Одинъ случай движенія вязкой несжимаемой жидкости.

В. А. Стеклова.

1. Назовемъ черезъ x, y, z координаты точекъ пространства, заполненнаго вязкой несжимаемой жидкостью, черезъ t время, черезъ u, v, w проекціи скорости точки x, y, z жидкости на координатныя оси, черезъ μ плотность жидкости, черезъ p давленіе ея, черезъ U силовую функцію силъ, дѣйствующихъ на частицы жидкости, черезъ k постоянную, пропорціональную коэффиціенту вязкости, и черезъ Δ обозначимъ операцію вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія вязкой несжимаемой жидкости можно представить подъ видомъ

$$\frac{du}{dt}-k\Delta u=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt}-k\Delta v=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial y}, \qquad (1)$$

$$\frac{dw}{dt}-k\Delta w=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Пусть a, b, c суть координаты въ начальный моментъ времени той точки жидкости, координаты которой въ моментъ t суть x, y, z.

Разсматривая x, y, z какъ функціи a, b, c и t, мы преобразуемъ предыдущія уравненія къ виду

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{da}-k\left(\Delta u\frac{dx}{da}+\Delta v\frac{dy}{da}+\Delta w\frac{dz}{da}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial a},$$

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{db}-k\left(\Delta u\frac{dx}{db}+\Delta v\frac{dy}{db}+\Delta w\frac{dz}{db}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial b}, \quad (2)$$

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{dc}-k\left(\Delta u\frac{dx}{dc}+\Delta v\frac{dy}{dc}+\Delta w\frac{dz}{dc}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial c}.$$

Возьмемъ въ жидкости въ начальный моментъ времени замкнутую кривую, опредѣляемую уравненіями

$$a=\varphi_1(\sigma),\quad b=\varphi_2(\sigma),\quad c=\varphi_3(\sigma), \qquad (3)$$

гдѣ σ есть нѣкоторый параметръ.

Будемъ разсматривать движеніе точекъ жидкости, лежащихъ въ начальный моментъ времени на этой кривой.

Положимъ

$$V^2=u^2+v^2+w^2$$

и назовемъ черезъ df элементъ дуги контура (f), въ который преобразуется кривая (3) въ моментъ t, черезъ ϑ уголъ, составляемый касательной къ этому контуру съ направленіемъ скорости V.

Оперируя надъ уравненіями (2) также, какъ поступаютъ съ уравненіями движенія невязкой жидкости для вывода извѣстной теоремы Томсона *), получаемъ

$$\frac{d}{dt}\int V\cos\vartheta df=k\int(\Delta u dx+\Delta v dy+\Delta w dz)\ ^{**)}.$$

Назовемъ черезъ J циркуляцію скорости по замкнутому контуру (f). Имѣемъ

$$J=\int V\cos\vartheta df.$$

---

*) Н. Е. Жуковскій. „Лекціи по гидродинамикѣ", стр. 77 и 78.
H. Lamb. „A treatise on the motion of fluids", p. 157, 158.

**) Интеграція распространяется на весь замкнутый контуръ (f).

Слѣдовательно,

$$\frac{dJ}{dt} = k\int(\varDelta u dx + \varDelta v dy + \varDelta w dz). \tag{4}$$

Правая часть этого равенства, вообще говоря, не равна нулю, и принципъ сохраненія вихрей для вязкой жидкости, вообще говоря, не имѣетъ мѣста.

Но для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ теченія жидкости интегралъ

$$\int(\varDelta u dx + \varDelta v dy + \varDelta w dz)$$

можетъ обращаться въ нуль. Въ этихъ случаяхъ принципъ сохраненія вихрей будетъ справедливъ и для жидкости неидеальной.

H. Poincaré замѣтилъ, что указанной особенностью обладаетъ теченіе, удовлетворяющее слѣдующему условію.

Положимъ

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

гдѣ ξ, η и ζ суть, какъ извѣстно, проекціи на оси координатъ вихревой скорости точки x, y, z.

Вышеупомянутое условіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\varDelta\xi}{\xi} = \frac{\varDelta\eta}{\eta} = \frac{\varDelta\zeta}{\zeta}. \tag{5}$$

Но это условіе слишкомъ мало говоритъ о характерѣ ему соотвѣтствующихъ теченій, ибо задача объ опредѣленіи движенія жидкости, удовлетворяющаго уравненіямъ (1) вмѣстѣ съ уравненіями (5), слишкомъ сложна.

Не безъинтересно указать хотя бы нѣкоторыя изъ дѣйствительно возможныхъ движеній вязкой жидкости, для которыхъ имѣетъ мѣсто принципъ сохраненія вихрей.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ обратить вниманіе на одно изъ такихъ теченій довольно общаго характера, обладающее нѣкоторыми замѣчательными свойствами, которыя считаю не лишнимъ указать.

2. Уравненія движенія вязкой жидкости можно привести къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\eta w-\zeta v-k\Delta u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\zeta u-\xi w-k\Delta v=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\xi v-\eta u-k\Delta w=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right).$$

Положимъ

$$u=e^{-st}u_1,\quad v=e^{-st}v_1,\quad w=e^{-st}w_1, \tag{7}$$

гдѣ s есть нѣкоторая положительная постоянная, u_1, v_1 и w_1 суть функціи координатъ, не зависящія отъ t.

