Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій задачи о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку *).

А. М. Ляпунова.

1. Вопросъ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, зависитъ, какъ извѣстно, отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + \beta\zeta - \gamma\eta\,, \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + \gamma\xi - \alpha\zeta\,, \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + \alpha\eta - \beta\xi\,, \\
\frac{d\xi}{dt} &= r\eta - q\zeta\,, \\
\frac{d\eta}{dt} &= p\zeta - r\xi\,, \\
\frac{d\zeta}{dt} &= q\xi - p\eta\,.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здѣсь A, B, C, α, β, γ суть извѣстныя постоянныя, изъ которыхъ первыя три представляютъ главные моменты инерціи твердаго тѣла,

*) Предметъ этой статьи былъ доложенъ мною Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 10 мая 1893 г. Но нѣкоторыя независящія отъ меня обстоятельства помѣшали своевременному окончанію ея редактированія, вслѣдствіе чего она появляется въ печати нѣсколько запоздавшею.

Считаю нужнымъ замѣтить, что вопросъ, которому она посвящена, рѣшается также въ только-что опубликованномъ сочиненіи Г. Г. Аппельрота подъ заглавіемъ *Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки.*

соотвѣтствующіе неподвижной точкѣ, а послѣднія три пропорціональны прямоугольнымъ координатамъ центра тяжести въ системѣ координатъ, оси которыхъ совпадаютъ съ осями этихъ моментовъ инерціи.

Безъ нѣкоторыхъ предположеній относительно этихъ постоянныхъ уравненія (1) еще не удалось проинтегрировать, и до недавняго времени были извѣстны только два случая, въ которыхъ получался ихъ общій интегралъ.

Одинъ изъ нихъ, въ которомъ интегрированіе было выполнено еще Эйлеромъ, есть тотъ, когда

$$\alpha=\beta=\gamma=0\,,$$

т. е. когда центръ тяжести тѣла совпадаетъ съ неподвижною точкой; другой, указанный Лагранжемъ,—тотъ, когда два изъ названныхъ моментовъ инерціи равны между собою, а центръ тяжести лежитъ гдѣ либо на оси третьяго, т. е. когда при надлежащемъ выборѣ обозначеній

$$A=B\,,\qquad \alpha=\beta=0\,.$$

Въ обоихъ случаяхъ уравненія (1) интегрируются, какъ извѣстно, при помощи эллиптическихъ функцій, и величины p, q, r, ξ, η, ζ, каковы бы ни были ихъ начальныя значенія, выражаются однозначными функціями времени t, не имѣющими никакихъ другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ (точекъ въ безконечности мы не разсматриваемъ).

С. В. Ковалевская недавно показала, какъ интегрируются уравненія (1) еще въ одномъ случаѣ: именно—когда два изъ моментовъ инерціи равны удвоенному третьему, а центръ тяжести лежитъ въ плоскости осей равныхъ моментовъ инерціи, т. е. когда выборомъ обозначеній можно распорядиться такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$A=B=2C\,,\qquad \gamma=0\,.$$

Въ этомъ случаѣ уравненія (1) интегрируются при помощи функцій ϑ, зависящихъ отъ двухъ аргументовъ, но p, q, r, ξ, η, ζ по прежнему выражаются однозначными функціями времени, не имѣющими другихъ особенныхъ точекъ, кромѣ полюсовъ.

Это то послѣднее обстоятельство и послужило С. В. Ковалевской къ открытію указаннаго сейчасъ случая.

Замѣтивши, что въ обоихъ извѣстныхъ случаяхъ интегрируемости функціи p, q, r, ξ, η, ζ обладаютъ сказаннымъ свойствомъ, С. В. Ковалевская предложила себѣ найти, если возможно, новые случаи того же рода и, стараясь разрѣшить эту задачу, пришла къ своему случаю.

Путь, которому она слѣдовала, намѣченъ въ параграфѣ 1$^{\text{омъ}}$ ея мемуара *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (Acta mathem., t. 12), но съ большею обстоятельностью указанъ въ другомъ ея мемуарѣ, который былъ напечатанъ въ 14$^{\text{омъ}}$ томѣ Acta mathematica подъ заглавіемъ: *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.*

Въ настоящее время мы знаемъ такимъ образомъ три случая, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ, каковы бы ни были ихъ начальныя значенія, выходятъ однозначными и безъ особенныхъ точекъ кромѣ полюсовъ.

Является вопросъ, не существуетъ ли другихъ такихъ же случаевъ? Или, можетъ быть, указанные три суть единственные случаи такого рода изъ всѣхъ, возможныхъ механически?

Хотя С. В. Ковалевская и не высказывается въ этомъ отношеніи категорически, но судя по ходу ея разсужденій, надо думать, что своимъ изслѣдованіемъ она считала вопросъ рѣшеннымъ и именно—въ послѣднемъ смыслѣ. По крайней мѣрѣ, къ такому заключенію приводитъ сопоставленіе двухъ слѣдующихъ ея утвержденій: въ началѣ перваго своего мемуара она говоритъ, что всѣ случаи разсматриваемаго рода должны быть таковы, чтобы уравненіямъ (1) можно было удовлетворить рядами, характерными для полюсовъ и содержащими въ своихъ коэффиціентахъ пять произвольныхъ постоянныхъ, а въ концѣ второго мемуара высказываетъ, какъ выводъ, что это возможно только въ трехъ указанныхъ выше случаяхъ.

Однако анализъ ея, по скольку о немъ можно судить на основаніи опубликованнаго въ упомянутыхъ сейчасъ мемуарахъ, нельзя считать рѣшающимъ, такъ какъ онъ основывается на нѣкоторыхъ допущеніяхъ, законность которыхъ можетъ подлежать сомнѣнію.

