О присоединенныхъ функціяхъ третьяго рода.

(Дополненіе къ § 54 „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ".)

М. А. Тихомандрицкаго.

Означая, какъ въ указанномъ сочиненіи нашемъ, чрезъ $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ присоединенную функцію, слѣд. функцію опредѣленную согласно условіямъ § 44 *), и полагая $x = \frac{1}{\bar{x}}$, $y = \frac{1}{\bar{y}}$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})\dfrac{dx}{dt}}{(ax+by+c)\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = \frac{\psi_1(\overset{m-1}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}})\dfrac{d\bar{x}}{dt}}{(a\bar{y}+b\bar{x}+c\bar{x}\bar{y})F_3(\bar{x}, \bar{y})}, \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} F_3(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{x}^m \bar{y}^{n-2} \frac{\partial F\left(\dfrac{1}{\bar{x}}, \dfrac{1}{\bar{y}}\right)}{\partial\left(\dfrac{1}{\bar{y}}\right)} = \\ &= -(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2\bar{y} + 3\bar{a}_3\bar{y}^2 + \ldots + n\bar{a}_n\bar{y}^{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

---

*) Гдѣ, кстати замѣтимъ, въ формулахъ (4), (5) и (6) на стр. 74 и 75 должны быть зачеркнуты соотвѣтственно множители $\bar{y}^{\nu-(m-2)}$, $\bar{x}^{\mu-(m-2)}$ и $\bar{x}^{\mu-(m-2)}\,.\,\bar{y}^{\nu-(m-2)}$, ошибочно удержанные при перепискѣ. Эта описка, незамѣченная къ сожалѣнію во время, повліяла на разсужденія въ концѣ стр. 82, гдѣ должно зачеркнуть въ строчкѣ 9 снизу слова: „умноженнаго на $\bar{y}^{\nu-(n-2)}$", въ формулѣ (10) члены: $+(\nu-n+2)q$, и въ строчкахъ 4-ой и 3-ей снизу слова: „передвинутаго параллельно самому себѣ на $(\nu-n+2)q$ дѣленій оси $O\alpha$, смотря по знаку, въ ту или другую сторону".

Для $\overline{x}=0$, $\overline{y}=0$ по условіямъ присоединенности одного порядка безконечно-малости съ этимъ выраженіемъ (2) будетъ и числитель правой части (1), такъ что все выраженіе (1) вообще будетъ $=\infty$; если же подчинить функцію $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ еще условіямъ § 54, именно обращаться въ нуль для всѣхъ, за исключеніемъ двухъ, рѣшеній пары уравненій:

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})=0, \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$ax+by+c=0 \dots\dots\dots\dots (4)$$

то выраженіе (1) будетъ вообще оставаться конечнымъ при $\overline{x}=0$, $\overline{y}=0$. Въ самомъ дѣлѣ, безконечныя значенія y, опредѣляемаго въ функціи x основнымъ уравненіемъ (3), имѣютъ мѣсто для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$a_0=0, \dots\dots\dots\dots (5)$$

гдѣ a_0 коэффиціентъ при наивысшей степени y въ уравненіи (3). Если степень этого уравненія $=m$, то всѣ точки x, гдѣ $y=\infty$, будутъ лежать въ конечномъ, и условія присоединенности четвертой категоріи (стр. 75) отпадаютъ; въ точкахъ же, гдѣ x конечно, а y безконечно (въ точкахъ второй категоріи), лѣвая часть (1) будетъ конечна, ибо числитель и знаменатель при $y=\infty$ будутъ каждый $=\infty^{n-1}$, какъ то легко видѣть, и какъ то объяснено на стр. 97 нашей книги. Если же степень уравненія (5) будетъ $m'<m$, то $m-m'$ корней его удалятся въ безконечность, условія четвертой категоріи (стр. 75 нашей книги) будутъ имѣть мѣсто, и преобразованіе (1) необходимо. Но въ этомъ случаѣ удалится въ безконечность и часть корней уравненія

$$F\left(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\right)=0, \dots\dots\dots\dots (6)$$

получаемаго чрезъ исключеніе y изъ (3) и (4), ибо степень этого уравненія будетъ не выше $m+n-1$, такъ какъ члена съ $x^m y^n$ въ этомъ случаѣ не будетъ въ уравненіи (5).