При этомъ

$$\xi=e^{-st}\xi_1,\quad \eta=e^{-st}\eta_1,\quad \zeta=e^{-st}\zeta_1, \tag{8}$$

гдѣ ξ_1, η_1, ζ_1 суть функціи координатъ, не зависящія отъ времени и составленныя изъ частныхъ производныхъ функцій u_1, v_1 и w_1 по координатамъ также, какъ ξ, η и ζ составлены изъ u, v и w.

Подставимъ выраженія (7) и (8) въ уравненія (6).

Получимъ

$$-ke^{-st}(\Delta u_1+\lambda^2u_1)+e^{-2st}(\eta_1w_1-\zeta_1v_1)=\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$-ke^{-st}(\Delta v_1+\lambda^2v_1)+e^{-2st}(\zeta_1u_1-\xi_1w_1)=\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{9}$$

$$-ke^{-st}(\Delta w_1+\lambda^2w_1)+e^{-2st}(\xi_1v_1-\eta_1u_1)=\frac{\partial T}{\partial z},$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\lambda^2=\frac{s}{k},\quad T=\frac{U-p}{\mu}-\frac{V^2}{2}.$$

Не трудно видѣть, что уравненіямъ (9) можно удовлетворить, полагая

$$\eta_1w_1-\zeta_1v_1=0,$$

$$\zeta_1u_1-\xi_1w_1=0, \tag{10}$$

$$\xi_1v_1-\eta_1u_1=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (10) даютъ

$$\xi_1 = mu_1, \quad \eta_1 = mv_1, \quad \zeta_1 = mw_1,$$

гдѣ m какая либо функція координатъ, въ частности постоянная.

Положимъ

$$m = \lambda = \sqrt{\frac{s}{k}}.$$

Имѣемъ

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \lambda u_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \lambda v_1, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda w_1.$$

Функціи u_1, v_1, w_1, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, удовлетворяютъ и слѣдующимъ

$$\Delta u_1 + \lambda^2 u_1 = 0,$$

$$\Delta v_1 + \lambda^2 v_1 = 0,$$

$$\Delta w_1 + \lambda^2 w_1 = 0.$$

При этомъ лѣвыя части уравненій (9) обращаются въ нуль и уравненія эти приводятся къ тремъ слѣдующимъ

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$U - p - \mu \frac{V^2}{2} = \varphi(t), \tag{12}$$

гдѣ $\varphi(t)$ есть произвольная функція времени.

Опредѣливъ u_1, v_1, w_1 при помощи уравненій (11), мы получимъ рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій движенія (9) подъ видомъ

$$u = e^{-k\lambda^2 t} u_1, \quad v = e^{-k\lambda^2 t} v_1, \quad w = e^{-k\lambda^2 t} w_1,$$

причемъ будемъ имѣть интегралъ (12) уравненій (9), позволяющій опредѣлить гидродинамическое давленіе въ каждой точкѣ жидкости до нѣкоторой произвольной функціи времени.

При $k=0$ получится случай, такъ называемыхъ, постоянныхъ винтовыхъ движенiй идеальной жидкости, указанный впервые Graig'омъ въ III-ьемъ томѣ „American Journal of Mathematics“ и подробнѣе изслѣдованный проф. И. С. Громекой въ соч. „Нѣкоторые случаи движенiя несжимаемой жидкости“ (Казань, 1881 г.).

3. Функцiи u, v и w удовлетворяютъ уравненiямъ

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\lambda u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=\lambda v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda w,$$

которыя показываютъ, что линiи вихрей и линiи токовъ совпадаютъ во все время движенiя и что отношенiе скорости теченiя къ вихревой скорости есть величина постоянная во всѣхъ точкахъ жидкости и для всѣхъ моментовъ времени.

Тѣ точки жидкости, скорость которыхъ въ начальный моментъ времени равна нулю, будутъ имѣть скорость равную нулю и во все время движенiя. То же должно сказать и о составляющихъ u, v и w скорости по осямъ координатъ.

Внутри сферы радiуса $\frac{\pi}{\lambda}$, цѣликомъ лежащей внутри жидкости (если это допускаютъ размѣры области (D), заполненной жидкостью), проходитъ по крайней мѣрѣ одна поверхность нулевыхъ значенiй функцiй u, v и w.

То же самое должно сказать и о сферахъ радiусовъ

$$\frac{2\pi}{\lambda},\quad \frac{3\pi}{\lambda},\ldots$$

Это предложенiе доказано проф. И. С. Громекой въ вышеупомянутомъ его соч. „Нѣкоторые случаи и т. д.“ для функцiй u_1, v_1 и w_1, удовлетворяющихъ уравненiямъ (11); оно распространяется, очевидно, и на разсматриваемый нами случай.

Наконецъ, слѣдуетъ замѣтить, что скорость каждой точки жидкости убываетъ съ теченiемъ времени и движенiе жидкости ассимптотически стремится къ покою.

4. Разсматриваемый случай движенiя вязкой жидкости особенно интересенъ потому, что для него имѣетъ мѣсто принципъ сохраненiя вихрей.

Въ самомъ дѣлѣ, функціи u, v и w, очевидно, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0\,,$$
$$\Delta v + \lambda^2 v = 0\,,$$
$$\Delta w + \lambda^2 w = 0\,.$$

Вслѣдствіе этого правая часть уравненія (4) приводится къ виду

$$k\int(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz) = -\lambda^2 k\int(u dx + v dy + w dz) = -\lambda^2 kJ\,,$$

а самое уравненіе (4_1) обращается въ слѣдующее

$$\frac{dJ}{dt} = -k\lambda^2 J\,.$$

Отсюда

$$J = J_0 e^{-k\lambda^2 t}\,,$$

гдѣ J_0 есть значеніе J для начальнаго момента времени.

