Новый способъ интегрированія нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

М. Ф. Ковальскаго.

(Сообщено въ засѣданіи Харьковскаго Математическаго Общества 8 февраля 1896 г.).

Изучая способы *Коши* и *Якоби* интегрированія дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка, я искалъ не только упрощеній этихъ пріемовъ, но и прямыхъ обоснованій тѣхъ идей, на которыхъ они зиждутся. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ мнѣ удалось достигнуть цѣли; въ настоящей статьѣ я предлагаю результатъ моихъ изысканій.

§ 1. Пусть

$$F(x_1\,,\ x_2\,,\cdots x_n\,,\ z\,,\ p_1\,,\ p_2\,,\cdots p_n)=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

будетъ даное нелинейное дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка; въ немъ n независимыхъ перемѣнныхъ $(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \ldots x_n)$ и одна функціональная z; каждое p_s есть частная производная отъ z по соотвѣтствующему x_s.

Если существуетъ интегралъ для этого уравненія въ видѣ

$$z=f(x_1\,,\ x_2\,,\cdots x_n\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\cdots c_n)\,,$$

гдѣ c_r суть постоянныя произвольныя, то должны имѣть тождество:

$$F\left(x_1\,,\ x_2 \cdots x_n\,,\ f\,,\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=0$$

и частныя производныя отъ него, по всякому x_r,

$$(X_r)+(Z)\frac{\partial f}{\partial x_r}+\sum_s (P_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r}=0\,;$$

здѣсь (X_r), (Z) и (P_s) взяты для краткости письма; каждое изъ нихъ замѣняетъ частную производную отъ F, соотвѣтственно, по x_r, z и p_s; скобки при нихъ указываютъ на то, что z замѣщенъ черезъ f, а p_s — черезъ $\frac{\partial f}{\partial x_s}$.

§ 2. Если въ послѣднемъ тождествѣ, обратно, f замѣнить черезъ z, а $\frac{\partial f}{\partial x_r}$ — черезъ p_r, то оно перейдетъ въ уравненіе линейное, по частнымъ производнымъ отъ p_r:

$$X_r+Zp_r+\sum_s P_s\frac{\partial p_r}{\partial x_s}=0\,,$$

гдѣ X_r, Z и P_s поставлены безъ скобокъ, потому что въ нихъ z и p_i остались ничѣмъ незамѣненными.

Извѣстно, что, для нахожденія интеграла этому уравненію, надо проинтегрировать обыкновенную систему уравненій:

$$\frac{dx_s}{P_s}=-\frac{dp_r}{X_r+Zp_r}.$$

Къ нимъ можно прибавить еще одно:

$$\frac{dx_s}{P_s}=\frac{dz}{\sum P_r p_r}\,,$$

получаемое изъ символическаго тождества:

$$dz=\sum_r p_r dx_r\,,$$

замѣною dx_r черезъ $\frac{P_r dx_s}{P_s}$, изъ уравненій $\frac{dx_r}{P_r}=\frac{dx_s}{P_s}$; здѣсь r и s какое-либо изъ значеній: $1, 2, \ldots n$.

Полную систему уравненій можно написать такъ:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{\sum P_s p_s}=\frac{-dp_1}{X_1+Zp_1}=\ldots=\frac{-dp_n}{X_n+Zp_n}\,.\;.\;(2)$$

§ 3. Число всѣхъ уравненій $2n$; пусть ихъ интегралы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= f_r(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}), \\ z &= \theta(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}), \\ p_s &= \theta_s(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}). \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (3)$$

Понятно, что x_1, для простоты, взятъ независимою перемѣнною и что $s = 1, 2 \dots n$, а $r = 2, 3 \dots n$; всякое c_i есть постоянная произвольная; число ихъ $2n$.

