# Германъ фонъ-Гельмгольцъ въ его послѣднихъ произведеніяхъ *).

**А. П. Грузинцева.**

Въ 1847 году Гельмгольцъ опубликовалъ свой знаменитый мемуаръ „Ueber die Erhaltung der Kraft", въ которомъ изложилъ общій принципъ, управляющій физическими явленіями и извѣстный нынѣ подъ именемъ *закона сохраненія энергіи.* Руководствуясь этимъ принципомъ, мы можемъ отдать себѣ отчетъ во всякомъ физическомъ явленіи; дѣйствительно, законъ сохраненія энергіи состоитъ въ томъ, что, если мы наблюдаемъ какія-нибудь физическія явленія въ данной системѣ тѣлъ, то эти явленія происходятъ *непремѣнно* или за счетъ энергіи взятой системы, или за счетъ энергіи окружающихъ тѣлъ, или за счетъ обѣихъ; причемъ общій итогъ энергіи остается постояннымъ.

Но, съ другой стороны, энергія системы тѣлъ обусловливается тѣмъ или другимъ кинетическимъ состояніемъ ея частей, такъ-что, выразивъ при помощи общихъ теоремъ механики это кинетическое состояніе системы и принявъ въ разсчетъ законъ сохраненія энергіи, мы получимъ средство построить математическую теорію наблюдаемыхъ явленій. Другими словами, физическія явленія должны быть приписаны дѣйствію силъ, подчиненныхъ закону сохраненія энергіи.

Выразимъ въ математической формѣ высказанныя сейчасъ идеи.

Пусть имѣемъ систему точекъ, находящихся подъ дѣйствіемъ системы силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ; пусть какая-нибудь точка этой системы съ массой $m$ опредѣляется во время $t$ координатами $x$, $y$, $z$ и пусть $X$, $Y$, $Z$ будутъ составляющія силъ дѣйствую-

---

*) Эта статья содержитъ изложеніе послѣднихъ работъ Гельмгольца съ нѣкоторыми измѣненіями, оговоренными въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ. Въ устномъ изложеніи ей было предпослано нѣсколько словъ, посвященныхъ памяти знаменитаго ученаго († 8-го сентября н. с. 1894 года).

щихъ въ разсматриваемой точкѣ; затѣмъ предположимъ, что между точками системы существуютъ нѣкоторыя связи, которыя могутъ-быть намъ не извѣстны.

Примѣняя къ разсматриваемой системѣ принципъ Далямбера, получимъ

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0. \quad . \quad (a)$$

Въ этомъ равенствѣ связи системы уже отсутствуютъ.

Выразимъ состояніе нашей системы въ *общихъ* координатахъ; пусть эти координаты будутъ: $p_1, p_2, \ldots p_k$ и пусть скорости измѣненія ихъ будутъ: $q_1, q_2, \ldots q_k$, — т. е. пусть вообще:

$$q_i=\frac{dp_i}{dt} \qquad (i=1, 2, \ldots k).$$

Преобразуемъ равенство $(a)$.

Выраженіе:

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

представляетъ элементарную работу *всѣхъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ $(x, y, z)$; эти же силы будутъ двухъ родовъ: силы внутреннія и силы внѣшнія. Относительно внутреннихъ силъ примемъ допущеніе, что онѣ суть *силы консервативныя*, т. е. силы, имѣющія потенціалъ или сами по себѣ, или вслѣдствіе связей между частями системы.

Относительно-же внѣшнихъ силъ никакихъ предположеній не будемъ дѣлать.

Выражая теперь $x, y, z$ въ функціи перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_k$ и принимая въ соображеніе сказанное сейчасъ относительно характера внутреннихъ силъ, будемъ имѣть:

$$\sum\left(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\right)=-\delta\Phi-\sum_{i=1}^{i=k}P_i\delta p_i\,^{*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

гдѣ $\Phi$ есть *потенціалъ внутреннихъ силъ* и

$$\delta\Phi=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\delta p_i.$$

*) Тоже мы получаемъ, если вообще одна часть всѣхъ дѣйствующихъ силъ имѣетъ потенціалъ, а другая нѣтъ.

Количества вида $P_i$ суть внѣшнія силы, стремящіяся *увеличить* параметръ $p_i$, такъ-что выраженіе

$$-P_i \delta p_i$$

представитъ *работу* силы $P_i$.

Для преобразованія оставшейся части въ выраженіи ($a$) принципа Далямбера разсмотримъ функцію, представляющую кинетическую энергію системы, а именно:

$$T = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k} a_{ij} q_i q_j \quad . \; . \; . \quad (c)$$

при условіи:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Возьмемъ:

$$\int \delta T dt$$

между нѣкоторыми предѣлами $t = t_0$ и $t = t_1$; найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum m\left[\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right],$$

если будетъ удовлетворено условіе:

$$\Bigg|_{t_0}^{t_1} \sum m\left[\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right] = 0;$$

это-же условіе, вслѣдствіе произвольности $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, всегда можетъ быть удовлетворено; напримѣръ, мы всегда можемъ взять моменты времени $t_0$ и $t_1$ такими, чтобы перемѣщенія точекъ для нихъ были равны нулю.

Такимъ образомъ, если умножимъ равенство ($a$) на $dt$ и возмемъ интегралъ отъ $t = t_0$ до $t = t_1$, т. е. за весь промежутокъ времени существованія изучаемаго кинетическаго состоянія системы, то получимъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\left[\delta T - \delta \Phi - \sum_{i=1}^{i=k} P_i \delta p_i\right] = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Положимъ:

$$\Phi - T = H \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

тогда равенство (1) можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta H+\sum_{i=1}^{i=k} P_i\delta p_i\right]dt=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Гельмгольцъ представилъ это равенство въ слѣдующемъ видѣ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum P_i p_i\right)dt=0\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

при непремѣнномъ условіи, что силы $P_i$ *варіированію не подлежатъ*, т. е. суть функціи только времени.

Выраженіе $(A)$ представляетъ обобщеніе принципа Гамильтона (1834), выражаемаго равенствомъ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} H dt=0$$

и дано въ первый разъ Кирхгоффомъ въ 1876 г. *) въ формѣ немного отличающейся отъ приведенной нами тѣмъ обстоятельствомъ, что онъ не разбиваетъ силы, приложенныя къ точкамъ системы, на внутреннія и внѣшнія.

Функція $H$ названа Гельмгольцемъ *кинетическимъ потенціаломъ* системы. Эта функція встрѣчается въ теоретической физикѣ очень часто и извѣстна въ различныхъ ея частяхъ подъ разными именами; въ электричествѣ это можетъ быть потенціаломъ одного тока на другой (Ф. Неймана); въ термодинамикѣ это свободная энергія Гельмгольца или термодинамическій потенціалъ Дюгема.

Докажемъ теперь, что равенство (3) заключаетъ въ себѣ принципъ сохраненія энергіи. Дѣйствительно, сначала мы, помня, что:

$$\delta T=\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial T}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i\right],$$

$$\delta \Phi=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\delta p_i\,,$$

имѣемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\sum_{i=1}^{i=k}\left[-\frac{\partial T}{\partial p_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}+P_i\right]\delta p_i-\sum_{i=1}^{i=k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i dt=0\,, \quad . \quad . \quad . (4)$$

*) См. его Vorlesungen über mathematische Physik, 3 Aufl. S. 27.

но

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \delta p_i dt,$$

ибо варіаціи $\delta p_i$ для $t = t_0$ и $t = t_1$ обращаются въ нуль, а слѣдовательно, предыдущее равенство (4) можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{i=k} \left[-\frac{\partial T}{\partial p_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + P_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right] \delta p_i = 0 ,$$

или, вслѣдствіе произвольности $\delta p_i$:

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$$

или наконецъ, помня, что $\Phi$ отъ $q_i$ независитъ:

$$P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad {\scriptstyle (i=1,2,\dots k)}. \quad \dots \dots \dots (B)$$

Это Лягранжева форма уравненій динамики.

Изъ этихъ уравненій $(B)$ мы и можемъ вывести принципъ сохраненія энергіи. Съ этой цѣлью умножимъ уравненія $(B)$ на $q_i$ и результаты сложимъ, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\sum_{i=k}^{i=k} \frac{\partial H}{\partial p_i} q_i + \sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right),$$

но

$$q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt},$$

а потому:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} q_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

но:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} q_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right] = \frac{dH}{dt},$$

а слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{d}{dt}\left(H - \sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

Но мы знаемъ, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i}$$

и такъ какъ $T$ есть однородная квадратичная функція всѣхъ $q_i$, то

$$2T = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i = -\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i;$$

а потому:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{d}{dt}(H + 2T) = -\frac{d(T + \Phi)}{dt}.$$

Если-же назовемъ *полную* энергію системы буквой $E$, то получимъ:

$$E = T + \Phi \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (C)$$

и, слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{dE}{dt}$$

или, окончательно:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i \frac{dp_i}{dt} dt = -\frac{dE}{dt} dt \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (D)$$

Но это равенство выражаетъ принципъ сохраненія энергіи *), ибо лѣвая его часть представляетъ работу внѣшнихъ силъ, отдаваемую наружу системы, за промежутокъ времени $dt$ и эта передача совершается по равенству $(D)$, т. е. за счетъ полной энергіи системы, которая при этомъ убываетъ.

*) Въ такомъ-же видѣ и Пуэнкаре представляетъ принципъ сохраненія энергіи; см. его *Electricité et Optique*, II, p. 74 (1891 г.) или *Les oscillations électriques*, p. 21 (1894 г.).

И такъ, *принципъ Гамильтона или принципъ наименьшаго дѣйствія*, какъ его называетъ Гельмгольцъ, *заключаетъ въ себѣ принципъ сохраненія энергіи.*

Такимъ образомъ, мы можемъ при построеніи теорій тѣхъ или другихъ физическихъ явленій пользоваться принципомъ Гамильтона, зная уже, что въ немъ содержится законъ сохраненія энергіи.

Но, какъ кажется на первый взглядъ, для тѣхъ-же цѣлей могли-бы служить и уравненія Ляграпжа, и уравненіе $(D)$, выражающее самый принципъ сохраненія энергіи, а между тѣмъ Гельмгольцъ предлагаетъ класть въ основаніе теоретическихъ изслѣдованій въ физикѣ лишь принципъ наименьшаго дѣйствія. Причина этого та, что уравненія Ляграпжа даютъ лишь уравненія для точекъ *внутри* системы тѣлъ, участвующихъ въ изучаемомъ физическомъ явленіи, а для полнаго рѣшенія вопроса требуются еще условія *на границахъ*, т. е. на поверхности, ограничивающей разсматриваемую систему; интегралы же, входящіе въ составъ равенства $(A)$, могутъ дать по преобразованіи и условія на границахъ. Тѣ-же самыя замѣчанія можно сдѣлать и относительно равенства $(D)$. Если-же мы не имѣемъ въ виду условій на границахъ, а желаемъ лишь имѣть уравненія, представляющія кинетическое состояніе точекъ внутри системы, то можемъ прибѣгать съ этой цѣлью или къ уравненіямъ Ляграпжа, какъ это дѣлалъ еще Максвеллъ въ своей теоріи электромагнитнаго поля или къ уравненію $(D)$, какъ поступалъ, напримѣръ Пуэнкаре *) при выводѣ уравненій Герца.

