ПРИЛОЖЕНІЕ

къ протоколу засѣданія Харьк. Мат. Общ. 10 Мая 1893 года.

Нѣсколько словъ относительно статьи Г. Г. Аппельрота

По поводу параграфа перваго мемуара С. В. Ковалевской „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe".

А. М. Ляпунова.

Въ означенной статьѣ Г. Г. Аппельротъ занимается, между прочимъ, вопросомъ о возможности удовлетворить дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', \\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', \\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
\frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
\frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma',
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

при какихъ-либо предположеніяхъ относительно вещественныхъ постоянныхъ A, B, C, x_0, y_0, z_0, рядами вида

$$\left.\begin{aligned}
p &= t^{-\mu}\sum_0^{\infty} p_n t^n, & \gamma &= t^{-2\mu}\sum_0^{\infty} f_n t^n, \\
q &= t^{-\mu}\sum_0^{\infty} q_n t^n, & \gamma' &= t^{-2\mu}\sum_0^{\infty} g_n t^n, \\
r &= t^{-\mu}\sum_0^{\infty} r_n t^n, & \gamma'' &= t^{-2\mu}\sum_0^{\infty} h_n t^n,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ μ цѣлое положительное число, бо́льшее 1, а p_n, q_n, r_n, f_n, g_n, h_n постоянныя, изъ которыхъ для $n=0$ по крайней мѣрѣ одно не нуль.

Для рѣшенія этого вопроса Г. Г. Аппельротъ пользуется особеннымъ пріемомъ, который можетъ быть полезенъ во многихъ подобныхъ случаяхъ, если имъ пользоваться съ надлежащей осторожностью. Но такъ какъ примѣненіе этого пріема требуетъ нѣкоторыхъ дополнительныхъ изслѣдованій, не находящихся въ статьѣ Г. Г. Аппельрота, то благодаря ему анализъ Г. Г. Аппельрота дѣлается мало доказательнымъ.

Чтобы объяснить, въ чемъ состоитъ этотъ пріемъ, допустимъ, что въ уравненія (1) (всѣ члены которыхъ предполагаются перенесенными въ первыя части равенства), равно какъ въ ихъ интегральныя уравненія

$$\left.\begin{aligned} Ap^2+Bq^2+Cr^2-2(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')+\text{const.}=0\,,\\ Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''+\text{const.}=0\,,\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2+\text{const.}=0 \end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

(разсмотрѣніе которыхъ одновременно съ уравненіями (1) въ извѣстномъ отношеніи представляетъ нѣкоторую выгоду) вмѣсто p, q, r, γ, γ', γ'' подставлены ихъ выраженія (2) и результаты расположены по восходящимъ степенямъ t. Тогда каждое изъ этихъ уравненій приведетъ къ равенству вида

$$A_0t^{-m}+A_1t^{-m+1}+A_2t^{-m+2}+\ldots=0\,,\qquad(4)$$

гдѣ m одно изъ чиселъ 2μ, 3μ или 4μ, а A_0, A_1, A_2 и т. д. извѣстные полиномы, составленные изъ коэффиціентовъ p_n, q_n, r_n, f_n, g_n, h_n такъ, что вообще для всякаго s полиномъ A_s зависитъ только отъ тѣхъ изъ этихъ коэффиціентовъ, для которыхъ

$$n\leqq s\,.$$

Каждое изъ равенствъ вида (4) дастъ для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ группу слѣдующихъ уравненій:

$$A_0=0,\quad A_1=0,\quad \ldots,\quad A_{\mu-2}=0,\quad \ldots,\qquad(5)$$

изъ которыхъ первыя $\mu-1$ будутъ содержать только слѣдующіе коэффиціенты:

$$\left.\begin{matrix} p_0, & p_1, & p_2, & \ldots, & p_{\mu-2},\\ q_0, & q_1, & q_2, & \ldots, & q_{\mu-2},\\ r_0, & r_1, & r_2, & \ldots, & r_{\mu-2},\\ f_0, & f_1, & f_2, & \ldots, & f_{\mu-2},\\ g_0, & g_1, & g_2, & \ldots, & g_{\mu-2},\\ h_0, & h_1, & h_2, & \ldots, & h_{\mu-2}. \end{matrix}\right\}\qquad(6)$$

