѣкоторый векторъ AM за начальный, *векторъ единицу*. Тогда всякій векторъ плоскости можетъ быть обозначенъ черезъ a_φ, гдѣ *a длина* вектора, а *φ уголъ* вектора, отсчитываемый отъ начальнаго направленія AM противъ часовой стрѣлки.

Векторъ плоскости a_φ выражаетъ собою комплексное количество съ модулемъ a и амплитудою φ, если считать начальный векторъ AM равнымъ положительной единицѣ.

Чтобы въ пространствѣ различать векторы по ихъ длинѣ и направленію, необходиме принять нѣкоторую плоскость за начальную и въ ней выбрать начальный векторъ AM. Уголъ α, заключенный между проекціей нѣкотораго вектора на начальную плоскость и векторомъ AM, условимся считать за *долготу* вектора; уголъ же β, составленный тою же проекціей съ самимъ векторомъ, за *широту* вектора, обозначая его черезъ $a_{\alpha,\beta}$.

Векторы, имѣющіе равныя абсолютныя длины и одинаковое направленіе, считаются *равными* между собою.

---

*) Читано авторомъ въ засѣданіи Харьковскаго Математическаго Общества 18 марта 1893 года.

Правило сложенія векторовъ. Чтобы сложить два вектора, надо къ концу одного вектора приложить начало другого, сохраняя ихъ направленія; сумма выразится векторомъ, соединяющимъ начало перваго съ концомъ второго вектора

$$AB+BC=AC. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Такъ какъ векторъ можно перенести параллельно самому себѣ, не мѣняя его длины и направленія, то форм. (1) позволяетъ складывать любые два вектора пространства.

Сложеніе векторовъ обладаетъ свойствами перемѣстительности и сочетательности, какъ это видно изъ слѣдующихъ формулъ, которыя легко провѣрить.

$$AB+BC=BC+AB=AC; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$(AB+BC)+CD=AB+(BC+CD)=AD. \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Когда сложенные векторы совпадаютъ съ направленіемъ начальнаго вектора, правило сложенія векторовъ совпадаетъ съ правиломъ сложенія положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, выражаемыхъ слагаемыми векторами.

По формулѣ (1),

$$AB+BA=0 \quad \text{или} \quad AB=-BA, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

т. е. векторъ мѣняетъ свой знакъ на обратный при перемѣщеніи его начала и конца.

Разсматривая вычитаніе, какъ дѣйствіе обратное сложенію, мы можемъ изъ форм. (1) получить слѣдующую формулу вычитанія:

$$AC-AB=BC, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

откуда имѣемъ:

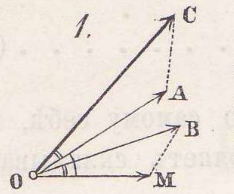
Правило вычитанія векторовъ. Разность двухъ векторовъ съ общимъ началомъ выражается векторомъ, заключеннымъ между ихъ концами и направленнымъ отъ конца вычитаемаго къ концу уменьшаемаго вектора.

Изъ форм. (5) слѣдуетъ, что *разность двухъ векторовъ не зависитъ отъ положенія ихъ общаго начала, а исключительно отъ положенія ихъ концовъ.*

Правило умноженія векторовъ. Чтобы векторъ $OA=a_\alpha$ умножить на векторъ $OB=b_\beta$, надо изъ вектора множимаго OA получить векторъ произведеніе OC помощію тѣхъ операцій, при помощи которыхъ векторъ множитель OB полученъ изъ начальнаго вектора OM, равнаго единицѣ.

Такъ какъ (черт. 1) векторъ OB получается изъ начальнаго вектора единицы OM, удлиннивъ его въ отношеніи $(b:1)$ и повернувъ его на уголъ β, то чтобы получить векторъ произведеніе

$$OC = OA . OB,$$



достаточно построить на OA треугольникъ OAC, подобный треугольнику OMB и сходственно съ нимъ расположенный, и тогда

$$OC = (a . b)_{\alpha+\beta},$$

такъ какъ длина и уголъ вектора OC равны соотвѣтственно длинѣ и углу искомаго произведенія. Итакъ:

$$a_\alpha \cdot b_\beta = (a . b)_{\alpha+\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Изъ форм. (6) умноженія слѣдуютъ формулы *дѣленія векторовъ*, *возведенія вектора въ степень и извлеченія корня изъ вектора*, а именно:

$$a_\alpha : b_\beta = (a:b)_{\alpha-\beta}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

$$(a_\alpha)^m = (a^m)_{m\alpha}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

$$\sqrt[m]{a_\alpha} = \left[\sqrt[m]{a}\right]_{\frac{\alpha+2k\pi}{m}} . \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

Послѣдними двумя формулами намъ не придется ниже пользоваться.

Умноженіе векторовъ, какъ это видно изъ форм. (6), обладаетъ свойствами *перемѣстительности* и *сочетательности*. Кромѣ того умноженіе подчиняется закону *распредѣлительности*, а именно

$$(a_\alpha + b_\beta) \cdot c_\gamma = (a . c)_{\alpha+\gamma} + (b . c)_{\beta+\gamma} . \quad \ldots \ldots (10)$$

Дѣйствительно, умноженіе на векторъ c_γ можно разсматривать какъ два послѣдовательныя дѣйствія: умноженіе на векторъ c_0 и умноженіе на векторъ 1_γ. Возьмемъ три вектора, составляющіе собою стороны треугольника; каждый изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ остальныхъ. Дѣйствіе умноженія на c_0 соотвѣтствуетъ удлиненію сторонъ этого треугольника въ отношеніи $(c:1)$, а умноженіе на 1_γ вращаетъ весь треугольникъ на уголъ γ. При томъ и другомъ дѣйствіи распредѣлительность, очевидно, имѣетъ мѣсто.

Такъ какъ векторы измѣряются комплексными числами, то формулы (1—10) выражаютъ собою также и свойства алгебраическихъ дѣйствій надъ комплексными количествами.

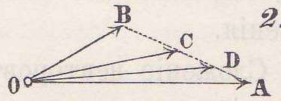
§ 2. Основаніе метода барицентрическаго исчисленія А. Ф. Мебіуса.

А. Ф. Мебіусъ въ своемъ Der barycentrische Calcul разсматриваетъ различныя точки пространства, какъ центры тяжести нѣсколькихъ матеріальныхъ точекъ съ соотвѣтственными массами, что даетъ ему особую систему аналитической геометріи.

При помощи теоріи векторовъ методъ барицентрическаго исчисленія можетъ быть развитъ весьма просто.

Разность двухъ векторовъ съ общимъ началомъ зависитъ исключительно отъ положенія концовъ. Сумму двухъ векторовъ также можно представить въ такомъ видѣ, чтобы она не зависѣла отъ положенія ихъ общаго начала, а исключительно отъ положенія ихъ концовъ.

Пусть C средина линіи AB (черт. 2), а точка D взята такъ, что



2.

$$BD:DA=a:b,$$

гдѣ a и b произвольныя числа. Тогда, разсматривая треугольникъ AOB, какъ половину параллелограмма, имѣемъ

$$OA+OB=2OC;\ \ldots\ldots\ldots\ (11)$$

а такъ какъ $b\cdot BD=a\cdot DA$, то, замѣнивъ векторы BD и DA разностями по форм. (5), будемъ имѣть

$$b\cdot(OD-OB)=a\cdot(OA-OD),$$

откуда

$$a\cdot OA+b\cdot OB=(a+b)\cdot OD\ \ldots\ldots\ldots\ (12)$$

Послѣдняя формула включаетъ въ себѣ предыдущую, какъ частный случай.

Въ формулахъ (11) и (12) за начало векторовъ O можетъ быть принята вполнѣ произвольная точка пространства. Кромѣ того возможенъ цѣлый рядъ другихъ формулъ, не измѣняющихъ своего значенія, если *общее* начало *всѣхъ* векторовъ, въ нихъ входящихъ, перенести въ произвольную точку пространства. На этомъ основаніи въ Алгебрѣ плоскости и пространства мы предложили *) разсматривать отдѣльно *системы векторовъ, съ произвольнымъ но общимъ началомъ.*

Опредѣленіе. *Системою мѣрныхъ точекъ, или системою векторовъ положенія, условимся называть систему векторовъ, имѣющихъ произвольное общее начало.*

При векторѣ положенія всегда или имѣется на лицо или подразумѣвается числовой коэффиціентъ.

*) *А. Богуславскій.* Алгебра плоскости и пространства или исчисленіе положенія. Москва. 1891. § 3.

Векторъ положенія мы будемъ обозначать большою буквою, соотвѣтствующей положенію его конца, а дѣйствительный коэффиціентъ, при немъ стоящій, малою буквою. Согласно съ этимъ формулы (11), (12) и (5) напишутся такъ:

$$A+B=2C; \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$aA+bB=(a+b).D; \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$B-A=AB. \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Послѣдняя формула позволяетъ намъ переходить отъ векторовъ положенія къ векторамъ съ опредѣленнымъ началомъ и концомъ.

Опредѣленіе. *Векторъ съ опредѣленнымъ началомъ и концомъ мы будемъ называть векторомъ направленія* въ отличіе отъ вектора положенія.

Сложеніе векторовъ положенія (ф. 14) подчиняется законамъ перемѣстительности и сочетательности, ибо, выбравъ опредѣленное начало, мы получимъ формулу, содержащую векторы направленія, а сложеніе векторовъ направленія подчиняется и тому и другому закону (ф. 2, 3).

Изъ формулы (14) слѣдуетъ правило вычитанія векторовъ положенія, а именно, конецъ вектора разности дѣлитъ внѣшнимъ образомъ отрѣзокъ между концами векторовъ уменьшаемаго и вычитаемаго въ отношеніи обратномъ отношенію ихъ коэффиціентовъ:

$$aA-bB=(a-b)\cdot E.$$

Если b стремится къ значенію a, то въ предѣлѣ мы получаемъ

$$aA-aB=0\cdot E,$$

но по формулѣ (15)

$$aA-aB=a\cdot BA.$$

Итакъ, если сумма коэффиціентовъ двухъ векторовъ положенія стремится къ нулю, то положеніе конца вектора, равнаго ихъ алгебраической суммѣ, удаляется въ безконечность, а коэффиціентъ суммы стремится къ нулю, но въ то же самое время та же алгебраическая сумма въ предѣлѣ равна вектору направленія, соединяющему конецъ вычитаемаго съ концомъ уменьшаемаго и взятому съ ихъ общимъ коэффиціентомъ.

Принявъ двѣ произвольныя точки прямой за основныя, мы можемъ для всякой третьей точки прямой найти надлежащія числа, удовлетворяющія форм. (14); числа эти и суть *барицентрическія координаты* точки прямой.

Равнымъ образомъ, принявъ три точки плоскости, или четыре точки пространства за основныя, мы можемъ получить барицентрическія координаты точекъ плоскости и пространства.

§ 3. Значеніе векторовъ положенія въ геометріи.

Для лучшаго уясненія формулы (14) приведемъ нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ.