Это обстоятельство первый указалъ академикъ А. А. Марковъ, который недавно въ своихъ письмахъ сообщилъ мнѣ сущность возраженій, которыя высказывались имъ противъ анализа С. В. Ковалевской.

Но вполнѣ соглашаясь съ А. А. Марковымъ относительно недостаточности этого анализа, я тѣмъ не менѣе склоненъ былъ думать, что вопросъ разрѣшается въ томъ именно смыслѣ, какъ полагала С. В. Ковалевская, и что рѣшеніе его можетъ быть достигнуто безъ особыхъ затрудненій, если нѣсколько иначе приняться за дѣло.

Вслѣдствіе этого я рѣшилъ разсмотрѣть вопросъ съ другой точки зрѣнія и попытаться приложить къ нему методу, которая давно уже казалась мнѣ наиболѣе подходящею для рѣшенія вопросовъ такого рода.

Такимъ путемъ пришелъ я къ доказательству единственности найденныхъ трехъ случаевъ однозначности, которое и предлагаю здѣсь вниманію читателя.

Доказательство это основывается на соображеніяхъ, совершенно отличныхъ отъ тѣхъ, которыми руководилась С. В. Ковалевская, чѣмъ не только устраняются нѣкоторыя затрудненія принципіальнаго характера, присущія ея методѣ, но и достигается значительное упрощеніе анализа вслѣдствіе меньшаго числа и меньшей сложности тѣхъ частныхъ случаевъ, которые приходится разсматривать.

Метода, которою я пользуюсь, обладаетъ при томъ тѣмъ преимуществомъ, что приводитъ къ болѣе широкому заключенію, а именно: она позволяетъ заключить, что во всѣхъ остальныхъ возможныхъ случаяхъ, за исключеніемъ извѣстныхъ трехъ, функціи p, q, r, ξ, η, ζ не только могутъ имѣть особенныя точки, отличныя отъ полюсовъ, но при надлежащемъ выборѣ начальныхъ значеній навѣрно будутъ многозначными.

Наконецъ, хотя подъ возможными я и разумѣю здѣсь случаи возможные механически, анализъ мой обнимаетъ и множество другихъ случаевъ, ибо единственное предположеніе, которое я дѣлаю, состоитъ въ томъ, что A, B, C, α, β, γ вещественны, и что изъ чиселъ A, B, C ни одно не нуль.

Я доказываю такимъ образомъ слѣдующее:

Изъ всѣхъ случаевъ, когда постоянныя A, B, C, α, β, γ вещественны и A, B, C всѣ отличны отъ нуля, извѣстные три случая суть единственные, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ, опредѣляемыя уравненіями (1), однозначны при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

2. Прежде, чѣмъ говорить о методѣ, которою я здѣсь пользуюсь, считаю необходимымъ указать на нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія для уравненій (1) изъ принциповъ общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій и обусловливаемыя тѣмъ обстоятельствомъ, что вторыя части этихъ уравненій суть цѣлыя функціи величинъ p, q, r, ξ, η, ζ съ постоянными коэффиціентами.

Пусть p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 суть начальныя значенія функцій p, q, r, ξ, η, ζ, соотвѣтствующія нѣкоторому опредѣленному значенію t, которое означимъ черезъ t_0.

Пусть значеніе это на плоскости перемѣннаго t представляется точкою O.

Всякій разъ, когда p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 выбраны опредѣленнымъ образомъ, а перемѣнное t подчинено условію, чтобы представляющая точка оставалась внутри окружности достаточно малаго радіуса съ центромъ въ точкѣ O, функціи p, q, r, ξ, η, ζ будутъ вполнѣ опредѣленными и представятся рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $t - t_0$.

Если же перемѣнное t не подчинено сказанному условію, то чтобы говорить о значеніяхъ этихъ функцій въ какой либо точкѣ P, вообще необходимо задать путь L, соединяющій эту точку съ точкою O *).

*) Говоря о пути, соединяющемъ двѣ точки O и P, мы подразумѣваемъ, что рѣчь идетъ о геометрическомъ мѣстѣ точекъ, представляющихъ значенія перемѣннаго t, вещественная и мнимая часть котораго даны подъ видомъ опредѣленныхъ и непрерывныхъ

и разсматривать соотвѣтствующее ему непрерывное измѣненіе t отъ значенія t_0 до значенія, представляемаго точкою P.

Тогда по способу аналитическаго продолженія функцій можно будетъ опредѣлить функціи p, q, r, ξ, η, ζ, смотря по обстоятельствамъ, или для всѣхъ точекъ пути L, включая и точку P, или только для точекъ, встрѣчаемыхъ при движеніи по этому пути отъ точки O ранѣе нѣкоторой точки P' и насколько угодно близкихъ къ ней, но не для точки P'.

Въ первомъ случаѣ всѣ точки пути L, включая и точку P, будутъ для функцій p, q, r, ξ, η, ζ обыкновенными. Во второмъ всѣ точки, встрѣчаемыя ранѣе P', будутъ обыкновенными, а точка P' будетъ особенною, и съ приближеніемъ къ ней по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ не будутъ приближаться ни къ какимъ предѣламъ; что же касается всѣхъ остальныхъ точекъ пути L, когда точка P' отлична отъ точки P, то относительно нихъ при разсматриваемомъ выборѣ пути нельзя сказать ничего опредѣленнаго.

Во второмъ случаѣ, чтобы говорить о значеніяхъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ въ точкѣ P, путь L долженъ быть замѣненъ какимъ либо другимъ.