Допустимъ теперь, что вмѣсто уравненій (1) и (3) разсматриваются слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
&(B-C)qr+y_0\gamma''-z_0\gamma'=0\,, \qquad && r\gamma'-q\gamma''=0\,,\\
&(C-A)rp+z_0\gamma-x_0\gamma''=0\,, && p\gamma''-r\gamma=0\,,\\
&(A-B)pq+x_0\gamma'-y_0\gamma=0\,, && q\gamma-p\gamma'=0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
Ap^2+Bq^2+Cr^2-2(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')=0\,,\\
Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=0\,,\\
\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

изъ которыхъ каждое можетъ быть поставлено въ соотвѣтствіе съ однимъ изъ уравненій (1) или (3), изъ котораго оно выводится выкидываніемъ члена съ производною или съ const.

Желая этимъ новымъ уравненіямъ удовлетворить рядами вида (2), и допуская, подобно предыдущему, что

$$B_0t^{-m}+B_1t^{-m+1}+B_2t^{-m+2}+\ldots=0$$

есть результатъ подстановки этихъ рядовъ въ какое-либо изъ новыхъ уравненій, изъ каждаго равенства такого вида получимъ группу уравненій

$$B_0=0\,,\quad B_1=0\,,\quad \ldots\,,\quad B_{\mu-2}=0\,,\quad \ldots\,, \tag{9}$$

и нетрудно видѣть, что первыя $\mu-1$ уравненій каждой такой группы будутъ тожественны съ первыми $\mu-1$ уравненіями соотвѣтственной изъ группъ (5).

Обращая вниманіе на это обстоятельство, Г. Г. Аппельротъ выражаетъ его нѣсколько неточно, говоря, что требованіе, чтобы ряды (2) удовлетворяли уравненіямъ (1) и (3), опредѣляетъ коэффиціенты (6) совершенно такъ же, какъ требованіе, чтобы ряды эти удовлетворяли уравненіямъ (7) и (8).

Но дѣло не въ этой неточности, а въ томъ, что одного этого замѣчанія Г. Г. Аппельротъ считаетъ достаточнымъ для возможности, при опредѣленіи коэффиціентовъ (6), уравненія (1) и (3) замѣнять уравненіями (7) и (8). Разсматривая затѣмъ эти послѣднія уравненія и опредѣляя удовлетворяющія имъ функціи p, q, r, γ, γ', γ'' (при извѣстномъ предположеніи относительно A, B, C, x_0, y_0, z_0, необходимомъ для ихъ совмѣстности) подъ видомъ возможно болѣе общихъ рядовъ типа (2), онъ считаетъ себя въ правѣ первые $\mu-1$ членовъ каждаго изъ этихъ рядовъ принимать за общія выраженія первыхъ $\mu-1$ членовъ искомыхъ рядовъ, насколько члены эти опредѣляются системами первыхъ $\mu-1$ уравненій каждой изъ группъ вида (5).

Такимъ же пріемомъ замѣны однихъ уравненій другими не разъ пользуется Г. Г. Аппельротъ въ подобныхъ случаяхъ и въ другихъ мѣстахъ своей статьи, но въ пользу этого пріема нигдѣ не считаетъ нужнымъ приводить какія-либо соображенія.

Очевидно, такимъ пріемомъ можно пользоваться лишь въ томъ случаѣ, когда замѣна старыхъ уравненій новыми не вводитъ въ рѣшаемую задачу никакихъ новыхъ, чуждыхъ ей условій, и обстоятельство это настолько важно, что на него то именно и нужно было обратить все вниманіе.

Что пріемъ Г. Г. Аппельрота, если имъ пользоваться безъ надлежащихъ предварительныхъ изслѣдованій, какъ это дѣлаетъ въ своей статьѣ Г. Г. Аппельротъ, можетъ приводить къ совершенно невѣрнымъ выводамъ, въ этомъ нетрудно убѣдиться на примѣрахъ.