Слѣдовательно, циркуляція скорости для всякаго замкнутаго контура, циркуляція скорости по которому равна нулю въ начальный моментъ времени, будетъ равна нулю и во все время движенія.

Точки жидкости, лежащія въ начальный моментъ времени на какой нибудь вихревой трубкѣ (L), будутъ лежать въ моментъ t на нѣкоторой трубкѣ (L_1).

Такъ какъ циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на вихревой трубкѣ (L), равна нулю, то циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на трубкѣ (L_1), также равна нулю, т. е. (L_1) есть также вихревая трубка.

Такъ какъ это справедливо для любой вихревой трубки (L) и для любого момента времени, то точки, лежащія въ начальный моментъ времени на вихревыхъ нитяхъ, будутъ образовать вихревыя же нити и въ любой изъ слѣдующихъ моментовъ движенія.

Принципъ сохраненія вихрей для разсматриваемаго движенія вязкой жидкости доказанъ.

Но напряженіе вихря, само собой разумѣется, не будетъ постояннымъ. Величина напряженія убываетъ съ теченіемъ времени, ассимптотически приближаясь къ нулю.

5. Опредѣленіе движенія жидкости приводится къ разысканію функцій u_1, v_1, w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11), которыя можно разсматривать какъ уравненія постояннаго винтового теченія идеальной несжимаемой жидкости со скоростями u_1, v_1, w_1.

Мнѣ извѣстно единственное сочиненіе, въ которомъ разсматривается вопросъ объ интегрированіи уравненій (11), это—вышеупомянутое соч. проф. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.“.

Но и въ этой работѣ мы имѣемъ мало данныхъ общаго характера относительно условій интегрируемости уравненій (11). Изслѣдуются преимущественно частныя рѣшенія этихъ уравненій и главнымъ образомъ движеніе жидкихъ массъ, заполняющихъ области, ограниченныя цилиндрическими поверхностями.

Поэтому я считаю возможнымъ остановиться на нѣкоторыхъ соображеніяхъ общаго характера, которыя и изложу въ слѣдующихъ §§-ахъ.

Въ каждомъ частномъ вопросѣ приходится искать интегралы уравненій движенія при тѣхъ или иныхъ условіяхъ на поверхности (S), ограничивающей область (D), заполненную жидкостью.

Наиболѣе употребительныя изъ условій этого рода состоятъ въ заданіи на поверхности (S) или величинъ u_1, v_1, w_1, или слагающей скорости по какому либо опредѣленному направленію, чаще всего по нормали къ поверхности (S).

Первое изъ этихъ условій не можетъ имѣть мѣста въ разсматриваемомъ случаѣ, ибо не трудно убѣдиться, что при какомъ угодно (неопредѣленномъ) λ не можетъ существовать функцій координатъ u_1, v_1, w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11) и принимающихъ произвольно заданныя значенія на поверхности (S) *).

Остается разобрать наиболѣе интересный случай, когда на поверхности (S) задается нормальная составляющая скорости движенія, опредѣляемаго уравненіями (11).

Будемъ предполагать параметръ λ неопредѣленнымъ и отбросимъ для простоты письма значки при u_1, v_1 и w_1.

Будемъ, слѣдовательно, искать конечныя, однозначныя и непрерывныя внутри области (D) функціи координатъ u, v и w, удовлетворяющія уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=\lambda u,\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=\lambda v,\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=\lambda w \end{aligned}\right\}\quad \text{внутри } (D) \qquad \textbf{(13)}$$

и условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \quad \text{на поверхности } (S), \qquad \textbf{(14)}$$

---

*) Мы не станемъ останавливаться на доказательствѣ этого отрицательнаго результата.

гдѣ α, β и γ суть cosinus'ы угловъ нормали (положимъ, внѣшней) къ поверхности (S) съ осями координатъ, а f есть заданная функція координатъ точекъ поверхности (S).

Предположимъ сначала, что

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f = 0 \quad \text{на поверхности } (S) \tag{15}$$

и что λ не превосходитъ нѣкотораго предѣла λ_1.

Если существуютъ функціи u, v, w, отличныя отъ нуля и удовлетворяющія указаннымъ условіямъ, то онѣ суть въ то же время функціи параметра λ.

Для значеній λ, не превосходящихъ нѣкотораго предѣла (положимъ λ_1), онѣ должны разлагаться въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ λ, слѣдующаго вида

$$u = \sum u_n \lambda^n, \quad v = \sum v_n \lambda^n, \quad w = \sum w_n \lambda^n.$$

Такъ какъ эти выраженія должны удовлетворять уравненіямъ (13) и слѣдующему изъ нихъ уравненію

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

при всякомъ λ (не превосходящемъ только нѣкотораго предѣла), то функціи u_0, v_0, w_0 должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D)$$

а на поверхности (S) условію

$$u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma = 0.$$

Функціи же u_n, v_n, $w_n (n = 1, 2, \ldots)$ должны удовлетворять условіямъ

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial w_n}{\partial y}-\frac{\partial v_n}{\partial z}&=u_{n-1}\,,\\
\frac{\partial u_n}{\partial z}-\frac{\partial w_n}{\partial x}&=v_{n-1}\,,\\
\frac{\partial v_n}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial y}&=w_{n-1}\,,\\
\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}&=0\,,
\end{aligned}\right\}\ \text{внутри } (D)$$

$$u_n\cos\alpha+v_n\cos\beta+w_n\cos\gamma=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Всѣмъ этимъ условіямъ можно удовлетворить только значеніями

$$u_n\,,\ v_n\,,\ w_n \qquad (n=0,\,1,\,2,\,3,\ldots)$$

тождественно равными нулю.