По занесеніи этихъ интеграловъ въ систему уравненій (2), получимъ тождества:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_1} = \left(\frac{P_r}{P_1}\right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{1}{(P_1)} \sum_s (P_s)\,\theta_s \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} = -\left[\frac{(X_s) + (Z)\theta_s}{(P_1)}\right] \dots (4)$$

Занося-же наши интегралы въ данное уравненіе (1), получимъ

$$F(x_1, f_2, f_3, \dots f_n, \theta, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_n) = 0 \quad \dots\dots (5)$$

уравненіе только между параметрами $(c_1, c_2, \dots c_{2n})$, т. е. результатъ занесенія не зависитъ отъ x_1. Въ этомъ не трудно убѣдиться, если взять отъ него производную по x_1; она, въ силу тождествъ (4), окажется тождественнымъ нулемъ.

Опредѣливъ изъ (5) одну изъ постоянныхъ произвольныхъ (положимъ c_{2n}) функціею остальныхъ и занеся полученное для нея значеніе въ систему интеграловъ (3), получимъ видоизмѣненіе послѣднихъ:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= \psi_r(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \\ z &= \varphi(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \\ p_s &= \varphi_s(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (6)$$

гдѣ символы ψ_r, φ и φ_s означаютъ результаты занесенія c_{2n} [полученнаго изъ (5)] соотвѣтственно въ f_r, θ и θ_s.

Система-же тождествъ (4) приметъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} &= \left[\left(\frac{P_r}{P_1}\right)\right], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \left[\left(\frac{1}{P_1}\sum P_s \varphi_s\right)\right] \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} &= -\left[\left(\frac{X_s + \varphi_s Z}{P_1}\right)\right], \end{aligned}\right\} \dots\dots (7)$$

и

$$F(x_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_n) = 0.$$

§ 4. Каждое изъ нихъ останется тождествомъ и послѣ того, какъ всѣ постоянныя произвольныя или часть ихъ (положимъ $c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots \ldots c_{2n-1}$) замѣнимъ какими-либо функціями перемѣнныхъ; напримѣръ черезъ $E_1, E_2, \ldots E_{n-1}$, значеніями, полученными для нихъ изъ уравненій: $x_r = \psi_r$.

Ясно, что всякое E_i есть функція перемѣнныхъ x_s и остальныхъ параметровъ, $c_1, c_2, \ldots c_n$; такъ-же не трудно видѣть, что всѣ они, будучи занесены, обратно, въ систему $x_r = \psi_r$, превратятъ эту послѣднюю въ тождества:

$$x_r = \psi_r(x_1, c_1, c_2 \ldots c_n, E_1, E_2, \ldots E_{n-1}) \ldots \ldots \tag{8}$$

Система интеграловъ (6), послѣ занесенія въ нихъ этихъ E, сведется въ такую:

$$\left.\begin{aligned} &z = \varphi[x_1, c_1, \ldots c_n, E_1, E_2, \ldots E_{n-1}] = \omega(x_1, x_2, \ldots x_n, c_1, c_2, \ldots c_n), \\ &\text{и} \\ &p_s = \varphi_s[x_1, c_1, \ldots c_n, E_1, E_2, \ldots E_{n-1}] = \omega_s(x_1, x_2, \ldots x_n, c_1, c_2, \ldots c_n). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Тождества (7) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial x_1}\right) = \left|\frac{P_r}{P_1}\right|, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left|\frac{1}{P_1}\sum P_s \omega_s\right|, \quad \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1}\right) = -\left|\frac{X_s + Z\omega_s}{P_1}\right| \\ &\text{и} \\ &F(x_1, x_2, \ldots x_n, \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Въ послѣднемъ изъ этихъ тождествъ, равно какъ и въ X_i, Z и P_i (входящихъ въ правыя части первыхъ трехъ тождествъ) нумерованные x_r возстановились изъ ψ_r, въ силу (8); а z и его частныя производныя (p_s) замѣнены черезъ соотвѣтствующія ω и ω_s. Скобки въ лѣвыхъ частяхъ первыхъ трехъ тождествъ показываютъ, что входившія $c_{n+1}, c_{n+2} \ldots c_{2n-1}$ замѣнены черезъ соотвѣтственныя E_i.

