О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій.

П. Н. Рахманова.

§ 1. Для нахожденія высшихъ предѣловъ положительныхъ корней численныхъ уравненій въ настоящее время существуетъ уже нѣсколько способовъ. Въ предлагаемой статьѣ мы даемъ еще два новыхъ способа, которые иногда для названныхъ предѣловъ даютъ величину менѣе высокую, чѣмъ другіе. Кромѣ того, здѣсь же мы указываемъ на одинъ довольно общій случай, когда высшимъ предѣломъ положительныхъ корней будетъ единица.

§ 2. Первый способъ. Положимъ, что въ цѣлой раціональной функціи

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

коэффиціенты

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{m-1}$$

всѣ положительные, а коэффиціентъ a_m — первый отрицательный; тогда очевидно, что, полагая $x>1$, будемъ имѣть:

$$f(x)>\sum_{k=0}^{k=m-1}a_k\cdot x^{n-m+1}+a_mx^{n-m}+a_{m+1}x^{n-m-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\,. \quad (1)$$

Обозначимъ теперь численно наибольшій отрицательный коэффиціентъ данной функціи чрезъ $-a_p$; тогда говоримъ, что при всякомъ $x>0$, очевидно, будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sum_{k=0}^{k=m-1}a_k\cdot x^{n-m+1}+a_mx^{n-m}+a_{m+1}x^{n-m-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n>$$

$$>\sum_{k=0}^{k=m-1}a_k\cdot x^{n-m+1}-a_p\left(x^{n-m}+x^{n-m-1}+\ldots+x+1\right)\,.\;.\;.\;(2)$$

На основаніи (2) и (1) ясно, что всѣ тѣ значенія $x > 1$, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k \cdot x^{n-m+1} - a_p\,(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + x + 1) > 0\,, \quad . \; . \; (3)$$

à fortiori удовлетворяютъ и неравенству

$$f(x) > 0\,.$$

Но неравенству (3), по теоремѣ: „всегда можно найти столь большое положительное значеніе x, что знакъ всего полинома будетъ одинаковъ со знакомъ члена съ наивысшей степенью x“, удовлетворяетъ

$$x > 1 + \frac{a_p}{\sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k};$$

слѣдовательно, за высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія

$$f(x) = 0$$

можно принять выраженіе:

$$1 + \frac{a_p}{\sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k}.$$

Примѣръ:

$$4x^{10} + 696x^9 - 800x^8 - 100x^4 + 21x^2 - 2100 = 0\,.$$

Здѣсь

$$1 + \frac{a_p}{\sum\limits_{k=0}^{k=m-1} a_k} = 1 + \frac{2100}{4 + 696} = 4\,;$$

значитъ искомый предѣлъ будетъ 4.

§ 3. Второй способъ. Возьмемъ цѣлую раціональную функцію въ видѣ

$$F(x) = a_{n_0} x^{n_0} + a_{n_1} x^{n_1} + a_{n_2} x^{n_2} + \ldots + a_{n_{v-1}} x^{n_{v-1}} + a_{n_v},$$

гдѣ

$$n_0 > n_1 > n_2 > \ldots$$

Функцію эту мы можемъ представить такъ:

$$F(x)=f_1(x)-\varphi_1(x)+f_2(x)-\varphi_2(x)+\ldots+f_m(x)-\varphi_m(x),$$

гдѣ подъ $f_k(x)$ слѣдуетъ разумѣть суммы положительныхъ, рядомъ стоящихъ, членовъ, а подъ $-\varphi_k(x)$ — суммы отрицательныхъ, рядомъ стоящихъ, членовъ. Назовемъ чрезъ r_k показателя степени x въ послѣднемъ членѣ функціи $f_k(x)$ и чрезъ ρ_k — показателя степени x въ первомъ членѣ функціи $\varphi_k(x)$; назовемъ далѣе, чрезъ s_k сумму всѣхъ коэффиціентовъ функціи $f_k(x)$ и чрезъ σ_k — сумму всѣхъ коэффиціентовъ функціи $\varphi_k(x)$. Тогда, предполагая $x \geqq 1$, будемъ имѣть:

$$F(x) \geqq s_1x^{r_1}-\sigma_1x^{\rho_1}+s_2x^{r_2}-\sigma_2x^{\rho_2}+\ldots+s_mx^{r_m}-\sigma_mx^{\rho_m}. \quad . \quad (4)$$

Отсюда ясно, что всѣ тѣ значенія $x \geqq 1$, которыя удовлетворяютъ неравенству

$$s_1x^{r_1}-\sigma_1x^{\rho_1}+s_2x^{r_2}-\sigma_2x^{\rho_2}+\ldots+s_mx^{r_m}-\sigma_mx^{\rho_m}>0, \quad . \quad . \quad (5)$$