1. Пусть K, L, M суть средины сторонъ треугольника ABC, а G центръ его тяжести. Примѣняя формулу (14) послѣдовательно, имѣемъ:

$$A+B+C=(A+B)+C=(B+C)+A=(C+A)+B=$$
$$=2K+C=2L+A=2M+B=3G.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ G и дѣлятся въ ней въ отношеніи $1:2$.*

2. Пусть K, L, M, N, P и Q суть средины сторонъ и діагоналей четыреугольника $ABCD$; тогда изъ формулъ

$$A+B+C+D=4E=$$
$$=(A+B)+(C+D)=(A+D)+(B+C)=(A+C)+(B+D)=$$
$$=2(K+L)=2(M+N)=2(P+Q)$$

слѣдуетъ, что *линіи, соединяющія средины противоположныхъ сторонъ четыреугольника, и линія, соединяющая средины его діагоналей, пересѣкаются всѣ три въ одной точкѣ и дѣлятся въ ней пополамъ.*

3. *Пусть E, F, G и H суть центры тяжести тѣхъ четырехъ треугольниковъ, изъ которыхъ каждый ограниченъ парою смежныхъ сторонъ даннаго четыреугольника $ABCD$ и одною изъ его діагоналей.*

Тогда, вычитая одну изъ другой формулы

$$A+B+C=3E \quad \text{и} \quad A+B+D=3F,$$

имѣемъ

$$3EF=CD,$$

т. е. линія EF параллельна CD и составляетъ отъ нея одну треть; слѣдовательно, *четыреугольникъ $EFGH$ подобенъ данному четыреугольнику $ABCD$.*

4. *Пусть точки D и E дѣлятъ боковыя стороны даннаго треугольника ABC въ одномъ и томъ же отношеніи*; тогда, вычитая равенства

$$aA+bB=(a+b)D \quad \text{и} \quad aA+bC=(a+b)E$$

имѣемъ

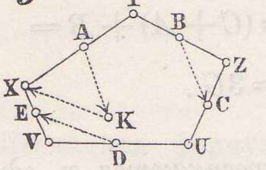
$$bBC=(a+b)DE,$$

т. е. *линія DE параллельна основанію треугольника и относится къ нему по длинѣ, какъ $b:(a+b)$.*

5. *Требуется построить пятиугольникъ, если дано положеніе срединъ всѣхъ его сторонъ.* Обозначимъ положеніе искомыхъ вершинъ пятиугольника черезъ X, Y, Z, U и V. Согласно даннымъ (черт. 3):

$$X+Y=2A;\quad Y+Z=2B;\quad Z+U=2C;\quad U+V=2D;\quad V+X=2E.$$

3



Умножимъ второе и четвертое уравненія на (-1) и сложимъ затѣмъ всѣ уравненія; тогда послѣ сокращенія на два имѣемъ

$$X=A+BC+DE,$$

т. е., приложивъ къ вектору съ концомъ въ точкѣ A векторы BC и DE, мы получаемъ непосредственно положеніе вершины X искомаго пятиугольника. Указанный способъ рѣшенія задачи остается въ силѣ для произвольнаго многоугольника съ *нечетнымъ* числомъ сторонъ.

6. *Пусть A, B, C, D, E и F суть средины послѣдовательныхъ сторонъ нѣкотораго шестиугольника*; тѣмъ же самымъ пріемомъ легко обнаружить, что

$$AB+CD+EF=0,$$

т. е. линіи AB, CD и EF по длинѣ и направленію равны тремъ сторонамъ нѣкотораго треугольника. Свойство это легко обобщается на средины сторонъ любого многоугольника съ *четнымъ* числомъ вершинъ. Отсюда ясно, почему не достаточно для построенія многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ знать положеніе срединъ его сторонъ; средины сторонъ такого многоугольника не могутъ быть взяты произвольно, ибо положеніе одной изъ нихъ опредѣляется остальными.

7. Для четыреугольника зависимость между срединами его сторонъ выражается векторнымъ равенствомъ:

$$AB+CD=0,$$

которое показываетъ, что *средины сторонъ четыреугольника служатъ вершинами параллелограмма.*

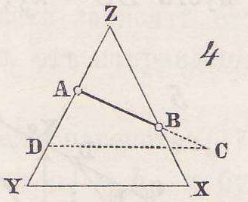
Преимущество разсмотрѣнныхъ только что выводовъ заключается въ томъ, что въ нихъ не входитъ никакихъ другихъ символовъ, кромѣ обозначеній положенія точекъ и простѣйшихъ операцій построенія.

§ 4. Примѣры рѣшенія задачъ методомъ эквиполленцъ Д. Беллавитиса.

Рѣшеніе векторныхъ уравненій составляетъ собою предложенный Д. Беллавитисомъ методъ, который онъ назвалъ теоріей эквиполленцъ, употребляя для краткости выраженіе „Equipollenze“ вмѣсто названія, предложеннаго имъ ранѣе „Equazioni geometriche“. Приведемъ два примѣра рѣшенія этимъ способомъ задачъ на построеніе.

1. *Построить треугольникъ, если даны длины двухъ его сторонъ a и c и положеніе двухъ точекъ A и B, дѣлящихъ стороны a и b въ данныхъ отношеніяхъ.*

Пусть (чер. 4) $XY = c$; $YZ = a$; $ZX = b$; длина послѣдней стороны не извѣстна. Если дано отношеніе, въ которомъ точка A дѣлитъ сторону a, то извѣстны и длины f и g отрѣзковъ YA и AZ. Поэтому, принявъ направленіе AB за начальное, мы, на основаніи даннаго условія



$$XB = m\,BZ,$$

можемъ написать слѣдующее векторное уравненіе:

$$XY + YA + AB = m(BA + AZ),$$

или

$$c_u + f_v + AB = m(BA + g_v),$$

гдѣ неизвѣстны только два угла u и v, составляемые сторонами XY и YZ искомаго треугольника съ линіей AB.

Отсюда имѣемъ:

$$c_u + (f - mg)\,1_v = (m+1)\,BA.$$

Обозначивъ длину $(f - mg)$ черезъ h, а $(m+1)\,BA$ черезъ CA, мы получимъ:

$$c_u + h_v = CA.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что для опредѣленія искомыхъ угловъ u и v достаточно построить на CA треугольникъ по даннымъ тремъ его сторонамъ.

2. *Построить треугольникъ ABX по данному его основанію AB, по углу β при основаніи и по линейному соотношенію между длинами двухъ его боковыхъ сторонъ.*

Обозначимъ черезъ x и y длины боковыхъ сторонъ искомаго треугольника и черезъ u уголъ стороны x съ основаніемъ AB. Пусть данное линейное соотношеніе выражается равенствомъ

$$y = mx + n.$$

Тогда мы можемъ написать два уравненія:

$$x_u - y_\beta = AB; \qquad y_\beta = (mx + n)\,1_\beta;$$

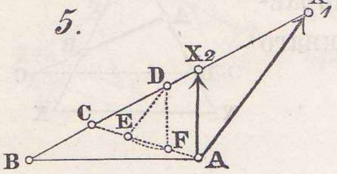
изъ нихъ, обозначивъ $AB + n_\beta$ черезъ AC, мы имѣемъ:

$$x_u - mx_\beta = AC, \text{ или } 1_u - m_\beta = \frac{1}{x}\,AC.$$

Въ послѣднемъ уравненіи неизвѣстны только длина одной изъ сторонъ треугольника и уголъ. Согласно этому имѣемъ слѣдующее построеніе задачи.

Примемъ (черт. 5) произвольную линію равную DE за единицу и и пусть $BC = n_\beta$; тогда линія AC извѣстна по длинѣ и направленію.

5.



Отложивъ CD равную m_β, строимъ треугольники CDE и CDF по двумъ сторонамъ и по углу, лежащему противъ одной изъ нихъ. Линіи DE и DF даютъ направленія стороны AX, лежащей въ искомомъ треугольникѣ противъ даннаго угла β. Задача имѣетъ два рѣшенія.

Въ заключеніе приведемъ доказательство теоремы Птоломея при помощи метода эквиполленцъ. Возьмемъ векторное тождество:

$$DC.(DB - DA) + DB.(DA - DC) + DA.(DC - DB) = 0.$$

Замѣнивъ въ немъ разности векторовъ однимъ векторомъ, имѣемъ:

$$DC.AB + DB.CA + DA.BC = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Это равенство обнаруживаетъ замѣчательное свойство сторонъ и діагоналей всякаго четыреугольника, а именно: *три вектора, выражающіеся произведеніями паръ противоположныхъ сторонъ и діагоналей четыреугольника, составляютъ собою три стороны нѣкотораго треугольника.*

Если въ частномъ случаѣ вершины этого треугольника совпадаютъ съ прямой линіей, то равенство (16) обращается въ числовое и при этомъ углы векторовъ, выраженныхъ произведеніями

$$DA.BC \quad \text{и} \quad DC.AB,$$

равны между собою. Дѣля каждое изъ этихъ произведеній на $DC.BC$, мы заключаемъ, что углы векторовъ частныхъ

$$DA:DC \quad \text{и} \quad AB:BC$$

также равны между собою. Послѣднее показываетъ, что равенство (16), какъ числовое, имѣетъ мѣсто тогда, когда вершины четыреугольника лежатъ на окружности круга (или же на прямой линіи).

§ 5. Два особые вида умноженія векторовъ.

Общее алгебраическое произведеніе двухъ векторовъ

$$a_\varphi . b_\psi = ab \cdot \mathrm{cs}(\varphi + \psi) + i\, ab \cdot \mathrm{sn}(\varphi + \psi)$$

распадается естественно на двѣ части, дѣйствительную и мнимую. Каждую изъ этихъ частей можно разсматривать какъ результатъ особой операціи надъ векторами. Такія двѣ операціи зависятъ отъ направленія вектора, принятаго за положительную единицу. Но если взять произведеніе

$$a_{-\varphi}\cdot b_{\psi}=ab\cdot\mathrm{cs}(\psi-\varphi)+i\,ab\cdot\mathrm{sn}(\psi-\varphi)\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;(17)$$

то абсолютныя значенія дѣйствительной и мнимой части зависятъ отъ разности угловъ ψ и φ и, слѣдовательно, не зависятъ отъ направленія вектора единицы.

Условимся полученіе множителя при i въ правой части равенства (17) разсматривать какъ особую операцію надъ векторами a_{φ} и b_{ψ} и будемъ ее называть *геометрическимъ умноженіемъ*, обозначая его такимъ образомъ:

$$ab\cdot\mathrm{sn}(\psi-\varphi)=a_{\varphi}{*}b_{\psi}\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(18)$$

Равнымъ образомъ полученіе перваго члена второй части равенства (17) мы будемъ также разсматривать какъ особую операцію надъ векторами a_{φ} и b_{ψ}, называя ее *числовымъ умноженіемъ* и обозначая ее такъ.

$$ab\cdot\mathrm{cs}(\psi-\varphi)=a_{\varphi\,0}\,b_{\psi}\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

Произведенія (18) и (19) зависятъ исключительно отъ длины векторовъ a_{φ} и b_{ψ} и величины угла между ними.

Оба разсматриваемыя дѣйствія обладаютъ свойствомъ *распредѣлительности*, что непосредственно слѣдуетъ изъ распредѣлительности совокупности ихъ въ произведеніи (17). Кромѣ того геометрическое умноженіе, какъ видно изъ формулы (18), обладаетъ слѣдующими свойствами:

$$a_{\varphi}{*}b_{\varphi}=0\,;\quad a_{\varphi}{*}b_{\varphi+\frac{\pi}{2}}=ab\,;\quad a_{\varphi}{*}b_{\psi}=-b_{\psi}{*}a_{\varphi}\cdot\;.\;.\;(20)$$

Числовое умноженіе обладаетъ свойствами (фор. 19):

$$a_{\varphi\,0}\,b_{\varphi}=ab\,;\quad a_{\varphi\,0}\,b_{\varphi+\frac{\pi}{2}}=0\,;\quad a_{\varphi\,0}\,b_{\psi}=b_{\psi\,0}\,a_{\varphi}\cdot\;.\;.\;.\;(21)$$

Такимъ образомъ, *числовое умноженіе подчиняется закону перемѣстительности, геометрическое же умноженіе ему не подчиняется.*

На основаніи формулъ (20) и (21), разложивъ множители на слагаемыя по двумъ опредѣленнымъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ, можно замѣнять какъ числовое, такъ и геометрическое произведенія произведеніемъ алгебраическимъ.

