Къ вопросу о существованіи конечной и непрерывной внутри данной области функціи координатъ, удовлетворяющей уравненію Лапласа, при заданныхъ значеніяхъ ея нормальной производной на поверхности, ограничивающей область.

В. А. Стеклова.

---

1. Задача Neumann'а состоитъ въ слѣдующемъ:

Найти внутри данной области (D), *ограниченной замкнутой поверхностью* (S), *конечную и непрерывную функцію* V *координатъ* x, y *и* z, *удовлетворяющую условіямъ*

$$\Delta V = 0 \qquad \textit{внутри } (D), \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f \qquad \textit{на поверхности } (S), \tag{2}$$

гдѣ f *есть заданная функція координатъ точекъ поверхности* (S), n *есть направленіе внѣшней нормали къ этой поверхности, а* Δ *знакъ операціи вида*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Интегрируя уравненіе (1) по всему объему области (D), получаемъ

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S).

Это равенство въ связи съ условіемъ (2) показываетъ, что задача возможна только въ томъ случаѣ, когда функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f ds = 0. \tag{3}$$

До настоящаго времени, насколько мнѣ извѣстно, существовала единственная метода рѣшенія задачи Neumann'a, принадлежащая самому Neumann'y.

Въ настоящемъ году H. Poincaré опубликовалъ въ Acta Mathematica (20 : 1) мемуаръ: „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet“, во второй части котораго онъ указываетъ на возможность примѣненія къ рѣшенію разсматриваемой задачи методы Robin'a, предложенной послѣднимъ для рѣшенія задачи о распредѣленіи электричества (problème de la distribution de l'électricité).

Такимъ образомъ мы имѣемъ теперь двѣ методы рѣшенія интересующей насъ задачи, но обѣ онѣ, какъ увидимъ ниже, весьма неудовлетворительны.

Мы остановимся на болѣе извѣстной методѣ Neumann'a.

Этого будетъ достаточно, такъ какъ слабые пункты послѣдней и вновь предложенной H. Poincaré одни и тѣ же *).

2. Изложимъ сущность метода Neumann'a.

Условимся сначала въ обозначеніяхъ.

Пусть V есть какая либо функція координатъ точекъ пространства.

Пусть (S) есть какая либо замкнутая поверхность, ограничивающая область (D).

Значеніе V въ какой либо точкѣ s поверхности (S) будемъ обозначать черезъ

$$V_s.$$

Значеніе, которое принимаетъ V въ точкѣ s, если будемъ приближаться къ s съ внутренней стороны поверхности (S), обозначимъ черезъ

$$V_{is}.$$

Значеніе той же функціи въ точкѣ s при приближеніи къ этой точкѣ съ внѣшней стороны (S) обозначимъ черезъ

$$V_{es}.$$

Проводимъ въ точкѣ s нормаль къ поверхности (S) и возьмемъ на этой нормали двѣ точки s' и s'', одну внутри, другую внѣ поверхности (S).

Пусть α, β и γ суть углы, составляемые внѣшней нормалью n къ поверхности (S) въ точкѣ s съ осями прямоугольной системы координатъ.

---

*) Слѣдуетъ замѣтить, что H. Poincaré самъ считаетъ послѣднія главы своего мемуара не строгими, заканчивая свое изслѣдованіе слѣдующими словами: „J'ai pensé que, malgré leur peu de rigueur, ils pouvaient être utiles comme procédés d'investigation etc...“.

Значеніе выраженія

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma, \tag{4}$$

когда x, y и z представляютъ координаты точки s, обозначимъ черезъ

$$\frac{\partial V_s}{\partial n}.$$

Выраженіе (4) имѣетъ нѣкоторыя опредѣленныя значенія въ точкахъ s' и s''.

Предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе, когда s' стремится къ совпаденію съ точкой s, обозначимъ черезъ

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n}.$$

Предѣлъ, къ которому стремится то же выраженіе, когда точка s'' стремится къ совпаденію съ точкой s, назовемъ черезъ

$$\frac{\partial V_{es}}{\partial n}.$$

3. Назовемъ черезъ r разстояніе какой либо точки x, y, z пространства отъ точки s поверхности (S). Будемъ считать эту поверхность конвексной, имѣющей опредѣленную касательную плоскость и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Если ξ, η, ζ суть координаты точки s, то

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Назовемъ черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ r съ внѣшней нормалью n къ поверхности (S) въ точкѣ s.

Положимъ

$$W=\frac{1}{2\pi}\int\mu\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds,$$

гдѣ μ есть конечная и непрерывная функція координатъ ξ, η, ζ точекъ поверхности (S). Интегрированіе производится по перемѣннымъ ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

Выраженіе W называется *потенціаломъ двойного слоя*, распредѣленнаго по поверхности (S), на точку x, y, z.

Функція μ называется *напряженіемъ слоя*.

Функція W перемѣнныхъ x, y и z конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ внутри и внѣ области (D), въ безконечности обращается въ нуль и удовлетворяетъ внутри и внѣ области (D) уравненію Лапласа

$$\Delta W = 0.$$

При переходѣ точки x, y, z черезъ точку s поверхности (S), функція W претерпѣваетъ разрывъ, выражаемый слѣдующими соотношеніями

$$W_{is} = W_s + \mu_s,$$

$$W_{es} = W_s - \mu_s,$$

$$W_{is} - W_{es} = 2\mu_s.$$

Сверхъ того обыкновенно принимаютъ, что нормальная производная $\frac{\partial W}{\partial n}$ потенціала двойного слоя остается конечной и непрерывной при переходѣ точки x, y, z черезъ поверхность (S), такъ что

$$\frac{\partial W_{is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{es}}{\partial n}. \tag{5}$$

4. Пусть f есть заданная функція координатъ, конечная и непрерывная во всѣхъ точкахъ поверхности (S).

Будемъ обозначать вообще черезъ F' значеніе какой либо функціи F отъ x, y и z по замѣнѣ этихъ перемѣнныхъ соотвѣтственно черезъ ξ, η и ζ.

Положимъ

$$V_0 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{f'}{r} ds$$

и составимъ рядъ функцій

$$V_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{V_0'}{r^2} \cos\varphi \, ds,$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{V_1'}{r^2} \cos\varphi \, ds,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi} \int \frac{V_{n-1}'}{r^2} \cos\varphi \, ds,$$

$$\dots\dots\dots$$

Въ интегралахъ этихъ равенствъ интегрированіе совершается по перемѣннымъ ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

Положимъ затѣмъ

$$\Phi = V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \frac{\cos\varphi}{r^2} (V_0' + V_1' + \cdots + V_n' + \cdots)\, ds.$$

Назовемъ черезъ M_n наибольшее, черезъ m_n наименьшее значеніе функціи V_n $(n = 1, 2, \ldots)$ на поверхности (S).

