О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

В. А. Стеклова.

1. Въ „Rendiconti del circolo Matematico di Palermo" за 1894 годъ помѣщенъ весьма интересный мемуаръ H. Poincaré: „Sur les équations de la Physique Mathématique", посвященный главнымъ образомъ доказательству существованія интеграловъ наиболѣе важныхъ дифференціальныхъ уравненій Математической Физики при нѣкоторыхъ поверхностныхъ условіяхъ, о которыхъ скажемъ ниже.

Для дальнѣйшихъ соображеній намъ нѣтъ надобности подробно излагать всѣ результаты, добытые H. Poincaré въ разсматриваемомъ мемуарѣ; мы обратимъ вниманіе только на тѣ пункты, которые имѣютъ прямое отношеніе къ нашему изслѣдованію.

Въ первой части своего мемуара H. Poincaré доказываетъ, между прочимъ, слѣдующую теорему:

Для каждой данной области (D), *ограниченной поверхностью* (S), *существуетъ безчисленное множество вполнѣ опредѣленныхъ положительныхъ чиселъ*

$$k_1,\ k_2, \ldots,\ k_n, \ldots,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, *соотвѣтствуетъ опредѣленная непрерывная и конечная по* x, y, z [*координаты точекъ области* (D)] *функція* u_n, *удовлетворяющая уравненію*

$$\Delta u_n + k_n u_n = 0 \quad \text{внутри } (D) \tag{1}$$

и условію

$$u_n = 0 \qquad \text{на поверхности } (S). \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Въ уравненіи (1) Δ обозначаетъ знакъ операціи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Функціи u_n $(n=1, 2\dots)$ H. Poincaré называетъ *гармоническими*, а соотвѣтствующія имъ числа k_n $(n=1, 2\dots)$ *характеристическими числами* этихъ функцій.

Мы въ дальнѣйшемъ удержимъ тѣ же названія.

Въ послѣдней (третьей) части вышеупомянутаго мемуара H. Poincaré трактуетъ о разложеніи данной функціи координатъ f въ рядъ по гармоническимъ.

Результатомъ его изслѣдованій является слѣдующее весьма важное для Математической Физики предложеніе:

Назовемъ черезъ $d\tau$ элементъ объема области (D) и положимъ

$$A_n=\int f u_n d\tau .$$

Рядъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда онъ сходится.

Но доказательство H. Poincaré крайне сложно и не отличается надлежащей обстоятельностью.

Въ видахъ этого я считаю не безполезнымъ предложить въ настоящей работѣ болѣе простое и строгое доказательство только что упомянутой теоремы.

2. Предварительно необходимо поставить на видъ нѣкоторыя теоремы, которыми придется пользоваться въ нашемъ изслѣдованіи. Нѣкоторыя изъ нихъ мы приведемъ безъ доказательства, заимствуя ихъ прямо изъ мемуара: „Sur les équations etc...“, къ которому и отсылаемъ читателя.

Теорема I. *Существуетъ функція G шести аргументовъ*

$$x\,,\ y\,,\ z \quad \text{и} \quad \xi,\ \eta,\ \zeta,$$

удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ:

1) *Функція G однозначна, конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ области (D) за исключеніемъ точки*

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,$$

гдѣ она обращается въ безконечность.

2) *Разность*

$$G - \frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остается конечной при

$$r = 0.$$

3) *Внутри области* (D) G *удовлетворяетъ уравненію*

$$\Delta G = 0.$$

4) *На поверхности* (S) G *удовлетворяетъ условію*

$$G = 0.$$

Это есть извѣстная функція Грина, вполнѣ опредѣляемая по принципу Дирихле.

Лемма. Если l есть наибольшее изъ разстояній между двумя точками поверхности (S), то

$$\int G^2 d\tau < \frac{l}{4\pi} = Q.$$

Пусть f есть функція координатъ x, y, z, конечная и непрерывная вмѣстѣ съ своими первыми производными по координатамъ внутри (D).

