# О нуляхъ цѣлой функціи Эрмита и функцій Лямэ.

А. А. Маркова.

(Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ проф. А. М. Ляпунову).

Въ надеждѣ, что Вы сохранили интересъ къ функціямъ Лямэ, я позволяю себѣ обратить Ваше вниманіе на замѣтку *) г-на Клейна „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung", которая, впрочемъ, касается не столько самихъ функцій Лямэ сколько цѣлой функціи Эрмита, связанной извѣстнымъ образомъ съ уравненіемъ Лямэ.

На двухъ фигурахъ г-нъ Клейнъ показываетъ, какъ распредѣляются нули этой цѣлой функціи въ различныхъ случаяхъ, но не приводитъ никакого доказательства.

Обдумывая предложеніе г-на Клейна, я убѣдился, что для его доказательства можно съ успѣхомъ воспользоваться разсужденіями вполнѣ подобными тѣмъ, какія были мною примѣнены къ другой цѣлой функціи въ мемуарѣ **) „О цѣлой функціи

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1-\Delta}{2},\ 1-\Delta, \frac{1}{x}\right)\ F\left(\frac{-n+\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1+\Delta}{2},\ 1+\Delta, \frac{1}{x}\right)$$

и о функціяхъ болѣе общаго характера"; что я и предполагаю сдѣлать въ настоящемъ письмѣ.

*) Mathematische Annalen XL.

**) Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg; VII série, XLI.

Начнемъ съ установленія обозначеній. Пусть

$$\varphi = \varphi(x) = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad e_1 < e_2 < e_3, \quad A = n(n+1),$$

$F(x, B)$ цѣлая функція $n$-ой степени отъ $x$, равная произведенію $y_1 y_2$ двухъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія

$$2\varphi y'' + \varphi' y' - 2(Ax + B) y = 0.$$

Извѣстно, что функція $F(x, B)$ удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію третьяго порядка

$$2\varphi F''' + 3\varphi' F'' + \varphi'' F' - 8(Ax + B) F' - 4AF = 0$$

и нелинейному уравненію второго порядка

$$(F'F' - 2FF'')\varphi - FF'\varphi' + 4(Ax + B) FF = \Phi(B),$$

гдѣ $\Phi(B)$ не зависитъ отъ $x$.

Извѣстно также, что $F(x, B)$ цѣлая функція $n$-ой степени не только относительно $x$, но и относительно $B$, если коэффиціентъ при $x^n$ мы полагаемъ въ этой функціи равнымъ единицѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что $\Phi(B)$ цѣлая функція $2n+1$ степени отъ $B$ и что въ ней коэффиціентъ при $B^{2n+1}$ число положительное.

Мы будемъ заниматься вопросомъ о распредѣленіи вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

при различныхъ вещественныхъ значеніяхъ параметра $B$.

Если число $B$ возрастаетъ непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$, это распредѣленіе мѣняется только при переходѣ $B$ черезъ корни уравненія

$$\Phi(B) = 0.$$

Для значеній $B$, удовлетворяющихъ послѣднему уравненію, функція $F(x, B)$ обращается въ квадратъ одной изъ функцій Лямэ, т. е. принимаетъ видъ

$$(x - e_1)^{\varepsilon_1}(x - e_2)^{\varepsilon_2}(x - e_3)^{\varepsilon_3}[f(x)]^2,$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція отъ $x$, а показатели $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ имѣютъ одно изъ двухъ значеній: 0 и 1.

Относительно функцій Лямэ я буду предполагать извѣстными только слѣдующія предложенія:

1) онѣ соотвѣтствуютъ вещественнымъ значеніямъ $B$;

2) число ихъ равно $2n+1$ и каждой изъ нихъ соотвѣтствуетъ свое особое значеніе $B$, такъ что различнымъ функціямъ Лямэ соотвѣтвѣтствуютъ различныя значенія $B$;

3) всѣ корни уравненія

$$f(x)=0$$

вещественны и лежатъ между $e_1$ и $e_3$.

Въ силу этихъ предложеній всѣ корни уравненія

$$\Phi(B)=0$$

вещественны и различны.