Допустимъ напр., что требуется рѣшить вопросъ о возможности рѣшеній съ полюсами третьяго порядка для слѣдующей системы дифференціальныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x(y+z) - x^2 - yz - \frac{\sqrt{3}}{4}(2x+y+z),\\
\frac{dy}{dt} &= 2xy - x^2 - z^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y),\\
\frac{dz}{dt} &= 2xz - x^2 - y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+z).
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для этого, перенося всѣ члены въ каждомъ изъ этихъ уравненій въ первую часть равенства, дѣлаемъ въ нихъ

$$\left.\begin{aligned}
x &= t^{-3}(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots),\\
y &= t^{-3}(y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \dots),\\
z &= t^{-3}(z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + \dots),
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

разумѣя подъ $x_0, x_1, \dots, y_0, y_1, \dots, z_0, z_1, \dots$ постоянныя и предполагая, что по крайней мѣрѣ одно изъ постоянныхъ x_0, y_0, z_0 не нуль. Результатъ этой подстановки для каждаго изъ нашихъ уравненій представится подъ видомъ

$$A_0 t^{-6} + A_1 t^{-5} + \dots = 0,$$

и для опредѣленія неизвѣстныхъ коэффиціентовъ x_n, y_n, z_n мы получимъ три группы уравненій вида

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad \dots, \tag{12}$$

гдѣ A_0, A_1 и т. д. будутъ извѣстными полиномами, составленными изъ этихъ коэффиціентовъ, при чемъ A_s будетъ зависѣть только отъ тѣхъ изъ нихъ, для которыхъ $n \leqq s$. Первыя два уравненія каждой изъ группъ (12) будутъ поэтому содержать только шесть слѣдующихъ коэффиціентовъ:

$$x_0, \quad x_1, \quad y_0, \quad y_1, \quad z_0, \quad z_1. \tag{13}$$

Но нетрудно видѣть, что, если бы выраженія (11) мы подставили въ уравненія

$$\left.\begin{aligned} x^2 + yz - x(y+z) &= 0, \\ x^2 + z^2 - 2xy &= 0, \\ x^2 + y^2 - 2xz &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

то поступая подобно предыдущему, получили бы для опредѣленія неизвѣстныхъ x_n, y_n, z_n три группы уравненій вида

$$B_0 = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad \ldots,$$

изъ которыхъ въ каждой первыя два уравненія совпадали бы съ двумя первыми уравненіями въ одной изъ трехъ группъ (12).

Однако, если бы на этомъ основаніи, для опредѣленія неизвѣстныхъ (13), мы замѣнили уравненія (10) уравненіями (14), то пришли бы къ невѣрному выводу.

Дѣйствительно, уравненія (14) даютъ

$$x = y = z.$$

Поэтому, если мы допускаемъ, что они способны дать общія выраженія коэффиціентовъ (13) для рядовъ (11), удовлетворяющихъ уравненіямъ (10), то для этихъ рядовъ должны допустить равенства

$$x_0 = y_0 = z_0, \qquad x_1 = y_1 = z_1.$$

Но въ такомъ случаѣ, полагая

$$y = x + u, \qquad z = x + v,$$

мы должны допустить, что u и v суть функціи, для которыхъ $t = 0$ или точка обыкновенная, или полюсъ перваго порядка, что однако невозможно, ибо первое изъ уравненій (10), приводящееся къ виду

$$\frac{dx}{dt} = -uv - \frac{\sqrt{3}}{4}(4x + u + v),$$

заключало бы тогда въ первой части равенства функцію, для которой $t=0$ есть полюсъ 4-аго порядка, а во второй функцію, для которой та же точка есть полюсъ 3-яго порядка.

Наше допущеніе приводитъ такимъ образомъ къ выводу, что уравненія (10) не имѣютъ рѣшеній съ полюсами третьяго порядка. Между тѣмъ непосредственная подстановка убѣждаетъ, что уравненія эти допускаютъ рѣшеніе

$$x=\frac{1}{t^3}+\frac{\sqrt{3}}{2t^2}, \qquad y=z=\frac{1}{t^3}-\frac{\sqrt{3}}{2t^2}.$$

Возвращаясь къ вопросу, которымъ занимается Г. Г. Аппельротъ, прибавлю, что законность его пріема только тогда была бы вполнѣ оправдана, если бы онъ доказалъ, что изъ уравненій вида

$$B_s=0,$$

для которыхъ $s>\mu-2$, не можетъ быть выведено никакихъ соотношеній между коэффиціентами (6), не вытекающихъ изъ уравненій вида (5), и если бы подобное же было имъ доказано и для всѣхъ остальныхъ случаевъ замѣны однихъ уравненій другими.