Впрочемъ относительно уравненія $(D)$ надо сдѣлать оговорку. Если кинетическая и потенціальная энергіи выражены въ видѣ объемныхъ интеграловъ, распространенныхъ на всѣ точки системы, то ихъ можно преобразовать частью въ поверхностные, а тогда мы можемъ получить и условія на границахъ. Однако, все-таки, употребленіе принципа Гамильтона во многихъ случаяхъ надо предпочитать уравненію $(D)$. Причины этого обстоятельства сейчасъ выяснятся. Мы опредѣляемъ систему при помощи $k$ независимыхъ, вообще говоря, параметровъ: $p_1$, $p_2, \dots p_k$. Эти параметры съ физической стороны обладаютъ извѣстными свойствами, отличающими одни изъ нихъ отъ другихъ и Гельмгольцъ поэтому разбиваетъ ихъ по категоріямъ; у него разсматриваются параметры категоріи $a$, категоріи $b$ и т. п.; если первыхъ будетъ $\alpha$ числомъ, вторыхъ $\beta$ и т. д., то, ясно, что:

$$\alpha + \beta + \dots = k.$$

Критеріемъ для сужденія о принадлежности параметра къ той или другой категоріи служитъ, разумѣется, какая-либо опредѣленная осо-

*) Les oscil. électriques, § 22.

бенность, опредѣленное свойство параметра, отвѣчающее нѣкоторому физическому обстоятельству,—свойство, которымъ параметры, принадлежащіе къ одной категоріи, отличаются отъ параметровъ другихъ категорій.

Съ этимъ обстоятельствомъ встрѣтился еще Максвеллъ въ своей теоріи электромагнитнаго поля *). Такъ, у него параметры, обозначенные буквой $y$, входили въ составъ кинетической энергіи лишь подъ видомъ производныхъ по времени (то были напряженности электрическихъ токовъ, протекающихъ въ системѣ). Подобные параметры разсматриваетъ и Гельмгольцъ. Эти параметры, слѣдовательно, характеризуются тѣмъ условіемъ, что они входятъ въ составъ кинетическаго потенціала $H$ лишь подъ видомъ своихъ производныхъ по времени. Если эту категорію параметровъ обозначимъ символомъ $p_ѣ$, то аналитически это выразится уравненіемъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_ѣ} = 0\,,$$

которому должны удовлетворять параметры $p_ѣ$.

Можетъ случится, что сверхъ того эти параметры такого рода, что соотвѣтствующія имъ силы $P_ѣ$ суть нули, т. е., что

$$P_ѣ = 0.$$

Какъ примѣръ подобныхъ параметровъ, можетъ служить температура системы (въ изотермическихъ процессахъ).

Параметры другихъ категорій обладаютъ другими свойствами, выражающимися другими аналитическими условіями: Гельмгольцъ и воспользовался этими обстоятельствами для изученія свойствъ кинетическаго потенціала **).

Эта функція $H$, выражаемая равенствомъ:

$$H = \Phi - T,$$

въ общемъ случаѣ состоитъ изъ цѣлой однородной квадратичной функціи скоростей $q_i$ и нѣкоторой функціи координатъ $p_i$; но если нѣкоторые изъ параметровъ, напримѣръ параметры категоріи $b$, обладаютъ приведенными выше свойствами, то мы можемъ исключить всѣ $q_ѣ$, и тогда кинетическій потенціалъ $H$ можетъ заключать и *линейную функ-*

---

*) См. §§ 572—573 и 576 его трактата, т. II. (1873).

**) См. его статьи по статикѣ моно-и полициклическихъ системъ въ журналѣ *Crelle*, т. 97, стр. 111—140; 317—336 (1884 г.).

*цію скоростей*; дѣйствительно, если параметры категоріи $b$ удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_b}=0\,,\quad P_b=0\,,$$

то уравненіе $(B)$ въ примѣненіи къ этому случаю даетъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_b}\right)=0.$$

Такихъ уравненій будетъ столько числомъ, сколько параметровъ категоріи $b$; интегрируя ихъ найдемъ:

$$\frac{\partial H}{\partial q_b}=C_b\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(5)$$

гдѣ $C_b$ будетъ постоянное интегрированія, т. е. нѣкоторая функція параметровъ $p_i$ другихъ категорій. Такъ какъ предыдущее уравненіе *линейно* относительно $q_b$, то мы можемъ опредѣлить всѣ $q_b$ и подставить ихъ значенія въ функцію $H$; тогда мы получимъ новое ея значеніе, въ которое параметры другихъ категорій будутъ входить и въ *первыхъ степеняхъ*, т. е. кинетическій потенціалъ $H$ будетъ заключать въ своемъ составѣ *линейную функцію* параметровъ $p_i$ (за исключеніемъ параметровъ $p_b$). Если обозначимъ это значеніе $H$ буквой $H_1$, то получимъ, обозначая указателемъ $a$ оставшіеся параметры:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_a}=\frac{\partial H}{\partial p_a}+\sum_b\frac{\partial H}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial p_a},\quad \frac{\partial H_1}{\partial q_a}=\frac{\partial H}{\partial q_a}+\sum_b\frac{\partial H}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial q_a}$$

или, вслѣдствіе равенствъ (5):

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_a}=\frac{\partial H}{\partial p_a}+\sum_b C_b\frac{\partial q_b}{\partial p_a},\quad \frac{\partial H_1}{\partial q_a}=\frac{\partial H}{\partial q_a}+\sum_b C_b\frac{\partial q_b}{\partial q_a},$$

но, если положимъ, что:

$$H'=H_1-\sum_b C_b q_b\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(6)$$

то получимъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a}=\frac{\partial H'}{\partial p_a},\quad \frac{\partial H}{\partial q_a}=\frac{\partial H'}{\partial q_a}$$

и уравненія ($B$) примутъ видъ:

$$P_a = -\frac{\partial H'}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial q_a}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

Это уравненіе того-же вида, какъ и ($B$), но съ той существенной разницей, что функція $H'$ заключаетъ въ себѣ члены *линейные* относительно скоростей $q_a$.

Такимъ образомъ, мы можемъ утверждать, что существуютъ такія физическія явленія, для которыхъ кинетическій потенціалъ $H'$ можетъ заключать члены линейные относительно скоростей. Такія движенія Гельмгольцъ назвалъ *скрытыми*; мы будемъ называть *скрытымъ кинетическимъ состояніемъ* системы, когда ея кинетическій потенціалъ заключаетъ линейные члены скоростей. Примѣромъ такихъ физическихъ явленій могутъ служить: взаимодѣйствіе между магнитами и токами; отклоненіе плоскости поляризаціи свѣтоваго луча магнитомъ и т. п.

Между тѣми физическими процессами или кинетическими состояніями, которые характеризуются потенціаломъ $H$ и тѣми, которые характеризуются потенціаломъ $H'$, существуетъ та физически-существенная разница, что первые процессы *обратимы*, а вторые—нѣтъ. Дѣйствительно, обратимость физическаго процесса аналитически выражается условіемъ:

$$H(q_a) = H(-q_a),$$

а этому условію функція $H'$, вообще, неудовлетворяетъ. Если, напримѣръ, магнитное поле извѣстной напряженности отклоняетъ плоскость поляризаціи луча, но отклоненіемъ плоскости поляризаціи приличной силы и направленія мы не можемъ произвести магнитнаго поля. Гельмгольцъ даетъ еще одинъ видъ параметровъ особаго свойства. Пусть существуютъ такіе параметры категоріи $c$, что для нихъ:

$$P_c = 0, \quad q_c = \text{Const.};$$

но не трудно убѣдиться въ равнозначности послѣдняго условія съ слѣдующимъ:

$$q_c = 0,$$

слѣдовательно, могутъ существовать параметры, удовлетворяющіе условіямъ:

$$P_c = 0, \quad q_c = 0.$$

Но въ такомъ случаѣ

$$\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0,$$

а уравненіе ($B$), примѣненное къ этому случаю даетъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_c} = 0 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Послѣднихъ уравненій столько числомъ, сколько параметровъ категоріи $c$ и изъ нихъ можемъ опредѣлить всѣ $p_c$ и подставить въ выраженіе $H$; тогда опять для $H$ получимъ выраженіе *съ линейными членами скоростей*, но болѣе сложнаго вида.

Соединяя все сказанное, можемъ утверждать, что принципъ Гамильтона, написанный въ формѣ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [H + \sum P_a p_a]\, dt = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A \text{ bis})$$

можетъ-быть примѣненъ къ построенію теорій какихъ угодно физическихъ явленій, какія-бы силы ни участвовали въ тѣхъ физическихъ процессахъ или кинетическихъ состояніяхъ *), которые лежатъ въ основѣ ихъ; при этомъ дѣйствующія силы могутъ и не принадлежать къ категоріи силъ чисто-консервативныхъ, какъ напримѣръ силы тренія, силы сопротивленія электрическому току и т. п. Кинетическій потенціалъ $H$ системы вопреки „старымъ узкимъ" взглядамъ, можетъ содержать члены съ первыми степенями скоростей точекъ.

Гельмгольцъ приложилъ принципъ Гамильтона въ обобщенной формѣ или *принципъ наименьшаго дѣйствія*, какъ онъ называетъ его, къ явленіямъ термодинамики и явленіямъ электромагнитнымъ (въ широкомъ смыслѣ слова); этимъ-же принципомъ онъ руководствовался при построеніи электромагнитной теоріи свѣторазсѣянія **).

Такимъ образомъ, принципъ Гамильтона въ его обобщенной формѣ по всей справедливости можетъ считаться „рабочимъ" принципомъ;

---

*) Въ этихъ физическихъ процессахъ могутъ принимать участіе не только частицы „вѣсомой" матеріи, но и частицы эфира.

**) Въ 1882 году я пользовался принципомъ Гамильтона въ формѣ, данной Кирхгофомъ, для построенія теоріи двойнаго преломленія въ связи съ свѣторазсѣяніемъ. Этотъ принципъ я выражалъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int dt(\delta T + \delta U) = 0\,,$$

гдѣ буквой $T$ обозначена кинетическая энергія, а символомъ $\delta U$ сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ; въ обозначеніи Гельмгольца это

$$\delta U = -\delta \Phi - \Sigma P_i \delta p_i\,,$$

причемъ можно не раздѣлять внутреннія силы отъ внѣшнихъ, а разбить всѣ силы на двѣ группы: силы чисто-консервативныя и силы не имѣющія потенціала. См. „Сообщенія Харьк. Матем. Общ." I серія, 1882, вып. 1, стр. 3—82.

Гельмгольцъ считаетъ его даже „эвристическимъ“, т. е. могущимъ служить для открытія *новыхъ* физическихъ явленій.

Въ настоящемъ докладѣ, посвященномъ памяти Гельмгольца, мы изложимъ его теорію электрическихъ и магнитныхъ явленій и электромагнитную теорію свѣторазсѣянія. Первая теорія дана имъ въ 1892 г. въ статьѣ: „Принципъ наименьшаго дѣйствія и его значеніе въ электродинамикѣ“, а вторая въ 1893 году въ статьѣ: „электромагнитная теорія свѣторазсѣянія“ *).

## Выводъ основныхъ уравненій электродинамики.

Пусть имѣемъ изотропную систему, состоящую изъ діэлектриковъ и проводниковъ; пусть эта система будетъ ограничена съ одной стороны поверхностями проводниковъ, а съ другой поверхностью сферы безконечно-большаго радіуса, такъ что діэлектрики наполняютъ все пространство, хотя могутъ быть какими угодно. Пусть далѣе, система такова, что скорости ея частицъ или нули, или постоянныя величины, такъ что ея кинетическій потенціалъ равенъ просто функціи $\Phi$ и принципъ Гамильтона напишется въ формѣ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\Phi + \sum P_a p_a]\, dt = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

причемъ, какъ помнимъ, силы $P_a$ варіированію не подлежатъ.

Кинетическій потенціалъ будетъ, слѣдовательно, вызываться тѣми физическими процессами, которые происходятъ въ діэлектрикѣ и проводникахъ.

Въ каждой точкѣ діэлектрика дѣйствуютъ электрическія и магнитныя силы и механическія, а въ точкахъ проводниковъ силы сопротивленія электрическимъ токамъ и электродвижущія силы и сверхъ того на поверхностяхъ проводниковъ дѣйствуютъ механическія силы. Электрическія и магнитныя силы Гельмгольцъ считаетъ консервативными силами, а прочія нѣтъ.

