

Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи рациональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

(Отвѣтъ на критику академика А. А. Маркова).

Б. А. Андреева *).

Покойный академикъ В. Г. Имшенецкій за нѣсколько мѣсяцевъ до своей смерти возымѣлъ намѣреніе приложить тѣ руководящія идеи, которымъ онъ слѣдовалъ въ своихъ работахъ по разысканію рациональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ подобнымъ же цѣлямъ относительно нѣкоторыхъ видовъ уравненій нелинейныхъ. Примѣры, на которые онъ прежде всего обратилъ по этому поводу свое вниманіе, показали ему, что иногда это приложеніе оказывается возможнымъ; и вотъ осенью 1891 года онъ рѣшился изложить въ засѣданіи Петербургскаго Математическаго Общества, тогда еще не бывшаго официально утвержденнымъ, какъ свои общія соображенія, такъ и примѣры.

О томъ, что это дѣйствительно было имъ сдѣлано, и именно въ октябрѣ 1891 года, я получилъ увѣдомленіе отъ него самого въ письмѣ отъ 17 октября. Вслѣдствіе этого я былъ почти увѣренъ, что въ бумагахъ покойнаго ученаго должны были сохраниться слѣды этихъ работъ его мысли.

При разборѣ этихъ бумагъ я дѣйствительно нашель двѣ рукописи, посвященныя названному вопросу. Одна была переписана начисто и какъ бы приготовлена къ печати, но представляла нѣкоторыя недо-

*) Статья эта ранѣе ея доклада Обществу разсматривалась распорядительнымъ комитетомъ. По желанію послѣдняго въ ней сдѣланы нѣкоторыя сокращенія. *Ред.*

статки изложения. Другая имѣла внѣшность менѣе обработанную. По содержанию обѣ онѣ оказались въ значительной части сходными.

Зная, что эти рукописи содержатъ то самое, что уже было предметомъ устнаго сообщенія ученому Обществу, я ни на минуту не сомнѣвался, что содержание ихъ, какъ бы оно ни было несовершенно по формѣ и недостаткамъ внутренняго характера, составляетъ уже достояніе науки и, какъ таковое, подлежитъ напечатанію.

Выбрать для опубликованія только одну изъ двухъ рукописей оказалось невозможнымъ, потому что онѣ во многомъ дополняютъ одна другую. То, что въ первой можетъ показаться совершенно непонятнымъ, выясняется при чтеніи второй, и наоборотъ, недосказанное во второй можно найти въ первой. Вслѣдствіе этого, воспользовавшись совѣтомъ профессора П. А. Некрасова, я рѣшился напечатать ихъ обѣ, какъ двѣ редакціи одной и той же работы. При этомъ изъ второй рукописи были выпущены вступленіе, одинаковаго содержания съ вступленіемъ первой и подавшее, очевидно, автору поводъ къ не вполне удачному заглавію*), и нѣкоторые примѣры.

Что произведеніе акад. В. Г. Имшенецкаго, заключающееся въ этихъ рукописяхъ, есть трудъ далеко незаконченный и представляющій нѣкоторыя несовершенства, для меня не подлежало сомнѣнію. Къ тому же я зналъ, что такъ смотрѣлъ на него и самъ авторъ, писавшій 15-го марта 1892 года въ письмѣ къ проф. Н. В. Бугаеву: „Я предполагалъ еще поработать надъ предложеннымъ мною приемомъ, чтобы его дополнить“.

Это обстоятельство не можетъ, однако, уменьшить, на мой взглядъ, интереса къ произведенію столь выдающагося ученаго и не отклонило меня отъ его изданія, хотя я и предвидѣлъ возможность неблагоприятной для него критики.

Всякій, желающій взять на себя роль критика посмертнаго произведенія, не долженъ, по моему мнѣнію, упускать изъ виду, что отъ автора онъ уже не можетъ получить разъясненія какихъ-либо недоразумѣній. Въ такихъ условіяхъ необходима крайняя осторожность, чтобы не приписать автору тѣхъ намѣреній, какихъ у него не было и не придать словамъ его того значенія, какого онъ самъ не подразумѣвалъ.

