Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій.

Н. В. Бугаева.

Читано въ засѣданіи Харьковскаго математическаго Общества 9-го мая 1895 года.

§ 1. Задачи, имѣющія отношеніе къ вопросу о моногенности. Введеніе мнимаго перемѣннаго въ теорію функцій играетъ очень важную роль въ исторіи математики. Раздѣленіе функцій на моногенныя и немоногенныя, предложенное Коши, заслуживаетъ полнаго вниманія. Вся теорія мнимаго перемѣннаго относится къ функціямъ моногеннымъ.

Условія моногенности функціи $u+vi$ комплекснаго перемѣннаго $x+yi$ выражаются уравненіями съ частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При разсмотрѣніи дифференціальныхъ уравненій въ ихъ отношеніи къ вопросу о моногенности имѣютъ мѣсто три задачи:

1. *Опредѣлить, имѣетъ ли данное дифференціальное уравненіе одни моногенные интегралы;*

2. *Указать, когда дифференціальное уравненіе имѣетъ рядомъ съ моногенными немоногенные интегралы,* и

3. *Рѣшить вопросъ о томъ, существуютъ ли дифференціальныя уравненія, имѣющія только одни немоногенные интегралы.*

По нѣкоторымъ изъ этихъ вопросовъ мы постараемся дать отвѣты въ этой статьѣ.

§ 2. Моногенность интеграловъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

Не трудно показать, что дифференціальное уравненіе перваго порядка вида

$$\frac{d\alpha}{dz} = f(z,\ \alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

въ томъ случаѣ, когда $f(z,\ \alpha)$ такого свойства, что для

$$z = x + yi\,,$$
$$\alpha = u + vi\,,$$
$$f(z,\ \alpha) = f(x + yi,\ u + vi) = P + Qi\,,$$

имѣетъ только одни моногенные интегралы.

Дѣйствительно, изъ уравненія

$$d\alpha = f(z,\ \alpha)\, dz$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$
$$= (P + Qi)\ (dx + idy) = Pdx - Qdy + i\ (Qdx + Pdy).$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, получаемъ два уравненія:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \cdot \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx - Qdy,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Qdx + Pdy.$$

Эти соотношенія ведутъ къ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Q, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -Q, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = P. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Уравненія (2) прямо ведутъ къ условіямъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что дифференціальныя уравненія вида (1) имѣютъ только одни моногенные интегралы.

§ 3. **Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій вида**

$$\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = f(z, \alpha) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

въ томъ случаѣ, когда $f(x+yi,\ u+vi) = P+Qi$.

Вопросъ о моногенности интеграловъ уравненія (3) имѣетъ значеніе уже потому, что этому уравненію удовлетворяютъ Абелевы интегралы и Абелевы функціи.

Уравненіе (3) ведетъ къ уравненію

$$d\alpha^2 = f(z,\ \alpha)dz^2 = (P+Qi)dz^2$$

или къ уравненію

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\right]^2 =$$
$$= (P+Qi)(dx^2 + 2i\,dx\,dy - dy^2),$$

которое окончательно приводится къ виду:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}dx dy + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy^2\right] -$$
$$- \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy^2\right] +$$
$$+ 2i\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx dy + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dy^2\right] =$$
$$= Pdx^2 - Pdy^2 - 2Qdxdy + i(Qdx^2 + 2Pdxdy - Qdy^2).$$

Это уравненіе даетъ шесть уравненій съ частными производными:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = -P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -Q \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

$$\frac{2\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

$$\frac{2\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-Q\cdot\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=P\cdot\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(9)$$

Изъ уравненій (7) и (8) находимъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{Q}{2\frac{\partial u}{\partial x}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{Q}{2\frac{\partial u}{\partial y}}\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(10)$$

Складывая уравненія (7) и (8), получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(11)$$

Вставляя величины (10) въ уравненіе (9), получимъ послѣ приведенія уравненіе:

$$Q\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2P\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(12)$$

Вставляя выраженія (10) въ уравненіе (6), получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Q^2}{4\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}}=-Q$$

или уравненіе

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+4\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\,Q+Q^2=0$$

или

$$\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Q\right)^2=0\,,$$

откуда имѣемъ

$$2\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Q=0\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(13)$$

Изъ уравненій (13) и (7) имѣемъ

$$2\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-2\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

или уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \dots \dots \dots \dots \dots \dots (14)$$

Изъ уравненій (13) и (8) получимъ

$$2\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \dots \dots \dots \dots \dots \dots (15)$$

Уравненія (14) и (15), какъ необходимыя слѣдствія уравненія (3) и уравненій (4), (5), (6), (7), (8) и (9), ясно показываютъ, что уравненіе (3) допускаетъ только одни моногенные интегралы.

Это общее заключеніе весьма важно для теоріи Абелевыхъ функцій.