Геометрическое умноженіе Германъ Гюнтеръ Грассманъ въ своемъ Ausdehnungslehre зоветъ внѣшнимъ [1]) умноженіемъ, а числовое — внутреннимъ.

---

[1]) Ранѣе Г. Г. Грассмана понятіе о внѣшнемъ умноженіи установлено было его отцомъ и Saint-Venant'омъ.

§ 6. Значеніе геометрическаго умноженія въ геометріи.

Пусть векторъ a_φ движется своимъ началомъ вдоль вектора b_ψ, оставаясь параллельнымъ своему начальному положенію. Будемъ называть a_φ *образующимъ*, а b_ψ *направляющимъ* векторомъ и условимся считать площадь параллелограмма, описываемую образующимъ векторомъ, за *положительную* въ томъ случаѣ, если онъ движется *влѣво* относительно своего начальнаго положенія (для наблюдателя смотрящаго вдоль по его направленію).

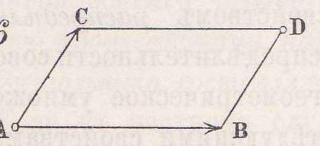
Легко видѣть, что площадь параллелограмма, заключенная между векторами a_φ и b_ψ, выражается (фор. 18) геометрическимъ произведеніемъ

$$a_\varphi * b_\psi \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Всѣ свойства геометрическаго умноженія (форм. 20) при этомъ имѣютъ мѣсто, а именно: площадь параллелограмма равна нулю, если уголъ между векторами равенъ нулю; она выражается произведеніемъ $a \cdot b$, если этотъ уголъ прямой, и наконецъ, *площадь параллелограмма мѣняетъ свой знакъ на обратный при замѣнѣ образующаго вектора направляющимъ и обратно.*

Дѣйствительно, (чер. 6) если $AB = a_\varphi$ и $AC = b_\psi$, то AB описываетъ площадь параллелограмма $ABDC$, перемѣщаясь влѣво относительно своего направленія, а AC описываетъ ту-же площадь, двигаясь вправо относительно своего направленія.

6



Ниже мы увидимъ, что различіе между значеніями направляющаго и образующаго векторовъ вполнѣ соотвѣтствуетъ различію между началомъ и концомъ вектора при установленіи его знака.

Геометрическое произведеніе трехъ векторовъ направленія, не лежащихъ въ одной плоскости,

$$a_\varphi * b_\psi * c_\zeta$$

выражаетъ собою объемъ параллелепипеда съ соотвѣтствующими тремя ребрами.

Можно обнаружить, что всѣ свойства геометрическаго умноженія имѣютъ мѣсто при вычисленіи объема параллелепипеда по тремъ его ребрамъ [1]), но мы не будемъ на этомъ останавливаться, а замѣтимъ только, что умноженіе трехъ векторовъ пространства подчиняется закону сочетательности

$$a_\varphi * b_\psi * c_\zeta = (a_\varphi * b_\psi) * c_\zeta = a_\varphi * (b_\psi * c_\zeta).$$

[1]) *А. Богуславскій.* Алгебра плоскости и пространства. Москва. 1891. § 29.

Объемъ параллелепипеда мы будемъ считать положительнымъ въ томъ случаѣ, когда онъ описанъ движеніемъ положительной площади, совпадающей съ одной изъ его граней, по направленію ея положительной нормали.

Посмотримъ, какъ на основаніи свойствъ геометрическаго умноженія оно можетъ быть выполнено.

Возьмемъ три взаимно перпендикулярныя основныя направленія, обозначенныя цифрами 1, 2 и 3; каждый изъ множителей a_φ и b_ψ будемъ представлять себѣ въ видѣ произведенія вектора единицы на отвлеченное число. Пусть оба множителя лежатъ въ плоскости 12 и пусть направленіе 1 то начальное, отъ котораго отсчитываются углы. Тогда

$$a_{\varphi\,*}b_\psi = ab\cdot 1_{\varphi\,*}1_\psi = ab\cdot(\mathrm{cs}\varphi + i\,\mathrm{sn}\varphi)_*(\mathrm{cs}\psi + i\,\mathrm{sn}\psi).$$

По уравненіямъ (20), опуская множитель i, имѣемъ:

$$a_{\varphi\,*}b_\psi = ab.(\mathrm{cs}\varphi_*\,\mathrm{sn}\psi + \mathrm{sn}\varphi_*\,\mathrm{cs}\psi).$$

Если мы желаемъ въ этой формулѣ замѣнить геометрическія произведенія алгебраическими, то намъ необходимо предварительно оба члена, стоящіе въ скобкахъ, привести къ такому порядку множителей, чтобы обѣ площади, ими выражаемыя, разсматривались, какъ образованныя движеніемъ векторовъ, совпадающихъ съ направленіемъ 1; поэтому согласно форм. (20):

$$a_{\varphi\,*}b_\psi = ab(\mathrm{cs}\varphi.\mathrm{sn}\psi - \mathrm{cs}\psi.\mathrm{sn}\varphi)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(24)$$

Разсмотримъ вычисленіе объема параллелепипеда съ ребрами a_φ, b_ψ и c_ζ. Разложимъ эти три вектора по направленіямъ 1, 2 и 3 и будемъ обозначать знакомъ $|\quad|^*$ геометрическое умноженіе суммъ векторовъ. Тогда, вынося абсолютныя длины векторовъ за скобки, имѣемъ:

$$a_{\varphi\,*}b_{\psi\,*}c_\zeta = abc.\begin{vmatrix} \mathrm{cs}(a1)+\mathrm{cs}(a2)+\mathrm{cs}(a3) \\ \mathrm{cs}(b1)+\mathrm{cs}(b2)+\mathrm{cs}(b3) \\ \mathrm{cs}(c1)+\mathrm{cs}(c2)+\mathrm{cs}(c3) \end{vmatrix}^*$$

При перемноженіи суммъ векторовъ въ этой формулѣ, согласно формулы (20) нельзя брать множителей изъ одной колонны; а для того, чтобы можно было замѣнить геометрическія произведенія алгебраическими, необходимо предварительно привести всѣ отдѣльныя произведенія къ одинаковому порядку множителей въ порядкѣ направленій (1, 2, 3), руководствуясь правиломъ знаковъ (форм. 20). Отсюда ясно, что объемъ разсматриваемаго параллелепипеда выразится формулой:

$$a_{\varphi} * b_{\psi} * c_{\zeta} = abc \begin{vmatrix} \mathrm{cs}(a1) & \mathrm{cs}(a2) & \mathrm{cs}(a3) \\ \mathrm{cs}(b1) & \mathrm{cs}(b2) & \mathrm{cs}(b3) \\ \mathrm{cs}(c1) & \mathrm{cs}(c2) & \mathrm{cs}(c3) \end{vmatrix}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

гдѣ при abc имѣемъ множителемъ детерминантъ, аналогичный множителю формулы (24) и названный *Штаудтомъ* синусомъ трегранняго угла.

§ 7. Геометрическія произведенія векторовъ положенія.

Такъ какъ $OA * OB$ выражаетъ собою удвоенную площадь треугольника OAB, то *геометрическое произведеніе двухъ векторовъ положенія*

$$A * B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26)$$

выражаетъ собою удвоенную площадь треугольника съ основаніемъ AB и вершиною въ произвольной точкѣ пространства.

Опредѣленіе. Геометрическое произведеніе двухъ векторовъ направленія $a_{\varphi} * b_{\psi}$ мы будемъ называть *площадью направленія*, или *векторомъ площадью*, или иначе *мѣрною площадью*.

Геометрическое произведеніе двухъ векторовъ положенія A и B мы будемъ называть *площадью положенія*, или *мѣрною частью прямой*.

Векторъ-площадь не мѣняетъ своего значенія при перемѣщеніи въ положеніе параллельное начальному.

Векторъ положенія (26) не мѣняетъ своего значенія при перемѣщеніи отрѣзка AB по той прямой, на которой онъ расположенъ.

Такъ какъ $OA * OB * OC$ выражаетъ собою (§ 6) шестикратный объемъ пирамиды $OABC$, то *геометрическое произведеніе трехъ векторовъ положенія*

$$A * B * C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

выражаетъ собою шестикратный объемъ пирамиды съ основаніемъ ABC и вершиною въ произвольной точкѣ пространства.

Опредѣленіе. Геометрическое произведеніе трехъ векторовъ направленія $a_{\varphi} * b_{\psi} * c_{\zeta}$ мы будемъ называть *мѣрнымъ объемомъ*, или же просто *объемомъ*.

Геометрическое произведеніе трехъ векторовъ положенія $A * B * C$ мы будемъ называть *объемомъ положенія*, или *мѣрною частью плоскости*.

Мѣрный объемъ не мѣняетъ своего значенія при произвольномъ перемѣщеніи въ пространствѣ, если сохраняется его абсолютное значеніе и знакъ.

Мѣрная часть плоскости $A * B * C$ не мѣняетъ своего значенія при перемѣщеніи площади ABC вдоль плоскости, на которой она лежитъ, при сохраненіи ея абсолютнаго значенія и знака.

Геометрическое произведеніе четырехъ векторовъ положенія

$$A_* B_* C_* D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

мы будемъ называть мѣрною частью пространства и разумѣть подъ нимъ шестикратный объемъ пирамиды $ABCD$.

Два геометрическихъ произведенія $A_* B$ и $C_* D$ могутъ быть равны только тогда, когда отрѣзки AB и CD лежатъ на одной прямой и имѣютъ одинаковую длину и знакъ, ибо иначе для начала въ произвольной точкѣ пространства величина и направленіе площадей, ими выраженныхъ, будутъ различны.

Два геометрическихъ произведенія $A_* B_* C$ и $D_* E_* F$ могутъ быть равны только тогда, когда площади ABC и DEF лежатъ на одной плоскости и имѣютъ одинаковое абсолютное значеніе и знакъ, ибо иначе для начала въ произвольной точкѣ пространства объемы, ими выражаемые, будутъ различны.

Два геометрическихъ произведенія $A_* B_* C_* D$ и $E_* F_* G_* H$ равны тогда, когда объемы, ими выражаемые, имѣютъ одинаковое абсолютное значеніе и знакъ.

§ 8. Тождественныя преобразованія суммъ геометрическихъ произведеній.

Сложеніе мѣрныхъ частей одной и той же прямой, мѣрныхъ частей одной и той же плоскости, а также сложеніе мѣрныхъ объемовъ и мѣрныхъ частей пространства, совпадаетъ съ алгебраическимъ сложеніемъ чиселъ, выражающихъ собою мѣру этихъ величинъ.

Равнымъ образомъ сложеніе векторовъ-площадей, параллельныхъ между собою, совпадаетъ съ сложеніемъ чиселъ, ихъ измѣряющихъ, такъ какъ параллельныя векторы-площади различаются между собою только абсолютнымъ значеніемъ и знакомъ площади.