Едва появилась въ печати работа акад. В. Г. Имшенецкаго, какъ акад. А. А. Марковъ пожелалъ выступить противъ нея съ критикою, указывающею исключительно на ея недостатки и не имѣющею въ то же

*) Это заглавіе, не смотря на его несоотвѣтствіе съ существенною частью содержанія работы, указываетъ съ одной стороны на генезисъ мыслей автора, начавшаго свои изслѣдованія съ критическаго взгляда на приемъ проф. Н. В. Бугаева, а съ другой на то, что скромной задачей автора было прежде всего выяснить возможность получать иногда его способомъ результаты быстрѣе, чѣмъ при помощи способовъ, основанныхъ на употребленіи непрерывныхъ дробей.

время признаковъ осторожности, о которой только что было сказано. Критика эта составляетъ содержаніе письма, предназначавшагося его авторомъ къ напечатанію въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общества“ и помѣщеннаго выше въ извлеченіи (см. стр. 146—149).

Издавши недоконченную работу акад. В. Г. Имшенецкаго, я предполагалъ въ особой своей статьѣ, посвященной обзору его дѣятельности, представить рядъ замѣчаній въ формѣ комментарія, имѣя въ виду, главнымъ образомъ, связь идей автора въ этомъ и предыдущихъ его произведеніяхъ. Критика академика А. А. Маркова вынуждаетъ меня приступить къ осуществленію этого намѣренія ранѣе, чѣмъ я предполагалъ, и притомъ не независимо, а въ видѣ отвѣта на эту критику.

Критическій приѣмъ академика А. А. Маркова простъ и коротокъ. Онъ приводитъ два примѣра, допускающіе рѣшенія, существованія которыхъ, по буквальному смыслу двухъ, въ отдѣльности взятыхъ, мѣсть статьи акад. В. Г. Имшенецкаго, предположить нельзя, и утверждаетъ, что этимъ выясняются заблужденія и ошибки покойнаго автора.

Такое отношеніе къ дѣлу я рѣшаюсь назвать формальнымъ и объясняю его себѣ только тѣмъ, что критикующій не всмотрѣлся въ работу акад. В. Г. Имшенецкаго достаточно внимательно.

Съ своей стороны, разобравши еще разъ подробно все, что находится въ обѣихъ редакціяхъ статьи акад. В. Г. Имшенецкаго, я прихожу къ заключенію, что примѣрами акад. А. А. Маркова не выясняется ничего, такъ какъ эти примѣры потому уже не противорѣчатъ истинному смыслу утвержденій статьи, что вовсе ему не соотвѣтствуютъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, я не нахожу въ этой статьѣ ни ошибокъ, ни заблужденій, а усматриваю, какъ и прежде, лишь недоконченность всей работы, да погрѣшности изложенія, отнюдь не обусловливающіяся какою-либо неправильностью сужденій, т. е. недостатки, вполне естественные въ произведеніи, за разработкою котораго автора застигла смерть.

Чтобы подтвердить все это, необходимо войти въ подробности.

Если изучающій приемы акад. В. Г. Имшенецкаго въ вопросѣ о разысканіи рациональныхъ частныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій пожелаетъ безпристрастно *) усвоить себѣ весь ходъ его идей, то долженъ прежде всего обратить свое вниманіе на слѣдующее.

Положивши въ основаніе своего приѣма особое преобразование уравненія, которое можно было бы назвать подведеніемъ коэффициентовъ при производныхъ подъ знакъ дифференцированія, покойный авторъ ограничиваетъ сперва свои дальнѣйшія изысканія лишь тѣми случаями,

*) Здѣсь разумѣется пристрастіе не личное, а идейное, т. е. склонность предпочитать одинъ образъ мыслей, болѣе намъ привычный, другому, съ которымъ нужно еще освоиться.

когда это преобразование приводит къ нахожденію знаменателя искомаго интеграла *непосредственно*, т. е. будучи примѣнено къ уравненію, взятому въ его заданномъ видѣ. Затѣмъ слѣдуетъ примѣненіе того-же приѣма къ уравненію, помноженному на нѣкоторый множитель. Обѣ эти стадіи сужденій проходятся покойнымъ ученымъ отдѣльно и въ названнй послѣдовательности, какъ въ его статьяхъ, относящихся къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, такъ и въ разбираемой теперь, найденной послѣ его смерти, работѣ.