§ 4. **Вопросъ о моногенности интеграловъ въ примѣненіи къ дифференціальному уравненію**

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} = f(z, \alpha) \dots \dots \dots \dots \dots \dots (16)$$

въ томъ случаѣ, когда для $z = x + yi$, $\alpha = u + vi$

$$f(x + yi, u + vi) = P + Qi.$$

Изъ уравненія (16) вытекаетъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2\right) =$$

$$= (P + Qi)(dx + idy)^2 =$$

$$= Pdx^2 - Pdy^2 - 2Qdxdy + i(Qdx^2 - Qdy^2 + 2Pdxdy),$$

которое ведетъ къ слѣдующимъ уравненіямъ съ частными производными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P \dots \dots \dots (17) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = Q \dots \dots \dots (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -P \dots \dots \dots (18) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -Q \dots \dots \dots (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -Q \dots \dots \dots (19) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = P \dots \dots \dots (22)$$

Складывая уравненія (17) и (18), а также (20) и (21), получаемъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

изъ которыхъ видно, что и u и v гармоническія функціи.

Складывая уравненія (19) и (20) и сравнивая уравненія (19) и (21), получимъ два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Интегрируя уравненія (24), получаемъ уравненія

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\chi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\psi(y) \ldots\ldots\ldots (26)$$

гдѣ $\chi(x)$ и $\psi(y)$ двѣ произвольныя функціи.

Уравненія (25) и (26) ясно показываютъ, что гармоническія функціи u и v, удовлетворяющія дифференціальному уравненію (16), не будутъ вообще функціями моногенными.

Интегралы уравненія (16) будутъ моногенными функціями только въ томъ частномъ случаѣ, когда произвольныя функціи $\chi(x)$ и $\psi(y)$ обращаются въ нули.

Можно показать, что функціи $\chi(x)$ и $\psi(y)$ суть линейныя функціи перемѣнныхъ.

Дѣйствительно, вставляя величины (25) и (26) въ уравненія (23), находимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi'(x)+\psi'(y)=0\,, \ldots\ldots\ldots (27)$$

откуда видно, что вообще

$$\psi'(y)=C_1, \quad \chi'(x)=-C_1$$

и слѣдовательно

$$\psi(y)=C_1 y+C_2,$$

$$\chi(x)=-C_1 x+C_3.$$

Уравненія (25) и (26) принимаютъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=C_1y+C_2\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-C_1x+C_3\,.$$

Интегралы будутъ моногенными только тогда, когда произвольныя постоянныя обращаются въ нули, т. е. когда

$$C_1=0\,,\qquad C_2=0\,,\qquad C_3=0\,.$$

§ 5. Немоногенные интегралы дифференціальнаго уравненія

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=z\,. \qquad (28)$$

Намъ извѣстно, что моногенный интегралъ этого уравненія выражается формулою:

$$\alpha=\frac{z^3}{6}+Cz+C'=\frac{1}{6}(x+yi)^3+C(x+yi)+C',\qquad (29)$$

въ которой мы имѣемъ два произвольныхъ постоянныхъ C и C'.

Чтобы найти немоногенный интегралъ этого уравненія, мы замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=x+yi\,;$$

слѣдовательно, въ данномъ случаѣ

$$P=x\,,\qquad Q=y$$

и рядъ уравненій отъ (17) до (22) приметъ видъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x\,. \qquad (30) \qquad\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=y\,. \qquad (33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\,. \qquad (31) \qquad\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-y\,. \qquad (34)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-y\,. \qquad (32) \qquad\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=x\,. \qquad (35)$$

Интегрируя эти уравненія, имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + \psi_1(y),$$

$$u = \frac{x^3}{6} + x\psi_1(y) + \psi_2(y) \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

а также

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -xy + \varphi_1(x),$$

$$u = -\frac{xy^2}{2} + y\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

Изъ уравненія (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\psi_1'(y) + \psi_2'(y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

Сравнивая величины (36) и (31), имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) = -x,$$

откуда имѣемъ:

$$\psi_1''(y) = -1, \qquad \psi_2''(y) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\psi_2(y) = C_1 y + C_2,$$

$$\psi_1(y) = -\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4.$$

Вставляя величины $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ въ уравненіе (a), получимъ:

$$u = \frac{x^3}{6} + x\left(-\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4\right) + C_1 y + C_2 \quad \ldots\ldots (c)$$

Такъ какъ по уравненію (32)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -y = -y + C_3,$$

то $C_3 = 0$ и уравненіе (c) приметъ видъ:

$$u = \frac{x^3}{6} + x\left(-\frac{y^2}{2} + C_4\right) + C_1 y + C_2 =$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + C_4 x + C_1 y + C_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Опредѣляя функцію v по уравненіямъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = y\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -y\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = x\,,$$

имѣемъ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = xy + \Theta_1(y)\,,$$

$$v = \frac{yx^2}{2} + x\,\Theta_1(y) + \Theta_2(y). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Изъ уравненія

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = x\,\Theta_1''(y) + \Theta_2''(y) = -y$$

вытекаетъ, что

$$\Theta_1''(y) = 0\,, \qquad \Theta_2''(y) = -y\,,$$

откуда

$$\Theta_1(y) = K_1 y + K_2\,,$$

$$\Theta_2(y) = -\frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4;$$

слѣдовательно,

$$v = \frac{yx^2}{2} + x(K_1 y + K_2) - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4 .$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = x = x + K_1\,,$$