Выразимъ теперь функцію $\Phi$. Условимся сначала относительно обозначеній и терминовъ. Въ послѣдующемъ мы будемъ употреблять термины и обозначенія теоріи Максвелла, *во первыхъ* потому, что старые термины (діэлектрическій моментъ, діэлектрическая поляризація и т. п.) могутъ повести къ недоразумѣніямъ, *во вторыхъ* — идеи Гельмгольца въ излагаемомъ нами мемуарѣ въ сущности суть идеи Максвелла (Гер-

---

*) Обѣ статьи помѣщены въ Wied. Ann. Bd. 47 und 48, а также въ запискахъ Берлинской академіи наукъ за тѣже года. См. также журналъ Crelle, т. 100, стр. 137—166 (1886 г.).

ца), а не старой его теоріи электродинамики *) и наконецъ *въ третьихъ* обозначенія Максвелла болѣе распространены и общеизвѣстны **).

Пусть $V$ будетъ магнитная энергія системы, $W$ — электрическая и $U$ электромагнитная энергія токовъ перемѣщенія (пертурбаціонныхъ токовъ), въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\Phi = V + W + U \,.\; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Выразимъ теперь всѣ эти величины въ функціи электрической пертурбаціи, магнитной силы и такъ-называемаго векторъ-потенціала.

Пусть $f$, $g$, $h$ будутъ проекціи электрической пертурбаціи въ точкѣ $(x, y, z)$, $K$ діэлектрическая постоянная въ той же точкѣ средины; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ проекціи магнитной силы и $\mu$ магнитная постоянная (коэффиціентъ магнитной проницаемости среды) $l$, $m$, $n$ составляющія силы постояннаго магнетизма ***) и наконецъ $F$, $G$, $H$ составляющія векторъ-потенціала. Въ такомъ случаѣ, если положимъ для простоты письма:

$$f_m = \frac{\mu}{4\pi}\alpha, \quad g_m = \frac{\mu}{4\pi}\beta, \quad h_m = \frac{\mu}{4\pi}\gamma \text{ ****)},$$

то для $V$, $W$ и $U$ будемъ имѣть:

$$V = \int \frac{2\pi}{\mu}(f_m^2 + g_m^2 + h_m^2)\, d\tau \text{ *****)}, \quad W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

и

$$U = A \int \left( F\frac{df}{dt} + G\frac{dg}{dt} + H\frac{dh}{dt} \right) d\tau,$$

причемъ $d\tau$—элементъ объема средины въ точкѣ $(x, y, z)$ и $t$ время.

Между магнитной силой $(\alpha, \beta, \gamma)$ и составляющими векторъ-потенціала существуютъ зависимости, даваемыя, *какъ опредѣленія* магнитной силы, а именно:

---

*) Ср. *Poincaré*: Électricité et Optique, II, pp. 110—113; 114; 126 и *Conclusions*. Также *Drude*: Physik des Aethers, SS. 337—342.

**) Полезно ср. *Boltzmann*: Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, II Th. p. IV.

***) Въ этомъ пунктѣ теорія Гельмгольца полнѣе теоріи Герца.

****) Это будутъ составляющія такъ называемой *магнитной пертурбаціи*.

*****) Такъ какъ составляющія постояннаго магнетизма $l$, $m$, $n$ варіаціоннымъ измѣненіямъ не подлежатъ, то мы ихъ и не вводимъ въ выраженіе для $V$.

$$\left.\begin{aligned}\mu\alpha + l &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\\ \mu\beta + m &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\\ \mu\gamma + n &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Коэффиціентъ $A$ есть абсолютное постоянное, т. е. одно и тоже для всѣхъ срединъ и $\frac{1}{A}$ есть скорость распространенія электромагнитной пертурбаціи въ чистомъ эфирѣ.

Составимъ теперь выраженіе $\sum P_a p_a$.

Пусть $P_0$, $Q_0$, $R_0$ составляющія электродвижущей силы соприкосновенія или термоэлектрической разности проводниковъ и т. п.; $p$, $q$, $r$ — составляющія тока проводимости; $X$, $Y$, $Z$ составляющія механической силы, приложенной къ точкѣ $(x, y, z)$ внутри средины; $X_n$, $Y_n$, $Z_n$ — подобной-же силы, но приложенной къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину и наконецъ $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — проекціи перемѣщенія точки $(x, y, z)$.

Поэтому будемъ имѣть:

$$\sum P_a p_a = \int [(P_0 f + Q_0 g + R_0 h) + A(Fp + Gq + Hr) + (X\xi + Y\eta + Z\zeta)]\, d\tau +$$
$$+ \int [A(Fp + Gq + Hr) + (X_n\xi + Z_n\eta + Z_n\zeta)]\, dS.$$

Здѣсь варіированію будутъ подлежать лишь количества: $f$, $g$, $h$; $F$, $G$, $H$ и $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Надо замѣтить, что Гельмгольцъ не вводитъ силъ, работающихъ на поверхности проводниковъ или діэлектриковъ; но намъ кажется, что это имъ сдѣлано единственно въ видахъ простоты анализа; сущность-же дѣла, разумѣется, требуетъ введенія силъ на поверхности.

Теперь остается только все найденное подставить въ равенство (1) и вычислить варіаціи, входящія въ составъ этого равенства. Для упрощенія вычисленій мы замѣтимъ слѣдующее. Такъ какъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ или, все равно, $f_m$, $g_m$, $h_m$ связаны съ $F$, $G$, $H$ соотношеніями (3), то независимыхъ перемѣнныхъ подлежащихъ варіированію будетъ три группы: $f$, $g$, $h$; $F$, $G$, $H$ и $\xi$ $\eta$, $\zeta$; что же касается коэффиціентовъ $K$ и $\mu$, то, хотя они и могутъ измѣняться вслѣдствіе деформацій средины, но ихъ можно разсматривать, какъ функціи $x$, $y$, $z$. Затѣмъ, замѣтимъ еще то обстоятельство, что $f$, $g$, $h$ и $F$, $G$, $H$ могутъ измѣняться какъ съ теченіемъ времени, т. е. какъ функціи $t$, такъ и вслѣдствіе деформацій средины, такъ что можемъ положить, что

$$\delta f = \delta_1 f + \delta_2 f,$$

$$\delta F = \delta_1 F + \delta_2 F$$

и подобныя равенства для $\delta g$, $\delta h$; $\delta G$ и $\delta H$; при этомъ ясно, что символомъ $\delta_1$ мы обозначаемъ варіаціи отъ первой причины измѣняемости, а $\delta_2$ — отъ второй.

Такимъ образомъ можемъ изучать отдѣльно измѣняемость разсматриваемыхъ количествъ отъ той и другой причины и тогда анализъ значительно упрощается.

Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію варіаціи интеграла:

$$\int \left(\Phi + \sum P_a p_a\right) dt,$$

замѣтимъ нѣкоторыя свойства перемѣнныхъ $F$, $G$, $H$ и $f$, $g$, $h$, а также составляющихъ силы постояннаго магнетизма.

Такъ какъ $\xi$, $\eta$, $\zeta$ суть проекціи перемѣщенія точки $(x, y, z)$, то тогда скорости будутъ:

$$\frac{d\xi}{dt} = u, \quad \frac{d\eta}{dt} = v, \quad \frac{d\zeta}{dt} = w \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Далѣе, если возьмемъ внутри средины безконечно-малый элементъ поверхности, опирающійся на нѣкоторый безконечно-малый замкнутый контуръ, то

$$[l \cos(nx) + m \cos(ny) + n \cos(nz)] \, dS \; *)$$

будетъ притокомъ магнитной силы черезъ элементъ $dS$ во время $t$; для момента $t + dt$ этотъ притокъ будетъ:

$$[l \cos(nx) + m \cos(ny) + n \cos(nz)] \, dS + \delta \, [l \cos(nx) + m \cos(ny) +$$

$$+ n \cos(nz)] \, dS.$$

Если мы допустимъ, что въ силу сплошности средины однѣ и тѣ же точки ея приходятся на элементъ $dS$ и ограничивающій его контуръ $ds$, какъ для момента времени $t$, такъ и для момента $t + dt$, то получимъ:

$$\delta \, [l \cos(nx) + m \cos(ny) + n \cos(nz)] \, dS = 0$$

*) Не надо смѣшивать нормала $n$ подъ знакомъ cos съ магнитной силой $n$.

или:

$$\delta[l dy dz + m dx dz + n dx dy] = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

Но ниже (фор. 21), приведены формулы для $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$ при условіи, что электрическія пертурбаціи $f$, $g$, $h$ удовлетворяютъ соотношенію вида $(b)$, а потому, полагая въ нихъ:

$$udt\,,\quad vdt\,,\quad wdt$$

вмѣсто $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и $l$, $m$, $n$ вмѣсто $f$, $g$, $h$, найдемъ:

$$\delta l = \tau u dt + \frac{\partial}{\partial z}(nu - lw)\,dt - \frac{\partial}{\partial y}(lv - mu)\,dt.$$

Но

$$\delta l = \frac{\partial l}{\partial t} dt,$$

а потому находимъ первую изъ ниженаписанныхъ формулъ, остальныя двѣ получатся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial l}{\partial t} - \tau u + \frac{\partial}{\partial y}(vl - um) - \frac{\partial}{\partial z}(un - wl) = 0\\
&\frac{\partial m}{\partial t} - \tau v - \frac{\partial}{\partial x}(vl - um) + \frac{\partial}{\partial z}(wm - vn) = 0\\
&\frac{\partial n}{\partial t} - \tau w - \frac{\partial}{\partial y}(wm - vn) + \frac{\partial}{\partial x}(un - wl) = 0\,.
\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Здѣсь положено:

$$-\tau = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Механическое значеніе $\tau$ откроется, если сложимъ равенства $(c)$, предварительно продифференцированныя по $x$, $y$, $z$; находимъ тогда;

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial (u\tau)}{\partial x} + \frac{\partial (v\tau)}{\partial y} + \frac{\partial (w\tau)}{\partial z} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

или

$$\delta\,(\tau\, dx\, dy\, dz) = 0\,,$$

т. е. $\tau$ есть плотность нѣкоторой *фиктивной жидкости*; это $\tau$, слѣдовательно, есть объемная плотность постояннаго магнетизма, существующаго въ точкѣ $(x, y, z)$.

Равенства (3) даютъ:

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{dx}+\frac{\partial(\mu\beta)}{dy}+\frac{\partial(\mu\gamma)}{dz}=\tau.\quad\ldots\ldots\ldots\quad(f)$$

Теперь надо замѣтить относительно $F$, $G$, $H$, что если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $l$, $m$, $n$ будутъ даны, то уравненій (3) будетъ недостаточно для опредѣленія $F$, $G$, $H$: надо еще добавочное условіе; за это условіе Гельмгольцъ беретъ слѣдующее:

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial G}{dy}+\frac{\partial H}{dz}=\varDelta\Psi\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(g)$$

причемъ функція $\Psi$ должна считаться данной.

Въ этихъ двухъ пунктахъ ($\tau$ и $\Psi$) Гельмгольцева теорія полнѣе Максвелловой; въ этой послѣдней:

$$\tau=0\,,\quad \Psi=\mathrm{Const.}$$

Точно также электрическое перемѣщеніе $f$, $g$, $h$ должно удовлетворять соотношенію ($b$), а слѣдовательно, положивъ въ формулахъ (21)

$$-udt\,,\quad -vdt\,,\quad -wdt$$

вмѣсто $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и взявъ вмѣсто $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$ выраженія:

$$\left(\frac{df}{dt}-\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt\,,\quad\left(\frac{dg}{dt}-\frac{\partial g}{\partial t}\right)dt\,,\quad\left(\frac{dh}{dt}-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt\,,$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\varrho u+\frac{\partial}{dy}(vf-ug)-\frac{\partial}{dz}(uh-wf)\\
\frac{dg}{dt}&=\frac{\partial g}{\partial t}+\varrho v-\frac{\partial}{dx}(vf-ug)+\frac{\partial}{dz}(wg-vh)\\
\frac{dh}{dt}&=\frac{\partial h}{\partial t}+\varrho w-\frac{\partial}{dy}(wg-vh)+\frac{\partial}{dx}(uh-wf).
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(h)$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{df}{dt}dt\,,\quad\frac{dg}{dt}dt\,,\quad\frac{dh}{dt}dt$$

будутъ *полными варіаціями* $f$, $g$, $h$ *по времени* $t$.