Слѣдовательно, при неопредѣленномъ λ не существуетъ конечныхъ, непрерывныхъ и отличныхъ отъ нуля внутри области (D) функцій u, v, w, удовлетворяющихъ уравненіямъ (13) при условіи (15).

Но весьма вѣроятно, что для каждой области (D), ограниченной по крайней мѣрѣ конвексной поверхностью (S), существуетъ безчисленное множество опредѣленныхъ положительныхъ значеній $\lambda_n\,(n=1\,,\,2\,,\ldots)$, при каждомъ изъ которыхъ могутъ быть найдены отличныя отъ нуля функціи U_n, V_n и W_n, удовлетворяющія разсматриваемымъ условіямъ *).

Во всякомъ случаѣ мы знаемъ, что для различныхъ частныхъ видовъ поверхности (S) это предложеніе несомнѣнно справедливо.

Нѣсколько относящихся сюда примѣровъ можно найти въ упоминавшемся выше соч. проф. И. С. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.“.

Допустимъ, что поверхность (S) принадлежитъ къ классу поверхностей (несомнѣнно существующихъ), для которыхъ существуютъ вышеупомянутыя числа λ_n и имъ соотвѣтствующія функціи U_n, V_n и W_n $(n=1\,,\,2\,,\ldots)$.

Будемъ разумѣть въ уравненіяхъ (13) подъ λ одно изъ чиселъ λ_n, а подъ u, v, w ему соотвѣтствующія функціи U_n, V_n и W_n.

Теченіе жидкости, опредѣляемое уравненіями (13) при условіи (15) на поверхности (S), обладаетъ характерными особенностями, о которыхъ мы считаемъ не лишнимъ сдѣлать нѣсколько замѣчаній.

---

*) Я могъ бы привести рядъ соображеній, дѣлающихъ весьма вѣроятнымъ это интересное предложеніе, но такъ какъ эти соображенія все же нельзя считать безусловно строгими, то я считаю лишнимъ развивать относящіяся сюда изслѣдованія.

Поверхность (S) должна быть въ разсматриваемомъ случаѣ одновременно и поверхностью тока и поверхностью вихря.

Для любого вырѣзка (S_1) поверхности (S), ограниченнаго замкнутымъ контуромъ (f), будемъ имѣть

$$\int_{S_1} (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, ds = 0 \; *).$$

По теоремѣ Стокса

$$\int_{S_1} (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, ds = \int_{(f)} (udx + vdy + wdz) = J\,,$$

гдѣ второй изъ интеграловъ этихъ равенствъ распространяется на весь контуръ (f).

Слѣдовательно, циркуляція скорости по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности (S), равна нулю.

Поэтому на поверхности (S) не можетъ существовать замкнутыхъ линій тока (въ то же время и линій вихря), если только скорость въ каждой точкѣ этой линіи не равна нулю.

На поверхности (S) должны образоваться критическія точки, въ которыхъ должны пересѣкаться линіи токовъ.

Эти точки должны быть точками одновременнаго схода или выхода всѣхъ проходящихъ черезъ нихъ линій токовъ.

Возьмемъ двѣ какія либо линіи токовъ (L) и (L_1), пересѣкающіяся въ критической точкѣ (s).

Изъ какой либо точки (m) линіи (L) проводимъ кривую, ортогональную ко всѣмъ линіямъ токовъ, лежащимъ между (L) и (L_1).

Эта линія пересѣчетъ линію (L_1) въ нѣкоторой точкѣ (m_1).

Разсмотримъ замкнутый контуръ mm_1sm.

Будемъ обозначать, по обыкновенію, циркуляцію скорости по какому угодно замкнутому контуру $abc \ldots l$ вообще черезъ

$$(abc \ldots l).$$

По предыдущему,

$$(mm_1sm) = (mm_1) + (m_1s) + (sm) = (m_1s) + (sm) = 0\,,$$

ибо, очевидно,

$$(mm_1) = 0.$$

---

*) Интегралъ распространяется на всю поверхность вырѣзка (S_1).

Слѣдовательно,

$$(m_1 s) = -(sm),$$

т. е. линіи токовъ (L) и (L_1) должны имѣть одно и тоже направленіе*).

Число критическихъ точекъ на поверхности (S) должно равняться по меньшей мѣрѣ двумъ, причемъ *одна изъ этихъ точекъ должна быть точкою схода всѣхъ проходящихъ черезъ нее линій тока, другая точкой выхода.*

На поверхности (S) могутъ существовать замкнутыя линіи нулевыхъ значеній скорости теченія, или, какъ мы будемъ говорить, линіи нулей.

Эти линіи раздѣлятъ поверхность (S), вообще говоря, на нѣсколько сегментовъ и нѣсколько поясовъ, ограниченныхъ не пересѣкающимися линіями нулей.

На поверхности каждаго изъ этихъ сегментовъ должна существовать критическая точка схода или выхода линій токовъ, лежащихъ на этомъ сегментѣ.

Концы линій токовъ должны лежать на линіи нулей, ограничивающей этотъ сегментъ.