Хотя въ первой редакціи этой работы объ этой послѣдовательности сужденій и не упоминается столь-же обстоятельно, какъ въ статьяхъ о линейныхъ уравненіяхъ, но внимательный читатель все же легко замѣтитъ, что эта послѣдовательность имѣетъ здѣсь мѣсто, и что все, что говорится въ параграфахъ 4-мъ и 5-мъ, относится къ первой или предварительной стадіи сужденій. Во второй редакціи эта предварительная часть значительно сокращена, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, указаніе на названное раздѣленіе приѣма сдѣлано отчетливо (см. стр. 73).

Только принимая во вниманіе все сейчасъ сказанное, можно понять точный смыслъ того, что говорится въ 4-мъ параграфѣ первой редакціи, не преувеличивая, какъ это дѣлаетъ акад. А. А. Марковъ, общности дѣлаемыхъ здѣсь заключеній.

Заданное уравненіе трактуется В. Г. Имшенецкимъ, очевидно, какъ допускающее такое рѣшеніе $y = \frac{u}{v}$, знаменатель котораго *можетъ быть определенъ непосредственно*, что ясно указывается вторымъ условіемъ высказываемой теоремы, условіемъ, поставленнымъ въ концѣ ея. О такихъ только рѣшеніяхъ и говорится въ этомъ параграфѣ вообще. Въ этомъ ограниченномъ смыслѣ нужно, слѣдовательно, понимать слово рѣшеніе и въ утвержденіи: „Легко показать, что уравненіе (III) не можетъ имѣть раціональнаго дробнаго рѣшенія $z = \frac{u_1}{v_1}$ “, а также и въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ, служащихъ ему доказательствомъ.

Академикъ А. А. Марковъ, очевидно, понимаетъ это утвержденіе не въ такомъ относительномъ смыслѣ, а совершенно абсолютно, что видно изъ его словъ, которыми онъ заключаетъ свой примѣръ, служащій, по его мнѣнію, опроверженіемъ этого утвержденія:

„Ошибка автора состоитъ въ томъ, что функціи l_2, m_3, q_3, n_2, p_3 могутъ быть и дробными, авторъ же предполагаетъ ихъ непремѣнно цѣлыми“.

Я нахожу, напротивъ, что самъ критикъ впадаетъ здѣсь въ ошибку, игнорируя, что въ способѣ В. Г. Имшенецкаго существуетъ еще примѣненіе интегрирующаго множителя, назначеніе котораго въ томъ и состоитъ, чтобы случаи, когда функціи l_2, m_3, \dots могутъ быть дробными, приводить къ случаямъ, когда онѣ цѣлыя.

Въ той части работы, гдѣ ведутся теоретическія разсужденія о рѣшеніяхъ, находимыхъ *безъ посредства множителя*, авторъ имѣлъ, слѣдовательно, полное право считать названныя функціи цѣлыми.

Сказаннымъ я не желаю утверждать, что въ статьѣ акад. В. Г. Имшенецкаго существуютъ указанія, слѣдующія которымъ можно найти интегрирующій множитель въ примѣрѣ акад. А. А. Маркова. Вопросы о томъ, приводитъ-ли способъ В. Г. Имшенецкаго всегда къ нахожденію существующаго рациональнаго рѣшенія, я коснусь ниже, но какой-бы на него ни послѣдовалъ отвѣтъ, вышенприведенныя замѣчанія о несоотвѣтствіи возраженій значенію словъ автора остаются въ силѣ.

Наибольшаго вниманія со стороны комментатора разсматриваемой работы акад. В. Г. Имшенецкаго требуютъ тѣ ея мѣста, гдѣ говорится о невозможности рациональныхъ рѣшеній вообще. Это тѣ мѣста, гдѣ, къ сожалѣнію, вкрались самыя нежелательныя погрѣшности изложенія. Критика этихъ мѣстъ легка. Тѣмъ не менѣе внимательный критикъ не долженъ поступать такъ рѣшительно и формально какъ акад. А. А. Марковъ, признающій, очевидно, свой второй примѣръ достаточнымъ фактическимъ опроверженіемъ цитируемаго имъ утвержденія, чтобы не входить въ дальнѣйшее разсмотрѣніе опровергаемаго.