Опредѣлимъ теперь варіаціи $F$, $G$, $H$.

Вообразимъ себѣ безконечно-малый замкнутый контуръ; работа электродвижущей напряженности на элементѣ его будетъ для момента времени $t$:

$$Fdx+Gdy+Hdz\,,$$

а потому въ силу принципа сплошности имѣемъ:

$$\delta(Fdx+Gdy+Hdz)=0\,.$$

Отсюда при помощи формулъ (19) находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial P'}{\partial x}-v\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\\
\frac{dG}{dt}&=\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial P'}{\partial y}-w\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right)+u\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
\frac{dH}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial P'}{\partial z}-u\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(i)$$

Здѣсь положено:

$$P'=Fu+Gv+Hw\,.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (j)$$

Такимъ образомъ

$$\frac{dF}{dt}dt\,,\quad\frac{dG}{dt}dt\,,\quad\frac{dH}{dt}dt$$

будутъ *полныя варіаціи* $F$, $G$, $H$ *по времени* $t$.

И такъ, пусть сначала средина не подлежитъ геометрическимъ деформаціямъ, а всѣ количества измѣняются, какъ чистыя функціи времени $t$.

Поэтому получимъ, опуская на время указатель (ı) при знакѣ $\delta$:

$$\delta V=\frac{4\pi}{\mu}\int(f_m\delta f_m+g_m\delta g_m+h_m\delta h_m)\,d\tau\,,$$

но вслѣдствіе (3):

$$\delta f_m=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\delta H}{\partial y}-\frac{\partial\delta G}{\partial z}\right)$$

и подобныя формулы для $\delta g_m$ и $\delta h_m$, ибо $l$, $m$, $n$ должно считать постоянными по отношенію къ времени $t$.

Подставляя въ выраженіе для $\delta V$ и интегрируя по частямъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\delta V = \frac{1}{4\pi}\int\Big[\Big(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\Big)\delta F + \Big(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\Big)\delta G + \Big(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\Big)\delta H\Big]\,d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi}\int\{[\gamma\cos(ny) - \beta\cos(nz)]\,\delta F + [\alpha\cos(nz) - \gamma\cos(nx)]\,\delta G + \\ + [\beta\cos(nx) - \alpha\cos(ny)]\,\delta H\}\,dS.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Опредѣлимъ теперь $\delta U$.

Сначала находимъ:

$$\delta U = A\int\Big(\frac{df}{dt}\delta F + \frac{dg}{dt}\delta G + \frac{dh}{dt}\delta H\Big)d\tau - A\int\Big(\frac{dF}{dt}\delta f + \frac{dG}{dt}\delta g + \frac{dH}{dt}\delta h\Big)d\tau,$$

гдѣ вмѣсто членовъ вида:

$$F\frac{d\delta f}{dt}\,d\tau\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

подставлены члены вида:

$$-\frac{dF}{dt}\,\delta f d\tau\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(b)$$

ибо $\delta U$ входитъ въ принципъ Гамильтона подъ знакомъ интеграла:

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta U dt\,,$$

а потому, проинтегрировавъ по $t$ члены вида $(a)$ и замѣтивъ, что для $t = t_0$ и $t = t_1$:

$$\delta f = \delta g = \delta h = 0\,,$$

убѣждаемся въ законности подстановки $(b)$.

Соединяя теперь $\delta V$, $\delta U$ и $\delta W$, причемъ послѣднее выраженіе напишется безъ всякихъ преобразованій, получимъ:

$$\begin{aligned}\int d\tau\int_{t_0}^{t_1}dt\Big\{\Big(\frac{4\pi}{K}f - A\frac{dF}{dt}\Big)\delta f + \Big(\frac{4\pi}{K}g - A\frac{dG}{dt}\Big)\delta g + \Big(\frac{4\pi}{K}h - A\frac{dH}{dt}\Big)\delta h + \\ + \Big[\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\Big) + A\frac{df}{dt}\Big]\delta F + \Big[\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\Big) + A\frac{dg}{dt}\Big]\delta G + \\ + \Big[\frac{1}{4\pi}\Big(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\Big) + A\frac{dh}{dt}\Big]\delta H\Big\} + \\ + \int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{dS}{4\pi}\{[\gamma\cos(ny) - \beta\cos(nz)]\,\delta F + \\ + [\alpha\cos(nz) - \gamma\cos(nx)]\,\delta G + [\beta\cos(nx) - \alpha\cos(ny)]\,\delta H\} = \\ = \delta\int_{t_0}^{t_1}(V + W + U)\,d\tau.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)\end{aligned}$$

Затѣмъ имѣемъ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum P_a p_a\,dt=$$

$$=\int d\tau\int_{t_0}^{t_1}dt\Big\{(P_0\delta f+Q_0\delta g+R_0\delta h)+A(p\delta F+q\delta G+r\delta H)\Big\}+$$

$$+A\int_{t_0}^{t_1}dt\int(p\delta F+q\delta G+r\delta H)\,dS\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

Подставляя все это въ выраженіе (1) принципа Гамильтона и приравнивая нулю коэффиціенты при $\delta f,\ldots\delta H$ въ объемныхъ интегралахъ, получимъ слѣдующія двѣ системы уравненій для точекъ *внутри* средины:

*первая система*:

$$\frac{4\pi f}{K}-A\frac{dF}{dt}+P_0=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(e)$$

и подобныя уравненія для $g$ и $h$;

*вторая система*:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+A\frac{df}{dt}+Ap=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(f)$$

и подобныя-же уравненія для $\alpha$ и $\gamma$; $\beta$ и $\alpha$.

Введемъ составляющія полной электрической силы, которыя обозначимъ $P$, $Q$, $R$, т. е. положимъ:

$$P=\frac{4\pi}{K}f,\quad Q=\frac{4\pi}{K}g,\quad R=\frac{4\pi}{K}h,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(5)$$

тогда первая система дастъ слѣдующую:

$$P=A\frac{dF}{dt}-P_0,\quad Q=A\frac{dG}{dt}-Q_0,\quad R=A\frac{dH}{dt}-R_0\;.\;.\;(6)$$

Это извѣстныя соотношенія Максвелла для средины, находящейся въ движеніи.

Вторая система при помощи уравненій (6) обратится въ слѣдующую:

*

$$\left.\begin{aligned} AK\frac{dP}{dt}+4\pi Ap&=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\\ AK\frac{dQ}{dt}+4\pi Aq&=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\\ AK\frac{dR}{dt}+4\pi Ar&=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\,.\end{aligned}\right\}\,\ldots\ldots\ldots\,(7)$$

Это вторая система уравненій Максвелла *).

Если-бы воспользовались уравненіями (3) и (6), то получили-бы первую систему уравненій Герца:

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{d\alpha}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ A\mu\frac{d\beta}{dt}&=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ A\mu\frac{d\gamma}{dt}&=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,.\end{aligned}\right\}\,\ldots\ldots\ldots\,(8)$$

Уравненія (7) представляютъ 2-ую систему Герца.

Если разсматриваемая средина неподвижна $(u=v=w=0)$, то въ предыдущихъ формулахъ вмѣсто $\frac{df}{dt},\ldots\frac{dH}{dt}$ надо взять частныя производныя $\frac{\partial f}{\partial t},\ldots\frac{\partial H}{\partial t}$; если-же средина находится въ движеніи, то вмѣсто тѣхъ-же количествъ придется брать ихъ значеніе изъ формулъ $(h)$ и $(i)$; такъ что получимъ вмѣсто системы $(e)$ слѣдующую:

$$\frac{4\pi}{K}f+P_0-A\left\{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial P'}{\partial x}-v\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\}=0\quad (e\,\text{bis})$$

и подобныя для $g$ и $h$.

Исключая изъ нихъ функцію $P'$ по извѣстному пріему и замѣняя значенія $\frac{\partial l}{\partial t}$, $\frac{\partial m}{\partial t}$, $\frac{\partial n}{\partial t}$ изъ равенствъ $(c)$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\left[\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial t}+u\tau+\frac{\partial}{\partial y}\mu(v\alpha-u\beta)-\frac{\partial}{\partial z}\mu(u\gamma-w\alpha)\right]&=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ A\left[\frac{\partial(\mu\beta)}{\partial t}+v\tau-\frac{\partial}{\partial x}\mu(v\alpha-u\beta)+\frac{\partial}{\partial z}\mu(w\beta-v\gamma)\right]&=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ A\left[\frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial t}+w\tau-\frac{\partial}{\partial y}\mu(w\beta-v\gamma)+\frac{\partial}{\partial x}\mu(u\gamma-w\alpha)\right]&=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,.\end{aligned}\right\}.\,(8\,\text{bis})$$

*) Только оси координатъ прямо-противоположны Максвелловымъ.

Вмѣсто уравненій $(f)$ будемъ имѣть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
A\left[\frac{\partial f}{\partial t}+u\varrho+\frac{\partial}{\partial y}(vf-ug)-\frac{\partial}{\partial z}(uh-wf)\right]+4\pi Ap=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\cdot\\
A\left[\frac{\partial g}{\partial t}+v\varrho-\frac{\partial}{\partial x}(vf-ug)+\frac{\partial}{\partial z}(wg-vh)\right]+4\pi Aq=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\\
A\left[\frac{\partial h}{\partial t}+w\varrho-\frac{\partial}{\partial y}(wg-vh)+\frac{\partial}{\partial x}(uh-wf)\right]+4\pi Ar=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}
\end{aligned}\right\}.\ (7\ \text{bis})$$

Эти двѣ системы получены Г. Герцемъ.

Векторъ: $u\varrho$, $v\varrho$, $w\varrho$ будетъ представлять конвекціонный токъ, открытый Роуландомъ.

Теперь остается изслѣдовать условія на поверхности.

Эти условія получаются изъ выраженій $(c)$ и $(d)$, если приравнять нулю коэффиціенты при $\delta F$, $\delta G$, $\delta H$ въ поверхностныхъ интегралахъ; при этомъ поверхность $S$ можетъ быть поверхностью разрыва, отдѣляющею одинъ діэлектрикъ отъ другого; въ такомъ случаѣ надо вообразить двѣ поверхности безконечно-близкія одна отъ другой и взять интегралы по обѣимъ; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]_1=[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]_2$$

$$[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]_1=[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]_2$$

$$[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]_1=[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]_2,$$

такъ какъ $p$, $q$, $r$ для діэлектриковъ равны нулю.

Изъ этихъ уравненій находимъ, взявъ для простоты нормалъ къ поверхности за ось $z$-овъ, а двѣ ортогональныя касательныя за оси $x$ и $y$, слѣдующія условія:

$$\alpha_1=\alpha_2,\quad \beta_1=\beta_2.\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (9)$$

Если-же поверхность $S$ будетъ отдѣлять проводникъ отъ діэлектрика или проводникъ отъ проводника, то подобнымъ-же образомъ найдемъ для послѣдняго случая:

$$\left.\begin{aligned}
[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)+4\pi Ap]_1&=[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)+4\pi Ap]_2\\
[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)+4\pi Aq]_1&=[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)+4\pi Aq]_2\\
[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)+4\pi Ar]_1&=[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)+4\pi Ar]_2.
\end{aligned}\right\}(10)$$

Если положимъ

$$p_1=q_1=r_1=0,$$

то будемъ имѣть случай проводника и діэлектрика.