Neumann показалъ, что

$$M_n < M_{n-1}, \qquad m_n > m_{n-1} \tag{6}$$

и

$$M_n - m_n \leqq (M_{n-1} - m_{n-1})\, \varrho. \tag{7}$$

Если поверхность (S) конвексна и имѣетъ въ каждой точкѣ опредѣленную касательную плоскость и опредѣленную, конечную кривизну, то ϱ есть правильная дробь, зависящая отъ свойствъ поверхности (S).

Неравенства (6) и (7) показываютъ, что при этомъ допущеніи

$$\lim_{n=\infty} V_n = \text{const.} = C.$$

Постоянная C, какъ замѣчаетъ H. Poincaré *), излагая методу Neumann'a, равна нулю, если выполняется условіе

$$\int f' ds = 0.$$

При этомъ рядъ

$$V_0' + V_1' + \cdots + V_n' + \cdots$$

сходится абсолютно и равномѣрно въ любой точкѣ s поверхности (S).

Φ есть, слѣдовательно, конечная и непрерывная функція координатъ внутри и внѣ области (D), обращающаяся въ безконечности въ нуль, удовлетворяющая внутри и внѣ (D) уравненію Лапласа и условіямъ

$$\Phi_{is} = \Phi_s + V_{0s} + V_{1s} + \cdots + V_{ns} + \cdots,$$

$$\Phi_{es} = \Phi_s - (V_{0s} + V_{1s} + \cdots + V_{ns} + \cdots) =$$

$$= (V_{1s} - V_{0s}) + (V_{2s} - V_{1s}) + \cdots = - V_{0s},$$

$$\frac{\partial \Phi_{is}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n}. \tag{8}$$

*) H. Poincaré: „Sur les équations de la physique mathématique". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VIII, parte 1a, 1894, p. 113.

Положимъ
$$V = V_0 + \Phi. \tag{9}$$

На основанiи второго изъ предыдущихъ равенствъ, получаемъ
$$V_{es} = V_{0es} + \Phi_{es} = V_{0es} - V_{0s}.$$

Такъ какъ V_0 есть потенцiалъ простого слоя, распредѣленнаго по (S) съ плотностью f', то при сдѣланномъ выше допущенiи относительно поверхности (S)
$$V_{0es} = V_{0is} = V_{0s}$$
и
$$\frac{\partial V_{0is}}{\partial n} = \frac{\partial V_{0es}}{\partial n} + f_s. \tag{10}$$

Слѣдовательно, въ любой точкѣ s поверхности (S)
$$V_{es} = V_{0es} - V_{0s} = 0.$$

Функцiя V равна нулю тождественно во всѣхъ точкахъ внѣ области (D).

Слѣдовательно,
$$\frac{\partial V_{es}}{\partial n} = \frac{\partial V_{0es}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n} = 0$$
или, въ силу (10),
$$\frac{\partial V_{0is}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n} = f_s.$$

Отсюда, на основанiи (8),
$$\frac{\partial (V_{0is} + \Phi_{is})}{\partial n} = f_s$$
и, наконецъ, въ силу (9),
$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s.$$

Если всѣ предыдущiя разсужденiя справедливы, то функцiя V, построенная только что указаннымъ прiемомъ, представляетъ рѣшенiе задачи Neumann'а, ибо эта функцiя удовлетворяетъ внутри области (D) уравненiю Лапласа и ея нормальная производная обращается на поверхности (S) въ заданную функцiю f.

5. Въ вышеприведенномъ изложенiи методы Neumann'a равенство

$$\int f ds = 0 \tag{3}$$

служитъ какъ бы существеннымъ условiемъ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n + \cdots \quad *). \tag{11}$$

Но мы сейчасъ увидимъ, что это равенство на самомъ дѣлѣ не играетъ никакой роли въ доказательствѣ сходимости ряда (11).

Послѣднiй можетъ быть сходящимся, хотя бы функцiя f и не удовлетворяла условiю (3).

Для примѣра разсмотримъ простѣйшiй случай, когда поверхность (S) есть сфера.

Положимъ

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 ,$$

гдѣ a_1, a_2 суть нѣкоторые постоянные коэффицiенты (пока неопредѣленные), а f_1 и f_2 какiя либо функцiи координатъ точекъ поверхности (S) (сферы).

Положимъ

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'}{r} ds = \frac{a_1}{4\pi}\int \frac{f_1'}{r} ds + \frac{a_2}{4\pi}\int \frac{f_2'}{r} ds = a_1 Q_1 + a_2 Q_2 ,$$

гдѣ Q_1 и Q_2 суть нѣкоторыя функцiи координатъ x, y и z.

Опредѣлимъ постоянныя a_1 и a_2 при помощи равенствъ

$$\left.\begin{aligned} \int V_0' ds &= a_1 \int Q_1' ds + a_2 \int Q_2' ds = 0 , \\ \int f' ds &= a_1 \int f_1' ds + a_2 \int f_2' ds = 1 . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Всегда можно выбрать функцiи f_1 и f_2 такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \int Q_1' ds , & \int Q_2' ds \\ \int f_1' ds , & \int f_2' ds \end{vmatrix}$$

будетъ неравенъ нулю.

---

*) Для простоты письма опускаемъ значекъ $'$ при функцiяхъ V_n.

Уравненія (12) дадутъ вполнѣ опредѣленныя выраженія постоянныхъ a_1 и a_2. При этомъ будемъ имѣть

$$\int V_0' ds = 0\,, \qquad \int f' ds = 1\,.$$

Интегрируемъ равенство

$$V_n = \frac{1}{2\pi} \int V_{n-1}' \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds$$

по всей поверхности (S) по перемѣннымъ x, y и z.

Обозначимъ элементъ поверхности при этомъ интегрированіи черезъ dS. Получимъ

$$\int V_n dS = \frac{1}{2\pi} \int V_{n-1}' \left(\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS \right) ds\,.$$

Для сферы

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS = \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 2\pi$$

по теоремѣ Гаусса.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ при всякомъ $n = 1\,, 2\,, \ldots$

$$\int V_n dS = \int V_n' ds = \int V_{n-1}' ds\,.$$

Такъ какъ по условію

$$\int V_0' ds = 0\,,$$

то

$$\int V_n' ds = 0$$

при всякомъ $n = 1\,,\ 2\,, \ldots \infty$.

Каждая изъ функцій V_n принимаетъ на поверхности сферы и положительныя, и отрицательныя значенія.

Слѣдовательно,

$$M_n > 0\,, \qquad m_n < 0\,.$$

Поэтому на поверхности сферы

$$|V_n| < M_n - m_n\,.$$

Но, въ силу неравенствъ (7),

$$M_n - m_n \leqq (M_0 - m_0)\varrho^n,$$

гдѣ ϱ есть правильная дробь.