то $K_1 = 0$ и

$$v = \frac{yx^2}{2} + K_2 x - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Такъ какъ $\alpha = u + vi$, то на основанiи уравненiй (d) и (e) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + C_4 x + C_1 y + C_2 + \\ + i\left(\frac{yx^2}{2} + K_2 x - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (f)$$

Моногенный интегралъ (29) имѣлъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{(x+yi)^3}{6} + C(x+yi) + C' = \\ = \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + i\left(\frac{x^2 y}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + C(x+yi) + C'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (29)$$

Немоногенный же интегралъ (f) имѣетъ видъ

$$\alpha = \frac{z^3}{6} + (C_4 + iK_2)x + (C_1 + iK_3)\,y + C_2 + iK_4.$$

Полагая

$$C_4 + iK_2 = M, \quad C_1 + iK_3 = N, \quad C_2 + iK_4 = P,$$

мы выражаемъ немоногенный интегралъ въ видѣ

$$\alpha = \frac{z^3}{6} + Mx + Ny + P. \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

Для моногенности необходимо, чтобы выполнялись условiя:

$$N = Mi = Ci,$$

$$P = C'.$$

Такимъ образомъ, моногенный интегралъ (29) зависитъ отъ двухъ, а немоногенный (g) отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ.

Отсюда выводимъ

Общее заключенiе: *Уравненiе второго порядка* $\dfrac{d^2\alpha}{dz^2} = f(z, \alpha)$ *имѣетъ моногенные и немоногенные интегралы. Моногенные интегралы являются какъ частные случаи интеграловъ немоногенныхъ.*

§ 6. **Нелинейное дифференцiальное уравненiе, имѣющее моногенные и немоногенные интегралы.**

Хорошимъ примѣромъ такого случая можетъ служить дифференцiальное уравненiе:

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dz^2} = \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Уравненіе это можетъ быть легко проинтегрировано.

Дѣйствительно, оно даетъ

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{dz^2}}{\frac{d\alpha}{dz}} = \frac{\frac{d\alpha}{dz}}{z},$$

откуда

$$l\left(\frac{d\alpha}{dz}\right) = l(\alpha) + l(C),$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = C\alpha, \quad \alpha = C' e^{Cz},$$

или

$$\alpha = C' e^{C(x+yi)} \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

Не трудно видѣть, что это же уравненіе имѣетъ немоногенный частный интегралъ:

$$\alpha = Ce^{x+y} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (39)$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (37), мы видимъ, что интегралъ (39) ему удовлетворяетъ.

Для насъ остается пока не рѣшеннымъ вопросъ о томъ, существуютъ ли всегда такія общія выраженія, изъ которыхъ вытекаютъ въ формѣ простого слѣдствія какъ моногенные, такъ и немоногенные интегралы.

§ 7. **Происхожденіе дифференціальныхъ уравненій, имѣющихъ немоногенные интегралы.**

Можно легко образовать дифференціальное уравненіе, которое для перемѣннаго $z = x + yi$ имѣетъ немоногенный интегралъ $\alpha = f(x, y)$.

Для этого изъ двухъ уравненій

$$z = x + yi \dots \dots \dots \dots \quad (40)$$

$$\alpha = f(x, y) \dots \dots \dots \dots \quad (41)$$

получаемъ два уравненія:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}{dx + i dy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{1 + i \frac{dy}{dx}} \dots \dots \quad (42)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(1+i\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(43)$$

Исключивъ изъ четырехъ уравненій (40), (41), (42) и (43) величины x, y, $\frac{dy}{dx}$, получаемъ дифференціальное уравненіе:

$$F\left(z,\ \alpha,\frac{d\alpha}{dz},\ \frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)=0,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(44)$$

интеграломъ котораго будетъ функція (41).

Изъ самаго происхожденія уравненія (44) видно, что немоногенные интегралы встрѣчаются въ первый разъ только въ дифференціальныхъ уравненіяхъ второго порядка.

Изъ $\mu+2$ уравненій

$$z=x+y\iota,$$

$$\alpha=f(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\dots C_{\mu-2})\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(45)$$

$$\frac{d\alpha}{dz}=\frac{df}{dz}=\frac{df}{dx+idy},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{d^2f}{dz^2}=\frac{d^2f}{(dx+idy)^2},$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\frac{d^{\mu}\alpha}{dz^{\mu}}=\frac{d^{\mu}f}{(dx+idy)^{\mu}},$$

можно исключить $\mu+1$ величинъ x, y, $\frac{dy}{dx}$, C_1, $C_2,\dots C_{\mu-2}$ и получить дифференціальное уравненіе

$$F\left(z,\ \alpha,\ \frac{d\alpha}{dz},\ \frac{d^2\alpha}{dz^2},\dots\frac{d^{\mu}\alpha}{dz^{\mu}}\right)=0.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(46)$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе порядка μ можетъ имѣть немоногенный интегралъ (45), содержащій $\mu-2$ произвольныхъ постоянныхъ.
