Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ профессору К. А. Андрееву *)

Въ послѣдней книжкѣ „Сообщеній Харьковскаго Матем. Общества" помѣщена статья, найденная въ бумагахъ академика В. Г. Имшенецкаго. Осмѣливаюсь высказать убѣжденіе, что академикъ В. Г. Имшенецкій никогда не публиковалъ бы этой статьи . . . .

. . . .

Заблужденія содержащіяся въ статьѣ „Сравненіе способа профес. Н. В. Бугаева съ другими . . . " выясняются слѣдующими примѣрами.

Примѣръ 1.

Придерживаясь обозначеній разбираемой статьи, положимъ:

$$L = 3 + x\,,\ \ M = 2 - (3+x)(2 - x + x^2),\ \ N = (1 + x^2)(3 + x)^2\,,$$
$$P = 2(3+x)(1+x^2) - 2(3+x)^2\,,\ \ Q = -2 + x - x^2 + 3(3+x)\,,$$
$$R = -1\,.$$

Тогда

$$M_1 = -(3+x)(2-x+x^2)\,,\ \ Q_1 = (3+x)(2+2x)\,,$$
$$P_1 = -(2+2x)(3+x)^2\,,$$

и

$$v = 3 + x$$

будетъ такимъ общимъ дѣлителемъ функцій

$$L\,,\ M_1 \text{ и } Q_1$$

*) Въ настоящемъ извлеченіи точками обозначены тѣ мѣста письма, которыя распорядительный комитетъ Общества не нашелъ возможнымъ печатать. *Ред.*

наивысшей степени, квадратъ котораго дѣлитъ

$$N \text{ и } P_1 .$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ предложенное дифференціальное уравненіе

$$Ly'' + (M + 2Ny)y' + Py^2 + Qy + R = 0$$

допускаетъ рѣшеніе

$$y = \frac{1}{3+x},$$

числитель котораго 1 удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (III) или равносильному ему (IV)

$$(lz)'' + (m_1 z)' + q_1 z + (nz^2)' + p_1 z^2 + R = 0 ,$$

гдѣ

$$l = 1 , \ m_1 = -2 + x - x^2 , \ q_1 = 2 + 2x , \ n = 1 + x^2$$

$$p_1 = -2 - 2x , \ R = -1 .$$

И въ силу сказаннаго на стр. 65 („Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія) послѣднее дифференціальное уравненіе не можетъ допускать дробныхъ рѣшеній.

Въ дѣйствительности же оно допускаетъ рѣшеніе

$$z = \frac{1}{x} .$$

Ошибка автора состоитъ въ томъ, что функціи

$$l_2 , \ m_3 , \ q_3 , \ n_2 , \ p_3$$

могутъ быть и дробными, авторъ же предполагаетъ ихъ непремѣнно цѣлыми.

Примѣръ 2.

Возьмемъ:

$$L = (1 + x) , \ M_1 = (1 + x)(1 - x + x^2) , \ Q_1 = 2(1 + x)(1 - x) ,$$

$$N = (1 + x)^2 (1 + x^2 + x^4) , \ P_1 = (1 + x)^2 (1 - 2x - 4x^3) ,$$

$$R = 1 + 2x$$

и приложимъ способъ, указанный въ § 6 разбираемой статьи, къ разысканію раціональныхъ рѣшеній уравненія

$$(Ly)'' + (M_1 y)' + Q_1 y + (Ny^2)' + P_1 y^2 + R = 0 \ldots \ldots \text{(A)}$$

*

Въ данномъ случаѣ общій дѣлитель наивысшей степени для

$$L, M_1 \text{ и } Q_1$$

равенъ

$$1+x$$

и квадратъ его дѣлитъ

$$N \text{ и } P_1.$$

Поэтому, согласно правилу § 6, мы должны перейти къ уравненію

$$\left(\frac{Lz}{1+x}\right)'' + \left(\frac{M_1 z}{1+x}\right)' + \frac{Q_1 z}{1+x} + \left(\frac{Nz^2}{(1+x)^2}\right)' + \frac{P_1 z^2}{(1+x)^2} + R = 0,$$

т. е. къ уравненію

$$z'' + [1 - x + x^2 + 2(1 + x^2 + x^4)z]z' + z^2 + z + 1 + 2x = 0,$$

и искать для него цѣлыя рѣшенія.

Но цѣлыхъ рѣшеній послѣднее уравненіе не допускаетъ.

И потому, согласно утвержденіямъ стр. 69 разбираемой статьи, не можетъ быть сомнѣнія, что предложенное уравненіе (А) не допускаетъ раціональныхъ рѣшеній.

Въ дѣйствительности же оно допускаетъ рѣшеніе

$$y = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что знаменатель v дробнаго рѣшенія

$$y = \frac{u}{v}$$

дифференціальнаго уравненія

$$(Ly)'' + (M_1 y)' + Q_1 y + (Ny^2)' + P_1 y^2 + R = 0$$

можетъ заключать такіе простые множители, которые не дѣлятъ ни одну изъ цѣлыхъ функій

$$L,\ M_1,\ Q_1,\ N,\ P_1,\ M,\ Q \text{ и } P.$$

Эти множители представляютъ одно изъ главныхъ затрудненій, которое въ статьѣ „Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими“ оставлено вовсе безъ вниманія . . . . . .

. . . . . Если уже для уравненій линейныхъ эти пріемы не только уступаютъ естественнымъ пріемамъ Ліувилля, но и требуютъ, какъ показали проф. К. А. Поссе и П. А. Некрасовъ *), существенныхъ измѣненій **), то перенесеніе ихъ на уравненія нелинейныя едва ли можетъ принести большую пользу.

Здѣсь считаю необходимымъ оговориться, что до сихъ поръ неизвѣстно такихъ пріемовъ, которые давали бы для всякаго дифференціальнаго уравненія полное рѣшеніе вопроса, допускаетъ ли оно раціональныя рѣшенія или нѣтъ.

Однако, для одного изъ классовъ уравненій, упоминаемыхъ академикомъ В. Г. Имшенецкимъ, это можно сдѣлать довольно просто, пользуясь, конечно, иными пріемами.

Я говорю объ уравненіяхъ, получаемыхъ изъ однородныхъ линейныхъ извѣстною подстановкою

$$\frac{y'}{y} = z \, .$$

О разысканіи раціональныхъ рѣшеній такихъ уравненій мною было сдѣлано сообщеніе въ С.-Петербургскомъ Матем. Обществѣ, вѣроятно, въ ноябрѣ 1891 года . . . . . .

. . . . . Сущность моего сообщенія можно найти въ Comptes-Rendus за 1891 годъ.

Здѣсь обнаруживается тотъ важный фактъ, что нѣкоторую дробную часть рѣшенія приходится отыскивать послѣ всего.

И потому предварительное опредѣленіе знаменателя едва ли возможно.

---

*) Математическій Сборникъ, Т. XVII.

**) Измѣненіе множителя сдѣлало пріемы Имшенецкаго равносильными пріемамъ Ліувилля. *(Примѣч. автора)*.