Модуль каждаго члена ряда

$$V_{1s} + V_{2s} + \ldots + V_{ns} + \ldots \tag{13}$$

для любой точки s сферы (S) менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\varrho(M_0 - m_0)(1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^n + \ldots) = \frac{\varrho(M_0 - m_0)}{1 - \varrho}.$$

Слѣдовательно, рядъ (13) сходится абсолютно и равномѣрно въ любой точкѣ s сферы (S), и

$$\lim_{n=\infty} V_n = 0,$$

хотя функція f и не удовлетворяетъ условію (3) *).

Составимъ для даннаго случая функцію

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r^2}(V_0' + V_1' + \ldots + V_n' + \ldots)\, ds,$$

которая обладаетъ всѣми свойствами функціи Φ предыдущаго §-а.

Полагая затѣмъ

$$V = V_0 + \Phi$$

и повторяя дословно всѣ разсужденія предыдущаго §-а, мы придемъ къ заключенію, что функція V, удовлетворяя внутри сферы уравненію Лапласа, удовлетворяетъ и условію

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s \qquad \text{на поверхности сферы.} \tag{14}$$

Поэтому, если всѣ разсужденія методы Neumann'а справедливы, то должно быть справедливо и слѣдующее предложеніе:

---

*) Въ данномъ случаѣ, напоминаемъ,

$$\int f' ds = 1.$$

Существуетъ конечная и непрерывная внутри сферы функція координатъ V, удовлетворяющая уравненію Лапласа и обращающаяся на поверхности сферы въ заданную функцію f, подчиненную условію

$$\int f dS = 1. \tag{15}$$

Это предложеніе есть очевидный абсурдъ.

6. Всѣ разсужденія предыдущаго §-а справедливы вплоть до равенства (срав. § 4)

$$\frac{\partial V_{0is}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n} = f_s.$$

Если же справедливо равенство (8), то справедливо и (14).

Но такъ какъ послѣднее при условіи (15) невозможно, то, слѣдовательно, равенство (8) [или (5)] ошибочно.

Приводимъ обычное доказательство равенства (5) *) (см. § 2-ой).

Примемъ за начало координатъ какую либо точку s поверхности (S), ось z направимъ по внѣшней нормали къ (S) въ этой точкѣ.

Опишемъ около s, какъ центра, сферу достаточно малаго радіуса R. Эта сфера пересѣчетъ поверхность (S) по нѣкоторой замкнутой кривой, которая раздѣлитъ (S) на двѣ части (Σ) и (σ).

Пусть всѣ точки части (Σ) лежатъ внѣ, а части (σ) внутри сферы радіуса R.

Можемъ писать

$$W = \int \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds = \int\limits_{(\Sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds + \int\limits_{(\sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds.$$

Первый (считая слѣва) интегралъ правой части этого равенства распространяется на всю часть (Σ), второй на часть (σ).

Положимъ

$$W_1 = \int\limits_{(\Sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds, \quad W_2 = \int\limits_{(\sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds.$$

Получимъ

$$W = W_1 + W_2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W_1}{\partial z} + \frac{\partial W_2}{\partial z}.$$

*) См. C. Neumann. „Untersuchungen über das logarithmische und newtonische Potential.“ Leipzig, 1877, s. 140.

G. Kirchhoff. „Vorlesungen über Mathematische Physik“. Leipzig, 1883, s. 181.

Функція $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ конечна и непрерывна для всѣхъ значеній z; слѣдовательно, и при $z=0$, т. е. при переходѣ точки x, y, z черезъ поверхность (S), $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ не испытываетъ разрыва.

Функція $\frac{\partial W}{\partial z}$ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, если это свойство принадлежитъ и функціи $\frac{\partial W_2}{\partial z}$.

Представимъ функцію W_2 подъ видомъ

$$W_2 = -\int\limits_{(\sigma)} \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds.$$

Введемъ полярныя координаты ϱ и φ съ полюсомъ въ точкѣ s.

Получимъ

$$W_2 = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \mu \frac{z \varrho \, d\varrho \, d\varphi}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

гдѣ μ есть функція ϱ и φ.

При вычисленіи интеграла W_2 разсуждаютъ обыкновенно слѣдующимъ образомъ.

Всегда можно сдѣлать радіусъ R столь малымъ, что для всѣхъ точекъ части (σ) значенія функціи μ будутъ сколь угодно мало отличаться отъ значенія μ въ точкѣ s.

Поэтому можемъ писать

$$W_2 = \mu_s \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \frac{z \varrho \, d\varrho \, d\varphi}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или

$$W_2 = 2\pi\mu_s \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial W_2}{\partial z} = -2\pi\mu_s \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Переходя къ предѣлу и предполагая, что

$$\lim \frac{z}{R} = 0,$$

получаемъ

$$\lim_{z=0} \frac{\partial W_2}{\partial z} = -2\pi\mu_s \frac{1}{R}.$$

Правая часть этого равенства не зависитъ отъ z.

Слѣдовательно, $\frac{\partial W_2}{\partial z}$ не претерпѣваетъ разрыва при переходѣ точки черезъ точку s поверхности (S).

Такимъ образомъ, употребляя обозначенія §-а 2-ого, можемъ писать

$$\frac{\partial W_{2is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{2es}}{\partial n}. \tag{16}$$

Сверхъ того

$$\frac{\partial W_{1is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1es}}{\partial n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial W_{is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{es}}{\partial n}. \tag{17}$$

Ошибка заключается въ замѣнѣ функціи μ постоянной величиной μ_s.

При такой замѣнѣ мы отбрасываемъ въ выраженіи W_2 нѣкоторые члены, зависящіе отъ z и безконечно малые при безконечно маломъ z.

Послѣ дифференцированія по z эти члены могутъ сдѣлаться сколь угодно большими при z безконечно маломъ.

При этомъ равенство (16), а, слѣдовательно, и непосредственно изъ него вытекающее равенство (17) потеряютъ всякій смыслъ.

Разсмотримъ простѣйшій примѣръ *).

Предположимъ, что часть (σ) есть кругъ радіуса R.

Помѣстимъ начало координатъ въ центрѣ этого круга, ось z направимъ по перпендикуляру къ его плоскости.

Предположимъ, что

$$\mu = \varrho.$$

Имѣемъ

$$W_2 = -2\pi z \int_0^R \frac{\varrho^2 d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi z \left[\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - \log\left(\frac{R}{\sqrt{z^2}} + \sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1} \right) \right].$$

---

*) Этотъ простѣйшій примѣръ указанъ проф. А. М. Ляпуновымъ.

Отсюда

$$\frac{\partial W_2}{\partial z} = 2\pi\left[\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{R^2 z^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z^2}{(R+\sqrt{R^2+z^2})\sqrt{R^2+z^2}} + \right.$$

$$\left. + 1 - \log(R+\sqrt{R^2+z^2}) + \log z\right].$$

При $z=0$ выраженіе $\frac{\partial W_2}{\partial z}$ обращается въ безконечность какъ $\log z$.