Теорема II. *Уравненіе*

$$\Delta v + kv + f = 0, \tag{2}$$

гдѣ k *есть положительная постоянная, допускаетъ непрерывный и конечный по* x, y, z *интегралъ внутри области* (D), *обращающійся на поверхности* (S) *въ нуль.*

Пока k *не превосходитъ нѣкотораго предѣла* μ, *этотъ интегралъ представляется подъ видомъ абсолютно и равномѣрно сходящагося ряда*

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} k^n v_n,$$

гдѣ

$$v_0 = \int G f' d\tau', \quad v_n = \int G v'_{n-1} d\tau'. \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{3}$$

Значки при f и v_{n-1} обозначаютъ, что въ этихъ функціяхъ перемѣнныя x, y, z замѣнены черезъ ξ, η и ζ, а $d\tau'$ означаетъ элементъ объема области (D) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η и ζ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ держаться этихъ же обозначеній.

Составимъ интегралы

$$W_{2n} = \int v_n^2 d\tau\,, \quad W_{2n-1} = \int \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Не трудно убѣдиться, что эти интегралы удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \ldots$$

и

$$\lim \frac{W_{n+1}}{W_n}\bigg|_{n=\infty}$$

есть величина, вообще говоря, конечная.

Этотъ предѣлъ равенъ $\frac{1}{\mu}$.

Теорема III. *Для каждой данной области (D) существуетъ безчисленное множество опредѣленныхъ положительныхъ чиселъ*

$$k_1\,,\quad k_2\,,\ldots,\quad k_n\,,\ldots,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, соотвѣтствуетъ опредѣленная до нѣкотораго постояннаго множителя функція u_n, непрерывная и конечная внутри (D), удовлетворяющая уравненію

$$\Delta u_n + k_n u_n = 0 \quad \textit{внутри } (D) \tag{4}$$

и условію

$$u_n = 0 \quad \textit{на поверхности } (S). \tag{5}$$

Постояннымъ множителемъ мы распорядимся такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\int u_n^2 d\tau = 1. \qquad (n=1\,,\,2,\ldots) \tag{6}$$

Функціи $u_n\,(n=1\,,\,2\ldots)$, удовлетворяющія условіямъ (4), (5) и (6), мы и будемъ называть гармоническими.

Характеристическія числа $k_n (n=1\,,\,2\ldots)$, какъ показано H. Poincaré, удовлетворяютъ неравенствамъ

$$k_n > mn^{\frac{2}{3}}\,,$$

гдѣ m есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Очевидно, что

$$\lim k_n|_{n=\infty} = \infty.$$

Теорема IV. *Вообще говоря, функція v, удовлетворяющая уравненію (2) и условію*

$$v = 0 \quad \textit{на поверхности } (S),$$

есть мероморфная функція параметра k съ простыми полюсами

$$k_\mu, \quad k_\nu, \ldots, k_\tau, \ldots,$$

гдѣ $k_\mu, k_\nu, \ldots, k_\tau \ldots$ суть всѣ или нѣкоторыя изъ характеристическихъ чиселъ данной области (D).

Число полюсовъ функціи v и характеръ ихъ распредѣленія зависитъ отъ свойствъ функціи f.

Функція v можетъ быть представлена подъ видомъ

$$v = \frac{P}{\Delta}.$$

Здѣсь P есть голоморфная функція параметра k, пока

$$k < k_p,$$

гдѣ p какое угодно цѣлое число (можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ); Δ есть полиномъ степени $(p-1)$ относительно k съ постоянными коэффиціентами.

При

$$k = k_n < k_p$$

Δ обращается въ нуль, а P въ гармоническую функцію u_n.

3. Теорема V. *Если функція f удовлетворяетъ условію*

$$\int f u_n d\tau = 0, \tag{7}$$

то $k = k_n$ есть простая точка функціи v.

Помноживъ уравненіе (2) на u_n и интегрируя по всему объему, получаемъ послѣ небольшого преобразованія

$$(k - k_n)\int v u_n d\tau + \int f u_n d\tau = 0,$$

или, въ силу (7),

$$(k-k_n)\int vu_n d\tau = 0. \tag{8}$$

Если $k=k_n$ есть полюсъ v, то лѣвая часть этого равенства обратится въ

$$M\int u_n^2 d\tau,$$

гдѣ M есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная, и равенство (8) окажется невозможнымъ.

Слѣдовательно, $k=k_n$ есть простая точка функціи v, если f удовлетворяетъ условію (7).

Слѣдствіе. *Если функція f въ уравненіи* (2) *удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int fu_1 d\tau = 0, \int fu_2 d\tau = 0, \ldots \int fu_p d\tau = 0,$$

то наименьшій изъ полюсовъ функціи v не менѣе

$$k_{p+1}.$$

Эта теорема, замѣтимъ, имѣетъ существенное значеніе для доказательства теоремы о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

4. Теорема VI. *Уравненіе*

$$\Delta u + ku = 0, \tag{9}$$

гдѣ k есть положительная постоянная, допускаетъ непрерывный и конечный по x, y, z внутри (D) интегралъ, принимающій на поверхности (S) заданныя значенія.