§ 5. Теперь преобразуемъ наши тождества системы (10). Съ этою цѣлію, станемъ брать отъ тождествъ (8) частныя производныя, по каждому нумерованному x; каждое изъ нихъ даетъ n соотвѣтственныхъ тождествъ:

$$0=\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right)+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_2},\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
1&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_r},\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_{r+1}}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_n}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Изъ послѣднихъ $(n-1)$ тождествъ опредѣлимъ $\dfrac{\partial\psi_r}{\partial E_k}$ и полученное выраженіе занесемъ въ (11).

Пусть детерминантъ системы (12) будетъ

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial E_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \dfrac{\partial E_{n-1}}{\partial x_2}\\
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_r}, \dfrac{\partial E_2}{\partial x_r} \ldots\ldots \dfrac{\partial E_{n-1}}{\partial x_r}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial E_1}{\partial x_n}, \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{vmatrix};$$

тогда

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}=\frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_r}\right)}\cdot\frac{1}{\varDelta}.$$

Здѣсь первый множитель представляетъ частную производную отъ $\varDelta$, взятую по элементу: $\frac{\partial E_k}{\partial x_r}$.

Занося это выраженіе въ (11) и замѣняя $\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right)$ его значеніемъ изъ перваго тождества группы (10), получимъ слѣдующее тождество:

$$\left|\frac{P_r}{P_1}\right|=-\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_r}\right)}\frac{\partial E_k}{\partial x_1}=-\frac{\varDelta_r}{\varDelta}\quad\ldots\ldots\quad(13)$$

гдѣ $\varDelta_r$ есть детерминантъ, полученный изъ $\varDelta$, замѣною въ этомъ послѣднемъ r-й линіи новою линіею: $\frac{\partial E_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial E_2}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial E_{n-1}}{\partial x_1}$. Такъ мы видоизмѣнили первое тождество группы (10).

Далѣе видоизмѣнимъ второе,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)=\left|\frac{1}{P_1}\sum_s P_s\omega_s\right|,\ s=1,\ 2\ldots n.$$

Для этого обратимся къ значенію ω изъ (9) и, взявъ отъ этого символическаго тождества частныя производныя, по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ $(x_1, x_2\ldots x_n)$, получимъ n тождествъ:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_2}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial\omega}{\partial x_n}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_n}.$$

Изъ послѣднихъ $(n-1)$ тождествъ получаемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}=\frac{1}{\varDelta}\sum_{s=2}^{s=n}\frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_s}\right)}\frac{\partial\omega}{\partial x_s}.$$

Занося это выраженіе въ первое изъ предыдущихъ тождествъ и замѣняя $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$ значеніемъ изъ (10), получаемъ видоизмѣненіе:

$$\sum_{s=1}\omega_s\left|\frac{P_s}{P_1}\right|=\frac{\partial\omega}{\partial x_1}-\frac{1}{\varDelta}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\partial E_k}{\partial x_1}\sum_{s=2}^{s=n}\frac{\partial\omega}{\partial x_s}\frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_s}\right)},$$

или, принимая во вниманіе (13), получаемъ сперва:

$$\sum_{s=1}\omega_s\left|\frac{P_s}{P_1}\right|=\frac{\partial\omega}{\partial x_1}+\sum_{s=2}\frac{\partial\omega}{\partial x_s}\left|\frac{P_s}{P_1}\right|,$$

и окончательно

$$\sum_{s=1}^{s=n}P_s\left(\omega_s-\frac{\partial\omega}{\partial x_s}\right)=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(14)$$

Оперируя точно также надъ ω_r, получимъ видоизмѣненіе третьяго изъ тождествъ (10):

$$-\left|X_r\right|-\left|Z\right|\omega_r=\sum_s\left|P_s\right|\frac{\partial\omega_r}{\partial x_s} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(15)$$

Остается видоизмѣнить и послѣднее изъ группы (10), т. е.