Допустимъ теперь, что, остановившись на какомъ либо опредѣленномъ выборѣ точки P и пути L, мы приписываемъ величинамъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 различныя значенія и, когда это возможно, опредѣляемъ соотвѣтствующія имъ значенія функцій p, q, r, ξ, η, ζ въ точкѣ P.

Тогда, если опредѣленіе это оказывается возможнымъ при какихъ либо величинахъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, то будетъ возможно и при всякихъ другихъ, достаточно къ нимъ близкихъ.

Это вытекаетъ изъ слѣдующаго весьма важнаго для насъ предложенія:

Если всѣ точки пути L, включая и точку P, при

$$p_0=p'_0,\quad q_0=q'_0,\quad r_0=r'_0,\quad \xi_0=\xi'_0,\quad \eta_0=\eta'_0,\quad \zeta_0=\zeta'_0$$

суть обыкновенныя, то то же будетъ и при всякихъ другихъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, для которыхъ модули величинъ

$$p_0-p'_0,\quad q_0-q'_0,\quad r_0-r'_0,\quad \xi_0-\xi'_0,\quad \eta_0-\eta'_0,\quad \zeta_0-\zeta'_0 \qquad (2)$$

не превосходятъ нѣкотораго отличнаго отъ нуля предѣла, при чемъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ, соотвѣтствующія такимъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0,

---

функцій вещественнаго перемѣннаго s, способнаго получать всевозможныя значенія, лежащія между нѣкоторыми опредѣленными предѣлами, соотвѣтствующими точкамъ O и P. При этомъ точки пути различаемъ значеніями s, такъ-что точки, соотвѣтствующія различнымъ s, разсматриваемъ, какъ различныя точки пути, хотя бы онѣ и совпадали съ одною и тою же точкою плоскости, и двѣ точки пути считаемъ безконечно-близкими только тогда, когда онѣ соотвѣтствуютъ безконечно-близкимъ значеніямъ s.

будутъ способны представляться на пути L рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ (2), сходящимися равномѣрно для всѣхъ точекъ этого пути, включая и точку P, и всѣ эти точки для ихъ коэффиціентовъ, какъ функцій перемѣннаго t, будутъ обыкновенными.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что если при опредѣленномъ выборѣ точки P и пути L значенія функцій p, q, r, ξ, η, ζ въ этой точкѣ разсматриваются, какъ функціи величинъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, то функціи эти будутъ обладать опредѣленными частными производными по какимъ угодно изъ этихъ величинъ и какого угодно порядка всякій разъ, когда всѣ точки пути L, включая и точку P, для функцій p, q, r, ξ, η, ζ суть обыкновенныя, и эти частныя производныя при постоянныхъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 представятъ функціи перемѣннаго t, для которыхъ всякая точка плоскости, выходящая для функцій p, q, r, ξ, η, ζ при какомъ либо выборѣ пути обыкновенною, будетъ при томъ же выборѣ пути также обыкновенною.

Вообще значенія функцій p, q, r, ξ, η, ζ въ какой либо точкѣ P, опредѣляемыя при однихъ и тѣхъ же p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, но при различныхъ путяхъ, могутъ быть различными.

Но допустимъ, что мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда значенія эти не зависятъ отъ пути, каковы бы ни были p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, т. е. когда функціи p, q, r, ξ, η, ζ однозначны при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

Тогда при всякомъ опредѣленномъ выборѣ величинъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 положенія всѣхъ особенныхъ точекъ этихъ функцій будутъ вполнѣ опредѣленными, и во всякой части плоскости, несодержащей этихъ точекъ, разсматривавшіяся сейчасъ частныя производныя будутъ также однозначными.

Разысканіе условій этой однозначности при величинахъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, соотвѣтствующихъ нѣкоторымъ извѣстнымъ частнымъ рѣшеніямъ уравненій (1), и составляетъ сущность моей методы.

Я ограничиваюсь при этомъ разсмотрѣніемъ частныхъ производныхъ перваго порядка, чего при надлежащемъ выборѣ частныхъ рѣшеній уравненій (1) оказывается вполнѣ достаточно для полнаго рѣшенія вопроса.

Пусть l означаетъ какую либо изъ величинъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0. Тогда уравненіями

$$u=\frac{\partial p}{\partial l}, \qquad v=\frac{\partial q}{\partial l}, \qquad w=\frac{\partial r}{\partial l},$$

$$x=\frac{\partial \xi}{\partial l}, \qquad y=\frac{\partial \eta}{\partial l}, \qquad z=\frac{\partial \zeta}{\partial l}$$

опредѣлится нѣкоторое частное рѣшеніе слѣдующей системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{du}{dt} &= (B-C)(rv+qw)+\beta z-\gamma y,\\
B\frac{dv}{dt} &= (C-A)(pw+ru)+\gamma x-\alpha z,\\
C\frac{dw}{dt} &= (A-B)(qu+pv)+\alpha y-\beta x,\\
\frac{dx}{dt} &= \eta w-\zeta v+ry-qz,\\
\frac{dy}{dt} &= \zeta u-\xi w+pz-rx,\\
\frac{dz}{dt} &= \xi v-\eta u+qx-py,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и всѣ шесть такихъ рѣшеній, получаемыхъ, когда l поочередно полагается равнымъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, будутъ независимыми, такъ что изъ нихъ извѣстнымъ путемъ могутъ быть выводимы всякія другія рѣшенія той же системы.

Для всякаго извѣстнаго частнаго рѣшенія уравненій (1) коэффиціенты въ уравненіяхъ (3) будутъ извѣстными функціями t, и вопросъ будетъ состоять въ разысканіи условій, при которыхъ всякія функціи u, v, w, x, y, z, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, оставались бы однозначными во всякой части плоскости, не содержащей особенныхъ точекъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ разсматриваемаго рѣшенія системы (1).