Въ каждомъ поясѣ концы каждой линіи тока должны лежать на двухъ различныхъ линіяхъ нулей, его ограничивающихъ, и линіи токовъ должны быть одинаково направленными.

Линіи токовъ внутри области (D) должны быть, вообще говоря, замкнутыми, а *поверхности токовъ* (вихрей) *замкнутыми многосвязными поверхностями.*

Примѣры подобнаго рода теченій можно найти въ соч. проф. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.".

6. Будемъ теперь считать параметръ λ какимъ угодно (неопредѣленнымъ) и ограничимся предположеніемъ, что поверхность (S) конвексна и имѣетъ опредѣленную касательную плоскость въ каждой точкѣ.

Такъ какъ при неопредѣленномъ λ не существуетъ отличныхъ отъ нуля функцій u, v, w, удовлетворяющихъ уравненіямъ (13) при условіи

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то *уравненія* (13) *и условіе*

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f \quad \textit{на поверхности } (S) \tag{14}$$

опредѣляютъ вполнѣ и единственнымъ образомъ конечныя и опредѣлен-

---

*) Направленіе линіи тока опредѣляется направленіемъ скоростей точекъ, образующихъ эту линію.

ныя для всѣхъ точекъ области (D) *функціи* u, v, w, *если только такія функціи существуютъ.*

Функція f должна удовлетворять только одному условію

$$\int f ds = 0 ,$$

гдѣ ds обозначаетъ элементъ поверхности (S), на которую распространяется интегралъ лѣвой части этого равенства.

Необходимо доказать, или по крайней мѣрѣ найти условія, при которыхъ можетъ быть доказано существованіе функцій u, v и w.

Для этого мы воспользуемся извѣстной методой послѣдовательныхъ приближеній, развитой E. Picard'омъ въ его мемуарѣ, „Memoire sur la theorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives" (Journ. de Mathém., T. VI, série IV).

Подставимъ въ правыя части уравненій (13) вмѣсто функцій u, v и w нули и опредѣлимъ функціи u_0, v_0, w_0 при помощи условій

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0 ,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 ,\\
&\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0 ,\\
&\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 ,
\end{aligned}\right\} \text{внутри } (D)$$

$$u_0 \cos\alpha + v_0 \cos\beta + w_0 \cos\gamma = f \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Подставимъ затѣмъ въ правыя части уравненій (13) вмѣсто u, v, w функціи u_0, v_0, w_0 и опредѣлимъ функціи u_1, v_1, w_1 при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \lambda u_0 ,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \lambda v_0 ,\\
&\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda w_0 ,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \text{внутри } (D)$$

и условія

$$u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

и т. д., вообще, составимъ функціи

$$u_n,\ v_n,\ w_n,$$

удовлетворяющія уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial v_n}{\partial z} &= \lambda u_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{\partial w_n}{\partial x} &= \lambda v_{n-1}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \lambda w_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D) \tag{16}$$

и условію

$$u_n\cos\alpha + v_n\cos\beta + w_n\cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S). \tag{16_1}$$
$$(n=1,\,2,\,3,\ldots)$$

Допустимъ, что мы умѣемъ опредѣлить функціи

$$u_n,\ v_n,\ w_n$$

при всякомъ n, предполагая ихъ непрерывными и конечными для всѣхъ точекъ области (D).

Положимъ

$$u_n' = u_n - u_{n-1},\quad v_n' = v_n - v_{n-1},\quad w_n' = w_n - w_{n-1}$$
$$(n=1,\,2,\,3,\ldots)$$

и

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1' + u_2' + \cdots + u_n' + \cdots, \\ v &= v_0 + v_1' + v_2' + \cdots + v_n' + \cdots, \\ w &= w_0 + w_1' + w_2' + \cdots + w_n' + \cdots. \end{aligned} \tag{17}$$

Функціи u_n', v_n', w_n', какъ не трудно видѣть, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w'_n}{\partial y}-\frac{\partial v'_n}{\partial z}=\lambda u'_{n-1},\\
&\frac{\partial u'_n}{\partial z}-\frac{\partial w'_n}{\partial x}=\lambda v'_{n-1},\\
&\frac{\partial v'_n}{\partial x}-\frac{\partial u'_n}{\partial y}=\lambda w'_{n-1},
\end{aligned}\right\}\ \text{внутри } (D) \qquad (18)$$

$$\frac{\partial u'_n}{\partial x}+\frac{\partial v'_n}{\partial y}+\frac{\partial w'_n}{\partial z}=0 \qquad (18_1)$$

при условіи

$$u'_n\cos\alpha+v'_n\cos\beta+w'_n\cos\gamma=0 \qquad \text{на поверхности } (S). \qquad (19)$$

Эти уравненія будутъ имѣть мѣсто при всякомъ $n=1, 2, \ldots,$ если поставимъ условіе

$$u'_0=u_0,\quad v'_0=v_0,\quad w'_0=w_0.$$

Опредѣливъ при помощи уравненій (18), (18_1) и условія (19) функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\,3,\ldots)}$$

въ видѣ конечныхъ и опредѣленныхъ функцій координатъ для всѣхъ точекъ области (D), получимъ u, v и w въ видѣ рядовъ (17), каждый членъ которыхъ будетъ опредѣленной функціей координатъ.

Ряды (17) удовлетворяютъ условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \qquad \text{на поверхности } (S) \qquad (14)$$

и удовлетворяютъ формально уравненіямъ (13).