Членъ $\log z$ получился отъ дифференцированія по z члена $z\log z$. При этомъ

$$\lim_{z=0} z\log z = 0,$$

а

$$\lim_{z=0} \frac{d}{dz}(z\log z) = \infty.$$

Въ этомъ случаѣ не можетъ быть рѣчи о справедливости равенства (17).

Примѣровъ подобнаго рода можно привести сколько угодно, мы взяли только простѣйшій.

Но можно подобрать функцію μ и такимъ образомъ, что равенство (17) будетъ имѣть мѣсто.

Если, напримѣръ, функція μ удовлетворяетъ условію

$$\int_0^{2\pi} \mu d\varphi = \text{const.},$$

то справедливость равенства (17) не подлежитъ сомнѣнію.

7. Такимъ образомъ, если и можно пользоваться равенствомъ (8), а, слѣдовательно, и методой Neumann'а, то только для извѣстнаго типа функцій f. Но мы ничего не знаемъ о томъ, каковы общія свойства такого рода функцій.

Ошибочный результатъ §-а 5-аго получился именно потому, что равенство (8) не можетъ имѣть мѣста, коль скоро функція

$$V_0' + V_1' + \cdots + V_n' + \cdots$$

зависитъ отъ функціи f, удовлетворяющей условіямъ

$$\int f' ds = 1, \qquad \int ds\left(\int \frac{f'}{r}\, ds\right) = 0.$$

Правда, въ задачѣ Neumann'а функція f должна удовлетворять иному условію

$$\int f' ds = 0,$$

но мы не имѣемъ никакихъ данныхъ думать, что это равенство обусловливаетъ справедливость равенства (8).

Эти соображенія лишаютъ, на мой взглядъ, методу Neumann'а всякаго значенія, или, въ крайнемъ случаѣ, дѣлаютъ достоинство ея весьма условнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы не имѣемъ никакихъ основаній утверждать, что построенная нами въ каждомъ данномъ случаѣ функція V есть дѣйствительно искомая.

Замѣтимъ кстати, что въ силу только что сказаннаго должно признать не достаточно удовлетворительными, и требующими дальнѣйшей провѣрки путемъ болѣе строгихъ пріемовъ, всѣ другія изслѣдованія и результаты въ области Математической Физики, основанные на предположеніи непрерывности нормальной производной отъ потенціала двойного слоя (не постояннаго напряженія) при переходѣ точки черезъ его поверхность.

Такъ, напримѣръ, едва ли можно признать достигающими цѣли изысканія H. Poincaré, помѣщенныя въ вышеуказанномъ мемуарѣ: „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet" и имѣющія цѣлью распространить методу Neumann'а *) на болѣе обширный классъ поверхностей, чѣмъ поверхности конвексныя.

Основныя неравенства этого мемуара H. Poincaré получаетъ, исходя изъ предположенія непрерывности нормальной производной потенціала двойного слоя, предположенія, вообще говоря, несправедливаго.

Заканчивая разборъ методы C. Neumann'а, не мѣшаетъ обратить вниманіе еще и на слѣдующее.

Не говоря уже о томъ недостаткѣ разсматриваемой методы, который основывается на неудобствѣ употребленія равенства (8) [или (5)], обычное изложеніе методы неудовлетворительно и во многихъ другихъ отношеніяхъ.

Какъ было замѣчено выше, H. Poincaré утверждаетъ при изложеніи методы Neumann'а, что если функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f' ds = 0, \tag{18}$$

---

*) Методу для рѣшенія задачи Dirichlet.

то предѣлъ функціи V_n при $n=\infty$ равенъ нулю, и рядъ

$$V'_0+V'_1+\ldots+V'_n+\ldots \tag{19}$$

сходится абсолютно и равномѣрно на поверхности (S).

Мы видѣли уже, что этотъ рядъ можетъ сходиться, хотя бы функція f и не удовлетворяла условію (18).

Не трудно привести и обратный примѣръ: функція f можетъ удовлетворять равенству (18), а рядъ (19) не будетъ сходиться на поверхности (S).

Разсмотримъ опять простѣйшій случай сферы.

Положимъ, какъ и раньше (см. § 5),

$$f=a_1f_1+a_2f_2$$

и опредѣлимъ постоянныя a_1 и a_2 при помощи условій

$$a_1\int f'_1ds+a_2\int f'_2ds=0\,,$$

$$a_1\int Q'_1ds+a_2\int Q'_2ds=1\,. \tag{20}$$

При этомъ, какъ и въ §-ѣ 5-омъ, получимъ

$$\int V'_nds=\int V'_{n-1}ds\,. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Такъ какъ, въ силу (20),

$$\int V'_0ds=1\,,$$

то при всякомъ n,

$$\int V'_nds=1\,.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ V_n при возрастаніи значка n стремится къ конечной, положительной, *не равной нулю* постоянной.

Рядъ (19) не сходится въ точкахъ поверхности (S).

Вмѣсто этого ряда слѣдуетъ разсматривать нѣкоторый другой.

Я ограничусь только этимъ замѣчаніемъ, не входя въ подробности, такъ какъ сдѣлавъ методу Neumann'a безупречной во всѣхъ прочихъ отношеніяхъ, мы все же не будемъ въ состояніи избавиться отъ употребленія равенства (8), этого наиболѣе слабаго пункта разсматриваемой методы.

8. Въ виду всего сказаннаго, я считаю не безполезнымъ предложить иную методу рѣшенія задачи Neumann'a.

Хотя пріемъ, который будетъ изложенъ ниже, распространяется только на ограниченный классъ конвексныхъ поверхностей, но зато онъ устраняетъ существенный недостатокъ методы Neumann'a и приводитъ къ болѣе несомнѣннымъ результатамъ.

Въ избѣжаніе повтореній, я напомню сначала нѣкоторыя извѣстныя предложенія изъ теоріи потенціала простого поверхностнаго слоя и приведу нѣкоторыя другія теоремы, которыми придется пользоваться впослѣдствіи.

Пусть x, y, z какая либо точка пространства, ξ, η, ζ точка поверхности (S), элементъ которой ds.

Пусть μ есть конечная и непрерывная функція координатъ ξ, η, ζ точекъ этой поверхности.

Выраженіе

$$P = \int \frac{\mu}{r} ds \tag{21}$$

называется *потенціаломъ на точку* x, y, z *простого слоя*, распредѣленнаго по (S) съ плотностью μ.

Функція P перемѣнныхъ x, y, z непрерывна во всемъ пространствѣ и удовлетворяетъ уравненію Лапласа.