Всякія необходимыя условія этого рода навѣрно будутъ необходимы и для однозначности функцій p, q, r, ξ, η, ζ при всякихъ начальныхъ значеніяхъ.

Дѣйствительно, пусть для разсматриваемаго частнаго рѣшенія уравненій (1), соотвѣтствующаго начальнымъ значеніямъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, система (3) допускаетъ рѣшеніе, въ которомъ функціи u, v, w, x, y, z (всѣ или только нѣкоторыя), выходя изъ точки O съ начальными значеніями u_0, v_0, w_0, x_0, y_0, z_0, достигаютъ одной и той же точки P по двумъ путямъ, не встрѣчающимъ особенныхъ точекъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ, съ различными значеніями. Тогда функціи p, q, r, ξ, η, ζ, опредѣляемыя начальными значеніями

$$p_0+u_0\varepsilon,\quad q_0+v_0\varepsilon,\quad r_0+w_0\varepsilon,\quad \xi_0+x_0\varepsilon,\quad \eta_0+y_0\varepsilon,\quad \zeta_0+z_0\varepsilon,$$

при $|\varepsilon|$ достаточно маломъ, но отличномъ отъ нуля, будутъ достигать той же точки по тѣмъ же путямъ также съ различными значеніями, ибо на основаніи указаннаго выше предложенія функціи эти при $|\varepsilon|$

достаточно маломъ представятся на разсматриваемыхъ путяхъ рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ ε, а члены первой степени относительно ε, очевидно, будутъ въ этихъ рядахъ вида

$$u\varepsilon,\quad v\varepsilon,\quad w\varepsilon,\quad x\varepsilon,\quad y\varepsilon,\quad z\varepsilon.$$

3. Чтобы требованіе однозначности функцій u, v, w, x, y, z могло привести къ какимъ либо условіямъ, уравненія (3) должны быть разсматриваемы только для такихъ рѣшеній уравненій (1), которыя обладали бы особенными точками по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ изъ функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, ибо при отсутствіи особенныхъ точекъ для послѣднихъ функціи u, v, w, x, y, z также не будутъ имѣть такихъ точекъ и всегда будутъ однозначными во всей плоскости перемѣннаго t.

Такимъ образомъ для нашей методы весьма важно имѣть какія либо частныя рѣшенія уравненій (1) съ особенными точками по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ изъ функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$.

Подобныя рѣшенія дѣйствительно извѣстны и возможны во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ одного, который характеризуется равенствами $\alpha=\beta=\gamma=0$ и условіемъ, что A, B, C не всѣ различны.

Простѣйшія изъ такихъ рѣшеній суть рѣшенія вида

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{a}{t}, & q&=\frac{b}{t}, & r&=\frac{c}{t} \\ \xi&=\frac{f}{t^2}, & \eta&=\frac{g}{t^2}, & \zeta&=\frac{h}{t^2}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ a, b, c, f, g, h означаютъ постоянныя, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя отличны отъ нуля.

Не останавливаясь на разысканіи всевозможныхъ системъ значеній a, b, c, f, g, h, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ такого типа, укажемъ двѣ такихъ системы, изъ которыхъ одна возможна всякій разъ, когда A, B, C всѣ различны, другая — всякій разъ, когда между числами α, β, γ по крайней мѣрѣ одно есть нуль и по крайней мѣрѣ одно не нуль.

Первая изъ этихъ системъ опредѣляется слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} a&=-B'C', & b&=-C'A', & c&=-A'B', \\ f&=0, & g&=0, & h&=0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

гдѣ

$$A'=\sqrt{\frac{A}{B-C}},\qquad B'=\sqrt{\frac{B}{C-A}},\qquad C'=\sqrt{\frac{C}{A-B}}$$

и радикалы имѣютъ какія угодно свойственныя имъ алгебраическія значенія.

Вторая, соотвѣтствующая предположенію, что $\beta = 0$, и что изъ чиселъ α и γ хотя одно не нуль, есть слѣдующая:

$$\left.\begin{array}{lll} a = 0, & b = 2i, & c = 0, \\ f = -\dfrac{2Bi}{\gamma + \alpha i}, & g = 0, & h = -\dfrac{2B}{\gamma + \alpha i}, \end{array}\right\} \quad (6)$$

гдѣ i означаетъ $\pm\sqrt{-1}$.

Этихъ формулъ, если къ нимъ присоединить подобныя имъ, соотвѣтствующія предположенію $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$, будетъ для насъ вполнѣ достаточно, такъ какъ въ случаѣ, когда A, B, C всѣ различны, мы можемъ пользоваться формулами (5), а въ случаѣ, когда между ними существуютъ равныя, одно изъ чиселъ α, β, γ всегда можемъ предположить нулемъ (α или β, когда $A = B$; β или γ, когда $B = C$; γ или α, когда $C = A$), послѣ чего можно будетъ пользоваться формулами (6) или имъ подобными, если только α, β, γ не всѣ нули, т. е. если разсматриваемый случай не заключается въ случаѣ Эйлера.

Для рѣшеній типа (4) система (3) будетъ слѣдующаго вида:

$$At\frac{du}{dt} = (B-C)(cv+bw) + \beta tz - \gamma ty,$$

$$Bt\frac{dv}{dt} = (C-A)(aw+cu) + \gamma tx - \alpha tz,$$

$$Ct\frac{dw}{dt} = (A-B)(bu+av) + \alpha ty - \beta tx$$

$$t^2\frac{dx}{dt} = gw - hv + cty - btz,$$

$$t^2\frac{dy}{dt} = hu - fw + atz - ctx,$$

$$t^2\frac{dz}{dt} = fv - gu + btx - aty,$$

и если за неизвѣстныя функціи вмѣсто x, y, z принять tx, ty, tz, приведется къ одному изъ извѣстныхъ типовъ.