Они будутъ представлять рѣшеніе задачи, если будутъ сходящимися для всѣхъ точекъ внутри области (D).

7. Покажемъ прежде всего, какимъ образомъ опредѣляются функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n. \qquad {\scriptstyle (n=2,\,3,\ldots)}$$

Не трудно видѣть, что уравненія (18), (18_1) и условіе (19) вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляютъ эти функціи.

Допустимъ, что какимъ бы то ни было способомъ найдены функціи

$$u'_{n-1},\ v'_{n-1},\ w'_{n-1}.$$

Положимъ

$$u'_n = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w'_{n-1}}{r}d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v'_{n-1}}{r}d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial x} = S_1^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial x},$$

$$v'_n = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{u'_{n-1}}{r}d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{w'_{n-1}}{r}d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial y} = S_2^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial y}, \quad (20)$$

$$w'_n = \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{v'_{n-1}}{r}d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{u'_{n-1}}{r}d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial z} = S_3^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial z},$$

гдѣ r есть разстояніе какой либо точки x, y, z пространства отъ точекъ ξ, η, ζ области (D) *).

Эти функціи, какъ извѣстно **), удовлетворяютъ уравненіямъ (18) и будутъ удовлетворять всѣмъ налагаемымъ на эти функціи условіямъ, если опредѣлимъ P_n при помощи уравненія

$$\Delta P_n = 0 \quad \text{внутри } (D) \quad (21)$$

и условія

$$\frac{\partial P_n}{\partial n} = -(S_1^{(n)}\cos\alpha + S_2^{(n)}\cos\beta + S_3^{(n)}\cos\gamma) \quad \text{на поверхности } (S). \quad (22)$$

Правая часть этого равенства есть вполнѣ опредѣленная функція координатъ точекъ поверхности (S); n обозначаетъ направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S).

Мы знаемъ, что условіями (21) и (22) функція P_n опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной (по методѣ C. Neumann'a).

Допустимъ, что найдена функція P_n, опредѣляемая этими условіями, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими первыми производными для всѣхъ точекъ области (D).

Опредѣливъ P_n, получимъ по формулѣ (20) и функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n.$$

8. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что функціи u'_n, v'_n, w'_n будутъ извѣстны при всякомъ $n = 0, 1, 2, \ldots$, если будутъ извѣстны функціи

$$u_0,\ v_0,\ w_0; \qquad u'_1,\ v'_1,\ w'_1.$$

*) $d\tau'$ обозначаетъ элементъ объема области (D) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η и ζ.

**) См. Lamb. „A treatise on the motion of fluids“. Cambridge, 1879, p. 150 etc.

Опредѣленіе первыхъ, очевидно, приводится къ разысканію функціи P_0 при помощи условій

$$\Delta P_0 = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Опредѣливъ P_0, получимъ

$$u_0 = \frac{\partial P_0}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial P_0}{\partial y}, \quad w_0 = \frac{\partial P_0}{\partial z}.$$

Остается только найти

$$u_1', \ v_1', \ w_1'.$$

Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_1'}{\partial y} - \frac{\partial v_1'}{\partial z} &= \lambda u_0, \\ \frac{\partial u_1'}{\partial z} - \frac{\partial w_1'}{\partial x} &= \lambda v_0, \\ \frac{\partial v_1'}{\partial x} - \frac{\partial u_1'}{\partial y} &= \lambda w_0, \\ \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial v_1'}{\partial y} + \frac{\partial w_1'}{\partial z} &= 0, \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D) \qquad \mathbf{(23)}$$

$$u_1' \cos\alpha + v_1' \cos\beta + w_1' \cos\gamma = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Уравненія (23) отличаются отъ уравненій (18) тѣмъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ выраженіе

$$u_0 \cos\alpha + v_0 \cos\beta + w_0 \cos\gamma$$

не равно нулю на поверхности (S). Формулами (20) нельзя пользоваться непосредственно.

Положимъ

$$u_1' = u_1'' + l, \quad v_1' = v_1'' + m, \quad w_1' = w_1'' + n, \qquad \mathbf{(24)}$$

гдѣ l, m, n суть функціи координатъ, конечныя и непрерывныя для всѣхъ точекъ области (D).

Положимъ затѣмъ

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z} = q_1',$$

$$\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x} = q_2',$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} = q_3',$$

$$\lambda u_0 - q_1' = q_1, \quad \lambda v_0 - q_2' = q_2, \quad \lambda w_0 - q_3' = q_3$$

и подчинимъ функціи l, m, n условію

$$q_1'\cos\alpha + q_2'\cos\beta + q_3'\cos\gamma = \lambda f,$$

или

$$q_1\cos\alpha + q_2\cos\beta + q_3\cos\gamma = 0.$$

Выберемъ какія либо три изъ безчисленнаго множества функцій l, m и n, удовлетворяющихъ всѣмъ этимъ условіямъ.

Разысканіе функцій u_1', v_1' и w_1' сведется къ опредѣленію конечныхъ и непрерывныхъ для всѣхъ точекъ области (D) функцій u_1'', v_1'', w_1'' при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1''}{\partial y} - \frac{\partial v_1''}{\partial z} = q_1, \\ &\frac{\partial u_1''}{\partial z} - \frac{\partial w_1''}{\partial x} = q_2, \\ &\frac{\partial v_1''}{\partial x} - \frac{\partial u_1''}{\partial y} = q_3, \\ &\frac{\partial u_1''}{\partial x} + \frac{\partial v_1''}{\partial y} + \frac{\partial w_1''}{\partial z} + \psi = 0 \end{aligned}\right\} \text{ внутри } (D) \qquad \mathbf{(25)}$$

и условія

$$u_1''\cos\alpha + v_1''\cos\beta + w_1''\cos\gamma + \vartheta = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\psi = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z},$$

$$\vartheta = l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma.$$

Мы подчинимъ функціи l, m, n еще слѣдующему условію

$$\int\left(\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\right)d\tau=0,$$

причемъ необходимо получимъ

$$\int \vartheta ds=0,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S).