удовлетворятъ также и неравенству:

$$F(x)>0.$$

Но неравенству (5), какъ легко видѣть, удовлетворяетъ x, величина котораго больше наибольшаго изъ слѣдующихъ выраженій:

$$\sqrt[r_1-\rho_1]{\frac{\sigma_1}{s_1}}, \quad \sqrt[r_2-\rho_2]{\frac{\sigma_2}{s_2}}, \ldots, \sqrt[r_m-\rho_m]{\frac{\sigma_m}{s_m}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

значитъ наибольшее изъ выраженій (6) можетъ быть принято за высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія:

$$F(x)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Само собою разумѣется, что въ томъ частномъ случаѣ, когда всѣ подрадикальныя дроби

$$\frac{\sigma_1}{s_1}, \quad \frac{\sigma_2}{s_2}, \ldots, \frac{\sigma_m}{s_m}$$

будутъ правильныя, за высшій предѣлъ положительныхъ корней слѣдуетъ взять единицу.

Примѣръ:

$$x^7 - 9x^5 + 7x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 400x - 1 = 0$$

Здѣсь

$$\sqrt[r_1-\rho_1]{\frac{\sigma_1}{s_1}} = \sqrt[7-5]{\frac{9}{1}} = 3$$

$$\sqrt[r_2-\rho_2]{\frac{\sigma_2}{s_2}} = \sqrt[4-3]{\frac{6+8}{7}} = 2\,,$$

$$\sqrt[r_3-\rho_3]{\frac{\sigma_3}{s_3}} = \sqrt[1-0]{\frac{1}{400}} = \frac{1}{400}\,.$$

Наибольшее изъ этихъ выраженій есть первое, а потому искомый предѣлъ есть число 3.

§ 4. Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что если коэффиціенты уравненія (7) удовлетворяютъ условію

$$s_k - \sigma_k \geqq 0$$

для всѣхъ значеній

$$k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots\,,\ m\,,$$

то высшимъ предѣломъ положительныхъ корней будетъ единица. Покажемъ теперь, что предѣлъ этотъ будетъ равняться единицѣ и въ томъ болѣе общемъ случаѣ, когда между коэффиціентами уравненія существуетъ рядъ соотношеній вида

$$\sum_{k=1}^{k=i}(s_k - \varrho_k) \geqq 0\,,\quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

гдѣ

$$i = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots\,,\ m\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x \geqq 1$, будемъ имѣть, во 1-хъ, знакомое уже намъ неравенство или равенство

$$F(x) \geqq \sum_{k=1}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \varrho_k x^{\rho_k})\,,\quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

и во 2-хъ, на основаніи (A), еще такой рядъ неравенствъ или равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{k=1}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq (s_1 - \sigma_1) x^{\rho_1} + \sum_{k=2}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_1 x^{\rho_k}) \\
(s_1 - \sigma_1) x^{\rho_1} + \sum_{k=2}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq \sum_{k=1}^{k=2}(s_k - \sigma_k) x^{\rho_2} + \sum_{k=3}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \\
\sum_{k=1}^{k=2}(s_k - \sigma_k) x^{\rho_2} + \sum_{k=3}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \geqq \sum_{k=1}^{k=3}(s_k - \sigma_k) x^{\rho_3} + \sum_{k=4}^{k=m}(s_k x^{r_k} - \sigma_k x^{\rho_k}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{k=1}^{k=m-1}(s_k - \sigma_k) x^{\rho_{m-1}} + s_m x^{r_m} - \sigma_m x^{\rho_m} \geqq \sum_{k=1}^{k=m}(s_k - \sigma_k) x^{\rho_m}.
\end{array}\right\} (8)$$

Теперь, по условію,

$$\sum_{k=1}^{k=m}(s_k - \sigma_k) \geqq 0\,;$$

слѣдовательно, при всякомъ положительномъ значеніи x

$$\sum_{k=1}^{k=m}(s_k - \sigma_k) x^{\rho_m} \geqq 0\,.$$

А если это такъ, то, въ силу (4) и (8), для $x \geqq 1$

$$F(x) \geqq 0\,.$$

Такимъ образомъ, высшимъ предѣломъ положительныхъ корней уравненія (7), при соблюденіи условій (А), дѣйствительно будетъ единица, что и требовалось доказать.

§ 5. Намъ кажется, что, прежде чѣмъ прилагать къ данному уравненію какой-либо способъ для нахожденія высшаго предѣла его положительныхъ корней, необходимо сперва посмотрѣть, не удовлетворяютъ ли коэффиціенты этого уравненія условіямъ (А), ибо въ противномъ случаѣ мы будемъ рисковать получить искомый предѣлъ слишкомъ высокимъ. Въ справедливости только-что сказаннаго можно убѣдиться на слѣдующемъ примѣрѣ:

$$x^{10} - x^9 + 445x^8 - 86x^7 - 64x^6 + 2x^5 - 96x^4 + 3x^3 - 88x^2 + 12x - 100 + 0\,,$$

гдѣ коэффиціенты удовлетворяютъ условіямъ (А).