Этотъ интегралъ можетъ быть представленъ подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ k и сходящагося абсолютно и равномѣрно для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1 *).

Доказательство этой теоремы настолько просто, что на немъ нѣтъ надобности останавливаться.

Замѣтимъ, что если на поверхности (S) дано условіе

$$u = 1 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то функція u будетъ положительна для всѣхъ точекъ внутри области (D) и отлична отъ нуля.

*) Напомнимъ, k_1 есть наименьшее изъ характеристическихъ чиселъ данной области (D).

5. Теорема VII. *Пусть f есть функція координатъ, непрерывная и конечная вмѣстѣ со своими первыми производными по координатамъ внутри области (D), обращающаяся въ нуль на поверхности (S).*

Отношеніе

$$\frac{V}{W}$$

интеграловъ

$$V = \int\left[\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\,, \quad W = \int f^2 d\tau$$

не менѣе k_1 — наименьшаго изъ характеристическихъ чиселъ области (D).

Обозначимъ черезъ u положительную и отличную отъ нуля для всѣхъ точекъ области (D) функцію координатъ, удовлетворяющую условіямъ

$$\Delta u + ku = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$u = 1 \quad \text{на поверхности } (S).$$

По предыдущему, такая функція существуетъ для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1.

Положимъ

$$m_1 = \frac{\partial f}{dx} - \frac{f}{u}\frac{\partial u}{dx}, \qquad \varphi_1 = \frac{f^2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Имѣемъ тождества

$$m_1^2 + \frac{\partial \varphi_1}{dx} - \frac{f^2}{u}\left(\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{k}{3}u\right) = \left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 - \frac{k}{3}f^2$$

и два другихъ, получающихся изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ 1, 2, 3 и буквъ x, y, z.

Интегрируя каждое изъ этихъ тождествъ по всему объему области (D) и складывая результаты, получаемъ

$$\int (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)\, d\tau + \int\left(\frac{\partial \varphi_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{dy} + \frac{\partial \varphi_3}{dz}\right) d\tau - \int \frac{f^2}{u}(\Delta u + ku)\, d\tau =$$

$$= V - kW.$$

Такъ какъ

$$J = \int\left(\frac{\partial \varphi_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{dy} + \frac{\partial \varphi_3}{dz}\right) d\tau = -\int f^2 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\,,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S), а n — направленіе нормали, идущей внутрь области (D), то при условіи

$$f=0 \quad \text{на поверхности } (S)$$

имѣемъ

$$J=0.$$

Слѣдовательно,

$$V-kW=\int (m_1^2+m_2^2+m_3^2)\,d\tau > 0.$$

Разность

$$V-kW$$

положительна для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1, т. е. наименьшее значеніе отношенія $\frac{V}{W}$ есть k_1.

Итакъ

$$\frac{V}{W} \geqq k_1.$$

Знакъ равенства соотвѣтствуетъ случаю

$$f=u_1.$$

6. Пусть f есть однозначная, конечная и непрерывная внутри (D) функція координатъ, обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Положимъ

$$A_n=\int f u_n d\tau. \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

Теорема. *Рядъ*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда онъ сходится *).

Будемъ вычислять функцію f по функціямъ $u_n (n=1, 2\ldots)$, полагая

$$f=A_1u_2+A_2u_2+\cdots+A_pu_p+R_p,$$

гдѣ $A_n (n=1, 2, \ldots p)$ суть нѣкоторыя постоянныя, а R_p есть нѣкоторая функція координатъ.

---

*) Хотя бы не абсолютно и не равномѣрно.

Видъ R_p зависитъ отъ выбора коэффиціентовъ A_n и числа ихъ p.

Примемъ за мѣру погрѣшности при указанномъ вычисленіи f интегралъ

$$S_p = \int R_p^2 d\tau$$

и выберемъ постоянныя A_n $(n = 1, 2, \ldots p)$ такъ, чтобы эта погрѣшность была наименьшей.