Опишемъ около какой либо точки s поверхности (S) сферу (σ) безконечно малаго радіуса ϱ и назовемъ интегралъ типа (21), распространенный на часть поверхности (S), внѣшнюю относительно (σ), черезъ P_1, а интегралъ того же вида, распространенный на часть (S), лежащую внутри (σ), черезъ P_2.

Имѣемъ

$$P = P_1 + P_2.$$

Примемъ точку s за начало координатъ, ось z направимъ по внѣшней нормали къ (S) въ точкѣ s.

Можно писать

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\partial P_2}{\partial z}.$$

Пусть точка x, y, z лежитъ внутри (S) на оси z.

Предположимъ теперь, что z и ϱ стремятся къ нулю такъ, что

$$\lim \frac{z}{\varrho} = 0,$$

и перейдемъ къ предѣлу.

Выраженіе $\frac{\partial P_1}{\partial z}$ обратится въ предѣлѣ въ то, что мы называемъ значеніемъ нормальной производной функціи P въ точкѣ s поверхности (S), а выраженіе $\frac{\partial P_2}{\partial z}$ въ $2\pi\mu_s$.

Предѣломъ же $\frac{\partial P}{\partial z}$ будетъ, согласно принятому обозначенію, выраженіе $\frac{\partial P_{is}}{\partial z}$.

Замѣняя z черезъ n, получаемъ вообще

$$\frac{\partial P_{is}}{\partial n} = \frac{\partial P_s}{\partial n} + 2\pi\mu_s. \tag{22}$$

Подобнымъ же путемъ находимъ

$$\frac{\partial P_{es}}{\partial n} = \frac{\partial P_s}{\partial n} - 2\pi\mu_s. \tag{23}$$

Отсюда извѣстное равенство

$$\frac{\partial P_{is}}{\partial n} - \frac{\partial P_{es}}{\partial n} = 4\pi\mu_s.$$

$\frac{\partial P_s}{\partial n}$ есть, какъ извѣстно, конечная и непрерывная функція точекъ поверхности (S).

Можемъ писать

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds.$$

Дифференцированіе подъ знакомъ интеграла производится по перемѣннымъ x, y и z.

Но

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x-\xi}{r}\cos(n,x) + \frac{y-\eta}{r}\cos(n,y) + \frac{z-\zeta}{r}\cos(n,z)\right).$$

Называя черезъ ψ уголъ, составляемый направленіемъ r, идущимъ отъ точки ξ, η, ζ поверхности (S) къ точкѣ x, y, z, съ внѣшней нормалью къ (S) въ этой послѣдней точкѣ, получаемъ

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\cos\psi}{r^2}.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = -\int \mu \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

9. Лемма I. *Если поверхность* (S) *конвексна и функція* μ *удовлетворяетъ условію*

$$\int \mu ds = 0,$$

то

$$\int \frac{\partial P}{\partial n} ds = 0.$$

Такъ какъ функція P удовлетворяетъ внутри области (D) уравненію Лапласа, то

$$\int \frac{\partial P_i}{\partial n} ds = 0.$$

Поэтому, интегрируя уравненіе (22) по всей поверхности (S), получаемъ

$$\int \frac{\partial P}{\partial n} ds + 2\pi \int \mu ds = 0.$$

Если же

$$\int \mu ds = 0,$$

то и

$$\int \frac{\partial P}{\partial n} ds = 0.$$

10. Разсмотримъ интегралъ вида

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

Этотъ интегралъ вообще будемъ обозначать черезъ I.

Значеніе его въ какой либо опредѣленной точкѣ s поверхности (S) будемъ обозначать черезъ

$$I_s.$$

Лемма II. *Если поверхность* (S) *есть сфера, то для любой ея точки* s

$$I_s = 2\pi.$$

Черезъ ψ обозначенъ уголъ, составляемый направленіемъ r, идущимъ отъ точки ξ, η, ζ къ точкѣ s, съ внѣшней нормалью къ (S) въ этой послѣдней точкѣ.

Называя по прежнему (см. § 3) черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ r съ направленіемъ внутренней нормали къ (S) въ точкѣ ξ, η, ζ, получаемъ для сферы

$$\cos\psi = \cos\varphi.$$

Слѣдовательно, въ любой точкѣ сферы

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds.$$

По теоремѣ Гаусса

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 2\pi.$$

Слѣдовательно,

$$I_s = 2\pi$$

въ любой точкѣ s сферы.

Этой леммой мы пользовались уже при разборѣ методы Neumann'а (см. § 5).

Лемма III. *Въ любой точкѣ s конвексной поверхности (S) интегралъ I_s удовлетворяетъ неравенству*

$$I_s \leqq 2\pi \frac{D_1}{D_0},$$

гдѣ D_1 и D_0 суть наибольшій и наименьшій изъ діаметровъ круговъ, проходящихъ черезъ двѣ точки поверхности (S) и имѣющихъ центры на нормали къ (S) въ одной изъ этихъ точекъ.

Возьмемъ на поверхности (S) двѣ точки s и s'. Пусть r есть разстояніе между этими точками.

Проводимъ нормаль къ (S) въ точкѣ s.

Пусть m есть точка пересѣченія этой нормали съ перпендикуляромъ, возстановленнымъ къ r въ точкѣ s'.

Отрѣзокъ sm обозначимъ черезъ D.

Имѣемъ

$$D = \frac{r}{\cos\psi}.$$

Если поверхность (S) конвексна, то

$$\psi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Знакъ равенства соотвѣтствуетъ случаю, когда точки s и s' совпадаютъ.

Несомнѣнно, что D есть величина конечная, неравная нулю для всякой пары точекъ s и s', несовпадающихъ другъ съ другомъ.

Если s' стремится къ совпаденю съ s, то уголъ ψ стремится къ $\frac{\pi}{2}$, r къ нулю, D стремится къ конечному, отличному отъ нуля предѣлу, а именно къ діаметру круга кривизны въ точкѣ s линіи сѣченія поверхности (S) плоскостью, проходящей черезъ нормаль n и точку s'.

Такъ какъ поверхность (S) по условію имѣетъ конечную и опредѣленную кривизну въ каждой точкѣ, то предѣлъ D есть величина конечная и опредѣленная для любой точки s поверхности (S).

При нѣкоторомъ положеніи точекъ s и s' (или рядѣ положеній) D получитъ наибольшее значеніе, при нѣкоторомъ другомъ положеніи этихъ точекъ (или рядѣ положеній) наименьшее.

Наибольшую величину D назовемъ черезъ D_1, наименьшую черезъ D_0.

Имѣемъ тождество

$$I = \int \frac{\cos\psi}{r^2} ds = \int \frac{\cos\psi}{r} \cdot \frac{r}{\cos\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Назовемъ черезъ $\varDelta$ діаметръ круга, проходящаго черезъ точки s и s' и имѣющаго центръ на нормали къ поверхности (S) въ точкѣ s'.