Считая за лучшее не рубить, а развязывать узелъ, постараюсь обратиться до смысла опровергаемаго утвержденія случая соотвѣтственныя мѣста обѣихъ редакцій работы В. Г. Имшенецкаго.

Въ первой редакціи о невозможности рациональныхъ интеграловъ говорится при переходѣ отъ непосредственнаго разысканія къ способу, основанному на примѣненіи множителя (см. стр. 69); во второй же послѣ всего (см. стр. 75), гдѣ это оказывается болѣе уместнымъ *). Въ мѣстѣ съ тѣмъ, во второй редакціи высказываемое объ этомъ предметѣ заключеніе вполне опредѣленно и не можетъ подать повода къ тѣмъ же недоразумѣніямъ, какъ начало 6-го параграфа въ первой редакціи.

Сопоставляя эти мѣста обѣихъ редакцій, безпристрастный критикъ необходимо придетъ къ убѣжденію, что въ охарактеризованіи двухъ случаевъ въ началѣ 6-го параграфа подъ однимъ и тѣмъ же обозначеніемъ v необходимо подразумѣвать (какъ безъ сомнѣнія подразумѣваль и самъ авторъ) двѣ вещи совершенно разныя. Въ первомъ случаѣ v есть тотъ общій дѣлитель функцій L , M_1 , Q_1 , N и P_1 , о которомъ говорилось нѣсколькими строками ранѣе. Во второмъ же v есть то, что во второй редакціи обозначено буквою Y , т. е., какъ сказано на стр. 75, полиномъ, долженствующій представлять знаменателя искомаго рѣшенія. Только при такомъ различеніи значеній буквы v въ двухъ разсматриваемыхъ случаяхъ становится понятнымъ смыслъ дальнѣйшихъ строкъ

*) Это и нѣкоторые другіе признаки заставляютъ заключить, что вторая редакція позднѣйшая.

и между прочимъ того, почему авторъ находитъ достаточнымъ разсматривать примѣненіе интегрирующаго множителя лишь въ первомъ случаѣ.

Нельзя же, въ самомъ дѣлѣ, думать, что акад. В. Г. Имшенецкій, находя нужнымъ при извѣстныхъ условіяхъ прибѣгать къ интегрирующему множителю, когда обозначенный чрезъ v общій дѣлитель коэффициентовъ имѣетъ постоянное значеніе, полагалъ бесполезнымъ это дѣлать при тѣхъ-же условіяхъ, когда этотъ общій дѣлитель есть полиномъ, будучи будто-бы увѣренъ, что въ этомъ случаѣ (включающемъ въ себѣ предыдущій и приводящемся къ нему простою замѣною vy чрезъ z) искомаго рѣшенія вовсе не существуетъ.

Обозначеніе однимъ и тѣмъ же символомъ двухъ разныхъ понятій, безъ всякаго указанія на подразумѣваемое различіе, есть, конечно, недостатокъ изложенія. Но этого недостатка нѣтъ и слѣда во второй редакціи, а потому, какъ замѣченный и исправленный самимъ авторомъ, онъ не долженъ подлежать осужденію.

Академикъ А. А. Марковъ, опровергая столь рѣшительно утвержденіе параграфа 6-го, долженъ былъ бы принять все это во вниманіе, и я думаю, что его строгая критика была-бы справедливою лишь въ томъ случаѣ, если бы можно было признать за критикующимъ право разсматривать утвержденіе акад. В. Г. Имшенецкаго совершенно формально и безъ сличенія съ соотвѣтствующимъ мѣстомъ второй редакціи статьи.

Обращаюсь теперь къ вопросу о томъ, какое значеніе придавалъ В. Г. Имшенецкій своему способу въ практическомъ смыслѣ и былъ ли онъ увѣренъ, что, слѣдую этому способу, всегда можно получить раціональное рѣшеніе уравненія разсматриваемаго имъ вида или же убѣдиться въ его несуществованіи.