Опредѣляя подъ этимъ условіемъ коэффиціенты A_n, получаемъ

$$A_n = \int f u_n d\tau. \qquad (n=1, 2, \ldots, p)$$

При этомъ функція R_p, обращающаяся, очевидно, въ нуль на поверхности (S), будетъ еще удовлетворять условіямъ

$$\int R_p u_1 d\tau = 0, \quad \int R_p u_2 d\tau = 0, \ldots \quad \int R_p u_p d\tau = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Интегралъ S_p есть убывающая функція значка p.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$S_p = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \cdots - A_p^2,$$

$$S_{p+1} = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \cdots - A_p^2 - A_{p+1}^2$$

т. е.

$$S_{p+1} = S_p - A_{p+1}^2,$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное.

Назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, удовлетворяющую уравненію

$$\Delta v_p + k v_p + R_p = 0 \quad \text{внутри } (D)$$

и условію

$$v_p = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Мы знаемъ, что функцію v_p можно представить подъ видомъ ряда

$$v_p = v_{p0} + k v_{p1} + k^2 v_{p2} + \cdots + k^n v_{pn} + \cdots, \qquad \textbf{(11)}$$

гдѣ

$$v_{p0} = \int G R_p' d\tau', \quad v_{pn} = \int G v_{p,n-1}' d\tau'. \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

Составимъ для функцій v_{ps} $(s=0, 1, 2 \ldots)$ интегралы Schwarz'а и обозначимъ ихъ черезъ $W_s^{(p)}$ $(s=0, 1, 2 \ldots)$.

Рядъ (11) сходится, пока

$$k < \lim \frac{W_s^{(p)}}{W_{s+1}^{(p)}}\bigg|_{s=\infty}.$$

Такъ какъ R_p удовлетворяетъ условіямъ (10), то по теоремѣ (V)

$$\lim \frac{W_s^{(p)}}{W_{s+1}^{(p)}} > k_p,$$

а такъ какъ интегралы $W_s^{(p)}$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{W_1^{(p)}}{W_0^{(p)}} < \frac{W_2^{(p)}}{W_1^{(p)}} < \ldots < \frac{W_{s+1}^{(p)}}{W_s^{(p)}} < \ldots,$$

то и подавно

$$\frac{W_0^{(p)}}{W_1^{(p)}} > k_p,$$

или

$$\int v_{p0}^2\, d\tau > k_p \int \left[\left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Такъ какъ v_{p1} равно нулю на поверхности (S), то по теоремѣ (VII)

$$\int v_{p0}^2\, d\tau > k_1 k_p \int v_{p1}^2\, d\tau.$$

Но

$$\int v_{p0}^2\, d\tau = \int d\tau \left(\int G R_p' d\tau'\right)^2 < W \int R_p^2 d\tau \int G^2 d\tau < WQS_p,$$

гдѣ W есть объемъ области (D).

Слѣдовательно,

$$S_p = \int R_p^2 d\tau > k_p M \int v_{p1}^2\, d\tau,$$

гдѣ

$$M = \frac{k_1}{QW}$$

есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Изъ равенства

$$v_{p2} = \int G v'_{p1}\, d\tau'$$

заключаемъ, что

$$v_{p2}^2 < \int v_{p1}^2\, d\tau \int G^2 d\tau < Q \int v_{p1}^2\, d\tau .$$

Слѣдовательно,

$$S_p > k_p N v_{p2}^2 , \tag{12}$$

гдѣ

$$N = \frac{k_1}{WQ^2}$$

есть конечная, не равная нулю, положительная постоянная.

Неравенство (12) справедливо при всякомъ p.

Будемъ увеличивать p до безконечности.

Такъ какъ по условію рядъ

$$T = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

есть рядъ сходящійся, то R_p имѣетъ предѣломъ нѣкоторую функцію R.

Положимъ затѣмъ

$$\lim v_p\big|_{p=\infty} = w , \quad \lim v_{p,n}\big|_{p=\infty} = w_n . \qquad (n=0,1,2\ldots)$$

Такъ какъ S_p стремится къ нѣкоторому предѣлу (конечному) при возрастаніи p до ∞, а число k_p возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, то необходимо

$$\lim v_{p2} = w_2 = 0 .$$

Такъ какъ

$$w_s = \int G w'_{s-1}\, d\tau' , \qquad (s=3,4\ldots)$$

то функція w, удовлетворяющая уравненію

$$\varDelta w + kw + R = 0 , \tag{13}$$

приводится къ суммѣ двухъ членовъ

$$w = w_0 + k w_1 .$$

гдѣ, напомнимъ,

$$w_0 = \int GR' d\tau', \quad w_2 = \int G w_1' d\tau'.$$

Подставивъ это выраженіе w въ уравненіе (13), заключаемъ, что

$$w_1 = 0$$

и затѣмъ, что

$$w_0 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$w = 0, \qquad R = 0,$$

т. е. R_p стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи p и въ предѣлѣ, который несомнѣнно существуетъ, ибо рядъ

$$T = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n \tag{14}$$

по условію сходящійся, обращается въ нуль.