Такъ какъ

$$\varDelta = \frac{r}{\cos\varphi},$$

то

$$I = \int \frac{\varDelta}{D} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds.$$

Наибольшее значеніе $\varDelta$ очевидно равно наибольшему значенію D. Поэтому въ любой точкѣ s поверхности (S)

$$I_s \leqq 2\pi \frac{D_1}{D_0},$$

что и требовалось показать.

11. Обозначимъ интегралъ вида

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2} ds,$$

распространенный на какую либо часть (c) поверхности (S), черезъ

$$\int\limits_{(c)} \frac{\cos\psi}{r^2} ds = I^{(c)}.$$

$I^{(c)}$ есть функція координатъ x, y, z точекъ поверхности (S).

Значеніе интеграла $I^{(c)}$ въ какой либо точкѣ s будемъ обозначать черезъ $I_s^{(c)}$.

Раздѣлимъ поверхность (S) на какія либо двѣ части (α) и (β) и возьмемъ на ней двѣ какія либо точки s и s'.

Лемма IV. *Сумма интеграловъ* $I_s^{(\alpha)}$ *и* $I_{s'}^{(\beta)}$ *удовлетворяетъ неравенству*

$$I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)} \geqq \frac{S}{D_1^2},$$

гдѣ S *есть величина поверхности* (S), *а* D_1 *есть наибольшій изъ діаметровъ круговъ, проходящихъ черезъ двѣ точки поверхности* (S) *и имѣющихъ центры на нормали къ послѣдней въ одной изъ этихъ точекъ.*

По предыдущему

$$I^{(\alpha)} = \int\limits_{(\alpha)} \frac{\cos\psi}{r^2}\,ds = \int \frac{1}{Dr}\,ds.$$

Такъ какъ въ любой точкѣ s поверхности (S)

$$r < D,$$

то

$$I_s^{(\alpha)} \geqq \int \frac{1}{D^2}\,ds \geqq \frac{\alpha}{D_1^2},$$

гдѣ α есть величина поверхности части (α).

Точно также получимъ неравенство

$$I_{s'}^{(\beta)} \geqq \frac{\beta}{D_1^2},$$

гдѣ β есть величина поверхности части (β).

Назовемъ черезъ S величину поверхности (S).

Такъ какъ

$$\alpha + \beta = S,$$

то

$$I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)} \geqq \frac{S}{D_1^2}.$$

Лемма доказана.

Это неравенство справедливо, каковы бы ни были части (α) и (β) и гдѣ бы ни находились точки s и s' на поверхности (S).

Возьмемъ отношеніе

$$\frac{I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)}}{4\pi}.$$

При нѣкоторомъ положеніи точекъ s и s' и нѣкоторомъ опредѣленномъ дѣленіи (S) на части (α) и (β) это отношеніе получитъ наименьшее значеніе.

Величина послѣдняго во всякомъ случаѣ болѣе или равна числу

$$\lambda = \frac{S}{4\pi D_1^2}. \tag{24}$$

Каждой конвексной поверхности (S) соотвѣтствуетъ опредѣленная постоянная λ, совпадающая, очевидно, съ постоянной конфигураціи Neumann'а.

Для сферы радіуса R

$$D_1 = 2R, \qquad S = 4\pi R^2$$

и

$$\lambda = \frac{1}{4}.$$

12. Построимъ сферу (Σ), касательную къ поверхности (S) въ какой либо точкѣ s.

Эта сфера, вообще говоря, пересѣчетъ поверхность (S) по нѣкоторымъ кривымъ.

Уменьшая радіусъ сферы (Σ) и оставляя ее постоянно касательной къ (S) въ точкѣ s, мы дойдемъ до такого предѣльнаго положенія этой сферы, когда она не будетъ имѣть никакихъ точекъ, общихъ съ поверхностью (S), кромѣ точекъ соприкосновенія и будетъ притомъ цѣликомъ лежать внутри (S).

При дальнѣйшемъ уменьшеніи радіуса сферы (Σ) послѣдняя не будетъ имѣть никакихъ другихъ точекъ, общихъ съ поверхностью (S), кромѣ точки s.

Только что упомянутую предѣльную сферу, соотвѣтствующую точкѣ s, обозначимъ черезъ (σ_{is}), а радіусъ ея черезъ ϱ_{is}.

При измѣненіи положенія точки s на поверхности (S) радіусъ ϱ_{is} будетъ измѣнять свою величину, оставаясь всегда конечнымъ.

Наименьшее значеніе ϱ_{is} обозначимъ черезъ ϱ.

Точно также, увеличивая радіусъ сферы (Σ), мы дойдемъ до такого ея предѣльнаго положенія, что она не будетъ имѣть никакихъ другихъ общихъ точекъ съ поверхностью (S) кромѣ точекъ соприкосновенія и будетъ при этомъ цѣликомъ лежать внѣ поверхности (S).

При дальнѣйшемъ увеличеніи радіуса сферы (Σ), она не будетъ имѣть другихъ точекъ, общихъ съ (S), кромѣ точки s.

Такую предѣльную сферу обозначимъ черезъ (σ_{es}), а радіусъ ея черезъ ϱ_{es}.

При любомъ положенiи точки s на конвексной поверхности (S) радiусъ ϱ_{es} будетъ величиной конечной.

Наибольшее значенiе ϱ_{es} назовемъ черезъ ϱ_1.

Если поверхность (S) есть сфера радiуса R, то

$$\varrho = \varrho_1 = R$$

и

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = 1.$$

Для всякой другой поверхности, отличной отъ сферы,

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = 1 + \varepsilon,$$

гдѣ ε есть нѣкоторое положительное число, которое будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе поверхность (S) уклоняется отъ сферы, и наоборотъ.

Величину отношенiя $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ можно принять за мѣру уклоненiя конвексной поверхности (S) отъ сферы.

Обозначимъ это отношенiе черезъ σ.

Очевидно, что величина D (см. предыд. §) для точки s заключается между предѣлами ϱ_{is} и ϱ_{es}.

Слѣдовательно,

$$D_1 \leqq 2\varrho_1, \qquad D_0 \geqq 2\varrho \tag{25}$$

и

$$\frac{D_1}{D_0} \leqq \frac{\varrho_1}{\varrho} = \sigma. \tag{26}$$

13. Лемма V. *Въ любой точкѣ s конвексной поверхности (S), величина уклоненiя которой*

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots,$$

разность

$$\tau_s = \frac{I_0}{2\pi} - \frac{I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)}}{4\pi},$$

гдѣ I_0 есть наибольшее значенiе интеграла I на поверхности (S), положительна и менѣе единицы.