Замѣтимъ здѣсь нѣкоторыя формулы, которыя намъ ниже будутъ нужны.

Положимъ:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \\ -\sigma &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

такъ что $\varrho$ будетъ объемной плотностью электричества, а $\sigma$ поверхностной плотностью тока; въ такомъ случаѣ равенства $(f)$ по дифференцированіи по $x$, $y$, $z$ и по сложеніи результатовъ дадутъ:

$$\sigma = \frac{d\varrho}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Для $p$, $q$, $r$ можемъ написать соотношенія:

$$p = C(P - P_0), \quad q = C(Q - Q_0), \quad r = C(R - R_0) \quad . \; . \; . \; (13)$$

выражающія законъ Ома, причемъ $C$ есть коэффиціентъ электропроводности.

Выведемъ теперь еще два соотношенія, необходимыя намъ для послѣдующаго.

Уравненія (7) по умноженіи на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ и на $dS$ дадутъ, если результаты сложить и взять интегралъ по нѣкоторой не замкнутой поверхности, опирающейся на нѣкоторый замкнутый контуръ. Получимъ:

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\cos(nz)\right] dS =$$

$$= AK\frac{d}{dt}\int [P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz)]\, dS,$$

ибо

$$p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz) = 0.$$

Преобразуя лѣвую часть предыдущаго равенства по теоремѣ Стокса, а въ правую подставляя значенія $P$, $Q$, $R$ изъ уравненій (5), найдемъ:

$$\int\left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right) ds = 4\pi A\frac{d}{dt}\int [f\cos(nx) + g\cos(ny) + h\cos(nz)]\, dS,$$

гдѣ $ds$ будетъ элементъ контура, на который опирается поверхность $S$.

Умножая на $dt$ и интегрируя отъ $t=t_0$ до какого-нибудь значенія $t$, найдемъ:

$$\int [f\cos(nx)+g\cos(ny)+h\cos(nz)]\,dS=F(t),$$

если выберемъ нижній предѣлъ $t_0$ такимъ, чтобы для него $f$, $g$, $h$ обращались въ нуль. Такъ какъ контуръ можетъ быть взятъ безконечно-малымъ, то заключаемъ, что если контуръ деформируется, то

$$\delta_2[f\cos(nx)+g\cos(ny)+h\cos(nz)]\,dS=0$$

или:

$$\delta_2\{fdydz+gdxdz+hdxdy\}=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Физическій смыслъ этого равенства понятенъ: трехчленъ въ скобкахъ выражаетъ число линій электрической силы, проходящихъ черезъ безконечно-малый элементъ поверхности.

Это, въ сущности, есть выраженіе принципа сплошности.

Аналогичное соотношеніе получимъ для магнитныхъ силовыхъ линій. Дѣйствительно, равенства (6) даютъ:

$$A\frac{d}{dt}\int(Fdx+Gdy+Hdz)=\int(Pdx+Qdy+Rdz),$$

причемъ интегралъ взятъ по замкнутому контуру и кромѣ того замѣчено, что:

$$P_0=-\frac{\partial\Psi}{dx},\quad Q_0=-\frac{\partial\Psi}{dy},\quad R_0=-\frac{\partial\Psi}{dz}.$$

Отсюда найдемъ, какъ и выше, что:

$$\int(Fdx+Gdy+Hdz)=f(t),$$

а отсюда:

$$\delta_2[Fdx+Gdy+Hdz]=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Гельмгольцъ даетъ равенства (14) и (15) безъ доказательства и пользуется ими при опредѣленіи варіацій $\delta_2 f,\ldots\delta_2 H$, обусловленныхъ деформаціями среды.

Теперь мы и перейдемъ къ опредѣленію этихъ варіацій, происходящихъ отъ деформацій среды и дающихъ мѣсто явленіямъ электро-и магнито-стрикціи.

Разовьемъ сначала равенство (15). Взявъ варіацію и опустивъ для простоты указатель (2), получимъ:

$$\delta F dx + \delta G dy + \delta H dz + F\delta . dx + G\delta . dy + H\delta . dz = 0 \;.\;.\;. \quad (16)$$

Если обозначимъ координаты точки $(x, y, z)$ послѣ деформаціи черезъ $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, то получимъ:

$$\delta x = \delta\xi\,, \quad \delta y = \delta\eta\,, \quad \delta z = \delta\zeta\,,$$

затѣмъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta . dx = d . \delta x = \frac{\partial \delta\xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta\xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \delta\xi}{\partial z} dz \\ \delta . dy = d . \delta y = \frac{\partial \delta\eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta\eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \delta\eta}{\partial z} dz \\ \delta . dz = d . \delta z = \frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial z} dz . \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;. \quad (17)$$

Далѣе, если обозначимъ $[\delta F]$, $[\delta G]$, $[\delta H]$ варіаціи $F$, $G$, $H$, входящія въ равенство (16) и происходящія вслѣдствіе измѣненій $\xi$, $\eta$, $\zeta$, удовлетворяющихъ равенству (15), то получимъ по подстановкѣ значеній $\delta . dx$, $\delta . dy$ и $\delta . dz$ изъ равенствъ (17):

$$\begin{aligned} &\left\{[\delta F] + F\frac{\partial \delta\xi}{\partial x} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial x} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right\} dx + \\ &+ \left\{[\delta G] + F\frac{\partial \delta\xi}{\partial y} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial y} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial y}\right\} dy + \\ &+ \left\{[\delta H] + F\frac{\partial \delta\xi}{\partial z} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial z} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial z}\right\} dz = 0. \end{aligned}$$

Это выраженіе должно удовлетворяться при всѣхъ значеніяхъ $dx$, $dy$, $dz$, а потому находимъ:

$$-[\delta F] = F\frac{\partial \delta\xi}{\partial x} + G\frac{\partial \delta\eta}{\partial x} + H\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}$$

и подобныя выраженія для $[\delta G]$ и $[\delta H]$.

Полная варіація $F$, обусловленная деформаціями среды, будетъ:

$$\delta F = [\delta F] - \frac{\partial F}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial F}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial F}{\partial z}\delta\zeta \;*)$$

*) О знакахъ — при $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ см. далѣе.

или, подставивъ значеніе $[\delta F]$ и преобразовавъ:

$$\delta F = -\frac{\partial}{\partial x}(F\delta\xi + G\delta\eta + H\delta\zeta) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta\eta - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta\zeta.$$

Если-же положимъ для краткости письма:

$$P = F\delta\xi + G\delta\eta + H\delta\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

и введемъ значенія $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ изъ уравненій (3) (положивъ въ нихъ: $l = m = n = 0$), то получимъ слѣдующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \delta F &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\gamma\delta\eta - \beta\delta\zeta) \\ \delta G &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu(\alpha\delta\zeta - \gamma\delta\xi) \\ \delta H &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu(\beta\delta\xi - \alpha\delta\eta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Теперь изъ равенства (14) надо опредѣлить $\delta_2 f$, $\delta_2 g$, $\delta_2 h$. Для этого опредѣленія установимъ сначала одну теорему изъ кинематики измѣняемой системы.

Пусть имѣемъ въ плоскости $xy$ безконечно-малый прямоугольникъ $MACB$ со сторонами параллельными осямъ $x$-овъ и $y$-овъ и равными соотвѣтственно $dx$ и $dy$; его площадь будетъ $dxdy$. Пусть онъ подвергнутъ безконечно-малой деформаціи и обращается вслѣдствіе этого въ безконечно-малый параллелограммъ $M_1A_1C_1B_1$, не лежащій уже въ плоскости $xy$. Координаты его вершинъ будутъ:

*до деформаціи:* *послѣ деформаціи:*

$M \quad x \quad y \quad 0 \ldots M_1 \quad x+u, \quad y+v, \quad w$

$A \quad x+dx, \quad y \quad 0 \ldots A_1 \quad x+u+dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx, \; y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx, \; w+\frac{\partial w}{\partial x}dx;$

$B \quad x, \quad y+dy, \; 0 \ldots B_1 \quad x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \; y+v+dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy, \; w+\frac{\partial w}{\partial y}dy;$

$C \; x+dx, \; y+dy, \; 0 \ldots C_1 \; x+u+dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \; y+v+dy+$

$$+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy, \; w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial}dy.$$

Предполагая, что перемѣщенія $u, v, w$ безконечно-малыя 1-го порядка, находимъ для сторонъ параллелограмма и его площади выраженія:

$$\overline{M_1A_1} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \quad \overline{M_1B_1} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

и

$$\text{пл. } M_1A_1C_1B_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Такъ какъ эта площадь уже не лежитъ въ плоскости $xy$, то найдемъ ея проекціи на координатныя плоскости; съ этой цѣлью опредѣлимъ косинусы направленія нормала къ ней.

Сначала имѣемъ съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$\cos(\overline{M_1A_1}, x) = 1; \ \cos(\overline{M_1A_1}, y) = \frac{\partial v}{\partial x}; \ \cos(\overline{M_1A_1}, z) = \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\cos(\overline{M_1B_1}, x) = \frac{\partial u}{\partial y}, \ \cos(\overline{M_1B_1}, y) = 1; \ \cos(\overline{M_1B_1}, z) = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Отсюда по извѣстному правилу аналитической геометріи находимъ косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ $\overline{M_1A_1}$ и $\overline{M_1B_1}$; обозначая направленіе этого перпендикуляра черезъ $n_3$, получимъ:

$$\cos(n_3, x) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \ \cos(n_3, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}, \ \cos(n_3, z) = 1;$$

причемъ за положительное направленіе $n_3$ взято то, которое расположено относительно прямыхъ $\overline{M_1A_1}$ и $\overline{M_1B_1}$ такъ-же, какъ ось $z$-овъ относительно осей $x$-овъ и $y$-овъ.

Поэтому проекціи площади $M_1A_1C_1B_1$ на координатныя плоскости $xy$, $xz$ и $yz$ соотвѣтственно будутъ:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy; \ -\frac{\partial w}{\partial y} dxdy; \ -\frac{\partial w}{\partial x} dxdy.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ проекціи площади $dxdz$ послѣ деформаціи на тѣ же координатныя плоскости; онѣ будутъ соотвѣтственно:

$$-\frac{\partial v}{\partial z} dx\,dz; \ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dxdz; \quad -\frac{\partial v}{\partial x} dxdz$$

и для площади $dydz$:

$$-\frac{\partial u}{\partial z} dydz, \ -\frac{\partial u}{\partial y} dydz, \ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dydz.$$

Поэтому, если знакомъ $\delta$ обозначимъ безконечно-малыя измѣненія площади вслѣдствіе деформаціи, то получимъ слѣдующія формулы:

$$dxdy+\delta.dxdy=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial v}{\partial z}dxdz-\frac{\partial u}{\partial z}dydz,$$

$$dxdz+\delta.dxdz=-\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdz-\frac{\partial u}{\partial y}dydz,$$

$$dydz+\delta.dydz=-\frac{\partial w}{\partial x}dxdy-\frac{\partial v}{\partial x}dxdz+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dydz.$$

Отсюда по сокращеніи найдемъ варіаціи элементарныхъ площадей:

$$\left.\begin{aligned}
\delta.dxdy&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial v}{\partial z}dxdz-\frac{\partial u}{\partial z}dydz\\
\delta.dxdz&=-\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdz-\frac{\partial u}{\partial y}dydz\\
\delta.dydz&=-\frac{\partial w}{\partial x}dxdy-\frac{\partial v}{\partial x}dxdz+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dydz.
\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (20)$$

Эти равенства и представляютъ ту теорему *), которую мы хотѣли установить.