Пусть они будутъ

$$B_1 < B_2 < \ldots < B_i < B_{i+1} < \ldots < B_{2n+1}.$$

Положимъ еще

$$\frac{\partial F(x,B)}{\partial B}=U(x,B),$$

$$F(x,B_i)=(x-e_1)^{\varepsilon_1^{(i)}}(x-e_2)^{\varepsilon_2^{(i)}}(x-e_3)^{\varepsilon_3^{(i)}}[f_i(x)]^2$$

и условимся обозначать черезъ $N_i'$ число корней уравненія

$$f_i(x)=0$$

въ промежуткѣ $(e_1, e_2)$, а черезъ $N_i''$ число корней того-же уравненія въ промежуткѣ $(e_2, e_3)$.

Наконецъ символомъ $\xi_i$ будемъ обозначать любой корень уравненія

$$f_i(x)=0,$$

а буквою $e$ любое изъ чиселъ $e_1, e_2, e_3$.

Пока $B$ лежитъ въ одномъ изъ промежутковъ

$$(-\infty, B_1), (B_1, B_2), \ldots, (B_i, B_{i+1}), \ldots, (B_{2n}, B_{2n+1}), (B_{2n+1}, +\infty)$$

распредѣленіе вещественныхъ корней уравненія

$$F(x,B)=0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

не мѣняется при возрастаніи $B$.

Измѣненія-же въ этомъ распредѣленіи происходятъ только при переходѣ $B$ черезъ значенія

$$B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}.$$

Для изслѣдованія этихъ измѣненій намъ надо при значеніяхъ $B$ близкихъ къ $B_i$ разсмотрѣть корни $x$ уравненія

$$F(x, B) = 0$$

близкіе къ $\xi_i$ и къ $e$.

При безконечно малыхъ величинахъ разностей

$$x - \xi_i \qquad \text{и} \qquad B - B_i$$

уравненіе

$$F(x, B) = 0$$

обращается въ слѣдующее

$$(x - \xi_i)^2 F''(\xi_i, B_i) + 2(B - B_i) U(\xi_i, B_i) = 0.$$

Съ другой стороны изъ вышеуказаннаго нелинейнаго дифференціальнаго уравненія нетрудно вывесть слѣдующее равенство

$$-2U(\xi_i, B_i) F''(\xi_i, B_i) \varphi(\xi_i) = \Phi'(B_i),$$

которое показываетъ, что отношеніе $\dfrac{-U(\xi_i, B_i)}{F''(\xi_i, B_i)}$ имѣетъ тотъ же знакъ какъ и произведеніе

$$\Phi'(B_i) \varphi(\xi_i).$$

Знакъ же послѣдняго произведенія одинаковъ со знакомъ $(-1)^{i-1}$, если $\xi_i$ лежитъ въ промежуткѣ $(e_1, e_2)$, и одинаковъ со знакомъ $(-1)^i$, если $\xi_i$ лежитъ въ промежуткѣ $(e_2, e_3)$.

Слѣдовательно, если $i$ число нечетное, при переходѣ $B$ черезъ значеніе $B_i$, отъ меньшихъ величинъ къ бо́льшимъ, $2N_i'$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ $(e_1, e_2)$, а $2N_i''$ вещественныхъ корней, заключенныхъ въ промежуткѣ $(e_2, e_3)$, становятся мнимыми.

Напротивъ, если $i$ число четное, при такомъ же переходѣ $B$ черезъ значеніе $B_i$ отъ меньшихъ величинъ къ бо́льшимъ, вещественные корни, заключенные въ промежуткѣ $(e_1, e_2)$, обращаются въ $2N_i'$ мнимыхъ корней, а $2N_i''$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ $(e_2, e_3)$.