Такъ какъ основное преобразование уравненія показываетъ, что умноженіемъ всего уравненія на соотвѣтственнымъ образомъ подобранный множитель разысканіе дробнаго рѣшенія всегда приводится къ разысканію цѣлаго, то затрудненіе въ достиженіи главной цѣли изысканія можетъ встрѣтиться только въ составленіи этого множителя, который долженъ быть полиномомъ, состоящимъ изъ тѣхъ же линейныхъ дѣлителей, какъ и знаменатель искомаго рѣшенія.

Точныхъ правилъ для нахождения интегрирующаго множителя во всѣхъ случаяхъ В. Г. Имшенецкій нигдѣ не даетъ, а указываетъ только на возможность такого нахождения (въ первой редакціи въ началѣ страницы 70-й) или рекомендуетъ руководиться приемами, сходными съ тѣми, которые имъ употреблялись въ статьѣ, относящейся къ линейнымъ уравненіямъ (во второй редакціи въ началѣ стр. 75-й). Это составляетъ думать, что такихъ точныхъ правилъ онъ не имѣлъ и самъ. Позволительно даже думать, что онъ имѣлъ преувеличенное представленіе о возможности этихъ правилъ и о ихъ сходствѣ съ приемами,

исполнѣ достаточными для линейныхъ уравненій. Но не позволительно, мнѣ кажется, игнорировать, что въ этомъ-то именно пунктѣ работа акад. В. Г. Имшенецкаго и является недоконченною.

То самое обстоятельство, что В. Г. Имшенецкій нигдѣ не формулируетъ категорически своего убѣжденія въ безусловной возможности получать всякое рациональное рѣшеніе помощію его способа, а ограничивается въ указанныхъ выше мѣстахъ довольно неопредѣленными намеками, должно бы располагать осторожнаго критика къ тому, чтобы такого убѣжденія ему и не приписывать.

Если бы покойный ученый имѣлъ возможность осуществить свое намѣреніе поработать еще надъ своимъ приемомъ, то, безъ сомнѣнія, увидѣлъ бы тѣ границы, въ которыхъ онъ приложимъ, и добросовѣстно, какъ всегда, указалъ бы ихъ. Очень можетъ быть, что онъ ограничился бы группою уравненій, приводимыхъ къ линейнымъ однороднымъ подстановкою $y = \frac{z'}{z}$, не обобщая ихъ, какъ въ разбираемой работѣ. Но и тогда его приемъ представлялъ бы много оригинальнаго и полезнаго въ практическомъ примѣненіи къ примѣрамъ.

Академикъ А. А. Марковъ видитъ главное затрудненіе достиженію цѣли критикуемой имъ работы въ томъ, что нѣкоторые изъ линейныхъ множителей знаменателя искомой дроби могутъ не быть дѣлителями ни одной изъ цѣлыхъ функцій, составленныхъ извѣстнымъ образомъ изъ коэффициентовъ уравненія. При этомъ онъ утверждаетъ, что это затрудненіе оставлено В. Г. Имшенецкимъ безъ вниманія.

Съ этимъ нужно, конечно, согласиться, но отсюда до усмотрѣнія въ работѣ В. Г. Имшенецкаго *заблужденій* слишкомъ большой шагъ, и академика А. А. Маркова нельзя было-бы упрекнуть въ неосторожномъ употребленіи этого слова лишь въ томъ случаѣ, если бы акад. В. Г. Имшенецкій выразился гдѣ-либо, что упомянутаго затрудненія вовсе нѣтъ, или, что онъ не считаетъ его препятствіемъ къ примѣненію своего метода.

Я увѣренъ съ своей стороны, что В. Г. Имшенецкій, встрѣтившись съ этимъ затрудненіемъ, ясно его увидѣлъ, но только не занялся тотчасъ же разьясненіемъ себѣ его значенія *). Доказательство этому я усматриваю въ слѣдующемъ.