Такъ какъ каждый изъ интеграловъ $I_s^{(\alpha)}$ и $I_{s'}^{(\beta)}$ менѣе I_0, то

$$\tau_s > 0.$$

Остается доказать, что

$$\tau_s < 1\,,$$

если

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots\,.$$

Такъ какъ

$$S \geqq 4\pi\rho^2\,,$$

то [рав. (24) и нерав. (25)]

$$\lambda \geqq \frac{1}{4\sigma^2}.$$

Вслѣдствіе этого, по леммѣ IV-ой,

$$\frac{I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)}}{4\pi} \leqq \frac{1}{4\sigma^2}.$$

Съ другой стороны, на основаніи леммы III-ьей и неравенства (26),

$$\frac{I_0}{2\pi} \leqq \sigma.$$

Слѣдовательно,

$$\tau_s \leqq \sigma - \frac{1}{4\sigma^2}.$$

Если

$$\sigma - \frac{1}{4\sigma^2} < 1\,, \tag{27}$$

то и подавно

$$\tau_s < 1. \tag{28}$$

Неравенство (27) навѣрно удовлетворится, если

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots\,,$$

причемъ для любой точки s поверхности (S) будетъ имѣть мѣсто неравенство (28).

Наибольшее значеніе τ_s обозначимъ черезъ $\tau (\tau < 1)$.

Разсмотримъ для примѣра случай трехоснаго эллипсоида съ полуосями

$$a > b > c.$$

Покажемъ, что для эллипсоида

$$\tau < 1\,,$$

если

$$a \leqq c \cdot 1{,}15\ldots\ .$$

Не трудно убѣдиться, что при всякомъ положеніи двухъ точекъ s s' на поверхности эллипсоида

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{\delta_0}{\delta_1}\,,$$

гдѣ δ_0 и δ_1 суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на плоскости, касательныя къ эллипсоиду въ точкахъ s и s'.

Слѣдовательно,

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \leqq \frac{a}{c}$$

и въ любой точкѣ s

$$\frac{I_s}{2\pi} \leqq \frac{a}{c} = k.$$

Діаметръ D принимаетъ наибольшее значеніе D_1 въ томъ случаѣ, когда точки s и s' совпадаютъ и находятся въ вершинѣ, соотвѣтствующей наименьшей изъ осей эллипсоида.

При этомъ

$$D_1 \leqq 2\,\frac{a^2}{c}.$$

Такъ какъ

$$S > 4\pi c^2,$$

то

$$\lambda \geqq \frac{1}{4k^4}.$$

Поэтому неравенство

$$\tau < 1$$

навѣрно удовлетворится, коль скоро

$$k - \frac{1}{4k^4} - 1 < 0\,,$$

т. е. если

$$k = \frac{a}{c} \leqq 1{,}15\ldots\ .$$

14. Положимъ

$$V=\frac{1}{2\pi}\int\mu\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds\,,$$

гдѣ μ есть конечная и непрерывная функція координатъ ξ, η, ζ точекъ поверхности (S).

Допустимъ, что μ мѣняетъ знакъ на поверхности (S).

Назовемъ черезъ M наибольшее значеніе μ, черезъ m наименьшее.

По условію

$$M>0\,,\qquad m<0\,. \tag{29}$$

Лемма VI. *Если функція μ мѣняетъ знакъ на поверхности (S), оставаясь конечной и непрерывной, то разность значеній функціи*

$$V=\frac{1}{2\pi}\int\mu\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds$$

въ двухъ какихъ либо точкахъ s и s' конвексной поверхности (S) удовлетворяетъ неравенству

$$V_s-V_{s'}\leqq(M-m)\left(\frac{I_0}{2\pi}-\frac{I_s^{(\beta)}+I_{s'}^{(\alpha)}}{4\pi}\right).$$

Для доказательства этой леммы воспользуемся методой ариѳметическихъ среднихъ C. Neumann'a.

Раздѣлимъ поверхность (S) на двѣ части (α) и (β) такія, что въ первой изъ нихъ μ удовлетворяетъ условію

$$\frac{m+M}{2}\leqq\mu\leqq M\,,$$

во второй условію

$$m\leqq\mu\leqq\frac{M+m}{2}.$$

Можемъ писать

$$2\pi V_s\leqq MI_s^{(\alpha)}+\frac{M+m}{2}I_s^{(\beta)}\,,$$

$$2\pi V_s\geqq mI_s^{(\beta)}+\frac{M+m}{2}I_s^{(\alpha)}.$$

Каждое изъ этихъ равенствъ справедливо для любой точки s поверхности (S).

Такъ какъ

$$I_s^{(\alpha)} + I_s^{(\beta)} = I_s,$$

то

$$2\pi V_s \leqq MI_s - \frac{M-m}{2} I_s^{(\beta)},$$

$$2\pi V_s \geqq mI_s + \frac{M-m}{2} I_s^{(\alpha)}.$$

Примѣнимъ первое изъ этихъ неравенствъ къ какой либо точкѣ s, второе къ нѣкоторой другой точкѣ s'.

Вычтя первое изъ такимъ образомъ составленныхъ неравенствъ изъ второго, найдемъ

$$2\pi(V_s - V_{s'}) \leqq MI_s - mI_{s'} - \frac{M-m}{2}(I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}).$$

Отсюда, въ силу (29),

$$2\pi(V_s - V_{s'}) \leqq (M-m)\left(I_0 - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}}{2}\right),$$

или

$$V_s - V_{s'} \leqq (M-m)\left(\frac{I_0}{2\pi} - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}}{4\pi}\right). \tag{30}$$

Слѣдствіе. *Для всякой конвексной поверхности, величина уклоненія которой отъ сферы*

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots,$$

разность значеній функціи V въ двухъ какихъ либо точкахъ s и s' этой поверхности удовлетворяетъ неравенству

$$V_s - V_{s'} \leqq (M-m)\tau,$$

гдѣ τ есть правильная дробь.

Если

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots,$$

то, по леммѣ V-ой,

$$\tau_s = \frac{I_0}{2\pi} - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}}{4\pi} < 1.$$

Вслѣдствіе этого, по только что доказанной леммѣ,

$$V_s - V_{s'} \leqq (M-m)\tau\,,$$

гдѣ

$$\tau < 1\,.$$

Для сферы лемма VI-ая справедлива, какова бы ни была функція μ, ибо въ этомъ случаѣ (лемма II) $I_s = 2\pi$.

15. Пусть f есть заданная конечная и непрерывная функція координатъ точекъ поверхности (S).