Сумма произвольныхъ векторовъ-площадей можетъ быть замѣнена однимъ векторомъ-площадью. Пусть векторы-площади $a_* b$ и $c_* d$ имѣютъ различное направленіе; возьмемъ на линіи пересѣченія плоскостей (ab) и (cd) векторъ m произвольной длины и выберемъ векторы p и q такъ, чтобы $a_* b = m_* p$ и $c_* d = m_* q$. Тогда по закону распредѣлительности имѣемъ:

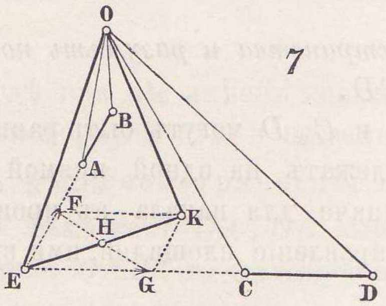
$$a_* b + c_* d = m_* p + m_* q = m_* (p + q) = m_* n \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Сумма нѣсколькихъ мѣрныхъ частей прямыхъ, лежащихъ на одной и той же плоскости, можетъ быть замѣнена одною мѣрною частью прямой. Если E есть точка пересѣченія прямыхъ AB и CD, то взявъ векторы EF и EG соотвѣтственно равные AB и CD, мы будемъ имѣть (§ 7):

$$A_* B + C_* D = E_* F + E_* G = E_* (F + G) = 2E_* H \quad . \quad . \quad (30)$$

*

Если въ этой формулѣ взять площади положенія съ вершинами въ опредѣленной точкѣ плоскости O (черт. 7), то мы получаемъ правило сложенія площадей треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину, а именно:



7

$$OAB + OCD = 2OEH = OEK \; . \; . \; . \quad (31)$$

Въ случаѣ, *когда слагаемыя мѣрныя части прямыхъ параллельны между собою, сумма ихъ равна по длинѣ ихъ алгебраической суммѣ, параллельна слагаемымъ и дѣлитъ разстояніе между ними въ отношеніи обратномъ ихъ длинъ.*

Пусть $AB \parallel CD$; тогда векторы AB и CD могутъ отличаться одинъ отъ другого только числовымъ дѣйствительнымъ множителемъ:

$$CD = mAB \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

На основаніи основнаго свойства геометрическаго умноженія ($A_* A = 0$) мы можемъ написать:

$$A_* B + C_* D = A_* (B - A) + C_* (D - C),$$

и согласно (32) имѣемъ:

$$A_* B + C_* D = A_* (B - A) + C_* m (B - A) = (A + mC)_* (B - A).$$

Замѣнивъ сумму $A + mC$ черезъ $(m+1)E$, получаемъ:

$$A_* B + C_* D = (m+1) E_* (B - A) = E_* [(B - A) + (D - C)],$$

или иначе

$$A_* B + C_* D = E_* (F - E) = E_* F, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

гдѣ $EF = AB + CD$, что мы и хотѣли обнаружить.

§ 9. Продолженіе. Векторъ-площадь, какъ разность площадей положенія.

Пусть двѣ мѣрныя части прямыхъ $A_* B$ и $C_* D$ равны по длинѣ, одинаково направлены и лежатъ на двухъ параллельныхъ прямыхъ. Если выполнить вычитаніе $C_* D$ изъ $A_* B$ по формулѣ (33), то точка E удалится въ безконечность, а длина мѣрной части прямой, черезъ нее проходящей, обратится въ нуль.

Но съ другой стороны, такъ какъ

$$B - A = D - C,$$

то мы имѣемъ:

$$A_* B - C_* D = A_*(B - A) - C_*(D - C) = (A - C)_*(B - A),$$

или

$$A_* B - C_* D = CA_* AB \ldots\ldots\ldots (34)$$

Итакъ, *векторъ-площадь можетъ быть выражена какъ разность двухъ равныхъ и параллельныхъ мѣрныхъ частей прямыхъ*, аналогично тому, какъ векторъ направленія выражается разностью двухъ мѣрныхъ точекъ.

На основаніи форм. (34), взявъ сумму мѣрныхъ частей прямыхъ, совпадающихъ по длинѣ и положенію съ двумя парами противоположныхъ сторонъ параллелограмма, мы имѣемъ:

$$A_* B + B_* C + C_* D + D_* A = 2ABCD, \ldots\ldots (35)$$

т. е. сумма мѣрныхъ частей прямыхъ, совпадающихъ по длинѣ и положенію съ периметромъ параллелограмма, выражаетъ собою удвоенную его площадь.

Теорему эту можно обобщить на любой многоугольникъ. Раскроемъ скобки въ произведеніи

$$AB_* AC = (B - A)_*(C - A) = B_* C + C_* A + A_* B = 2ABC. (36)$$

Разбивъ произвольный многоугольникъ діагоналями изъ его вершины на треугольники, мы получаемъ, сложивъ рядъ формулъ (36):

$$A_* B + B_* C + \ldots + L_* M + M_* A = 2AB \ldots LM \ldots (37)$$

При этомъ, чтобы быть въ согласіи съ опредѣленіемъ знака площади, выраженной параллелограммомъ (§ 6), слѣдуетъ считать площадь-векторъ положительною тогда, когда мѣрныя части прямыхъ, совпадающихъ съ ея периметромъ, огибаютъ площадь, имѣя ее влѣво относительно своего направленія.

Слѣдствіе I. Чтобы сложить двѣ площади, нѣкоторая часть контуровъ которыхъ конгруентна, достаточно приложить ихъ другъ къ другу такъ, чтобы эта часть контура, совпадая по положенію, имѣла противоположное направленіе. Въ алгебраической суммѣ получится площадь, ограниченная всѣмъ контуромъ, за исключеніемъ совпавшей части, которую слѣдуетъ считать взаимно уничтоженною.

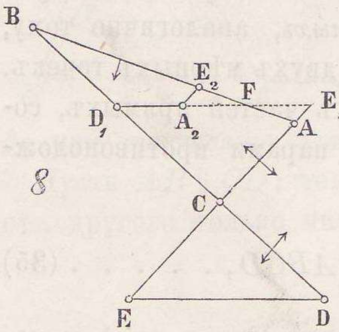
Такъ напримѣръ, площадь съ пересѣкающимся контуромъ (черт. 8) $ABCDEA$, согласно опредѣленію знака площади, частію положительна (ABC), а частію отрицательна (CDE). По правилу, только что высказанному, ее можно замѣнить равновеликою ей положительною площадью $BD_1A_2E_2$; для этого достаточно эту площадь перегнуть дважды, какъ это видно изъ чертежа, а именно:

$$ABCDEA = ABC + CDE = ABC + CD_1E_1 = BD_1FE_1AB,$$

или

$$ABCDEA = BD_1F + FA_2E_2 = BD_1A_2E_2.$$

Слѣдствіе II. Площадь, описанная на плоскости поступательнымъ движеніемъ нѣкоторой части прямой, не зависитъ отъ пути, по которому она переходитъ изъ начальнаго положенія a_1 въ конечное a_n.



8

Дѣйствительно, если послѣдовательныя положенія прямой будутъ $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, то площадь параллелограмма $(a_n - a_1)$ равна алгебраической суммѣ параллелограммовъ $(a_2 - a_1)$, $(a_3 - a_2)$ и т. д., вслѣдствіе тождества:

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1. \quad . \; . \; (38)$$

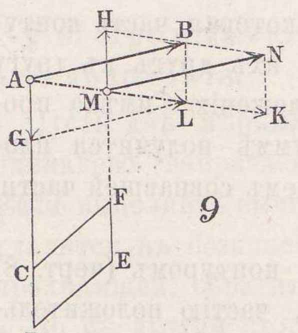
Иначе, если прямая, описавъ своимъ поступательнымъ движеніемъ на плоскости рядъ параллелограммовъ, возвращается къ своему начальному положенію, то алгебраическая сумма всѣхъ параллелограммовъ равна нулю.

Слѣдствіе III. Такъ какъ равенство (38) остается въ силѣ и для пространства, то отсюда слѣдуетъ, что векторная сумма параллелограммовъ, описанныхъ въ пространствѣ прямою a, равна нулю, если эта прямая, описавъ ихъ своимъ поступательнымъ движеніемъ, возвращается къ своему начальному положенію.

§ 10. Продолженіе. Сумма мѣрной части прямой съ векторомъ-площадью ей параллельной. Сумма мѣрныхъ частей прямыхъ въ пространствѣ.

Пусть даны на плоскости мѣрная часть прямой A_*B и площадь-векторъ, выраженная параллелограммомъ $CDEF$ (чер. 9). Тогда, согласно форм. (34), мы имѣемъ:

$$A_*B + CDEF = A_*B + C_*D + E_*F = \\ = A_*L + E_*F = M_*N, \quad . \; . \; . \; . \; (39)$$



9

причемъ изъ того же равенства имѣемъ:

$$C_*D + E_*F = M_*N + B_*A.$$

Если площадь-векторъ и мѣрная часть прямой параллельны между собою, то, сохраняя направленіе площади-вектора, ихъ можно совмѣстить съ одною плоскостью и затѣмъ выполнить сложеніе по форм. (39). Отсюда имѣемъ теорему:

Придать къ мѣрной части прямой нѣкоторую площадь-векторъ ей параллельную значитъ перенести мѣрную часть прямой параллельно самой себѣ на такое разстоянiе, чтобы она описала при этомъ перемѣщенiи векторъ-площадь, равновеликую данной.

Формула аналогичная формулѣ (39) для векторовъ и мѣрныхъ точекъ слѣдующая:

$$A+CD=A+AB=A+(B-A)=B\,,$$

гдѣ векторы AB и CD равны, т. е. придать къ мѣрной точкѣ векторъ направленiя значитъ перенести ее по направленiю вектора на его длину.

Теорема. *Сумма нѣсколькихъ мѣрныхъ частей прямыхъ въ пространствѣ можетъ быть всегда замѣнена одною мѣрною частью прямой и однимъ векторомъ-площадью, или же двумя мѣрными частями прямыхъ, не лежащихъ въ одной плоскости.*

Дана сумма мѣрныхъ частей прямыхъ:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\,; \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (40)$$

любую пару мѣрныхъ частей прямыхъ можно замѣнить одною мѣрною частью прямой и одною площадью-векторомъ, пользуясь слѣдующей формулой

$$A_*B+C_*D=A_*B+A_*E-A_*E+C_*D\,,$$

гдѣ векторы AE и CD равны между собою; далѣе, пользуясь формулами (30) и (34), имѣемъ:

$$A_*B+C_*D=2A_*F+CDEA\,. \quad .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (41)$$

Примѣнивъ эту формулу послѣдовательно къ слагаемымъ суммы (40), мы можемъ свести всю сумму къ одной мѣрной прямой a, сложенной съ суммою векторовъ-площадей, которую по форм. (29) можно замѣнить одною площадью-векторомъ m; и такъ

$$\sum a_k=a+m\,. \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (42)$$

Если же къ этой суммѣ примѣнить вновь формулу (41), воспользовавшись ею въ обратномъ порядкѣ, то мы получимъ:

$$\sum a_k=a+b\,. \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (43)$$

гдѣ a и b мѣрныя части прямыхъ, вообще не лежащихъ въ одной плоскости. Двѣ мѣрныя части прямыхъ, не лежащихъ въ плоскости, не могутъ быть замѣнены одною мѣрною частью прямой, ибо примѣненiе форм. (30) требуетъ вынесенiя за скобку общаго множителя, совпадающаго по положенiю съ точкою пересѣченiя слагаемыхъ.