Въ обѣихъ редакціяхъ статьи говорится, что для разысканія линейныхъ множителей знаменателя нужно обращать вниманіе на то, въ какомъ изъ членовъ уравненія этотъ множитель будетъ входить дѣлителемъ въ высшей степени, очевидно, съ цѣлью обнаружить тотъ изъ извѣстныхъ полиномовъ, который на этого множителя дѣлится. Хотя во второй редакціи и не упоминается вовсе о возможности случая, когда

*) Вѣроятно, въ надеждѣ возвратиться къ этому предмету въ болѣе благоприятное для занятій время.

такихъ членовъ будетъ нѣсколько, но нельзя думать, чтобы авторъ не допускалъ этой возможности, ибо въ первой редакціи прямо сказано (въ концѣ 69 стр.), что при $\alpha = 1$, т. е. когда рассматриваемый линейный множитель не есть кратный для знаменателя, оба члена уравненія Ly'' и $2Ny'$ будутъ имѣть его дѣлителемъ въ одной и той же степени. Если авторъ остановился на этомъ замѣчаніи и не вошелъ вслѣдъ за тѣмъ въ разсмотрѣніе указаннаго имъ факта, то этого еще нельзя считать съ его стороны заблужденіемъ. Въ примѣрѣ, который онъ рассматриваетъ, оба коэффициента L и N дѣлятся на предполагаемаго множителя знаменателя, но очевидно, что это только частный случай, и предполагать, что В. Г. Имшенецкій заблуждался, принимая его за общій, значило бы думать, что онъ считалъ необходимымъ признакомъ дѣлимости суммы дѣлимость каждаго слагаемаго.

Въ виду всего сказаннаго, сужденія академика А. А. Маркова по рассматриваемому вопросу можно-бы было признать справедливыми и безпристрастными, если бы вмѣсто рѣшительнаго обвиненія покойнаго ученаго въ заблужденіи онъ ограничился утвержденіемъ, что въ недоконченной работѣ В. Г. Имшенецкаго оставленъ безъ разсмотрѣнія случай, когда на нѣкоторые множители искомаго знаменателя дѣлится не единственный членъ уравненія, а сумма нѣсколькихъ членовъ, и что подробное разсмотрѣніе этихъ случаевъ приводитъ къ заключенію, что пріемъ В. Г. Имшенецкаго не примѣнимъ къ рассматриваемому имъ типу уравненій во всей допускаемой имъ общности, т. е. при какихъ угодно цѣлыхъ функціяхъ, служащихъ коэффициентами уравненія.

Усматривая совершенно неосновательно заблужденія въ послѣдней работѣ покойнаго В. Г. Имшенецкаго, академикъ А. А. Марковъ не упускаетъ случая, чтобы подвергнуть осужденію и его прежнія произведенія, посвященныя уравненіямъ линейнымъ. При этомъ для сравнительной оцѣнки имъ употребляется такая неопредѣленная и ничего сама по себѣ не характеризующая мѣра сравненія, какъ степень естественности.

Авторъ критики забываетъ, повидимому, что вся математика есть искусство и что въ ней менѣе искусственно только то, что болѣе первобытно. Изъ всѣхъ способовъ вычисленія самый естественный, безъ сомнѣнія, это счетъ по пальцамъ, но въ то-же время онъ и самый несовершенный. Всякое усовершенствованіе вносится въ математику искусственно; всякій шагъ впередъ обусловливается искусственнымъ расширеніемъ поля зрѣнія или такимъ же улучшеніемъ средствъ изслѣдованія. Можно возставать поэтому только противъ бесплодной искусственности, которая ничего новаго не приноситъ и ничего не совершенствуетъ, а этого-то именно недостатка и нельзя приписать способу В. Г. Имшенецкаго.

Основное преобразованіе уравненія въ связи съ употребленіемъ интегрирующаго множителя есть искусственный пріемъ, всецѣло принадле-

жащій изобрѣтательности В. Г. Имшенецкаго, и такъ какъ, благодаря этому приему устраняется необходимость разсматривать безконечное множество частныхъ случаевъ, заставившая самого Ливилля ограничиться за предѣлами уравненія второго порядка лишь нѣкоторыми общими указаніями, то въ приемѣ этомъ нельзя не видѣть всѣхъ признаковъ усовершенствованія.