Обращаясь къ тому корню $x$ уравненія

$$F(x, B) = 0,$$

который близокъ къ $e$ при $B$ близкомъ къ $B_i$, мы прежде всего должны предположить

$$F(e, B_i) = 0.$$

Затѣмъ безъ большого труда находимъ равенство

$$-U(e, B_i)F'(e, B_i)\varphi'(e) = \Phi'(B_i)$$

и, предполагая разности

$$x - e \quad \text{и} \quad B - B_i$$

безконечно малыми, получаемъ уравненіе

$$(x-e)F'(e, B_i) + (B - B_i)U(e, B_i) = 0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ произведенія $(-1)^{i-1}(B - B_i)$ при $e = e_1$ и при $e = e_3$; если-же $e = e_2$, то знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ $(-1)^i(B - B_i)$.

На основаніи всего сказаннаго нами легко составить слѣдующую таблицу:

| Предѣлы для $B$ | Число корней уравненія $F(x, B) = 0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | въ промеж. $(-\infty, e_1)$ | въ промежуткѣ $(e_1, e_2)$ | въ промежуткѣ $(e_2, e_3)$ | въ промеж. $(e_3, +\infty)$ |
| $-\infty < B < B_1$ | $\varepsilon_1^{(1)}$ | 0 | $\varepsilon_2^{(1)} + 2N_1'' + \varepsilon_3^{(1)}$ | 0 |
| $B_1 < B < B_2$ | 0 | $\varepsilon_1^{(1)} + 2N_1' + \varepsilon_2^{(1)} =$ $\varepsilon_1^{(2)} + 2N_2' + \varepsilon_2^{(2)}$ | 0 | $\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)}$ |
| $B_2 < B < B_3$ | $\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^{(3)}$ | 0 | $\varepsilon_2^{(2)} + 2N_2'' + \varepsilon_3^{(2)} =$ $\varepsilon_2^{(3)} + 2N_3'' + \varepsilon_3^{(3)}$ | 0 |
| $B_3 < B < B_4$ | 0 | $\varepsilon_1^{(3)} + 2N_3' + \varepsilon_2^{(3)} =$ $\varepsilon_1^{(4)} + 2N_4' + \varepsilon_2^{(4)}$ | 0 | $\varepsilon_3^{(3)} = \varepsilon_3^{(4)}$ |
| . . . . . . . . | . . . . . | . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . | . . . . |
| $B_{2n} < B < B_{2n+1}$ | $\varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n+1)}$ | 0 | $\varepsilon_2^{(2n)} + 2N_{2n}'' + \varepsilon_3^{(2n)} =$ $\varepsilon_2^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}'' + \varepsilon_3^{(2n+1)}$ | 0 |
| $B_{2n+1} < B < +\infty$ | 0 | $\varepsilon_1^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}' + \varepsilon_2^{(2n+1)}$ | 0 | $\varepsilon_3^{(2n+1)}$ |

А изъ счета мнимыхъ корней выводимъ:

$$N_1''=N_2'',\quad N_2'=N_3',\quad N_3''=N_4'',\ldots,\quad N_{2n-1}''=N_{2n}'',\quad N_{2n}'=N_{2n+1}'.$$

Разсматривая нашу таблицу и принимая во вниманіе только что написанныя равенства, нетрудно посредствомъ простаго сложенія и вычитанія придти къ такой формулѣ

$$2N_1'+\varepsilon_1^{(1)}+\varepsilon_2^{(1)}-2N_{2n+1}'=\varepsilon_2^{(2)}-\varepsilon_2^{(3)}+\varepsilon_2^{(4)}-\varepsilon_2^{(5)}+\ldots+$$
$$+\varepsilon_2^{(2n-2)}-\varepsilon_2^{(2n-1)}+\varepsilon_1^{(2n)}+\varepsilon_2^{(2n)}.$$

Съ другой стороны изъ вида функціи $F(x,B)$ легко заключить, что при весьма большихъ значеніяхъ $B^2$ модули корней уравненія

$$F(x,B)=0$$

должны быть также весьма большими и потому сами корни не могутъ заключаться между $e_1$ и $e_3$.