Положимъ теперь

$$\begin{aligned}
u_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{q_3}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{q_2}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial x}=S_1+\frac{\partial P_1}{\partial x},\\
v_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{q_1}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{q_3}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial y}=S_2+\frac{\partial P_1}{\partial y},\qquad (26)\\
w_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{q_2}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{q_1}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial z}=S_3+\frac{\partial P_1}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Функціи u_1'', v_1'', w_1'', такимъ образомъ составленныя, удовлетворяютъ уравненіямъ (25) и будутъ удовлетворять всѣмъ налагаемымъ на нихъ условіямъ, если опредѣлимъ конечную и непрерывную вмѣстѣ съ ея первыми производными функцію P_1 при помощи уравненія

$$\Delta P_1+\psi=0 \qquad \text{внутри } (D)$$

и условія

$$\frac{\partial P_1}{\partial n}+S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta+S_3\cos\gamma+\vartheta=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Положивъ, наконецъ,

$$P_1=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\psi'}{r}d\tau'+P_1'=V+P_1',$$

получимъ

$$\Delta P_1'=0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial P_1'}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n}+S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta+S_3\cos\gamma+\vartheta=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Опредѣливъ по методѣ C. Neumann'a P_1', найдемъ P_1, затѣмъ u_1'', v_1'', w_1'' [по формуламъ (26)] и, наконецъ, функціи u_1', v_1', w_1' по формуламъ (24).

Замѣтимъ, что вообще задача объ опредѣленіи функціи W, удовлетворяющей условіямъ

$$\Delta W = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = F \qquad \text{на поверхности } (S), {}^{*)} \tag{27}$$

гдѣ F есть какая либо заданная функція координатъ, возможна только при условіи

$$\int F ds = 0. \tag{28}$$

Въ нашемъ случаѣ очевидно

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial n} + S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + S_3 \cos\gamma + \vartheta \right) ds = 0\,,$$

т. е. условіе (28) выполняется.

Точно также при всякомъ n [рав. (22)]

$$\int (S_1^{(n)} \cos\alpha + S_2^{(n)} \cos\beta + S_3^{(n)} \cos\gamma)\, ds = 0.$$

Такимъ образомъ всѣ функціи u_n', v_n', w_n' $(n = 0, 1, 2, \dots)$ могутъ быть опредѣлены послѣдовательно.

9. Воспользуемся теперь функціями

$$G_x, \quad G_y, \quad G_z,$$

существованіе которыхъ утверждаетъ H. Poincaré въ своемъ мемуарѣ „Sur les équations de la Physique Mathématique" **) и которыя опредѣляются слѣдующими условіями:

1) G_x, G_y, G_z суть функціи двухъ системъ координатъ

$$x, y, z \qquad \text{и} \qquad \xi, \eta, \zeta.$$

2) Функціи G_x, G_y, G_z конечны и непрерывны внутри области (D) во всѣхъ точкахъ за исключеніемъ

---

*) Эту задачу мы будемъ называть задачей C. Neumann'a.

**) См. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1894.

$$x=\xi\,,\quad y=\eta\,,\quad z=\zeta\,,$$

гдѣ эти функціи обращаются въ безконечность.

3) Разности

$$G_x-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\,,\qquad G_y-\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\,,\qquad G_z-\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r}\,,$$

гдѣ

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\,,$$

остаются конечными при $r=0$.

4) G_x, G_y, G_z удовлетворяютъ уравненію типа

$$\varDelta F=0 \qquad \text{внутри } (D).$$

5) На поверхности (S) онѣ удовлетворяютъ условію типа

$$\frac{\partial F}{\partial n}=0\,.$$

Опредѣленіе этихъ функцій сводится на опредѣленіе непрерывныхъ внутри (D) функцій, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ задачи C. Neumann'а, и не представляетъ особыхъ затрудненій.

Интегралы

$$\int |G_x|\,ds'\,,\qquad \int |G_y|\,ds'\,,\qquad \int |G_z|\,ds'\,,\ ^{*)}$$

гдѣ ds' есть элементъ поверхности (S) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η, ζ, суть положительныя и конечныя функціи x, y, z *внутри* области (D).

Обозначимъ наибольшее изъ наибольшихъ значеній этихъ интеграловъ внутри области (D) черезъ H.

Обозначимъ по прежнему черезъ W функцію, опредѣляемую условіями (27) (см. § 8-ой).

Пусть W' есть значеніе W въ точкѣ ξ, η, ζ области (D).

Въ такомъ случаѣ, какъ замѣтилъ H. Poincaré,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W'}{\partial \xi}&=-\int G_x f ds\,,\\ \frac{\partial W'}{\partial \eta}&=-\int G_y f ds\,,\\ \frac{\partial W'}{\partial \zeta}&=-\int G_z f ds\,.\end{aligned}\tag{29}$$

*) Вообще, черезъ $|F|$ мы означаемъ модуль функціи F.