§ 11. Продолженіе. Сложеніе мѣрныхъ частей плоскостей.

Даны двѣ произвольныя мѣрныя части плоскости A_*B_*C и D_*E_*F; возьмемъ на линіи пересѣченія этихъ плоскостей произвольную мѣрную часть прямой K_*L и выберемъ точки M и N такъ, чтобы (§ 7)

$$K_*L_*M = A_*B_*C \quad \text{и} \quad K_*L_*N = D_*E_*F.$$

Тогда имѣемъ формулу

$$A_*B_*C + D_*E_*F = K_*L_*M + K_*L_*N = K_*L_*(M+N),$$

и обозначая $M+N$ черезъ $2P$, получаемъ

$$A_*B_*C + D_*E_*F = 2K_*L_*P. \quad \ldots \ldots (44)$$

Если слагаемыя мѣрныя части плоскостей параллельны между собою, то можно выполнить ихъ сложеніе, пользуясь формулою:

$$A_*B_*C + D_*E_*F = A_*(B-A)_*(C-A) + D_*(E-D)_*(F-D);$$

но такъ какъ двѣ параллельныя площади-векторы AB_*AC и DE_*DF могутъ различаться между собою только числовымъ коэффиціентомъ, то положивъ

$$DE_*EF = mAB_*AC \quad \text{и} \quad A + mD = (m+1)K,$$

имѣемъ:

$$A_*B_*C + D_*E_*F = (m+1)K_*(B-A)_*(C-A) \quad . \ . \ (45)$$

т. е. сумма двухъ мѣрныхъ частей параллельныхъ плоскостей равна мѣрной части плоскости, параллельной слагаемымъ, и проходитъ черезъ точку K, дѣлящую разстояніе между слагаемыми въ отношеніи обратномъ ихъ абсолютному значенію.

§ 12. Мѣрный объемъ, какъ разность мѣрныхъ частей плоскостей.

При $m = -1$ формула (45) даетъ намъ площадь равную нулю и удаленную въ безконечность. Но подвергнувъ ее преобразованію, аналогичному съ пріемомъ § 9, мы имѣемъ:

$$A_*B_*C - D_*E_*F = A_*(B-A)_*(C-A) - D_*(B-A)_*(C-A),$$

такъ такъ по условію $AB_*AC = DE_*DF$. Отсюда:

$$A_*B_*C - D_*E_*F = (A-D)_*(B-A)_*(C-A) = DA_*AB_*AC. \ (46)$$

Итакъ, *мѣрный объемъ выражается разностью двухъ мѣрныхъ частей плоскостей, совпадающихъ съ двумя противоположными гранями параллелепипеда.*

Если въ формулѣ (46) раскрыть скобки, то мы получимъ

$$DA_*AB_*AC = 6DABC =$$
$$= A_*B_*C + D_*B_*A + D_*A_*C + D_*C_*B \ldots \quad (47)$$

Итакъ: шестикратный мѣрный объемъ тетраэдра выражается суммою мѣрныхъ частей плоскостей, совпадающихъ съ гранями тетраэдра и взятыхъ въ такомъ порядкѣ, при которомъ сумма площадей-векторовъ, ими выраженныхъ, равна нулю.

Изъ формулы (47) можно вывести всѣ заключенія аналогичныя слѣдствіямъ § 9, какъ-то:

Объемъ, описанный площадью параллелограмма при ея поступательномъ движеніи въ пространствѣ, зависитъ только отъ ея начальнаго и конечнаго положенія. Приложить къ мѣрной части плоскости мѣрный объемъ значитъ перенести ее параллельно самой себѣ въ такое положеніе, чтобы объемъ ею описанный былъ равенъ прикладываемому мѣрному объему.

§ 13. Порядокъ геометрическихъ произведеній. Свойства геометрическихъ произведеній наивысшаго порядка.

Опредѣленія. *Число множителей, выраженныхъ векторами направленія или векторами положенія, называется порядкомъ геометрическаго произведенія.*

Ближайшимъ основаніемъ системы пространственныхъ величинъ мы будемъ называть прямую, плоскость или пространство, смотря по тому, гдѣ расположены всѣ пространственныя величины.

Величины положенія, которыя суть геометрическія произведенія векторовъ положенія, бываютъ четырехъ порядковъ, а именно:

1 пор.: A—векторъ положенія, или мѣрная точка.

2 пор.: A_*B—площадь положенія, или мѣрная часть прямой.

3 пор.: A_*B_*C—объемъ положенія, или мѣрная часть плоскости.

4 пор.: $A_*B_*C_*D$—мѣрная часть пространства.

Величины направленія, которыя суть геометрическія произведенія векторовъ направленія, могутъ быть представлены въ видѣ суммъ или разностей величинъ положенія. Они бываютъ трехъ порядковъ:

1 пор.: $AB = B - A$—векторъ направленія.

2 пор.: $AB_*AC = 2ABC = A_*B + B_*C + C_*A$—векторъ-площадь.

3 пор.: $AB_*AC_*AD = 6ABCD = C_*B_*A + D_*A_*B + D_*B_*C + D_*C_*A$—мѣрный объемъ.

Мѣрные объемы въ пространствѣ трехъ измѣреній не могутъ различаться направленіемъ, но для пространства четырехъ измѣреній послѣдняя формула должна быть названа векторомъ-объемомъ.

Опредѣленіе. *Независимыми пространственными величинами называется система величинъ, между которыми не существуетъ линейнаго соотношенія.*

Наибольшія числа независимыхъ векторовъ направленія для прямой, плоскости и пространства суть соотвѣтственно одинъ, два и три; наибольшія числа независимыхъ векторовъ положенія для тѣхъ же основаній суть два, три и четыре.

Наибольшія числа независимыхъ мѣрныхъ частей прямыхъ, мѣрныхъ частей плоскостей и векторовъ-плоскостей для плоскости суть соотвѣтственно три, одна и одна; наибольшія числа независимыхъ тѣхъ же величинъ для пространства суть шесть, четыре и три.

Въ пространствѣ можетъ быть одинъ независимый мѣрный объемъ и одна независимая мѣрная часть пространства.

Опредѣленіе. *Геометрическое произведеніе, порядокъ котораго равенъ наибольшему числу независимыхъ векторовъ для даннаго основанія, называется высшимъ произведеніемъ.*

Величины высшаго порядка соотвѣтственно слѣдующія: для прямой— векторъ направленія и мѣрная часть прямой, для плоскости—векторъ-площадь и мѣрная часть плоскости, для пространства—мѣрный объемъ и мѣрная часть пространства.

Сложеніе величинъ высшаго порядка совпадаетъ съ алгебраическимъ сложеніемъ чесель, ихъ измѣряющихъ; на этомъ основаніи *геометрическія величины высшаго порядка можно разсматривать какъ представители отвлеченныхъ чиселъ, ихъ измѣряющихъ.*

§ 14. Плоскостное и пространственное геометрическія произведенія.

Геометрическое произведеніе на плоскости, содержащее въ себѣ число векторовъ, превышающее наибольшее число независимыхъ векторовъ, мы условимся называть *плоскостнымъ произведеніемъ*; подобное же произведеніе для пространства—*пространственнымъ произведеніемъ*.

Пусть E есть точка пересѣченія двухъ прямыхъ, на которыхъ расположены геометрическія произведенія $A_* B$ и $C_* D$; тогда на основаніи свойствъ геометрическихъ произведеній, если $EF = AB$, то (§ 7)

$$A_* B = A_*(B - A) = E_*(F - E) = E_*(B - A),$$

а потому

$$(A_* B)_*(C_* D) = E_*(B - A)_* E_*(D - C),$$

или

$$(A_* B)_*(C_* D) = E_*(B_* E_* D + D_* E_* A + A_* E_* C + C_* E_* B).$$

Такъ какъ сумма, стоящая въ скобкахъ, высшаго порядка, то ее можно разсматривать какъ представительницу отвлеченнаго числа, пропорціональнаго площади $ACBD$. Поэтому имѣемъ формулу, опредѣляющую собою *плоскостное произведеніе:*

$$(A_* B)_* (C_* D) = (ACBD) . E . . . . (48)$$

Такимъ образомъ, какъ геометрическое произведеніе двухъ мѣрныхъ точекъ выражаетъ собою положеніе прямой ихъ соединяющей, такъ геометрическое произведеніе двухъ мѣрныхъ частей прямыхъ можетъ служить для обозначенія положенія точки ихъ пересѣченія, что позволяетъ преобразовывать теоремы, выраженныя геометрическими произведеніями, на основаніи принципа взаимности.

Взявъ за начало векторовъ положенія въ формулѣ (48) точку O, лежащую внѣ плоскости $ACBD$, и обозначивъ векторы OA, OB.. соотвѣтственно черезъ a, b..., мы имѣемъ формулу, опредѣляющую собою *пространственное произведеніе* двухъ векторовъ-площадей

$$(a_* b)_* (c_* d) = (acbd) \cdot e , ... (49)$$

гдѣ e векторъ, совпадающій съ линіей пересѣченія плоскостей $(a_* b)$ и $(c_* d)$, а коэффиціентъ $(acbd)$ число, пропорціональное объему четыреугольной пирамиды съ боковыми ребрами a, b, c, d.

Пространственное произведеніе двухъ мѣрныхъ частей плоскостей и пространственное произведеніе мѣрной части плоскости на мѣрную часть прямой всегда могутъ быть приведены къ формуламъ:

$$(A_* B_* C)_* (A_* B_* D) = (ABCD) \cdot A_* B . . . . . (50)$$

$$(A_* B_* C)_* (A_* D) = (ABCD) \cdot A , ... (51)$$

гдѣ $(ABCD)$ означаетъ число пропорціональное объему пирамиды.

Если перемножаемыя величины не имѣютъ общихъ множителей, то ихъ слѣдуетъ замѣнить равновеликими величинами такими, къ которымъ непосредственно можно было бы примѣнить формулы (50) и (51).

Геометрическое умноженіе имѣетъ важнѣйшія примѣненія въ вопросахъ *геометріи положенія*, тогда какъ *числовое умноженіе* примѣняется преимущественно въ вопросахъ *геометріи мѣры*. Въ слѣдующей главѣ мы займемся приложеніями того и другого умноженій.

Глава II.

Примѣненія къ геометріи аналитической и высшей, къ теоріи детерминантовъ и къ статикѣ.

§ 15. Координаты направленія и координаты положенія. Декартовы координаты. Координаты однородныя.

Если взять на плоскости основной треугольникъ $A_1 A_2 A_3$, то положеніе всякой точки плоскости можетъ быть опредѣлено, какъ конецъ нѣкотораго вектора положенія, равнаго суммѣ трехъ векторовъ положенія, имѣющихъ концы въ трехъ основныхъ точкахъ (§ 2).

Числовые коэффиціенты при трехъ основныхъ векторахъ положенія и будутъ *однородными координатами положенія точки.*

Если стороны основного треугольника a_1, a_2, a_3 разсматривать какъ мѣрныя части прямыхъ, то любую мѣрную часть прямой m, лежащую въ той же плоскости, можно выразить какъ сумму трехъ основныхъ частей прямыхъ, взятыхъ съ надлежащими коэффиціентами. Въ самомъ дѣлѣ, пусть M точка пересѣченія прямой m съ прямою a_3; тогда можно взять a_1 и a_2 съ такими коэффиціентами (форм. 14 и 13), чтобы въ суммѣ получить прямую, проходящую черезъ точку M; а приложивъ къ послѣдней прямой мѣрную часть прямой a_3 съ соотвѣтственнымъ коэффиціентомъ, мы можемъ получить мѣрную часть прямой m какъ алгебраическую сумму основныхъ прямыхъ.