Поэтому должно быть

$$N_1''=0\,,\quad \varepsilon_2^{(1)}=\varepsilon_3^{(1)}=0\,,\quad 2N_1'+\varepsilon_1^{(1)}=n\,,$$

$$N_{2n+1}'=0\,,\quad \varepsilon_1^{(2n)}=\varepsilon_1^{(2n+1)}=\varepsilon_2^{(2n+1)}=0\,,\quad 2N_{2n+1}''+\varepsilon_3^{(2n+1)}=n\,,$$

въ силу чего приведенное выше равенство даетъ

$$n=\varepsilon_2^{(2)}-\varepsilon_2^{(3)}+\varepsilon_2^{(4)}-\varepsilon_2^{(5)}+\ldots+\varepsilon_2^{(2n-2)}-\varepsilon_2^{(2n-1)}+\varepsilon_2^{(2n)}$$

и слѣдовательно

$$\varepsilon_2^{(2)}=\varepsilon_2^{(4)}=\ldots=\varepsilon_2^{(2n-2)}=\varepsilon_2^{(2n)}=1\,,$$

$$\varepsilon_2^{(1)}=\varepsilon_2^{(3)}=\varepsilon_2^{(5)}=\ldots=\varepsilon_2^{(2n-1)}=\varepsilon_2^{(2n+1)}=0\,.$$

Такимъ образомъ всѣ числа $\varepsilon_2^{(i)}$ вполнѣ опредѣлены.

Обращаясь къ числамъ $\varepsilon_1^{(i)}$ и $\varepsilon_3^{(i)}$, замѣтимъ, что $\varepsilon_1^{(1)}$ равняется нулю при $n$ четномъ и единицѣ при $n$ нечетномъ. Это число мы обозначимъ черезъ $\varepsilon$.

Затѣмъ послѣдовательно находимъ:

$$\varepsilon_1^{(2)}=1-\varepsilon=\varepsilon_1^{(3)},\quad \varepsilon_1^{(4)}=\varepsilon_1^{(5)}=\varepsilon,\quad \varepsilon_1^{(6)}=\varepsilon_1^{(7)}=1-\varepsilon,\quad \varepsilon_1^{(8)}=\varepsilon_1^{(9)}=\varepsilon,\ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(1)}=\varepsilon_3^{(2)}=0,\quad \varepsilon_3^{(3)}=\varepsilon_3^{(4)}=1\,,\quad \varepsilon_3^{(5)}=\varepsilon_3^{(6)}=0\,,\quad \varepsilon_3^{(7)}=\varepsilon_3^{(8)}=1\,,\ldots\ .$$

Въ виду всѣхъ этихъ равенствъ, таблица распредѣленія вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

принимаетъ слѣдующій видъ:

| Предѣлы для $B$ | Число корней уравненія $F(x, B) = 0$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | въ промежут. $(-\infty, e_1)$ | въ промежут. $(e_1, e_2)$ | въ промежут. $(e_2, e_3)$ | въ промежут. $(e_3, +\infty)$ |
| $-\infty < B < B_1$ | $\varepsilon = \frac{1-(-1)^n}{2}$ | 0 | 0 | 0 |
| $B_1 < B < B_2$ | 0 | $n$ | 0 | 0 |
| $B_2 < B < B_3$ | $1-\varepsilon$ | 0 | 1 | 0 |
| $B_3 < B < B_4$ | 0 | $n-1$ | 0 | 1 |
| $B_4 < B < B_5$ | $\varepsilon$ | 0 | 2 | 0 |
| $B_5 < B < B_6$ | 0 | $n-2$ | 0 | 0 |
| $B_6 < B < B_7$ | $1-\varepsilon$ | 0 | 3 | 0 |
| $B_7 < B < B_8$ | 0 | $n-3$ | 0 | 1 |
| $B_8 < B < B_9$ | $\varepsilon$ | 0 | 4 | 0 |
| $B_9 < B < B_{10}$ | 0 | $n-4$ | 0 | 0 |
| $B_{10} < B < B_{11}$ | $1-\varepsilon$ | 0 | 5 | 0 |
| . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . |
| . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . |

Послѣдняя таблица, по существу дѣла, равносильна чертежамъ г-на Клейна.

Замѣчу, что предыдущія разсужденія служатъ также для доказательства замѣченнаго Вами, въ диссертаціи „Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости“, закона послѣдовательности функцій Лямэ.