Обратимся теперь къ равенству (14). Обозначимъ варіаціи $f$, $g$, $h$, входящія въ составъ этого выраженія знаками: $[\delta f]$, $[\delta g]$ и $[\delta h]$; тогда получимъ:

$$[\delta f]\,dydz+[\delta g]\,dxdz+[\delta h]\,dxdz+f\delta.dydz+g\delta.dydz+h\delta.dxdy=0.$$

Полагая теперь въ формулахъ (20):

$$u=\delta\xi,\quad v=\delta\eta,\quad w=\delta\zeta,$$

подставляя значенія $\delta.dxdy,\ldots$ и приравнивая нулю коэффиціенты при $dxdy$, $dxdz$ и $dydz$, найдемъ:

$$[\delta f]=-f\left(\frac{\partial\delta\eta}{\partial y}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)+g\frac{\partial\delta\xi}{\partial y}+h\frac{\partial\delta\xi}{\partial z}$$

и подобныя формулы для $[\delta g]$ и $[\delta h]$.

---

*) Cp. *Poincaré:* Leçons sur la théorie de l'élasticité, p. 78.

Полная варіація $f$, обусловленная деформаціей среды, будетъ:

$$\delta f = [\delta f] - \frac{\partial f}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial f}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial f}{\partial z}\delta\zeta\,,$$

а, слѣдовательно:

$$\delta f = -\frac{\partial f}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta) - \frac{\partial}{\partial z}(f\delta\zeta) + g\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + h\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\,;$$

но приложивъ и вычтя двучленъ:

$$\frac{\partial g}{\partial y}\delta\xi + \frac{\partial h}{\partial z}\delta\xi$$

и положивъ

$$\varrho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\,,$$

найдемъ первую изъ ниже написанныхъ формулъ; остальныя двѣ найдутся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
\delta f &= -\varrho\delta\xi - \frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta - g\delta\xi) + \frac{\partial}{\partial z}(h\delta\xi - f\delta\zeta)\\
\delta g &= -\varrho\delta\eta + \frac{\partial}{\partial x}(f\delta\eta - g\delta\xi) - \frac{\partial}{\partial z}(g\delta\zeta - h\delta\eta)\\
\delta h &= -\varrho\delta\zeta - \frac{\partial}{\partial x}(h\delta\xi - f\delta\zeta) + \frac{\partial}{\partial y}(g\delta\zeta - h\delta\eta).
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (21)$$

Къ этимъ формуламъ присоединимъ еще слѣдующую, извѣстную:

$$\delta\,.\,d\tau = \left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)d\tau\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Теперь можемъ уже заняться и второй половиной нашей задачи, а именно выводомъ общихъ уравненій электро-и магнито-стрикціи. Возьмемъ варіаціи отъ $W$, $U$ и $V$ въ предположеніи, что $f$, $g$, $h$; $F$, $G$, $H$; $K$, $\mu$ и $d\tau$ претерпѣваютъ измѣненія, вызываемыя деформаціей среды; варіаціи первыхъ шести перемѣнныхъ уже даны формулами (19) и (21), а варіація элемента объема формулой (22); остается найти $\delta K$ и $\delta\mu$. Оба коэффиціента $K$ и $\mu$ суть функціи $(x, y, z)$, а потому:

$$\left.\begin{aligned}\delta K &= -\frac{\partial K}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial K}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial K}{\partial z}\delta\zeta \\ \delta\mu &= -\frac{\partial\mu}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial\mu}{\partial z}\delta\zeta\,,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

такъ-какъ послѣ перемѣщенія въ точкѣ $(x, y, z)$ будутъ тѣ значенія $K$ и $\mu$, которыя были до перемѣщенія въ точкѣ $(x-\delta\xi,\ y-\delta\eta,\ z-\delta\zeta)$.

Опредѣлимъ сначала $\delta W$. Находимъ при помощи (21):

$$\delta W = -\int\frac{4\pi}{K}d\tau\Big\{\varrho(f\delta\xi+g\delta\eta+h\delta\zeta)+f\frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta-g\delta\xi)-g\frac{\partial}{\partial x}(f\delta\eta-g\delta\xi)+$$

$$+h\frac{\partial}{\partial x}(h\delta\xi-f\delta\zeta)-f\frac{\partial}{\partial z}(h\delta\xi-f\delta\zeta)+$$

$$+g\frac{\partial}{\partial z}(g\delta\zeta-h\delta\eta)-h\frac{\partial}{\partial y}(g\delta\zeta-h\delta\eta)\Big\}-\int\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\delta K d\tau+\int\frac{K\mathbf{R}^2}{8\pi}\delta.d\tau\,,$$

гдѣ положено для кратности письма:

$$\mathbf{R}^2 = \frac{16\pi^2}{K^2}(f^2+g^2+h^2).$$

Это $\mathbf{R}$ будетъ электрической силой въ точкѣ $(x, y, z)$.

Преобразуемъ члены съ производными отъ $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и положимъ:

$$\varXi = -4\pi\Big\{g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{K}\right)-g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{K}\right)-h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{K}\right)+$$

$$+h\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{K}\right)-\frac{\mathbf{R}^2}{32\pi^2}\frac{\partial K}{\partial x}\Big\}$$

или, подставляя значеніе $\varrho$, найдемъ первое выраженіе; остальные два найдутся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}-\varXi &= 4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f^2-g^2-h^2}{2K}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{fg}{K}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{fh}{K}\right)\right\} \\ -H &= 4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{fg}{K}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g^2-f^2-h^2}{2K}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{gh}{K}\right)\right\} \\ -Z &= 4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{fh}{K}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{gh}{K}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^2-f^2-g^2}{2K}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ (a)$$

Затѣмъ положимъ:

$$\left.\begin{aligned}
-\Xi_n &= 4\pi\left\{\frac{f^2-g^2-h^2}{2K}\cos(nx)+\frac{fg}{K}\cos(ny)+\frac{fh}{K}\cos(nz)\right\}\\
-H_n &= 4\pi\left\{\frac{fg}{K}\cos(nx)+\frac{g^2-f^2-h^2}{2K}\cos(ny)+\frac{gh}{K}\cos(nz)\right\}\\
-Z_n &= 4\pi\left\{\frac{fh}{K}\cos(nx)+\frac{gh}{K}\cos(ny)+\frac{h^2-f^2-g^2}{2K}\cos(nz)\right\}.
\end{aligned}\right\}\;. \; . \;(b)$$

При такихъ положеніяхъ для $\delta W$ получимъ выраженіе:

$$\delta W=\int(\Xi\delta\xi+H\delta\eta+Z\delta\zeta)\,d\tau+\int(\Xi_n\delta\xi+H_n\delta\eta+Z_n\delta\zeta)\,dS.$$

Отсюда ясно, что

$$\delta W=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\tau)$$

Найдемъ теперь $\delta V$.

Сначала имѣемъ:

$$\delta V=-\frac{1}{4\pi}\int\left\{\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\frac{\partial P}{\partial x}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{\partial P}{\partial y}+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial z}\Big]-\mu\Big[(\gamma\delta\eta-\beta\delta\zeta)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+$$

$$+(\alpha\delta\zeta-\gamma\delta\xi)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\Big]\Big\}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\Big\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\frac{\partial P}{\partial x}+$$

$$+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\frac{\partial P}{\partial y}+[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\frac{\partial P}{\partial z}-$$

$$-\mu(\gamma\delta\eta-\beta\delta\zeta)[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]-\mu(\alpha\delta\zeta-\gamma\delta\xi)[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]-$$

$$-\mu(\beta\delta\xi-\alpha\delta\eta)[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\Big\}dS-\int\frac{d\tau}{8\pi}\mathbf{H}^2\delta\mu+\int\frac{\mu\mathbf{H}^2}{8\pi}\delta d\tau,$$

гдѣ положено:

$$\mathbf{H}^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

Это $\mathbf{H}$ будетъ магнитной силой.

Преобразовывая объемные интегралы съ функціей $P$ въ поверхностные, увидимъ, что они сократятся съ другими поверхностными интегралами; затѣмъ преобразовывая члены съ $\delta d\tau$ и подставляя значеніе $\delta\mu$, найдемъ, подобно предыдущему:

$$\delta V = \int(\Xi_1\delta\xi + H_1\delta\eta + Z_1\delta\zeta)d\tau + \int(\Xi_{n1}\delta\xi + H_{n1}\delta\eta + Z_{n1}\delta\zeta)\,dS \;.\;.\quad (e)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned}
-\Xi_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\alpha\beta) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\alpha\gamma)\right\}\\
-H_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu\alpha\beta) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\beta\gamma)\right\}\\
-Z_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu\alpha\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\beta\gamma) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}{2}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \;.\;.\quad (f)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
-\Xi_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\mu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{2}\cos(nx) + \mu\alpha\beta\cos(ny) + \mu\alpha\gamma\cos(nz)\right\}\\
-H_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mu\alpha\beta\cos(nx) + \frac{\mu(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}{2}\cos(ny) + \mu\beta\gamma\cos(nz)\right\}\\
-Z_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mu\alpha\gamma\cos(nx) + \mu\beta\gamma\cos(ny) + \frac{\mu(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}{2}\cos(nz)\right\}.
\end{aligned}\right\} \;.\quad (g)$$

При этомъ пользовались равенствомъ:

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z} = 0.$$

И здѣсь видъ выраженій таковъ, что:

$$\delta V = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (e)$$

Остается опредѣлить $\delta U$ и $\sum P_a\delta p_a$.

Для перваго имѣемъ выраженіе:

$$\delta U = \int(\Xi_2\delta\xi + H_2\delta\eta + Z_2\delta\zeta)d\tau + \int(\Xi_{n2}\delta\xi + H_{n2}\delta\eta + Z_{n2}\delta\zeta)dS, \;.\quad (h)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_2 &= A\frac{d}{dt}[F\varrho + \mu(\beta h - \gamma g)], & \Xi_{n2} &= A\frac{d(Fv)}{dt} \\
H_2 &= A\frac{d}{dt}[G\varrho + \mu(\gamma f - \alpha h)], & H_{n2} &= A\frac{d(Gv)}{dt} \\
Z_2 &= A\frac{d}{dt}[H\varrho + \mu(\alpha g - \beta f)], & Z_{n2} &= A\frac{d(Hv)}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (i)$$

Здѣсь положено для краткости письма:

$$v = f\cos(nx) + g\cos(ny) + h\cos(nz) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (j)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned}
\sum P_a \delta p_a = \iint\Big\{&[X - P_0\varrho + A\mu(\beta r - \gamma q) - AF\sigma]\delta\xi + \\
&+ [Y - Q_0\varrho + A\mu(\gamma p - \alpha r) - AG\sigma]\,\delta\eta + \\
&+ [Z - R_0\varrho + A\mu(\alpha q - \beta p) - AH\sigma]\,\delta\zeta\Big\} d\tau + \\
+ \iint\Big\{&[\varLambda\cos(nx) - P_0 v + AFs + X_n]\,\delta\xi + \\
&+ [\varLambda\cos(ny) - Q_0 v + AGs + Y_n]\,\delta\eta + \\
&+ [\varLambda\cos(nz) - R_0 v + AHs + Z_n]\,\delta\zeta\Big\} dS \quad \ldots\ldots \quad (k)
\end{aligned}$$

Здѣсь положено:

$$\varLambda = P_0 f + Q_0 g + R_0 h\,, \quad s = p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz) \quad \ldots \quad (l)$$

приэтомъ для $P_0$, $Q_0$, $R_0$ пользовались условіями:

$$P_0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,, \quad Q_0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,, \quad R_0 = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

причемъ $\Psi$ будетъ потенціаломъ электрическихъ массъ, развивающихся въ мѣстахъ соприкосновенія проводниковъ.