Но какъ уравненіе

$$\psi\left(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\right)=0, \dots\dots\dots\dots (7)$$

получаемое чрезъ исключеніе y изъ (4) и

$$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})=0, \dots\dots\dots\dots (8)$$

должно имѣть всѣ корни общіе съ уравненіемъ (6), за исключеніемъ $x=\xi$ и $x=\eta$, то, если ξ и η величины конечныя, безконечные корни уравненія (6) будутъ также корнями и уравненія (7); т. е. часть нулей функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$, удалится въ безконечность, или, выражаясь геометрически, часть тѣхъ изъ $m+n-2$ точекъ пересѣченія кривой (3) съ прямою (4), чрезъ которыя должна проходить кривая (8) по условіямъ § 54, удаляется въ безконечность. Такимъ образомъ, въ силу этихъ дополнительныхъ требованій, которымъ мы подчинили функцію $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ въ § 54, выраженіе $\psi_1(\overset{m-1}{\overline{x}}, \overset{n-1}{\overline{y}})$ въ правой части (1) при $\overline{x}$ и $\overline{y}$ безконечно-малыхъ будетъ порядка безконечно-малости по крайней мѣрѣ на единицу высшаго того, который вытекаетъ для нея изъ однихъ условій присоединенности четвертой категоріи, и слѣдовательно правая часть выраженія (1) будетъ конечная величина.

2. Это какъ разъ имѣетъ мѣсто въ случаѣ гиперэллиптическаго алгебраическаго образа, опредѣляемаго уравненіемъ

$$F(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{2}{y}) = y^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Здѣсь $m=2\rho+1$, $n=2$; но какъ $a_0=1$, то всѣ безконечности функціи y, опредѣляемой этимъ уравненіемъ, удаляются въ безконечность. Условія присоединенности, какъ нетрудно убѣдиться, получаются только отъ мѣстъ четвертой категоріи алгебраическаго образа (1), т. е. гдѣ $x=\infty$ и $y=\infty$. Функція перваго рода $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ принимаетъ теперь видъ

$$\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y}) = \theta(\overset{2\rho-1}{x}) ; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

гдѣ

$$\theta(\overset{2\rho-1}{x}) = \lambda_0 x^{2\rho-1} + \lambda_1 x^{2\rho-2} + \ldots + \lambda_{2\rho-2} x + \lambda_{2\rho-1} ; \; . \; . \; . \; (3)$$

а функція третьяго рода $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ такой

$$\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{2\rho}{x}) y + \theta_1(\overset{2\rho}{x}) , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

гдѣ

$$\theta_0(\overset{2\rho}{x}) = \alpha_0 x^{2\rho} + \alpha_1 x^{2\rho-1} + \ldots + \alpha_{2\rho-1} x + \alpha_{2\rho} , \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$\theta_1(\overset{2\rho}{x}) = \beta_0 x^{2\rho} + \beta_1 x^{2\rho-1} + \ldots + \beta_{2\rho-1} x + \beta_{2\rho} ; \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

коэффиціенты λ нужно подчинить только условіямъ присоединенности, коэффиціенты α и β сверхъ того еще условіямъ прохожденія кривой $\psi = 0$ чрезъ всѣ точки пересѣченія кривой (1) съ прямою

$$ay + bx + c = 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

за исключеніемъ $(\xi\,,\, y_\xi)$ и $(\eta\,,\, y_\eta)$.

Чтобы получить условія присоединенности, пребразуемъ основное уравненіе (1) чрезъ подстановку $x = \dfrac{1}{\overline{x}}$ и $y = \dfrac{1}{\overline{y}}$, что приводитъ насъ къ такому:

$$\overline{x}^{2\rho+1} - \overline{y}^2 \overline{R}(\overset{2\rho+1}{\overline{x}}) = 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

гдѣ

$$\overline{R}(\overset{2\rho+1}{\overline{x}}) = \overline{x}^{2\rho+1} R\left(\frac{1}{\overline{x}}\right). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Если A коэффиціентъ старшаго члена въ $R(x)$, то главная часть значенія $\overline{y}$ опредѣлится изъ уравненія

$$\overline{x}^{2\rho+1} - \overline{y}^2 A = 0\,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

и будетъ:

$$\overline{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}}\, \overline{x}^{\frac{2\rho+1}{2}}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Полагая

$$\overline{x} = t^2\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

будемъ имѣть:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = 2t\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\overline{y} = \pm \frac{1}{\sqrt{A}}\, t^{2\rho+1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Главная часть значенія функціи

$$F_3(\overline{x}\,,\, \overline{y}) = -\overline{y}\overline{R}(\overset{2\rho+1}{\overline{x}}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

будетъ теперь

$$= \mp 2\sqrt{A}\, t^{2\rho+1}\,, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