Числовые коэффиціенты при a_1, a_2 и a_3 будутъ *координатами положенія мѣрной части прямой* m.

Если стороны a_1 и a_2 основного треугольника принять за векторы направленія, то всякій третій векторъ той же плоскости можетъ быть представленъ въ видѣ суммы векторовъ a_1 и a_2, взятыхъ съ опредѣленными коэффиціентами, которые и будутъ *координатами направленія разсматриваемаго вектора.*

Если принять $a_1 = a_2 = 1$, то числа, только что полученныя, будутъ декартовы координаты точки, совпадающей съ концомъ вектора.

Равнымъ образомъ, если взять въ пространствѣ основной тетраэдръ $A_1A_2A_3A_4$, то положеніе всякой точки пространства можетъ быть опредѣлено какъ положеніе мѣрной точки, выраженной суммою основныхъ мѣрныхъ точекъ, совпадающихъ съ вершинами тетраедра. Всякая мѣрная часть плоскости, произвольно взятая въ пространствѣ, точно также можетъ быть представлена какъ сумма мѣрныхъ частей плоскостей, выраженныхъ гранями основного тетраэдра.

Въ обоихъ случаяхъ числовые коэффиціенты при основныхъ слагаемыхъ будутъ *однородными координатами положенія точки, или плоскости.*

Всякая мѣрная часть прямой въ пространствѣ можетъ быть выражена суммою шести мѣрныхъ частей прямыхъ, совпадающихъ съ ребрами основного тетраэдра и взятыхъ съ опредѣленными числовыми коэффиціентами.

Пусть нѣкоторая мѣрная часть прямой m встрѣчаетъ основаніе тетраэдра $A_2A_3A_4$ въ точкѣ M и пусть A_1 вершина основного тетраэдра; назовемъ черезъ MN проекцію прямой m изъ точки A_1 на плоскость основанія.

Взявъ три боковыхъ ребра съ надлежащими коэффиціентами, мы можемъ получить въ суммѣ мѣрную часть прямой, совпадающую по положенію съ A_1M, а взявъ подобную же сумму трехъ реберъ основанія, мы можемъ получить мѣрную часть прямой, совпадающую по положенію съ MN; наконецъ, взявъ полученныя только что двѣ прямыя съ соотвѣтственными коэффиціентами, мы можемъ представить заданную намъ мѣрную часть прямой m, какъ ихъ алгебраическую сумму.

Этимъ способомъ мы и можемъ всегда найти *шесть координатъ положенія мѣрной части прямой въ пространствѣ*, какъ коэффиціенты при основныхъ мѣрныхъ частяхъ прямыхъ.

Такъ какъ число независимыхъ векторовъ-линій и векторовъ-площадей въ пространствѣ равно тремъ, то всякій векторъ-линія, или же векторъ-площадь, можетъ выражаться суммою нѣкоторыхъ трехъ основныхъ векторовъ, совпадающихъ или съ ребрами, или же съ плоскостями трегранняго угла. Числовые коэффиціенты при основныхъ векторахъ и будутъ *координатами направленія вектора-линіи, или вектора площади.*

Если три основныхъ вектора взять равными единицѣ длины, то три координаты вектора-линіи будутъ декартовыми координатами точки, совпадающей съ концомъ вектора.

Отъ координатъ положенія мѣрной точки къ декартовымъ координатамъ можно перейти слѣдующимъ образомъ. Удалимъ мѣрныя точки A_2, A_3 и A_4 по направленію реберъ основного тетраэдра въ безконечность; тогда вмѣсто векторовъ положенія (§ 2) мы будемъ имѣть три вектора направленія, приложенные къ мѣрной точкѣ A_1; они и будутъ тремя осями декартовой системы съ началомъ A_1.

§ 16. Преобразованіе координатъ положенія и направленія.

Если даны координаты нѣсколькихъ пространственныхъ элементовъ (точекъ, прямыхъ или плоскостей), то координаты любаго пространственнаго элемента, ими опредѣляемаго, могутъ быть найдены при помощи геометрическаго умноженія.

Обратимся къ частному примѣру и для простоты вычисленія возьмемъ точки, лежащія на ребрахъ основного тетраэдра, а именно:

$$2A=A_1+A_2;\quad 3B=2A_2+A_3;\quad 5C=3A_3+2A_1;\quad 7D=4A_4+3A_1. \qquad (52)$$

Перемноживъ эти уравненія по два, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} 6A_*B &= 2A_{1*}A_2+A_{1*}A_3+A_{2*}A_3 \\ 15C_*B &= 4A_{1*}A_2+2A_{1*}A_3-6A_{2*}A_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (53)$$

т. е. координаты положенія мѣрныхъ частей прямыхъ AB и CB относительно основныхъ мѣрныхъ частей прямыхъ: A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 будутъ соотвѣтственно:

$$2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0;\quad 4,\ 2,\ 0,-6,\ 0,\ 0.$$

Перемноживъ уравненія (52) по три, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}30A_*B_*C &= 6A_{1*}A_{2*}A_3 + 2A_{2*}A_{3*}A_1 = 8A_{1*}A_{2*}A_3\\ 42A_*B_*D &= 8A_{1*}A_{2*}A_4 + 4A_{1*}A_{3*}A_4 + 4A_{2*}A_{3*}A_4 + 3A_{1*}A_{2*}A_3\end{aligned}\right\}(54)$$

т. е. координаты положенія мѣрныхъ частей плоскостей ABC и ABD относительно основныхъ мѣрныхъ частей плоскостей: $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$, $A_2A_3A_4$ будутъ соотвѣтственно:

$$8\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 0\,;\quad 3\,,\ 4\,,\ -8\,,\ 4\,.$$

Перемноживъ между собою всѣ четыре уравненія (52), получаемъ:

$$210A_*B_*C_*D = 32A_{1*}A_{2*}A_{3*}A_4\,.\ .\ .\ .\ .\ (55)$$

т. е. отношеніе

$$ABCD : A_1A_2A_3A_4 = 16 : 105 :$$

Пользуясь плоскостнымъ и пространственнымъ произведеніями (§ 14), можно совершить обратный переходъ отъ системъ уравненій (54) къ уравненіямъ (53) и (52).

Перемноживъ геометрически уравненія (54), мы имѣемъ:

$$1260(ABCD)A_*B = 32\,(A_1A_2A_3A_4)(2A_{1*}A_2 + A_{1*}A_3 + A_{2*}A_3);$$

выраженіе это, за выключеніемъ множителя (55), тождественно съ первымъ изъ уравненій (53).

Перемноживъ геометрически уравненія (53), мы получаемъ:

$$90(ABC)B = 8(A_1A_2A_3)(2A_2 + A_3);$$

выраженіе это, за выключеніемъ множителя (54), тождественно со вторымъ изъ уравненій (52).

Тотъ же самый результатъ мы можемъ получить, умноживъ второе изъ уравненій (53) на второе уравненіе (54), а именно:

$$630(ABCD)B = 32(A_1A_2A_3A_4)(2A_2 + A_3);$$

при этомъ общимъ множителемъ вошло выраженіе (55).

Наконецъ, изъ предыдущихъ формулъ не трудно найти и координаты направленія любого вектора, опредѣляемаго положеніемъ данныхъ точекъ (52). Найдемъ координаты вектора направленія CB и координаты площади-вектора ABD.

Для этого замѣнимъ въ формулахъ (53) и (54) векторы A_2A_3 и $A_2A_3A_4$ на основаніи векторныхъ тождествъ:

$$A_2A_3 = A_2A_1 + A_1A_3\,,$$

$$A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 + A_1A_3A_4 + A_1A_4A_2\,.$$

Тогда мы получимъ слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} 15CB &= 10A_1A_2 - 4A_1A_3\,, \\ 42ABD &= 7A_1A_2A_3 + 8A_1A_3A_4 - 4A_1A_4A_2\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (56)$$

т. е. координаты направленія вектора CB при основныхъ векторахъ A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 суть: $10\,, -4\,, 0$, а координаты вектора-площади ABD при основныхъ векторахъ $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$ суть: $7\,, 8\,, -4$.

§ 17. Обозначеніе построеній перваго порядка.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что помощію геометрическаго умноженія можно опредѣлять положеніе прямыхъ и плоскостей, если дано положеніе точекъ, черезъ которыя они проходятъ; и обратно, положеніе точки пересѣченія и линіи пересѣченія можетъ быть найдено помощію того же дѣйствія. Отсюда вытекаетъ слѣдующее положеніе.

Всякое построеніе перваго порядка выражается при помощи повторенія нѣсколькихъ геометрическихъ умноженій.

Разсмотримъ слѣдующее линейное построеніе. Дано положеніе двухъ точекъ:

$$mM = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3\,,$$

$$nN = b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3\,;$$

требуется построить точку P, опредѣляемую равенствомъ

$$pP = a_1b_1A_1 + a_2b_2A_2 + a_3b_3A_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

Докажемъ, что искомая точка P лежитъ на прямой, опредѣляемой слѣдующимъ линейнымъ построеніемъ:

$$[(A_1 * M) * (A_3 * G) * A_2] * [(A_1 * N) * (A_2 * G) * A_3] * A_1\,, \; . \; . \; (58)$$

гдѣ G есть центръ тяжести основного треугольника, т. е.

$$3G = A_1 + A_2 + A_3\,.$$

Составивъ произведенія $A_{1*}M$ и $A_{3*}G$, имѣемъ:

$$mA_{1*}M = a_2A_{1*}A_2 + a_3A_{1*}A_3,$$

$$3A_{3*}G = A_{3*}A_1 + A_{3*}A_2.$$

Поэтому, обозначивъ черезъ q удвоенную площадь основного треугольника, получаемъ:

$$3m(A_{1*}M)_*(A_{3*}G) = q(a_2A_1 + a_2A_2 + a_3A_3).$$

Умноживъ обѣ части этой формулы на A_2, мы имѣемъ, обозначивъ $3m:q$ черезъ r:

$$r(A_{1*}M)_*(A_{3*}G)_*A_2 = a_2A_{1*}A_2 + a_3A_{3*}A_2.$$

Докончивъ тѣмъ же путемъ вычисленіе формулы (58), мы получаемъ, отбрасывая общій числовой множитель:

$$a_2b_2A_{2*}A_1 + a_3b_3A_{3*}A_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Умноживъ равенство (57) на A_1, мы получаемъ тотъ же результатъ, а потому прямая PA_1 совпадаетъ по положенію съ прямою (58), что мы и желали обнаружить.

Изъ приведеннаго примѣра ясно значеніе формулъ, выражающихъ собою геометрическое построеніе перваго порядка.

§ 18. **Формулы теоремъ высшей геометріи.**

Изъ предыдущаго параграфа можно заключить a priori о важномъ значеніи геометрическаго умноженія для геометріи положенія, въ которой первое мѣсто принадлежитъ методу проектированія.

Обратимся къ основнымъ теоремамъ высшей геометріи. Возьмемъ два ряда мѣрныхъ точекъ:

$$A + xB; \qquad A' + mxB'.$$

При одинаковомъ значеніи x формулы эти выражаютъ собою пару точекъ двухъ рядовъ, находящихся въ однозначномъ соотвѣтствіи. Если перемножить обѣ формулы геометрически другъ на друга, то получимъ формулу мѣрной части прямой:

$$A_*A' + xB_*A' + mxA_*B' + mx^2B_*B' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Если въ этомъ выраженіи давать x всѣ значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то мы будемъ имѣть систему прямыхъ, опредѣленныхъ по длинѣ и положенію.