Интегрированіе этой системы зависитъ отъ рѣшенія слѣдующаго алгебраическаго уравненія $6^{\text{ой}}$ степени относительно неизвѣстнаго k:

$$\begin{vmatrix} Ak & (C-B)c & (C-B)b & 0 & \gamma & -\beta \\ (A-C)c & Bk & (A-C)a & -\gamma & 0 & \alpha \\ (B-A)b & (B-A)a & Ck & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & h & g & k-1 & -c & b \\ -h & 0 & f & c & k-1 & -a \\ g & -f & 0 & -b & a & k-1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

*

Разсмотрѣніе этого уравненія тотчасъ же даетъ и условія однозначности функцій u, v, w, x, y, z.

Условія эти состоятъ въ томъ, чтобы 1) всѣ корни этого уравненія были вещественными цѣлыми числами (положительными, отрицательными или нулями — безразлично) и 2) чтобы всякій кратный его корень обращалъ въ нуль всѣ миноры опредѣлителя, фигурирующаго въ первой части равенства, до порядка, равнаго кратности этого корня, невключительно.

Условія эти необходимы и достаточны.

Разысканіемъ ихъ мы и займемся въ слѣдующихъ параграфахъ, ограничиваясь предположеніемъ, что $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ вещественны, и предполагая, конечно, что A, B, C всѣ отличны отъ нуля *).

4. Начнемъ съ случая, когда A, B, C всѣ различны.

Если остановимся на формулахъ (5), то уравненіе (7) послѣ небольшихъ преобразованій приведется къ виду

$$k(k-1)^3(k^2-4)=0,$$

и слѣдовательно условіе, относящееся къ характеру его корней, всегда будетъ выполнено. Но такъ какъ уравненіе это имѣетъ трехкратный корень 1, то необходимо еще удовлетворить условію, чтобы всѣ миноры второго порядка для опредѣлителя, представляющаго первую часть уравненія (7), при $k=1$ дѣлались нулями.

Выражая, что это условіе выполняется для минора, получаемаго изъ названнаго опредѣлителя вычеркиваніемъ второго и третьяго столбца и третьей и четвертой строки, находимъ:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & \gamma & -\beta \\ A'B'(C-A) & -\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & -A'B' & 0 & B'C' \\ 0 & C'A' & -B'C' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство же это, приводящееся къ виду

$$\alpha\sqrt{A(B-C)}+\beta\sqrt{B(C-A)}+\gamma\sqrt{C(A-B)}=0,$$

при вещественныхъ $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$ и при различныхъ A, B, C, между которыми среднее пусть будетъ B, возможно только въ случаѣ, когда

---

*) Уравненіе (7) только обозначеніями отличается отъ того, къ которому приходитъ С. В. Ковалевская (ея неизвѣстное n связано съ неизвѣстнымъ k равенствомъ $n-1=k$), и требованіе, которому, слѣдуя ея указанію, пришлось бы подчинить его корни, выразилось бы такъ: пять изъ этихъ корней должны быть вещественными неотрицательными числами.

$$\beta=0, \quad \alpha\sqrt{A(B-C)}+\gamma\sqrt{C(A-B)}=0. \tag{8}$$

Случай, характеризуемый этими равенствами, былъ указанъ Г. Г. Аппельротомъ, который пришелъ къ нему изъ разсмотрѣнія того же уравненія (7), желая удовлетворить уравненіямъ (1) рядами, обладающими полюсами перваго порядка и содержащими въ своихъ коэффиціентахъ пять произвольныхъ постоянныхъ *).

Случай этотъ послужилъ потомъ предметомъ изслѣдованія профессоровъ П. А. Некрасова, Н. Е. Жуковскаго и Б. К. Млодзѣевскаго, причемъ П. А. Некрасовымъ было показано, что если только α и γ не нули (т. е. если разсматриваемый случай не приводится къ Эйлерову), функціи p, q, r, ξ, η, ζ при надлежащемъ выборѣ начальныхъ значеній навѣрно будутъ многозначными **).

Обстоятельство это, впрочемъ, нетрудно обнаружить и разсмотрѣніемъ уравненія (7), составленнаго въ предположеніи $\beta=0$ при величинахъ a, b, c, f, g, h, опредѣляемыхъ формулами (6).

Дѣйствительно, уравненіе это можно представить подъ видомъ:

$$D_1 D_2 = 0,$$

гдѣ

$$D_1=\begin{vmatrix} Bk & -\gamma & \alpha \\ h & k-1 & 2i \\ -hi & -2i & k-1 \end{vmatrix} = B(k+2)(k-1)(k-3),$$

$$D_2=\begin{vmatrix} Ak & 2(C-B)i & \gamma \\ 2(B-A)i & Ck & -\alpha \\ -h & hi & k-1 \end{vmatrix}.$$

Если же вычислимъ опредѣлитель D_2, то найдемъ, что изъ трехъ корней уравненія $D_2=0$ одинъ есть 2, а остальные опредѣляются уравненіемъ:

$$ACk(k+1)+2(B-A)(C-2B)-2B(A-C)\frac{\alpha(\alpha+\gamma i)}{\alpha^2+\gamma^2}=0. \tag{9}$$

Но послѣднее, при различныхъ A и C, если ни α, ни γ не равны нулю, очевидно, не можетъ обладать вещественными корнями.