и слѣдовательно главная часть значенія частнаго

$$F_3(\bar{x}, \bar{y}) : \frac{d\bar{x}}{dt} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (17)$$

будетъ

$$\mp\sqrt{A}\,t^{2\rho}, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (18)$$

что при t безконечно-маломъ представляетъ безконечно-малую величину порядка 2ϱ. Того-же порядка должна быть функція

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}(\overset{2\rho-1}{\bar{x}}, \overset{0}{\bar{y}}) &= \bar{x}^{2\rho-1}\bar{\theta}\left(\overset{2\rho-1}{\frac{1}{\bar{x}}}\right) = \lambda_0 + \lambda_1\bar{x} + \lambda_2\bar{x}^2 + \ldots + \lambda_{2\rho-1}\bar{x}^{2\rho-1} = \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t^4 + \ldots + \lambda_{2\rho-1}t^{2(2\rho-1)};\end{aligned}\right\} . \; (19)$$

откуда слѣдуетъ, что должно быть

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{\rho-1} = 0, \; \ldots\ldots \; (20)$$

и слѣдовательно

$$\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y}) = \theta(\overset{2\rho-1}{x}) = \lambda_\rho x^{\rho-1} + \lambda_{\rho+1}x^{\rho-2} + \ldots + \lambda_{2\rho-1}, \; \ldots \; (21)$$

т. е. должна быть полиномомъ степени $\varrho - 1$ съ произвольными коэффиціентами.

3. Переходя къ функціямъ третьяго рода, замѣчаемъ, что уравненіе

$$\left(-\frac{ax+c}{b}\right)^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0, \; \ldots\ldots\ldots \; (1)$$

будучи только степени $2\varrho+1$, а не $2\varrho+3$, (ибо $m+n=2\varrho+1+2=$ $=2\varrho+3$), будетъ имѣть два корня въ безконечности. Слѣдовательно, если ξ и η какія либо два конечные корня этого уравненія, функція (3) должна имѣть два нуля въ безконечности, и слѣдовательно величина функціи

$$\bar{\psi}(\overset{2\rho}{\bar{x}}, \overset{1}{\bar{y}}) = \bar{x}^{2\rho}\bar{y}\,\psi\left(\overset{2\rho}{\frac{1}{\bar{x}}}, \overset{1}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) = \bar{\theta}_0(\overset{2\rho}{\bar{x}}) + \bar{\theta}_1(\overset{2\rho}{\bar{x}})\bar{y}, \; \ldots \; (2)$$

гдѣ

$$\bar{\theta}_0(\overset{2\rho}{\bar{x}}) = \alpha_0 + \alpha_1\bar{x} + \alpha_2\bar{x}^2 + \ldots + \alpha_{2\rho}\bar{x}^{2\rho} = \alpha_0 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^4 + \ldots + \alpha_{2\rho}t^{4\rho} \; . \; (3)$$

и

$$\bar{\theta}_1(\overset{2\rho}{\bar{x}}) = \beta_0 + \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{x}^2 + \ldots + \beta_{2\rho}\bar{x}^{2\rho} = \beta_0 + \beta_1 t^2 + \beta_2 t^4 + \ldots + \beta_{2\rho}t^{4\rho}, \; . \; (4)$$

должна быть порядка на двѣ единицы высшаго, чѣмъ порядокъ величины (18). Отсюда слѣдуетъ въ виду (14) пред. §, что должно быть

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{\rho-1}=\alpha_\rho=\beta_0=0\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Поэтому будетъ

$$\psi(\overset{2\rho}{x},\overset{1}{y})=\theta_0(\overset{\rho-1}{x})\,y+\theta_1(\overset{2\rho-1}{x})\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(6)$$

Остальные коэффиціенты функцій $\theta_0(\overset{\rho-1}{x})$ и $\theta_1(\overset{2\rho-1}{x})$, опредѣлятся изъ условія, что должно быть тождественно

$$\theta_0(\overset{\rho-1}{x})\left(-\frac{ax+c}{b}\right)+\theta_1(\overset{2\rho-1}{x})=C\,\frac{\left(-\dfrac{ax+c}{b}\right)^2-R(\overset{2\rho+1}{x})}{(x-\xi)(x-\eta)}\,.\;.\;.\;(7)$$

4. Можно однако и не рѣшая уравненій, къ которымъ приводитъ это требованіе, вывести изъ предыдущаго Римановскую форму функціи $\psi(\overset{2\rho}{x},\overset{1}{y})$.