Слѣдовательно,

$$f = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n,$$

что и требовалось доказать.

7. Въ заключеніе этого изслѣдованія укажемъ условія сходимости ряда (14).

Наиболѣе интересенъ, конечно, случай абсолютной сходимости.

Условія такой сходимости ряда (14) можно формулировать въ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Если функція f конечна и непрерывна внутри (D) вмѣстѣ съ ея частными производными до шестого порядка включительно и, обращаясь въ нуль на поверхности (S), удовлетворяетъ еще условіямъ*

$$\Delta f = 0, \quad \Delta_2 f = 0 \quad \textit{на поверхности } (S), \tag{15}$$

то рядъ (14) сходится абсолютно и равномѣрно.

Эта теорема принадлежитъ H. Poincaré.

Я считаю не лишнимъ привести слѣдующее простое доказательство этого предложенія.

Пользуясь условіями (15) и тѣми, которыми опредѣляются функціи $u_n (n = 1, 2 \dots)$, получаемъ при помощи теоремы Грина рядъ слѣдующихъ почти очевидныхъ равенствъ

$$A_n = \int f u_n d\tau = -\frac{1}{k_n}\int f \Delta u_n\, d\tau = -\frac{1}{k_n}\int u_n \Delta f d\tau =$$

$$= \frac{1}{k_n^2}\int \Delta u_n \Delta f d\tau = \frac{1}{k_n^2}\int u_n \Delta_2 f d\tau =$$

$$= -\frac{1}{k_n^3}\int \Delta u_n \Delta_2 f d\tau = -\frac{1}{k_n^3}\int u_n \Delta_3 f d\tau ,$$

гдѣ Δ_3 есть знакъ трижды повторенной операціи Δ.

Слѣдовательно,

$$|A_n| < \frac{1}{k_n^3}\left(\int (\Delta_3 f)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{k_n^3} ,$$

гдѣ M есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Съ другой стороны очевидно

$$u_n = k_n \int G u_n d\tau ,$$

т. е.

$$|u_n| < k_n \sqrt{Q}.$$

Слѣдовательно,

$$|A_n u_n| < \frac{M\sqrt{Q}}{k_n^2} < \frac{M\sqrt{Q}}{m n^{\frac{4}{3}}} = \frac{K}{n^{\frac{4}{3}}} , \text{*)}$$

гдѣ K конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Рядъ

$$K\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} + \dots + \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} + \dots\right)$$

сходится.

*) Напомнимъ,

$$\frac{l}{4\pi} = Q > \int G^2 d\tau , \quad k_n > m n^{\frac{2}{3}} \quad \text{(См. § 2-й).}$$

Наибольшее значеніе модуля каждаго члена ряда (14) меньше соотвѣтствующаго члена послѣдняго ряда. Слѣдовательно, рядъ (13) сходится при указанныхъ условіяхъ абсолютно и равномѣрно.

Замѣтимъ, что съ указаннымъ разложеніемъ функціи f (данной) по гармоническимъ приходится встрѣчаться при рѣшеніи задачи объ охлажденіи твердаго тѣла, лучеиспускательная способность котораго безконечно велика. Это соотвѣтствуетъ допущенію, что температура всѣхъ точекъ пространства, внѣшняго относительно тѣла, есть нуль.

Функція f представляетъ температуру тѣла въ начальный моментъ времени и должна равняться нулю тождественно во всѣхъ точкахъ пространства, внѣшняго относительно тѣла.

При этомъ естественно получаются условія

$$f=0\,,\quad \Delta f=0\,,\quad \Delta_2 f=0\ldots \text{ на поверхности } (S)\,,$$

вытекающія, какъ мнѣ кажется, изъ самой сущности задачи.

Поэтому теорема, поставленная въ началѣ этого параграфа, по крайней мѣрѣ въ примѣненіи къ только что указанному вопросу Математической Физики, имѣетъ, повидимому, совершенно общее значеніе.