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ функціи p, q, r, ξ, η, ζ могутъ быть однозначными при всякихъ начальныхъ значеніяхъ только

---

*) Г. Г. Аппельротъ. *По поводу § 1 мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation...“* (Математическій Сборникъ, томъ XVI).

**) П. А. Некрасовъ. *Къ задачѣ о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки* (тамъ же).

при равенствѣ нулю одного изъ чиселъ α и γ; а такъ какъ въ силу (8) равенство одного изъ нихъ нулю влечетъ за собою и равенство нулю другого, то однозначность эта возможна лишь тогда, когда разсматриваемый случай приводится къ случаю Эйлера.

5. Разсмотримъ теперь случай, когда A, B, C не всѣ различны, и чтобы остановиться на чемъ либо опредѣленномъ, допустимъ, что $A = B$.

Мы можемъ тогда, нисколько не теряя въ общности, одно изъ чиселъ α, β предположить нулемъ, ибо при $A = B$ къ такому случаю всегда можно придти путемъ извѣстнаго линейнаго преобразованія уравненій (1).

Допустимъ поэтому, что $\beta = 0$.

Если бы въ тоже время было и $\alpha = 0$, то мы имѣли бы дѣло съ случаемъ Лагранжа. Мы встрѣтились бы съ послѣднимъ также и при $A = C$, ибо тогда имѣли бы $A = B = C$, а при этомъ условіи, нисколько не теряя въ общности, можно предположить нулями два изъ чиселъ α, β, γ.

Мы будемъ поэтому предполагать, что ни α, ни $A - C$ не нули.

Остановившись на этихъ предположеніяхъ, обращаемся къ уравненію (7), соотвѣтствующему формуламъ (6).

Мы только-что видѣли, что уравненіе это, кромѣ четырехъ вещественныхъ цѣлыхъ корней, имѣетъ два корня, опредѣляемые уравненіемъ (9), которые, при $A - C$ и α отличныхъ отъ нуля, могутъ быть вещественными только при $\gamma = 0$.

Мы должны поэтому допустить, что $\gamma = 0$, послѣ чего, дѣлая въ уравненіи (9) $A = B$ и полагая

$$\frac{A}{C} = n,$$

приведемъ его къ виду

$$k(k+1) = 2(n-1).$$

Отсюда заключаемъ, что n необходимо должно быть нѣкоторымъ цѣлымъ положительнымъ числомъ.

Но въ предположеніи $\gamma = 0$, которое мы должны были сейчасъ сдѣлать, для a, b, c, f, g, h возможна слѣдующая система значеній:

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 2i,$$

$$f = -\frac{2C}{\alpha + \beta i}, \qquad g = -\frac{2Ci}{\alpha + \beta i}, \qquad h = 0,$$

подобная (6), а соотвѣтствующее ей уравненіе, подобное (9), будетъ вида:

$$BA\,k(k+1) + 2(C - B)(A - 2C) - 2C(B - A)\frac{\beta(\beta + \alpha i)}{\beta^2 + \alpha^2} = 0.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$\left(k-\frac{2}{n}+2\right)\left(k+\frac{2}{n}-1\right)=0,$$

и условіе, чтобы корни его были цѣлыми, требуетъ, чтобы $\frac{2}{n}$ было числомъ цѣлымъ.

Такимъ образомъ приходимъ къ выводу, что n и $\frac{2}{n}$ оба должны быть цѣлыми положительными числами; а это возможно лишь въ двухъ предположеніяхъ: $n=1$ и $n=2$.

Первое приводитъ къ исключенному нами случаю Лагранжа; второе—къ случаю С. В. Ковалевской.

6. Предыдущимъ изслѣдованіемъ теорема, формулированная въ концѣ параграфа 1-го, можетъ считаться доказанною.

Если поэтому можетъ быть рѣчь о какихъ либо новыхъ случаяхъ однозначности функцій $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ при вещественныхъ A, B, C, α, β, γ и при отличныхъ отъ нуля A, B, C, то только въ предположеніи, что начальныя значенія этихъ функцій подчиняются извѣстнымъ условіямъ.

Въ этомъ отношеніи въ особенности должно обратить вниманіе на условіе вещественности.

До сихъ поръ для величинъ $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ всякія значенія разсматривались, какъ возможныя, и изъ нашего анализа не слѣдуетъ, что если величины эти предполагать вещественными, то только въ извѣстныхъ трехъ случаяхъ функціи $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ всегда будутъ однозначными.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго мы можемъ только утверждать, что во всѣхъ случаяхъ, отличныхъ отъ этихъ трехъ, между системами значеній $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, *дѣлающими модули разностей*

$$p_0-\frac{a}{t_0},\quad q_0-\frac{b}{t_0},\quad r_0-\frac{c}{t_0},\quad \xi_0-\frac{f}{t_0^2},\quad \eta_0-\frac{g}{t_0^2},\quad \zeta_0-\frac{h}{t_0^2}$$

при одной изъ разсматривавшихся системъ значеній a, b, c, f, g, h *достаточно малыми*, всегда найдутся такія, при которыхъ функціи $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ не будутъ однозначными.

Но для всѣхъ разсматривавшихся системъ значеній a, b, c, f, g, h [какъ и для всякихъ другихъ, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ вида (4)], каково бы ни было t_0, изъ величинъ

$$\frac{a}{t_0},\quad \frac{b}{t_0},\quad \frac{c}{t_0},\quad \frac{f}{t_0^2},\quad \frac{g}{t_0^2},\quad \frac{h}{t_0^2}$$

хотя одна всегда выходитъ мнимою. Поэтому въ числѣ указанныхъ сейчасъ системъ значенiй $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ можетъ вовсе не оказаться такихъ, для которыхъ значенiя эти всѣ были бы вещественными.