Отсюда для каждой точки внутри (D)

$$\left|\frac{\partial W'}{\partial \xi}\right| \leqq H(f)\,, \quad \left|\frac{\partial W'}{\partial \eta}\right| \leqq H(f)\,, \quad \left|\frac{\partial W'}{\partial \zeta}\right| \leqq H(f)\,,$$

гдѣ (f) означаетъ maximum модуля f на поверхности (S).

10. Положимъ для сокращенія письма

$$T_n = S_1^{(n)} \cos\alpha + S_2^{(n)} \cos\beta + S_3^{(n)} \cos\gamma .$$

Равенства (20), въ силу (29), приводятся къ виду

$$u_n' = S_1^{(n)} + \int G_x T_n' ds'\,,$$

$$v_n' = S_2^{(n)} + \int G_y T_n' ds'\,,$$

$$w_n' = S_3^{(n)} + \int G_z T_n' ds'\,.$$

Назовемъ наибольшую величину конечнаго во всей области (D) интеграла

$$\int \frac{d\tau'}{r^2}$$

черезъ Q, наибольшее изъ наибольшихъ значеній модулей функцій u_n', v_n', w_n' внутри (D) черезъ N_n.

Очевидно, что

$$\left| S_n^j \right| \leqq \frac{\lambda}{2\pi} Q N_{n-1}\,, \quad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\left| T_n \right| \leqq \frac{3\lambda}{2\pi} Q N_{n-1}\,.$$

Слѣдовательно,

$$\left| u_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}\,, \quad \left| v_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}\,, \quad \left| w_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}\,,$$

гдѣ

$$K = \frac{Q}{2\pi}(1 + 3H)$$

есть конечная положительная постоянная, зависящая только отъ свойствъ поверхности (S).

Такимъ образомъ находимъ

$$N_n \leq KN_{n-1}. \qquad (n=2, 3, \ldots)$$

Рядъ

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n + \cdots \tag{30}$$

сходится для всѣхъ значеній параметра λ, не превосходящихъ предѣла $\frac{1}{K}$.

Модуль каждаго члена изъ рядовъ,

$$\sum_1^\infty u_n', \qquad \sum_1^\infty v_n', \qquad \sum_1^\infty w_n' \tag{31}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда (30).

Слѣдовательно, ряды (31) сходятся абсолютно и равномѣрно внутри области (D), пока

$$\lambda < \frac{1}{K}.$$

Такимъ образомъ ряды

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_1^\infty u_n', \\ v &= v_0 + \sum_1^\infty v_n', \\ w &= w_0 + \sum_1^\infty w_n \end{aligned} \tag{32}$$

представляютъ предѣлы, къ которымъ стремятся функціи u_n, v_n и w_n (см. § 6-ой) при возрастаніи n до безконечности, т. е.

$$u = \lim u_n \Big|_{n=\infty}, \quad v = \lim v_n \Big|_{n=\infty}, \quad w = \lim w_n \Big|_{n=\infty}.$$

Такъ какъ ряды (32) сходятся абсолютно, то

$$\lim u_n' = 0, \quad \lim v_n' = 0, \quad \lim w_n' = 0, \text{*)}$$

или

$$\lim u_n = \lim u_{n-1}, \quad \lim v_n = \lim v_{n-1}, \quad \lim w_n = \lim w_{n-1}.$$

---

*) Мы пишемъ $\lim u_n$ и т. д. для краткости вмѣсто $\lim u_n \Big|_{n=\infty}$ и т. д.

Уравненія (16) обратятся въ предѣлѣ (при $n = \infty$) въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= \lambda u\,, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= \lambda v\,, \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda w\,. \end{aligned}\right\} \text{ внутри области } (D)$$

Функціи u, v и w, опредѣляемыя рядами (32), удовлетворяютъ дѣйствительно уравненіямъ задачи.

Очевидно, что онѣ удовлетворяютъ и условію

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Существованіе искомыхъ функцій такимъ образомъ доказано по крайней мѣрѣ при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ параметра λ, не превосходящихъ конечнаго и опредѣленнаго числа $\frac{1}{K}$, которое будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе размѣры области (D).

11. Опредѣливъ при помощи рядовъ (32) функціи u_1, v_1 и w_1 (мы возвращаемся къ обозначеніямъ § 2-ого), составимъ затѣмъ по формуламъ (7) выраженія проекцій на оси координатъ скорости точекъ вязкой несжимаемой жидкости и такимъ образомъ вполнѣ опредѣлимъ разсматриваемое теченіе въ томъ случаѣ, когда задается нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей жидкую массу [рав. (14)].

Замѣтимъ, что изслѣдованія §§-овъ 6, 7, 8, 9 и 10 могутъ имѣть значеніе и независимо отъ ихъ связи съ остальною частью работы, ибо доказываютъ существованіе и даютъ возможность опредѣлить постоянное винтовое теченіе идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной конвексной поверхностью (S), по заданной нормальной составляющей скорости этого теченія на поверхности (S).

Соображенія вышеупомянутыхъ §§-овъ приводятъ такимъ образомъ къ обобщенію извѣстной теоремы C. Neumann'а объ опредѣленности и существованіи движенія жидкости (идеальной, несжимаемой) съ потенціаломъ скоростей W при заданной нормальной составляющей скорости теченія на поверхности, ограничивающей жидкую массу.

Теорема C. Neumann'а, выраженная въ только что приведенной механической формѣ, получается изъ доказанной нами при $\lambda = 0$.