Составимъ рядъ функцій

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int f' \frac{1}{r}\, ds\,,$$

$$V_2 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_1'}{\partial n}\frac{1}{r}\, ds\,,$$

$$V_3 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_2'}{\partial n}\frac{1}{r}\, ds\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_n = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\frac{1}{r}\, ds \;{}^{*)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и положимъ

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots\right)\frac{1}{r}\, ds\,.$$

Теорема I. *Рядъ*

$$f_s + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots$$

сходится абсолютно и равномѣрно въ любой точкѣ s поверхности (S), если послѣдняя конвексна и величина σ уклоненія ея отъ сферы не болѣе числа 1,15..., а функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f ds = 0\,.$$

---

*) Напомнимъ, $\frac{\partial V_n'}{\partial n}$ есть выраженіе функціи $\frac{\partial V_n}{\partial n}$ послѣ замѣны перемѣнныхъ x, y, z черезъ ξ, η, ζ. Интеграція совершается по перемѣннымъ ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

Имѣемъ

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int f' \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds\,,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_1'}{\partial n}\frac{\cos\psi}{r^2}\, ds\,,$$

. . . .

$$\frac{\partial V_n}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\frac{\cos\psi}{r^2}\, ds\,,$$

. . . .

Если

$$\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\, ds = 0\,,$$

то, въ силу леммы I-ой, и

$$\int \frac{\partial V_n'}{\partial n}\, ds = 0\,. \tag{31}$$

Такъ какъ по условію теоремы

$$\int f' ds = 0\,,$$

то равенство (31) справедливо при всякомъ $n = 1, 2, \ldots$.

Каждая изъ функцій

$$\frac{\partial V_n}{\partial n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

мѣняетъ свой знакъ на поверхности (S).

Назовемъ наибольшее и наименьшее значенія $\frac{\partial V_n}{\partial n}$ на этой поверхности черезъ M_n и m_n.

Въ силу только что сказаннаго

$$M_n > 0\,, \qquad m_n < 0\,. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Если

$$\sigma \leqq 1{,}15 \ldots\,,$$

то

$$M_n - m_n \leqq (M_{n-1} - m_{n-1})\tau\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{32}$$

гдѣ τ есть правильная дробь, зависящая отъ свойствъ поверхности (S).

Неравенства (32) даютъ

$$M_n - m_n \leqq (M_0 - m_0)\tau^n, \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{33}$$

гдѣ M_0 и m_0 суть наибольшее и наименьшее значенія функціи f на поверхности (S).

Съ другой стороны очевидно, что

$$\left|\frac{\partial V_{ns}}{\partial n}\right| \leqq M_n - m_n$$

при всякомъ $n=1, 2, \ldots$ и для любой точки s.

Отсюда, въ силу (33), получаемъ

$$\left|\frac{\partial V_{ns}}{\partial n}\right| \leqq (M_0 - m_0)\tau^n = K\tau^n,$$

гдѣ

$$K = (M_0 - m_0)$$

есть конечная, положительная, неравная нулю постоянная.

Модуль каждаго члена ряда

$$\frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\tau K(1 + \tau + \tau^2 + \ldots + \tau^n + \ldots) = \frac{K\tau}{1-\tau}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$f + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots$$

сходится абсолютно и равномѣрно во всѣхъ точкахъ поверхности (S), если только величина σ уклоненія этой поверхности отъ сферы не болѣе числа $1{,}15\ldots$.

Слѣдствіе. *Выраженіе*

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots\right)\frac{1}{r}\,ds$$

представляетъ конечную и непрерывную функцію координатъ, если поверхность (S), на которую распространяется интегралъ, конвексна и величина уклоненія ея отъ сферы не болѣе числа $1{,}15\ldots$.

16. Такимъ образомъ составленная функція V удовлетворяетъ, очевидно, внутри и внѣ области (D) уравненію

$$\Delta V = 0.$$

Теорема II. *Если поверхность* (S) *конвексна и уклоненіе ея отъ сферы не болѣе числа 1,15 . . . , то функція*

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots\right)\frac{1}{r}\,ds$$

удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s$$

въ любой точкѣ s *поверхности* (S).

Функція V при условіяхъ теоремы представляетъ потенціалъ простого слоя, распредѣленнаго по поверхности (S) съ плотностью

$$f + \frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_2}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n}{\partial n} + \ldots.$$

Примѣняя къ V равенство (22), получаемъ

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = \frac{\partial V_s}{\partial n} + f_s + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots. \tag{34}$$

Съ другой стороны

$$V = -V_1 - V_2 - \ldots - V_n - \ldots.$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial n} = -\frac{\partial V_{1s}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} - \ldots - \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} - \ldots \tag{35}$$

для любой точки s поверхности (S).

Сравнивая это равенство съ (34), получаемъ

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s.$$

Это справедливо, если ряды равенствъ (34) и (35) сходятся во всѣхъ точкахъ поверхности (S).

По теоремѣ же I-ой эти ряды сходятся для конвексныхъ поверхностей, уклоненіе которыхъ отъ сферы не болѣе числа 1,15 . . . .

Теорема доказана.

17. Сопоставляя эту теорему съ I-ой выводимъ слѣдующую:

Теорема III. *Для всякой конвексной поверхности, уклоненіе которой отъ сферы не болѣе числа 1,15..., существуетъ конечная и непрерывная внутри этой поверхности функція V, удовлетворяющая уравненію*

$$\Delta V = 0 \qquad \text{внутри } (S)$$

и условію

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f \qquad \text{на поверхности } (S),$$

гдѣ f есть заданная конечная и непрерывная функція координатъ точекъ поверхности (S), удовлетворяющая условію

$$\int f ds = 0.$$

Функція V представляется подъ видомъ

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots\right)\frac{1}{r}\,ds,$$

а функціи $V_n (n = 1, 2, \ldots)$ вычисляются послѣдовательно по формуламъ

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int f'\frac{1}{r}\,ds,$$

$$V_n = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds. \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Такимъ образомъ задачу Neumann'а можно считать разрѣшенной для конвексныхъ поверхностей, достаточно мало уклоняющихся отъ сферы.

Въ случаѣ эллипсоида указанная метода примѣнима, когда отношеніе между наибольшей и наименьшей изъ его осей не болѣе числа 1,15... .

Вообще эта метода примѣнима во всѣхъ случаяхъ, когда рядъ

$$f + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots \tag{36}$$

сходится абсолютно и равномѣрно во всѣхъ точкахъ поверхности (S).

Намъ удалось доказать сходимость этого ряда только для поверхностей, величина уклоненія которыхъ отъ сферы не болѣе числа 1,15... .

Но въ самыхъ разсужденіяхъ мы пользовались слишкомъ грубыми высшими и низшими предѣлами, вслѣдствіе чего получился слишкомъ низкій предѣлъ для числа σ.

Въ дѣйствительности рядъ (36) сходится и въ случаѣ поверхностей, гораздо значительнѣе уклоняющихся отъ сферы; быть можетъ даже для всѣхъ конвексныхъ поверхностей, имѣющихъ опредѣленную касательную плоскость и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Но мнѣ не удалось строго подтвердить это предположеніе.