Такъ какъ на поверхности проводниковъ должно быть:

$$P_0 = Q_0 = R_0 = 0\,,$$

$$v = 0\,, \quad s = 0\,,$$

то, слѣдовательно и

$$\Lambda = 0 ,$$

а потому, если положимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A\mu(\beta r - \gamma q) - P_0\varrho - AF\sigma \\ Y_1 &= A\mu(\gamma p - \alpha r) - Q_0\varrho - AG\sigma \\ Z_1 &= A\mu(\alpha q - \beta p) - R_0\varrho - AH\sigma , \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (n)$$

то уравненіе для $\sum P_a \delta p_a$ будетъ:

$$\sum P_a \delta p_a = \int [(X + X_1)\delta\xi + (Y + Y_1)\delta\eta + (Z + Z_1)\delta\zeta] d\tau +$$

$$+ \int [X_n \delta\xi + Y_n \delta\eta + Z_n \delta\zeta] \, dS . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (p)$$

Соединяя выраженія $\delta U$ и $\sum P_a \delta p_a$ вмѣстѣ, найдемъ:

$$\delta U + \sum P_a \delta p_a = \int \Big\{ (X_1 + \Xi_2)\,\delta\xi + (Y_1 + H_2)\,\delta\eta + (Z_1 + Z_2)\,\delta\zeta \Big\} \, d\tau +$$

$$+ \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta) d\tau + \int (X_n\delta\xi + Y_n\delta\eta + Z_n\delta\zeta) dS , \; . \; . \; (q)$$

такъ какъ вслѣдствіе того, что на поверхности проводниковъ

$$\nu = 0 ,$$

силы $\Xi_{n2}$, $H_{n2}$, $Z_{n2}$ обращаются въ нуль.

Преобразуемъ силы $X_1 + \Xi_2$, $Y_1 + H_2$, $Z_1 + Z_2$.

Положимъ для простоты письма:

$$E_x = \mu(q\gamma - r\beta) , \quad E_y = \mu(r\alpha - p\gamma) , \quad E_z = \mu(p\beta - q\alpha) ,$$

это будутъ, очевидно, составляющія электромагнитной силы въ точкѣ $(x , y , z)$ [*Maxwell*, II, § 603, eq. $(C)$]; затѣмъ:

$$E_{1x} = \mu(g\gamma - h\beta) , \quad E_{1y} = \mu(h\alpha - f\gamma) , \quad E_{1z} = \mu(f\beta - g\alpha) -$$

это составляющіе момента діэлектрика въ той-же точкѣ (*J. J. Thomson*, Notes on recent researches in electricity and magnetism, p. 9).

Поэтому будемъ имѣть:

$$X_1+\Xi_2=-A\left(E_x+\frac{dE_{1x}}{dt}\right)+A\frac{d(F\varrho)}{dt}-AF\sigma-P_0\varrho\,,$$

но

$$\sigma=\frac{d\varrho}{dt}\,,\quad A\frac{dF}{dt}-P_0=P=\frac{4\pi}{K}f\,,$$

слѣдовательно:

$$X_1+\Xi_2=-A\left(E_x+\frac{dE_{1x}}{dt}\right)+\frac{4\pi\varrho}{K}f\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(r)$$

Но формулы $(f)$ даютъ по преобразованіи результата:

$$A\frac{dE_{1x}}{dt}=A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt}-h\frac{d\beta}{dt}\right)-AE_x+\Xi_1-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\,,$$

а потому:

$$X_1+\Xi_2=-A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt}-h\frac{d\beta}{dt}\right)-\Xi_1+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{4\pi\varrho}{K}f.$$

Затѣмъ при помощи формулъ (8) находимъ:

$$A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt}-h\frac{d\beta}{dt}\right)=-\frac{K}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P^2+Q^2-R^2}{2}\right)+\frac{\partial(PQ)}{\partial y}+\frac{\partial(PR)}{\partial z}\right\}+$$

$$+\frac{KP}{4\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right),$$

а подставляя значеніе $P$, $Q$, $R$ изъ формулъ (5), найдемъ:

$$A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt}-h\frac{d\beta}{dt}\right)=\frac{4\pi\varrho}{K}f+\Xi-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}.$$

И такъ, окончательно находимъ:

$$X_1+\Xi_2=-\Xi-\Xi_1+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}.$$

Подобные-же формулы найдемъ для $Y_1+H_2$ и $Z_1+Z_2$.

Подставляя эти значенія въ $(q)$ получимъ:

$$\delta U+\sum P_a\delta p_a=\iint\Big\{\Big(X+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial x}\Big)\delta\xi+$$

$$+\Big(Y+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial y}\Big)\delta\eta+\Big(Z+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial z}\Big)\delta\zeta\Big\}d\tau-$$

$$-\iint\Big\{(\Xi+\Xi_1)\,\delta\xi+(H+H_1)\,\delta\eta+(Z+Z_1)\,\delta\zeta\Big\}d\tau+$$

$$+\int(X_n\delta\xi+Y_n\delta\eta+Z_n\delta\zeta)\,dS.$$

Соединяя теперь значенія $\delta W$, $\delta V$ и $\delta U+\sum P_a\delta p_a$ въ выраженіи (1), сокращая и приравнивая нулю коэффиціенты при варіаціяхъ $\xi$, $\eta$, $\zeta$ въ объемныхъ и поверхностныхъ интегралахъ, найдемъ *во первыхъ* для точекъ *внутри* діэлектриковъ систему:

$$X=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$Y=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$Z=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

и *во вторыхъ* для точекъ *на поверхности* діэлектрика:

$$-X_n=\Xi_n+\Xi_{n1},\quad -Y_n=H_n+H_{n1},\quad -Z_n=Z_n+Z_{n1}.$$

Получаемъ извѣстныя выраженія для механическихъ силъ электро-и магнитострикціи.

Равенства $(c)$ и $(e)$ показываютъ, что внутри діэлектрика эти силы находятся въ равновѣсіи.

### Электромагнитная теорія дисперсіи.

Гельмгольцъ относитъ явленіе свѣторазсѣянія къ категоріи тѣхъ физическихъ явленій, которыя объясняются не однимъ кинетическимъ состояніемъ эфира, но и воздѣйствіемъ самихъ матеріальныхъ частицъ тѣла, внутри котораго происходитъ явленіе. Такъ напримѣръ, явленіе электрическаго сопротивленія току должно-быть приписано участію матеріальныхъ частицъ тѣла; это участіе выражается въ томъ, что часть

*

электрической энергіи тока идетъ на увеличеніе кинетической энергіи матеріальныхъ частицъ, т. е. на развитіе теплоты: имѣемъ явленіе теплоты Джоула. Подобнымъ образомъ Гельмгольцъ объясняетъ явленіе свѣторазсѣянія тѣмъ, что при поляризаціи діэлектрика — поляризуются и матеріяльныя частицы свѣторазсѣивающаго тѣла. Другими словами, когда подъ вліяніемъ электрическихъ силъ эфиръ діэлектрика (или проводника) выполняетъ электрическія пертурбаціи, то и матеріальныя частицы тоже *электрически* перемѣщаются, т. е. каждая матеріальная частица будетъ представлять, подобно частицамъ электролитовъ, совокупность двухъ іонъ, заряженныхъ противоположными электричествами. Значитъ, вступившая въ эфирную средину, электромагнитная волна разобьется на рядъ простыхъ волнъ, когда внутри средины будутъ существовать матеріальныя частицы; характеръ и родъ этихъ волнъ будетъ обусловливаться свойствами матеріальныхъ частицъ.

Пусть $f_0$, $g_0$, $h_0$ будутъ составляющіе электрической пертурбаціи (діэлектрическаго момента) матеріальной частицы; въ такомъ случаѣ, если-бы эфиръ и матеріальныя частицы не вліяли другъ на друга, ихъ энергіи выражались-бы въ видѣ:

$$\int \frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)\,d\tau \quad \text{и} \quad \int \frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\,d\tau\,,$$

причемъ $K_0$ будетъ коэффиціентъ аналогичный $K$; полная энергія системы эфира и матеріи была-бы равна выраженію:

$$\int \left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)+\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\right] d\tau.$$

Но, вслѣдствіе взаимодѣйствій между эфиромъ и матеріей, электрическая энергія системы будетъ меньше на величину энергіи взаимодѣйствія, которую Гельмгольцъ представляетъ въ видѣ:

$$\int \frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)d\tau$$

такъ что электрическая энергія системы представится въ слѣдующей формѣ:

$$W=\int\left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)-\frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\right]d\tau.$$

Законность такого выраженія можно оправдать тѣмъ, что если-бы вся энергія, поступившая въ систему, потратилась-бы на приведеніе въ кинетическое состояніе *только* матеріальныхъ частицъ, то электрическая энергія системы, которая есть энергія кинетическаго состоянія эфира, равнялась-бы нулю; дѣйствительно, когда

$$f = f_0\,, \quad g = g_0\,, \quad h = h_0\,, \quad K_0 = K\,,$$

то предыдущее выраженіе обращается въ нуль.

При $f_0 = g_0 = h_0 = 0$ оно обращается въ энергію эфира.

Выраженіе магнитной энергіи остается въ прежнемъ видѣ, стр. 28, энергія-же токовъ перемѣщенія, понятно, будетъ теперь имѣть видъ:

$$U = A\int\left[F\frac{d(f+f_0)}{dt} + G\frac{d(g+g_0)}{dt} + H\frac{d(h+h_0)}{dt}\right]d\tau.$$

Выразимъ теперь работу силъ $P_a$. Гельмгольцъ полагаетъ, что

$$\sum P_a p_a = -\frac{1}{2}\int m_1\left[\left(\frac{df_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh_0}{dt}\right)^2\right]d\tau +$$

$$+\int(r_1 f_0 + r_2 g_0 + r_3 h_0)\,d\tau + R\,,$$

гдѣ

$$R = \int(P_0 f + Q_0 g + R_0 h)d\tau + A\int(Fp + Gq + Hr)\,d\tau$$

и количества $r_1$, $r_2$, $r_3$ суть составляющія силы тренія, а именно:

$$r_1 = k_1\frac{df_0}{dt}\,, \quad r_2 = k_2\frac{dg_0}{dt}\,, \quad r_3 = k_3\frac{dh_0}{dt} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

и приэтомъ эти силы тренія варіированію не подлежатъ.

Подставимъ значенія $U$, $V$, $W$ и $\sum P_a p_a$ въ равенство, представляющее принципъ Гамильтона въ формѣ Гельмгольца, а именно:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{W + V + U + \sum P_a p_a\right\}dt = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (2)$$

и приравняемъ нулю коэффиціенты при $\delta F, \ldots \delta f, \ldots \delta h$; но предварительно преобразуемъ члены отъ $\delta U$ и $\sum P_a \delta p_a$. Найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = A \int \left[ \frac{d(f+f_0)}{dt} \delta F + \frac{d(g+g_0)}{dt} \delta G + \frac{d(h+h_0)}{dt} \delta H \right] d\tau -$$

$$- A \int \left[ \frac{dF}{dt} (\delta f + \delta f_0) + \frac{dG}{dt} (\delta g + \delta g_0) + \frac{dH}{dt} (\delta h + \delta h_0) \right] d\tau ,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum P_a \delta p_a = \int m_1 \left[ \frac{d^2 f_0}{dt^2} \delta f_0 + \frac{d^2 g_0}{dt^2} \delta g_0 + \frac{d^2 h_0}{dt^2} \delta h_0 \right] d\tau +$$

$$+ \int (r_1 \delta f_0 + r_2 \delta g_0 + r_3 \delta h_0) \, d\tau + \delta R .$$

Такимъ образомъ для точекъ *внутри* средины получимъ *три* системы уравненій; первая отъ коэффиціентовъ при $\delta f$, $\delta g$, $\delta h$:

$$\frac{4\pi}{K}(f - f_0) - A \frac{dF}{dt} + P_0 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

и подобныя уравненія для $g$ и $h$.

Затѣмъ коэффиціенты при $\delta F$, $\delta G$ и $\delta H$ дадутъ три уравненія вида:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) + A \frac{d(f+f_0)}{dt} + Ap = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

и наконецъ коэффиціенты при $\delta f_0$, $\delta g_0$, $\delta h_0$ дадутъ уравненія вида:

$$4\pi\left(\frac{f_0}{K_0} - \frac{f}{K}\right) - A \frac{dF}{dt} + m_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + r_1 = 0 . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

При этомъ $f_0$, $g_0$, $h_0$ считались перемѣнными, независящими отъ $f$, $g$, $h$.