Благодаря этому приему, В. Г. Имшенецкій самъ увидѣлъ и далъ увидѣть другимъ возможность формулировать общія правила для разысканія рациональныхъ интеграловъ линейныхъ уравненій какого угодно n -го порядка. Самъ онъ этихъ правилъ не формулировалъ, но это сдѣлалъ, идя по его слѣдамъ, профессоръ П. А. Некрасовъ, на котораго, по моему мнѣнію, совершенно напрасно ссылается академикъ А. А. Марковъ въ подтвержденіе своихъ словъ, будто-бы способъ В. Г. Имшенецкаго требуетъ *существенныхъ измѣненій*.

Во всемъ, что проф. П. А. Некрасовъ писалъ по разсматриваемому вопросу, нѣтъ ни одной строчки, гдѣ говорилось-бы, что развитіе и дополненіе способа В. Г. Имшенецкаго, предлагаемая этимъ ученымъ, онъ считалъ вносящими въ этотъ способъ *существенныя измѣненія*. Напротивъ, заявивши съ самаго начала своей статьи, посвященной способу В. Г. Имшенецкаго, что онъ принимаетъ на себя долгъ болѣе полнаго разъясненія этого способа, проф. П. А. Некрасовъ говоритъ въ заключеніи: „Приемы нахождения дробныхъ рѣшеній ур. (1), указанные въ § 2, совпадаютъ съ приемами В. Г. Имшенецкаго и лишь пополнены доказательствами ихъ;“ и далѣе: „Указанное въ § 3 дальнѣйшее усовершенствованіе способа В. Г. Имшенецкаго уже заключалось въ его основныхъ идеяхъ, изъ которыхъ В. Г. Имшенецкій лишь не успѣлъ извлечь всѣхъ выгодъ“ *).

Признавая за изслѣдованіями В. Г. Имшенецкаго нѣкоторые недостатки, проф. П. А. Некрасовъ, однако, говоритъ: „Недостатки эти не колеблютъ сущности способа Имшенецкаго, а относятся только къ изложенію“ **).

Ясно, что намѣренія *существенно* измѣнить способъ В. Г. Имшенецкаго профессору П. А. Некрасову приписать нельзя.

Не болѣе основательна, по моему мнѣнію, и ссылка на профессора К. А. Поссе. Этотъ ученый въ своемъ письмѣ, напечатанномъ въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ, выражается слѣдующимъ образомъ ***).

„Я не хочу (этимъ) сказать, что способъ В. Г. Имшенецкаго не можетъ быть дополненъ или нѣсколько видоизмѣненъ такъ, чтобы онъ давалъ возможность найти всѣ рациональныя дробныя рѣшенія, если

*) Математич. Сборн. т. XVII. Москва, 1893, стр. 380—381.

**) Тамъ-же, стр. 343.

***) Тамъ-же, стр. 390.

таковыя существуютъ, а только позволяю себѣ обратить ваше вниманіе на необходимость такихъ дополненій“.

Трудно предположить, чтобы выраженія *нѣсколько видоизмѣненъ* и *существенно измѣненъ* считались профессоромъ К. А. Поссе равнозначущими, и едва-ли можно признать, что при замѣнѣ перваго изъ этихъ выраженій вторымъ смыслъ предыдущихъ строкъ останется неискаженнымъ.

Менѣе всего можно согласиться съ мнѣніемъ академика А. А. Маркова, что существенныя измѣненія, внесеніемъ которыхъ приемы В. Г. Имшенецкаго настолько исправляются, что становятся равносильными приемамъ Ліувилля, слѣдуетъ видѣть въ измѣненіи вида интегрирующаго множителя.

Профессоръ П. А. Некрасовъ придаетъ, какъ мнѣ кажется, нѣсколько преувеличенное значеніе формѣ интегрирующаго множителя, но и онъ въ своемъ воспроизведеніи сообщенія В. Г. Имшенецкаго, сдѣланнаго имъ за 4 дня до смерти, предложенную авторомъ перемѣну формы множителя называетъ только *весьма полезною* въ теоретическомъ и практическомъ отношеніи *). Самъ же В. Г. Имшенецкій смотрѣлъ на дѣло, повидимому, еще шире. Въ томъ же воспроизведеніи его сообщенія говорится, что онъ разъяснилъ, что способъ его „заключаетъ въ себѣ средства видоизмѣнять ходъ рѣшенія задачи, такъ какъ способъ этотъ допускаетъ *разнообразіе* въ выборѣ интегрирующаго множителя“ **).