Чтобы воспользоваться нашею методой для рѣшенiя вопроса въ предположенiи вещественности $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$, мы должны для составленiя системы (3) вмѣсто разсматривавшихся брать какiя либо другiя рѣшенiя системы (1), съ вещественными начальными значенiями для функцiй $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$.

Тогда разсматривая уравненiя (3), мы можемъ быть увѣрены, что всякое условiе, необходимое для однозначности функцiй u, v, w, x, y, z при какихъ бы то ни было начальныхъ значенiяхъ въ какой либо области, не содержащей особенныхъ точекъ коэффицiентовъ этихъ уравненiй, есть вмѣстѣ съ тѣмъ условiе, необходимое для однозначности функцiй $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ при всякихъ вещественныхъ начальныхъ значенiяхъ.

7. Изъ рѣшенiй системы (1), обладающихъ требуемымъ свойствомъ, мы можемъ указать во первыхъ всѣ тѣ, которыя опредѣляются уравненiями:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}&=(B-C)qr,\\ B\frac{dq}{dt}&=(C-A)rp,\\ C\frac{dr}{dt}&=(A-B)pq,\\ \xi=\eta&=\zeta=0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

при вещественныхъ p_0, q_0, r_0, и слѣдовательно даютъ для p, q, r такiя же выраженiя, какъ и въ вопросѣ о вращательномъ движенiи твердаго тѣла по инерцiи.

Для того, чтобы въ числѣ рѣшенiй этого рода существовали обладающiя особенными точками, какъ это необходимо для нашей методы, постоянныя A, B, C должны быть всѣ различными.

Тогда за исключенiемъ нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, относящихся къ значенiямъ величинъ p_0, q_0, r_0, функцiи p, q, r будутъ обладать особенными точками, и всѣ эти особенныя точки будутъ полюсами. Разложенiя же функцiй p, q, r вблизи всякаго полюса $t=\tau$ по степенямъ $t-\tau$ будутъ вида

$$p=\frac{a}{t-\tau}+a'+a''(t-\tau)+\ldots,$$

$$q=\frac{b}{t-\tau}+b'+b''(t-\tau)+\ldots,$$

$$r=\frac{c}{t-\tau}+c'+c''(t-\tau)+\ldots,$$

гдѣ a, b, c будутъ имѣть тѣ или другія величины, выводимыя изъ формулъ (5).

Когда между числами α, β, γ хотя одно есть нуль, мы можемъ указать еще рѣшенія другого рода, а именно: рѣшенія, опредѣляющія движенія, свойственныя физическому маятнику.

Если напримѣръ мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда $\beta = 0$, рѣшенія эти опредѣлятся уравненіями:

$$p = r = \eta = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} = \gamma\xi - \alpha\zeta,$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -q\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = q\xi,$$

въ предположеніи, что q_0, ξ_0, ζ_0 вещественны.

Для того, чтобы между этими рѣшеніями существовали обладающія особенными точками, изъ чиселъ α и γ по крайней мѣрѣ одно должно быть отличнымъ отъ нуля.

Тогда, если исключить нѣкоторыя частныя предположенія относительно величинъ q_0, ξ_0, ζ_0, функціи q, ξ, ζ будутъ обладать особенными точками, которыя всѣ будутъ полюсами; а разложенія этихъ функцій вблизи всякаго полюса $t = \tau$ будутъ вида:

$$q = \frac{b}{t-\tau} + b' + b''(t-\tau) + \ldots,$$

$$\xi = \frac{f}{(t-\tau)^2} + \frac{f'}{t-\tau} + f'' + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{h}{(t-\tau)^2} + \frac{h'}{t-\tau} + h'' + \ldots,$$

гдѣ b, f, h опредѣлятся по формуламъ (6).

Таковы будутъ рѣшенія, которыми мы теперь воспользуемся взамѣнъ рѣшеній типа (4).

8. Останавливаясь на какомъ либо изъ указанныхъ сейчасъ рѣшеній системы (1) и разсматривая соотвѣтствующую ему систему (3) вблизи какого либо изъ полюсовъ ея коэффиціентовъ, нетрудно замѣтить, что она будетъ принадлежать къ классу системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ исключительно правильными рѣшеніями.

Дѣйствительно, всѣ рѣшенія системы (1), которыми мы здѣсь пользуемся, таковы, что вблизи всякаго ихъ полюса $t=\tau$ имѣютъ мѣсто разложенія вида:

$$\begin{aligned}(t-\tau)p &= a+a'(t-\tau)+\ldots,\\ (t-\tau)q &= b+b'(t-\tau)+\ldots,\\ (t-\tau)r &= c+c'(t-\tau)+\ldots,\\ (t-\tau)^2\xi &= f+f'(t-\tau)+\ldots,\\ (t-\tau)^2\eta &= g+g'(t-\tau)+\ldots,\\ (t-\tau)^2\zeta &= h+h'(t-\tau)+\ldots.\end{aligned}$$

Поэтому, если положимъ

$$u=x_1,\qquad v=x_2,\qquad w=x_3,$$
$$(t-\tau)x=x_4,\qquad (t-\tau)y=x_5,\qquad (t-\tau)z=x_6$$

и затѣмъ, измѣнивши для упрощенія формулъ обозначеніе независимаго перемѣннаго, вмѣсто $t-\tau$ будемъ писать t, то система (3) приведется къ виду:

$$t\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(t)x_1+P_{s2}(t)x_2+\ldots+P_{s6}(t)x_6,$$
$$(s=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6)$$

гдѣ $P_{sj}(t)$ означаютъ функціи t, способныя при достаточно маломъ $|t|$ представляться рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ t.