Если $f_0 = g_0 = h_0 = 0$ и кромѣ того $K_0 = 0$, то уравненія $(c)$ пропадаютъ, ибо обращаются въ тождества и тогда останутся лишь уравненія $(a)$ и $(b)$.

Исключая члены съ $\dfrac{dF}{dt}$ изъ уравненій $(a)$ и $(c)$, получимъ:

$$\frac{8\pi}{K} f = m_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + k_1 \frac{df_0}{dt} + 4\pi\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_0}\right) f_0 + P_0$$

или:

$$m \frac{d^2 f_0}{dt^2} + k \frac{df_0}{dt} + \varkappa f_0 + \frac{K}{8\pi} P_0 = f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

гдѣ положено:

$$\frac{m_1K}{8\pi}=m\,,\quad \frac{Kk_1}{8\pi}=k\,,\quad \frac{K}{2}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K_0}\right)=\varkappa.\;.\;.\;.\;.\;.\;(e)$$

Подобныя-же уравненія найдемъ для $g_0$ и $h_0$.

Уравненія $(a)$ и $(b)$ дадутъ по исключеніи $F$, $G$, $H$ еще соотношенія между пертурбаціями $f$ и $f_0$. Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$\mu\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dH}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dG}{dt}\right)$$

и подобныя формулы для $\beta$ и $\gamma$.

Если теперь подставимъ сюда значенія $\frac{dH}{dt}$ и $\frac{dG}{dt}$ изъ уравненій $(a)$ и вспомнимъ, что:

$$P_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad Q_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad R_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

то получимъ:

$$A\mu\frac{d\alpha}{dt}=\frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial(h-h_0)}{\partial y}-\frac{\partial(g-g_0)}{\partial z}\right].\;.\;.\;.\;.\;(f)$$

и подобныя уравненія для $\beta$ и $\gamma$. Изъ уравненій $(b)$ получаемъ по дифференцированіи по $t$ и умноженіи на $A\mu$:

$$\frac{A\mu}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=-A^2\mu\frac{d^2(f+f_0)}{dt^2}-A^2\mu\frac{dp}{dt}\;.\;.\;(g)$$

и подобныя-же уравненія для $\alpha$, $\gamma$; $\alpha$, $\beta$; затѣмъ равенства:

$$p=C(P-P_0)\,,\quad P=\frac{4\pi}{K}(f-f_0)\ \text{и т. п.}$$

даютъ:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{4\pi C}{K}\left(\frac{df}{dt}-\frac{df_0}{dt}\right)\ \text{и т. п.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(j)$$

Подставляя теперь въ уравненія $(g)$ значенія производныхъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $p$, $q$, $r$ по времени $t$ изъ уравненій $(f)$ и $(j)$, получимъ:

$$A^2\mu K\frac{d^2(f+f_0)}{dt^2}+4\pi A^2\mu C\frac{df}{dt}+4\pi A^2\mu C\frac{df_0}{dt}=\Delta(f-f_0)-\frac{\partial\Omega}{\partial x}.\;\;(k)$$

гдѣ положено:

$$\Omega = \frac{\partial(f - f_0)}{\partial x} + \frac{\partial(g - g_0)}{\partial y} + \frac{\partial(h - h_0)}{\partial z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (l)$$

Подобныя-же уравненія найдемъ для $g$, $h$, $g_0$ и $h_0$.

Исключимъ теперь изъ уравненій ($d$) и ($k$) значенія $f$, $g$, $h$, такъ какъ надо имѣть уравненія для опредѣленія $f_0$, $g_0$, $h_0$, существованію которыхъ Гельмгольцъ приписываетъ дисперсію.

Подставимъ значенія $f$, $g$, $h$ въ первую часть равенства ($k$) и помня, что *во первыхъ*:

$$P_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

такъ что

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} = -\Delta\Psi$$

и *во вторыхъ*, что функція $\Psi$ отъ $t$ независитъ, усмотримъ, что члены съ $P_0$, $Q_0$, $R_0$ изчезнутъ, такъ что можно вмѣсто $f$, $g$, $h$ брать значенія изъ формулъ ($d$) безъ послѣдняго члена въ лѣвыхъ частяхъ.

Дѣлая эту подстановку и полагая для краткости письма:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\partial f_0}{dx} + \frac{\partial g_0}{dy} + \frac{\partial h_0}{dz}, \\ u_1 &= A^2\mu K \frac{d^2 f_0}{dt^2} + 4\pi A^2 \mu C \frac{df_0}{dt} - \Delta f_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \\ v_1 &= A^2\mu K \frac{d^2 f_0}{dt^2} - 4\pi A^2 \mu C \frac{df_0}{dt} + \Delta f_0 - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (m)$$

и подобныя формулы для $u_2$, $v_2$; $u_3$, $v_3$, найдемъ окончательно:

$$m\frac{d^2 u_1}{dt^2} + k\frac{du_1}{dt} + \varkappa u_1 + v_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (n)$$

и подобныя уравненія для $u_2$, $u_3$.

Уравненія ($n$) и дадутъ намъ законы дисперсіи.

Если разсматриваемая средина—діэлектрикъ, что въ предыдущихъ формулахъ надо положить: $C = 0$; Гельмгольцъ собственно разсматриваетъ лишь этотъ случай, но идеи, положенныя имъ въ основаніе теоріи дисперсіи, позволяютъ распространить ее и на случай проводниковъ (каковы напримѣръ вода, а также металлы).

Сдѣлаемъ теперь окончательные выводы изъ уравненій ($n$).

Пусть имѣемъ дѣло съ волной, параллельной плоскости $yz$, распространяющейся, слѣдовательно, вдоль оси $x$-овъ. Назовемъ $\tau$ время колебанія, $\omega$ скорость свѣта въ срединѣ, $\lambda$—длину волны,—$\omega_0$ и $\lambda_0$ тѣже количества для эфира, тогда положимъ:

$$n = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\omega}{\lambda} = \frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0}$$

и если $q$ будетъ коэффиціентъ поглощенія и $\sqrt{-1} = i$, то частными рѣшеніями уравненій ($n$) можно взять:

$$f_0 = 0\,, \quad g_0 = be^{in(t+px)}\,, \quad h_0 = 0\,,$$

гдѣ

$$p = \frac{1}{\omega} - \frac{q}{ni}\,.$$

При помощи этихъ выраженій находимъ:

$$v_2 = -bn^2\left(\frac{1}{\omega_0^2} + p^2 - \frac{\gamma_2}{n}i\right)e^{in(t+px)}\,,$$

$$u_2 = -bn^2\left(\frac{1}{\omega_0^2} - p^2 + \frac{\gamma_1}{n}i\right)e^{in(t+px)}\,,$$

гдѣ положено:

$$\gamma_1 = -4\pi A^2\mu C\,, \; \gamma_2 = -\frac{4\pi\omega_0^2}{K_0}\,.$$

Уравненіе ($n$) для $u_2$ даетъ по сокращеніи:

$$(mn^2 - kni - \varkappa)\left(\frac{1}{\omega_0^2} - p^2 + \frac{\gamma_1}{n}i\right) - \left(\frac{1}{\omega_0^2} + p^2 - \frac{\gamma_2}{n}i\right) = 0\,. \; . \; . \; (p)$$

Положимъ теперь:

$$\alpha = 4\pi^2\omega_0^2 m\,, \quad \beta = 2\pi k\omega_0\,, \quad \gamma = -2A^2\mu\omega_0 C\,,$$

причемъ коэффиціенты $\alpha$ и $\beta$ будутъ зависѣть отъ оптическихъ свойствъ тѣла, а $\gamma$ отъ электрическихъ.

и замѣтимъ, что, если показатель преломленія будетъ $\mu$, т. е.

$$\mu = \frac{\omega_0}{\omega},$$

а показатель поглощенія $\nu$, т. е.

$$\nu = \frac{\lambda_0}{2\pi} q,$$

то получимъ

$$p^2 = \frac{\mu^2}{\omega_0^2} - \frac{\nu^2}{\omega_0^2} + \frac{2\mu\nu}{\omega_0^2} i = \frac{(\mu + \nu i)^2}{\omega_0^2},$$

или

$$p^2 = \frac{x + y\sqrt{-1}}{\omega_0^2},$$

если

$$x = \mu^2 - \nu^2, \quad y = 2\mu\nu.$$

Подставляя все это въ уравненіе ($p$), найдемъ:

$$(x + iy)\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \frac{\beta i}{\lambda_0} - \varkappa\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^2} + \frac{\beta i}{\lambda_0} + \varkappa\right) - \lambda_0 \gamma i \left(\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \frac{\beta i}{\lambda_0} - \varkappa + 1\right) = 0$$

или

$$(x + iy)\left[\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa + 1 - \frac{\beta i}{\lambda_0}\right] +$$

$$+ \left[1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^2} + \varkappa - \beta\gamma + \left(\frac{\beta}{\lambda_0} - \frac{\alpha\gamma}{\lambda_0} + \gamma\lambda_0(\varkappa - 1)\right) i\right] = 0 \; . \; . \; . \; (q)$$

Положимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa + 1 = P_1 \cos\Theta_1, && \frac{\beta}{\lambda_0} = P_1 \sin\Theta_1 \\ &\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa - 1 + \beta\gamma = P_0 \cos\Theta_0, && \frac{\beta - \alpha\gamma}{\lambda_0} + \gamma\lambda_0(\varkappa - 1) = P_0 \sin\Theta_0, \end{aligned}\right\} . \; (r)$$

гдѣ, слѣдовательно, $P_0$, $P_1$, $\Theta_0$ и $\Theta_1$ будутъ вспомогательныя величины; въ такомъ случаѣ равенство ($q$) обратится въ слѣдующее:

$$(x+iy)P_1 e^{-\Theta_1 i} - P_0 e^{-\Theta_0 i} = 0;$$

отсюда находимъ:

$$x+iy = \frac{P_0}{P_1} e^{(\Theta_1-\Theta_0)\sqrt{-1}}.$$

Значитъ:

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\left[\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0)\right]$$

и наконецъ:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) \\ \nu &= \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (s)$$

Если имѣемъ дѣло съ діэлектрикомъ, то $\gamma = 0$ и тогда эти формулы (s) обращаются въ данныя Гельмгольцемъ (Wied. Ann. Bd. XLVIII, S. 397).

По просьбѣ Гельмгольца его формулы повѣрялъ для терпентина и сѣроуглерода г. Мальке; согласіе получилось очень удовлетворительное (для терпентина).

Изъ формулъ ($s$) можно получить для нормальной дисперсіи формулу вида:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda_0^2},$$

представляющую частный видъ формулы Коши; но, вообще, для $\mu$ получается формула, отличающаяся по виду отъ общепринятыхъ, и даже отъ той, которую далъ самъ Гельмгольцъ раньше въ своей механической теоріи дисперсіи, основное уравненіе которой по внѣшнему виду отличается отъ уравненія ($d$) только присутствіемъ члена $P_0$.

Скажемъ въ заключеніе два слова о поляризаціи. При преобразованіи основнаго уравненія (2) (стр. 53) мы оставили безъ вниманія поверхностные интегралы, происходящіе отъ преобразованія $\delta V$: они даютъ условія (10) стр. 37, но Гельмгольцъ даетъ вмѣсто нихъ другія, которыя онъ выводитъ изъ уравненій ($a$) (стр. 54) и изъ тѣхъ уравненій, которыя получаются черезъ исключеніе функцій $F$, $G$, $H$ изъ нихъ-же и опредѣленій магнитной силы. Въ результатѣ получаются формулы Фрэнэля.

2-го марта 1895 г.