Легко видѣть, что черезъ каждую точку плоскости проходитъ не болѣе двухъ прямыхъ системы (59), а потому она представляетъ собою *пучекъ прямыхъ второго класса.*

Умножимъ выраженіе (59) геометрически на мѣрную точку M; если послѣдняя совпадаетъ съ одной изъ прямыхъ системы (59), то полученное геометрическое произведеніе обратится въ нуль (форм. 27) и мы будемъ имѣть:

$$A_* A'_* M + x B_* A'_* M + mx A_* B'_* M + mx^2 B_* B'_* M = 0.$$

Послѣднее уравненіе числовое (§ 13) и изъ него можно найти вообще два значенія числа x. Подставивъ ихъ въ формулу (59), мы найдемъ двѣ линіи нашей системы, проходящія черезъ точку M.

Въ частномъ случаѣ, когда $B_* B' = 0$, т. е. когда ряды находятся въ такомъ положеніи, что пара ихъ соотвѣтственныхъ элементовъ совпадаетъ съ точкою ихъ пересѣченія, мы вмѣсто (59) получаемъ формулу

$$A_* A' + x(B_* A' + mA_* B') \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (60)$$

Формула эта выражаетъ собою систему прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ $A_* A'$ и $B_* A' + mA_* B'$. Отсюда имѣемъ извѣстную теорему о *рядахъ перспективныхъ.*

Теоремы взаимныя будутъ выражаться формулами вполнѣ аналогичными предыдущимъ.

§ 19. Условія совпаденія точки съ прямою и съ плоскостью.

Условія, чтобы три точки совпадали съ прямой, или чтобы четыре точки совпадали съ плоскостью, весьма просто выражаются (форм. 27 и 28) *формулами:*

$$A_* B_* X = 0; \qquad A_* B_* C_* X = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (61)$$

Формулы эти имѣютъ много примѣненій. Подставимъ въ нихъ вмѣсто A, B и т. д. ихъ выраженія черезъ основныя мѣрныя точки; тогда, сокративъ на общій множитель, имѣемъ:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ x_1 & x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (62)$$

Формулы эти представляютъ собою уравненія прямой и плоскости въ однородныхъ координатахъ.

Если обозначить черезъ x_1, y_1, x_2, y_2, x, y декартовы координаты точекъ A, B, X, то положенiе точки A, при началѣ координатъ въ точкѣ O, выразится формулой:

$$A = O + x_1 + y_1,$$

гдѣ O мѣрная точка, а x_1 и y_1 векторы.

Возьмемъ за начало вектора положенiя O точку, лежащую на перпендикулярѣ къ плоскости xy на разстоянiи единицы отъ точки O; тогда, перейдя отъ геометрическихъ произведенiй къ алгебраическимъ, получимъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Детерминантъ этотъ представляетъ собою *въ декартовыхъ координатахъ уравненiе прямой, проходящей черезъ двѣ точки* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2).

Кромѣ того уравненiя (61) могутъ выражать собою такiя измѣненiя фигуръ, при которыхъ три точки фигуры лежатъ на одной прямой, или четыре точки на одной плоскости.

Возьмемъ двѣ пары прямыхъ: PN, PQ и XM, XR и замѣнимъ въ выраженiи

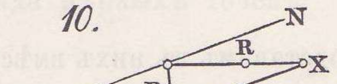
$$A_* B_* X = 0,$$

первый и третiй множитель слѣдующими плоскостными произведенiями

$$[(X_* M)_* (P_* Q)]_* B_* [(P_* N)_* (R_* X)] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Уравненiе это выражаетъ собою условiе, что точки пересѣченiя паръ прямыхъ XM, PQ, и PN, RX (черт. 10) лежатъ на одной прямой съ точкою B.

10.



Примемъ за начало векторовъ положенiя въ форм. (64) точку O, совпадающую съ началомъ декартовыхъ прямоугольныхъ координатъ, и замѣнимъ векторы X, M и т. д. суммами:

$$X = x + y; \qquad M = x_1 + y_1 \qquad \text{и т. д.}$$

гдѣ x, y, x_1, y_1 декартовы координаты точекъ. Если отъ геометрическихъ произведенiй перейти къ алгебраическимъ, то координаты перемѣнной точки X войдутъ вообще во второй степени, а потому уравненiе (64) выражаетъ собою кривую второго порядка.

Другими словами, (черт. 10) соотношеніе (64) выражаетъ собою извѣстную теорему *Маклорена:*

Если стороны треугольника проходятъ соотвѣтственно черезъ три точки M, B и R и если двѣ его вершины движутся при этомъ вдоль прямыхъ PN и PQ, то третья вершина треугольника описываетъ кривую второго порядка.

Замѣнимъ въ формулѣ (64) множитель B также плоскостнымъ произведеніемъ двухъ произвольныхъ прямыхъ, взявъ ихъ такъ, чтобы ихъ концы лежали на четырехъ прямыхъ, входящихъ въ остальные два множителя. Тогда мы можемъ написать слѣдующую формулу:

$$[(X_* M)_* (P_* Q)]_* [(M_* N)_* (Q_* R)]_* [(N_* P)_* (R_* X)] = 0 . \quad (65)$$

Формула эта вновь представляетъ собою уравненіе кривой второго порядка, а такъ какъ она вполнѣ симметрична относительно точекъ M, N, P, Q, R, X, въ нее входящихъ, то она выражаетъ собою условіе, чтобы шесть точекъ лежали на кривой второго порядка и въ то же самое время представляетъ собою выраженіе извѣстной *теоремы Паскаля* о шестиугольникѣ, вписанномъ въ коническое сѣченіе.

Подвергнувъ выраженіе $A_* B_* C_* X = 0$ аналогичнымъ преобразованіямъ, можно получить для пространства теоремы, аналогичныя теоремѣ Маклорена *), но мы не будемъ на этомъ останавливаться.

§ 20. Примѣненіе числового умноженія въ геометріи.

Выше (§ 14) мы сказали, что числовое умноженіе имѣетъ примѣненіе въ вопросахъ геометріи мѣры. Приведемъ простѣйшіе примѣры.

Возьмемъ векторныя равенства:

$$A + B = 2M , \qquad B - A = AB .$$

Умноживъ каждое само на себя, мы получаемъ на основаніи основныхъ свойствъ числового произведенія (форм. 19, 21):

$$\left. \begin{aligned} A^2 + B^2 + 2A_0 B = 4M^2 , \\ A^2 + B^2 - 2A_0 B = AB^2 , \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (66)$$

откуда

$$2A^2 + 2B^2 - AB^2 = 4M^2 .$$

Если въ послѣднихъ двухъ равенствахъ принять за общее начало векторовъ положенія опредѣленную точку C, то мы получаемъ выраженія *квадрата стороны треугольника и квадрата его медіаны.*

---

*) Алгебра плоскости и пространства § 62.

Пусть точка M есть центръ тяжести системы матеріальныхъ точекъ A, B, $C\ldots$ съ массами a, b, $c\ldots$ и пусть $m=a+b+c+\ldots$; тогда

$$mM=\sum aA.$$

Произведя числовое умноженіе, получаемъ:

$$m^2M^2=\sum a^2A^2+2\sum abA_0B,$$

а такъ какъ

$$2A_0B=A^2+B^2-AB^2,$$

то

$$m^2M^2=\sum a^2A^2+\sum ab(A^2+B^2)-\sum abAB^2,$$

или

$$m^2M^2=m\sum aA^2-\sum abAB^2,$$

и наконецъ, дѣля на m, получаемъ

$$mM^2=\sum aA^2-\frac{1}{m}\sum abAB^2\,.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\qquad(67)$$

Выраженіе это впервые вывелъ Лагранжъ довольно сложнымъ пріомъ*).

Приведенные примѣры мы считаемъ достаточными для уясненія значенія числовыхъ произведеній.

Въ механикѣ числовое произведеніе векторовъ соотвѣтствуетъ выраженію работы; умноженіемъ этимъ пользовались часто въ своихъ курсахъ *Резаль* и *Сомовъ*, называя его геометрическимъ умноженіемъ.

Мы предложили употреблять названіе числового умноженія потому, что въ исчисленіи кватерніоновъ это умноженіе соотвѣтствуетъ нахожденію скаляра двухъ векторовъ.

§ 21. Геометрическія соотношенія въ пространствѣ.

Такъ какъ на ряду съ линіями векторами можно всегда разсматривать векторы-площади, то геометрическимъ соотношеніямъ на плоскости можно почти всегда указать аналогичныя соотношенія въ пространствѣ.

Такъ напримѣръ, если D средина ребра AS тетраэдра $SABC$, то изъ равенства

$$2B_*C_*D=B_*C_*(A+S)=B_*C_*A+B_*C_*S$$

получаемъ слѣдующее соотношеніе между квадратами площадей

$$4BCD^2=BCA^2+BCS^2+2BCA_0BCS,\;.\;\;.\;\;.\;\;.\qquad(68)$$

---

*) Mécanique analytique. T. I, p. I, sect. III, n° 20.

гдѣ послѣдній членъ равенъ произведенію граней на косинусъ угла между ними. Формула эта аналогична выраженію квадрата медіаны и выражаетъ собою квадратъ площади сѣченія, проходящаго черезъ одно изъ реберъ тетраэдра и средину противоположнаго ребра.

§ 22. **Примѣненіе геометрическаго умноженія къ детерминантамъ и къ рѣшенію системы линейныхъ уравненій.**

Наибольшее число независимыхъ векторовъ въ нашемъ пространствѣ четыре. Допустимъ возможность существованія n независимыхъ между собою векторовъ; обозначимъ ихъ черезъ $1, 2, 3 \ldots n$. Напишемъ суммы:

$$\left.\begin{aligned} A &= a_1 1 + a_2 2 + \ldots a_n n, \\ B &= b_1 1 + b_2 2 + \ldots b_n n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M &= m_1 1 + m_2 2 + \ldots m_n n, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (69)$$

гдѣ $a, b \ldots m$ суть дѣйствительные коэффиціенты.

Перемножимъ суммы (69) геометрически. Согласно рав. (20), для полученія полнаго произведенія правыхъ частей равенствъ (69) мы должны составить всѣ возможныя произведенія, въ которыя не входило бы по два множителя изъ одного и того же столбца правыхъ частей формулъ (69). При этомъ, если условиться считать произведеніе $1_* 2_* 3_* \ldots {}_* n$ положительнымъ, то всѣ остальныя произведенія будутъ положительны или отрицательны въ зависимости отъ числа перестановокъ, необходимыхъ для того, чтобы множители каждаго произведенія расположить въ порядкѣ натуральныхъ чиселъ.

Отсюда слѣдуетъ, что если вынести произведеніе $1_* 2_* \ldots {}_* n$ общимъ множителемъ, то коэффиціентомъ при немъ получится слѣдующій детерминантъ:

$$A_* B_* \ldots {}_* M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ m_1 & m_2 \ldots & m_n \end{vmatrix} . 1_* 2_* \ldots {}_* n \quad . \ . \ . (70)$$

На основаніи полученной формулы всѣ свойства детерминантовъ могутъ разсматриваться какъ слѣдствія основныхъ свойствъ геометрическаго произведенія (форм. 20).