По моему мнѣнію, способъ академика В. Г. Имшенецкаго останется *способомъ Имшенецкаго*, какъ бы его ни дополняли и видоизмѣняли, до тѣхъ поръ, пока въ его основаніи будетъ лежать предложенное его авторомъ преобразование уравненія и употребленіе интегрирующаго множителя. Въ этомъ его существенный признакъ и во многихъ отношеніяхъ преимущество предъ способомъ Ліувилля.

Смотря на способъ В. Г. Имшенецкаго съ этой точки зрѣнія нельзя не предвидѣть болѣе широкихъ его примѣненій, чѣмъ только къ уравненіямъ линейнымъ. Весьма вѣроятно, что, пользуясь этимъ способомъ, можно вывести общія правила разысканія рациональныхъ рѣшеній для уравненій, приводимыхъ къ линейнымъ однороднымъ подстановкою

$$y = \frac{z'}{z} \text{***}).$$

*) Математ. Сборн. т. XVII, стр. 396.

**) Тамъ-же, стр. 395.

***) Основаніемъ для этого могутъ послужить два приема, употребленные В. Г. Имшенецкимъ въ послѣднемъ изъ примѣровъ, находящихся во второй редакціи критикуемой акад. А. А. Марковымъ статьи. Особеннаго вниманія заслуживаетъ второй приемъ, который, при нѣкоторыхъ дополненіяхъ, можетъ приводить къ нахожденію и тѣхъ линейныхъ множителей знаменателя искомаго рациональнаго рѣшенія, которые не входятъ въ первый коэффициентъ уравненія.

Объ этомъ предметѣ, по словамъ акад. А. А. Маркова, имъ было сдѣлано сообщеніе С.-Петербургскому Математическому Обществу, вѣроятно, въ ноябрѣ 1891 года, сущность котораго изложена въ Comptes-Rendus за тотъ же годъ *).

Замѣтка акад. А. А. Маркова въ названномъ французскомъ изданіи отличается такою краткостью и, вмѣстѣ съ тѣмъ, такою неопредѣленностью и общностью указаній на приемы рѣшенія, что составить себѣ понятіе о какихъ-либо общихъ правилахъ для этого рѣшенія читающему чрезвычайно трудно. Вслѣдствіе этого нельзя понять даже приблизительно, что собственно разумѣетъ акад. А. А. Марковъ въ своемъ критическомъ письмѣ подъ словами *иные* (по сравненію со способомъ В. Г. Имшенецкаго) *приемы*.

Если цѣлью замѣтки, помѣщенной акад. А. А. Марковымъ въ Comptes-Rendus, было только выяснитъ возможность получать посредствомъ конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій раціональныя рѣшенія уравненій разсматриваемаго типа, когда эти рѣшенія существуютъ, то слѣдуетъ замѣтить, что въ этомъ отношеніи его работа не представляетъ ничего новаго. Въ томъ-же томѣ Comptes-Rendus находится замѣтка Painlevé **), въ которой авторъ, доказывая преимущество своихъ правъ на приоритетъ въ разсматриваемомъ акад. А. А. Марковымъ вопросѣ въ сравненіи съ правами послѣдняго, поясняетъ, что этотъ вопросъ, и притомъ въ болѣе широкой постановкѣ, былъ рѣшенъ имъ за нѣсколько лѣтъ ранѣе.

Если же академикъ А. А. Марковъ имѣлъ въ виду дать дѣйствительно правила вычисленія, то приходится пожалѣть, что подробности этихъ правилъ имъ нигдѣ не опубликованы, ибо, пока этого не сдѣлано, противопоставленіе способу В. Г. Имшенецкаго какихъ-то *иныхъ приемовъ* не можетъ имѣть никакого значенія.

*) Comptes-Rendus, t. CXIII, 1891, p. 685--688.

**) Тамъ-же, стр. 739.