Такимъ образомъ система (3) привелась къ каноническому виду системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, всѣ рѣшенія которыхъ вблизи точки $t=0$ суть правильныя *).

Для такихъ системъ всегда легко найти всѣ условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы во всякомъ ихъ рѣшеніи опредѣляемыя ими функціи вблизи точки $t=0$ были однозначными.

Для нашей цѣли однако же нѣтъ надобности разсматривать всѣ условія этого рода, а достаточно обратить вниманіе на одно изъ необходимыхъ, которое состоитъ въ томъ, чтобы функціи x_s, опредѣляемыя слѣдующею системою линейныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}t\frac{dx_s}{dt}=P_{s1}(0)x_1+P_{s2}(0)x_2+\ldots+P_{s6}(0)x_6\\ (s=1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6)\end{aligned}\right\}\qquad\textbf{(11)}$$

во всякомъ рѣшеніи этой системы были однозначными.

---

*) Относительно такихъ системъ уравненій можно между прочимъ указать на изслѣдованія Sauvage (Ann. scientif. de l'école norm. super., 3 série, tomes 3, 5 et 6).

Но система (11) есть та самая, которую при различныхъ предположеніяхъ относительно a, b, c, f, g, h мы разсматривали въ предыдущихъ параграфахъ, и изслѣдованіе которой насъ привело только къ извѣстнымъ тремъ случаямъ.

Мы можемъ поэтому утверждать, что случаи эти суть единственные, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ однозначны при всякихъ вещественныхъ начальныхъ значеніяхъ.

9. Въ послѣднихъ параграфахъ, предполагая p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 вещественными, мы не подчиняли ихъ, кромѣ этого, никакимъ другимъ условіямъ.

Но въ вопросѣ механики, который приводитъ къ уравненіямъ (1), величины ξ, η, ζ означаютъ косинусы угловъ нѣкотораго направленія съ тремя взаимно перпендикулярными осями. Поэтому функціи ξ, η, ζ, а слѣдовательно и ихъ начальныя значенія ξ_0, η_0, ζ_0 должны быть таковы, чтобы ихъ сумма квадратовъ была равною 1.

Является вопросъ, не существуетъ ли какихъ либо новыхъ случаевъ, въ которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ выходили бы однозначными при всякихъ вещественныхъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, удовлетворяющихъ соотношенію

$$\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2=1,$$

и вопросъ этотъ тѣмъ болѣе умѣстенъ, что когда A, B, C всѣ различны, а изъ чиселъ α, β, γ ни одно не нуль, возможность многозначныхъ рѣшеній уравненій (1) была нами доказана только въ предположеніи, что численныя значенія величинъ ξ_0, η_0, ζ_0 достаточно малы.

Небольшое размышленіе приводитъ, однако, тотчасъ же къ отрицательному отвѣту на этотъ вопросъ.

Дѣйствительно, на основаніи предыдущаго во всякомъ случаѣ, который не приводится къ одному изъ извѣстныхъ трехъ, величинамъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 всегда можно приписать такія вещественныя значенія, при которыхъ функціи p, q, r, ξ, η, ζ (всѣ или только нѣкоторыя) не будутъ однозначными.

Пусть же въ какомъ либо изъ такихъ случаевъ уравненіями

$$p=f_1(t),\qquad q=f_2(t),\qquad r=f_3(t),$$
$$\xi=\varphi_1(t),\qquad \eta=\varphi_2(t),\qquad \zeta=\varphi_3(t),$$

представляется одно изъ многозначныхъ рѣшеній, соотвѣтствующихъ вещественнымъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0.

Какъ и во всякомъ другомъ рѣшеніи системы (1), функціи ξ, η, ζ, опредѣляемыя этими уравненіями, будутъ удовлетворять соотношенію

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\sigma^2,$$

гдѣ σ нѣкоторое постоянное. Для нашего же рѣшенія постоянное это навѣрно будетъ отличнымъ отъ нуля, ибо въ противномъ случаѣ вслѣдствіе предположенной вещественности величинъ ξ_0, η_0, ζ_0 мы имѣли бы

$$\xi_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0,$$

а тогда рѣшеніе наше необходимо совпадало бы съ однимъ изъ рѣшеній, опредѣляемыхъ уравненіями (10), и слѣдовательно, противно допущенному, не было бы многозначнымъ.

Если же σ не нуль, мы можемъ составить уравненія

$$p = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \xi = \frac{1}{\sigma} \varphi_1\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \eta = \frac{1}{\sigma} \varphi_2\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} f_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right), \qquad \zeta = \frac{1}{\sigma} \varphi_3\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{\sigma}} + t_0\right),$$

и уравненіями этими опредѣлится, какъ нетрудно видѣть, также нѣкоторое рѣшеніе системы (1). А рѣшеніе это при σ положительномъ соотвѣтствуетъ вещественнымъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0, удовлетворяющимъ соотношенію

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

и по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ выходятъ въ немъ навѣрно многозначными.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему выводу:

Всякій разъ, когда при вещественныхъ A, B, C, α, β, γ и при отличныхъ отъ нуля A, B, C мы не имѣемъ дѣло ни съ однимъ изъ трехъ извѣстныхъ случаевъ, начальнымъ значеніямъ p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 функцій p, q, r, ξ, η, ζ всегда можно приписать такія вещественныя величины, согласныя съ условіемъ

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1,$$

при которыхъ по крайней мѣрѣ нѣкоторыя изъ функцій p, q, r, ξ, η, ζ не будутъ однозначными.