Такъ напримѣръ, изъ свойства $A_* A = 0$ слѣдуетъ, что детерминантъ обращается въ нуль, если въ немъ есть двѣ равныя между собою строки; изъ свойства $A_* B = - B_* A$ и $1_* 2 = - 2_* 1$ слѣдуетъ, что *детерминантъ мѣняетъ свой знакъ при перестановкѣ двухъ строкъ или колоннъ.*

Такъ какъ геометрическое произведеніе не мѣняется, если прибавить къ одному изъ множителей сумму остальныхъ множителей, взятыхъ съ произвольными коэффиціентами, то *детерминантъ не мѣняетъ своего значенія, если приложить къ элементамъ одной строки или колонны соотвѣтственно элементы нѣсколькихъ строкъ или колоннъ, умноженныхъ на произвольныя числа.*

Остальныя свойства детерминантовъ, вытекающія изъ приведенныхъ основныхъ свойствъ, могутъ быть выведены также параллельно съ свойствами геометрическихъ произведеній.

Укажемъ простой способъ рѣшенія системы линейныхъ уравненій. Пусть въ уравненіяхъ:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + m_1 x_n &= p_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + m_2 x_n &= p_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n x_1 + b_n x_2 + \cdots + m_n x_n &= p_n, \end{aligned}$$

количества $a_1, b_1 \cdots m_1, p_1$ отнесены къ вектору 1, количества $a_2, b_2 \cdots m_2\ p_2$ къ вектору 2, и т. д., и пусть векторы $1, 2 \ldots n$ независимы между собою.

Сложимъ всѣ данныя уравненія, обозначивъ соотвѣтственно черезъ $a, b \cdots m$ суммы: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \cdots m_1 + m_2 + \cdots + m_n$; тогда получимъ уравненіе:

$$ax_1 + bx_2 + \ldots + mx_n = p,$$

гдѣ $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Для нахожденія неизвѣстнаго x_1 умножимъ обѣ части полученнаго уравненія на геометрическое произведеніе

$$b_* c_* \cdots {}_* m;$$

тогда всѣ неизвѣстныя кромѣ x_1 исключатся сами собою и мы получимъ формулу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 \cdots & b_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ m_1 & m_2 \cdots & m_n \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \cdots & p_n \\ b_1 & b_2 \cdots & b_n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ m_1 & m_2 \cdots & m_n \end{vmatrix}.$$

§ 23. Приложенія къ статикѣ.

Многія изъ приведенныхъ нами выше формулъ имѣютъ значеніе не только въ геометріи, но и въ механикѣ. Для болѣе нагляднаго выясненія значенія этихъ формулъ въ механикѣ мы приведемъ выраженія теоремъ статики, имъ соотвѣтствующихъ.

Формула (14), примѣненная къ нѣсколькимъ слагаемымъ, выражаетъ собою слѣдующую теорему *Лейбница:*

Если мы имѣемъ точку O и рядъ матеріальныхъ точекъ A, B... съ массами a, b... и если на точку O дѣйствуютъ силы, выраженныя векторами OA, OB..., умноженными соотвѣтственно на массы a, b..., то равнодѣйствующая равна вектору OM, умноженному на сумму всѣхъ массъ.

Та же формула выражаетъ собою правило сложенія массъ. Формулы (30) и (31) выражаютъ собою извѣстную теорему *Вариньона: моментъ равнодѣйствующей равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагающихъ.*

Формула (26) мѣрной части прямой выражаетъ въ механикѣ силу, приложенную къ опредѣленной точкѣ; на этомъ основаніи формулы (30) и (33) выражаютъ собою *правила сложенія силъ пересѣкающихся и силъ параллельныхъ.*

Формула (34) выражаетъ собою *моментъ пары силъ.*

Формула (37) выражаетъ собою моментъ пары, которою замѣняется система силъ, огибающихъ нѣкоторую площадь.

Формула (39) даетъ правило сложенія силы и пары, лежащихъ въ одной плоскости.

Формулы (41), (42) и (43) даютъ возможность *замѣнять систему силъ или двумя силами, или одной силой и одной парой силъ.*

Такимъ образомъ, основныя теоремы статики при помощи формулъ, установленныхъ нами выше, пріобрѣтаютъ простыя и наглядныя выраженія, причемъ доказательства этихъ теоремъ значительно упрощаются.

Многія физическія величины выражаются одни векторами-линіями, другія векторами-площадями *). Слѣдуетъ ожидать, что изученіе операцій надъ тѣми и другими векторами должно имѣть также примѣненіе въ различныхъ вопросахъ физики.

§ 24. Краткая исторія вопроса объ исчисленіи положенія; важнѣйшая литература.

Подъ исчисленіемъ положенія разумѣется установленіе такихъ операцій надъ символами, обозначающими положеніе пространственныхъ элементовъ, которыя соотвѣтствовали бы операціямъ построеній, совершаемыхъ надъ ними.

Идея объ исчисленіи положенія *(Calculus situs)* принадлежала еще знаменитому *Лейбницу.*

---

*) *J. C. Maxwell* въ своемъ Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus приводитъ въ § 11 и 12 цѣлый рядъ физическихъ величинъ, выражающихся векторами-линіями и векторами-площадями.

Д'Аламберъ въ своей *Encyclopédie (art. situation)* говоритъ: „Анализъ положенія есть во всякомъ случаѣ нѣчто такое, чего недостаетъ современной алгебрѣ“... „Было бы желательно найти средство ввести въ вычисленіе обозначеніе положенія; этимъ значительно сокращались бы вычисленія; но это не доступно современному положенію и средствамъ анализа“.

Важнѣйшія изъ работъ, относящихся къ исчисленію положенія, суть слѣдующія:

1. *A. F. Möbius.* Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie. Leipzig. 1827.

2. *H. G. Grassmann.* Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig. 1844.

3. *G. Bellavitis.* Sposizione del metodo delle equipollenze. Modena. 1854.

4. *L. Neovius.* Om komplexa tals användning i geometrin. Helsingfors. 1884.

5. *В. П. Ермаковъ.* Теорія векторовъ на плоскости. Кіевъ. 1887.

6. *E. W. Hyde.* The directional calculus, based upon the methods of Hermann Grassmann. Boston. 1890.

7. *G. Peano.* Die Grundzüge des geometrischen Calculs. Deutsch von A. Schepp. Leipzig. 1891.

8. *F. Kraft.* Abriss des geometrischen Kalküls. Leipzig. 1893.

Изъ перечисленныхъ авторовъ наибольшею оригинальностію идей отличаются Мебіусъ, Грассманъ и Беллавитисъ.

А. Ф. Мебіусъ разсматривалъ зависимость между положеніемъ точекъ въ пространствѣ, устанавливая связь между длинами параллельныхъ отрѣзковъ, проведенныхъ изъ нѣсколькихъ матеріальныхъ точекъ и ихъ общаго центра тяжести и ограниченныхъ съ другой стороны плоскостію.

Германъ Гюнтеръ Грассманъ разсматриваетъ точки-величины (Punctgrösse), т. е. точки, взятыя съ числовымъ коэффиціентомъ къ нимъ присоединеннымъ, а также отрѣзки линій и части плоскостей, какъ особыя величины, и устанавливаетъ надъ ними алгебраическія операціи.

Д. Беллавитисъ въ теоріи эквиполленцъ разсматриваетъ, какъ мы указывали и выше, рѣшеніе векторныхъ уравненій въ примѣненіи къ геометріи.

Остальные изъ перечисленныхъ авторовъ занимаются развитіемъ идей Г. Г. Грассмана и отчасти идей Беллавитиса.

§ 25. Заключеніе.

Особенности теоріи векторовъ, предлагаемой нами, состоятъ, во-первыхъ, въ установленіи понятія о *системахъ векторовъ съ произвольнымъ общимъ началомъ*, во-вторыхъ, въ разсмотрѣніи геометрическаго и числового умноженій въ ихъ связи съ общимъ алгебраическимъ умноженіемъ векторовъ.

Послѣднее обстоятельство дало намъ возможность развить теорію геометрическаго умноженія проще, чѣмъ это дѣлаютъ послѣдователи Г. Г. Грассмана. Введеніе же понятія о системахъ векторовъ съ произвольнымъ общимъ началомъ даетъ намъ возможность отвлекаться отъ *длины, направленія и положенія начала векторовъ* въ вопросахъ, гдѣ идетъ рѣчь о положеніи точекъ, принимаемыхъ въ этомъ случаѣ за концы векторовъ.

Формулы, относящіяся къ системамъ векторовъ съ произвольнымъ общимъ началомъ, оказываются съ одной стороны тождественными съ формулами барицентрическаго исчисленія Мебіуса, а съ другой стороны совпадаютъ съ значеніемъ формулъ Г. Грассмана, относящихся къ его величинамъ-точкамъ.

Связь между векторами-положенія и векторами направленія вполнѣ естественна, тогда какъ понятіе о векторѣ, какъ разности двухъ точекъ-величинъ, какъ у самого Грассмана, такъ и у всѣхъ его послѣдователей остается мѣстомъ весьма слабымъ.

Введеніе понятія о векторѣ-положенія позволяетъ соединить въ одно цѣлое всѣ отдѣльные методы въ области исчисленія положенія.

Въ заключеніе постараемся по возможности выяснить причину того выдающагося значенія, которое имѣетъ геометрическое умноженіе въ теоріи векторовъ. Причина эта заключается, по нашему мнѣнію, въ томъ, что геометрическое умноженіе можетъ разсматриваться какъ алгебраическое умноженіе, обобщенное въ такомъ направленіи, что можно не дѣлать различія по существу между извлеченіемъ корня четной степени какъ изъ положительнаго, такъ и изъ отрицательнаго количества.

Дѣйствительно, если мы возьмемъ геометрическое произведеніе двухъ равныхъ взаимно перпендикулярныхъ векторовъ

$$a_{\varphi} * a_{\varphi+\frac{1}{2}\pi} = a^2$$

и если по данной площади квадрата a^2, имъ выражаемой, мы будемъ опредѣлять образующій и направляющій векторы (§ 6), то дѣйствій, обратныхъ разсматриваемому умноженію, будетъ два различныхъ: одно для опредѣленія образующаго, а другое для опредѣленія направляющаго вектора. Будемъ первое дѣйствіе обозначать знакомъ $\sqrt{\ }$, а второе знакомъ $\overset{*}{\sqrt{\ }}$.

Тогда, вслѣдствіе неперемѣстительности геометрическаго умноженія, будемъ имѣть формулы

$$\overset{*}{\sqrt{+a^2}} = \sqrt{-a^2}; \qquad \overset{*}{\sqrt{-a^2}} = \sqrt{+a^2}. \quad \ldots . (71)$$

Векторы, выраженные той и другой операціей, различаются по своему направленію на 90^0.

Такимъ образомъ, мы приходимъ инымъ путемъ къ результату, который полученъ еще Аргаиомъ, а именно, что геометрическая операція, соотвѣтствующая умноженію вектора на $\sqrt{-1}$, состоитъ въ вращеніи вектора на 90^0.

Съ другой стороны, понятіе о сложеніи векторовъ также представляетъ собою обобщеніе понятія о сложеніи количествъ положительныхъ и отрицательныхъ на количества комплексныя.

Такимъ образомъ, вся изложенная нами теорія векторовъ можетъ разсматриваться какъ геометрическое толкованіе алгебры комплексныхъ количествъ.

29 Іюня 1893 г.