Полагая, для краткости

$$Y=-\frac{ax+c}{b},\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

и внося y^2 вмѣсто $R(\overset{2\rho+1}{x})$ по (1) § 2, можно (7) предъидущаго § такъ написать:

$$0=-\theta_0(\overset{\rho-1}{x})\,Y-\theta_1(\overset{2\rho-1}{x})+C\,\frac{Y^2-y^2}{(x-\xi)(x-\eta)};\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

придавая это къ (6) того же §, будемъ имѣть:

$$\psi(\overset{2\rho}{x},\overset{1}{y})=\theta_0(\overset{\rho-1}{x})(y-Y)+C\,\frac{Y^2-y^2}{(x-\xi)(x-\eta)}\,.\;.\;.\;(3)$$

Но, въ силу (1) мы имѣемъ тождество:

$$ax+by+c=b(y-Y)\,;\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

раздѣляя (3) на (4), будемъ имѣть:

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x},\overset{1}{y})}{ax+by+c}=\frac{1}{b}\,\theta_0(\overset{\rho-1}{x})-\frac{C}{b}\,\frac{y+Y}{(x-\xi)(x-\eta)}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

Второй членъ можно такъ преобразовать: изъ уравненія прямой, проходящей чрезъ точки

$$(\xi\,,\; y_\xi = \sqrt{R(\xi)}) \quad \text{и} \quad (\eta\,,\; y_\eta = \sqrt{R(\eta)})\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

мы имѣемъ

$$Y = \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi}(x - \xi) + y_\xi\,; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

слѣдовательно будетъ

$$\left.\begin{aligned} y + Y &= y + y_\xi + \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi}(x - \xi) = \\ &= \frac{(y + y_\xi)(\eta - x + x - \xi) + (y_\eta - y_\xi)(x - \xi)}{\eta - \xi} = \\ &= \frac{(y + y_\eta)(x - \xi) - (y + y_\xi)(x - \eta)}{\eta - \xi}\,, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$

и потому

$$\frac{y + Y}{(x - \xi)(x - \eta)} = \frac{1}{\xi - \eta}\left(\frac{y + y_\xi}{x - \xi} - \frac{y + y_\eta}{x - \eta}\right). \quad . \; . \; . \; . \; (9)$$

Вносят это въ (5) и принимая тамъ, согласно съ (23) § 55 нашей книги‘

$$C = b(\xi - \eta)\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

мы будемъ имѣть окончательно:

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x}\,,\; \overset{1}{y})}{ax + by + c} = -\left(\frac{y + y_\xi}{x - \xi} - \frac{y + y_\eta}{x - \eta}\right) + \theta(\overset{\rho-1}{x})\,, \quad . \; . \; . \; (11)$$

гдѣ вмѣсто $\frac{1}{b}\theta_0(\overset{\rho-1}{x})$ мы написали просто $\theta(\overset{\rho-1}{x})$, сливая множитель $\frac{1}{b}$ съ коэффиціентами полинома $\theta_0(\overset{\rho-1}{x})$. Это очевидно присоединенная функція перваго рода. Отнимая ее отъ обѣихъ частей, увидимъ, что первый членъ представляетъ, какъ и лѣвая часть, присоединенную функцію третьяго рода. Внося вмѣсто y, y_ξ и y, y_η ихъ значенія, мы будемъ имѣть присоединенную функцію третьяго рода

$$\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\xi)}}{x - \xi} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\eta)}}{x - \eta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

входящую въ Римановскій интегралъ третьяго рода *).

---

*) См. формулу (6) на стр. 8 моего „Обращенія гиперэллиптическихъ интеграловъ“. Харьковъ, 1885 г.

Примѣчаніе. Если бы было $\eta = \infty$, то тогда порядокъ $\psi_1(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})$ былъ бы только на единицу выше порядка величины (18) § 2, и слѣдовательно условіе $\alpha_\rho = 0$ слѣдовало бы выкинуть изъ ряда (5) § 3; но мы не находимъ нужнымъ останавливаться долѣе на этомъ. Подробнѣе объ этомъ интегралѣ изложено въ сочиненіи Appel'я и Goursat: Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.

ПОПРАВКА. На стр. 95 нашего сочиненія слѣдуетъ въ строкѣ 9, послѣ словъ „по (1)" приписать: § 47; слѣдующія за симъ двѣ строчки замѣнить такими: „$p + m + n$; изъ этихъ уравненій $m + n - 1$ коэффиціентовъ опредѣлятся функціями C и остальныхъ p".