$$F(x_1,\, x_2\ldots x_n,\, \omega,\, \omega_1\ldots\omega_n)=0.$$

Съ этою цѣлью, беремъ отъ него частныя производныя, какъ по x_r, такъ и по одному (любому) изъ параметровъ c—получимъ два тождества:

$$\left.\begin{aligned}&\left|X_r\right|+\left|Z\right|\frac{\partial\omega}{\partial x_r}+\sum\left|P_s\right|\frac{\partial\omega_s}{\partial x_r}=0\,,\\ \text{и}\qquad&\left|Z\right|\frac{\partial\omega}{\partial c}+\sum\left|P_s\right|\frac{\partial\omega_s}{\partial c}=0.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

Исключивъ изъ послѣднихъ, при помощи (15), X_r и Z, получимъ тождество:

$$\left(\omega_r-\frac{\partial\omega}{\partial x_r}\right)\sum_s\left|P_s\right|\frac{\partial\omega_s}{\partial c}=\frac{\partial\omega}{\partial c}\sum_s\left|P_s\right|\left(\frac{\partial\omega_r}{\partial x_s}-\frac{\partial\omega_s}{\partial x_r}\right) \;.\;.\;.\;.\;(17)$$

§ 6. Для простоты введемъ обозначеніе:

$$\omega_r - \frac{\partial \omega}{\partial x_r} = S_r \; . \; . \; . \; . \; \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

и разность $\frac{\partial \omega_r}{\partial x_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial x_r}$ обозначаемъ символомъ

$$\left(\frac{r}{s}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Тутъ-же можно замѣтить, что этотъ послѣдній символъ, какъ величина, исчезаетъ, когда $r = s$, и мѣняетъ свой знакъ, при взаимной перестановкѣ его элементовъ.

Послѣ введенія сказанныхъ обозначеній, наши тождества (14) и (17) напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_s \left| P_s \right| S_s = 0, \\ \text{и} \quad &\sum_s \left| P_s \right| \left\{ S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \left(\frac{s}{r}\right) \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Введемъ еще упрощеніе, пусть

$$S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \left(\frac{s}{r}\right) = K_{r,s}.$$

Чтобы совмѣстно существовали оба наши тождества, надо и достаточно существованія такихъ равенствъ:

$$m S_1 = K_{r,1}, \quad m S_2 = K_{r,2} \ldots m S_n = K_{r,n},$$

или

$$m = \frac{K_{r,1}}{S_1} = \frac{K_{r,2}}{S_2} = \ldots = \frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,\sigma}}{S_\sigma} \ldots = \frac{K_{r,r}}{S_r} = \ldots \frac{K_{r,n}}{S_n}.$$

Хотя равенство $\frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,\sigma}}{S_\sigma}$ есть болѣе общее чѣмъ $\frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,r}}{S_r}$; но, для нашей главной цѣли, достаточно и этого послѣдняго.

Замѣняя символы $K_{r,s}$ и $K_{r,r}$ ихъ значеніями получимъ, по сокращеніи на S_r:

$$S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} - S_s \frac{\partial \omega_r}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \left(\frac{s}{r}\right) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

§ 7. Только что построенное нами тождество играетъ важную роль въ нашемъ изслѣдованіи.

Въ самомъ дѣлѣ, вопросъ интеграціи даннаго уравненія (1) мы свели, какъ обыкновенно это дѣлается, на интеграцію обыкновенной системы дифференціальныхъ уравненій. При помощи этой системы, мы нашли рядъ функцій (ω, ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_n$), которыя, будучи подставлены соотвѣтственно, вмѣсто z и его производныхъ, въ интегрируемое уравненіе (1), превращаютъ его въ тождество.

Само собою становится яснымъ то обстоятельство, что если всякая разность $\frac{\partial \omega}{\partial x_s} - \omega_s$ есть тождественный нуль, то общимъ интеграломъ данному уравненію (1) будетъ $z = \omega$.

Если же эта разность, или наше S_s, отлична отъ нуля, то, посчитавъ любой изъ параметровъ c, входящій въ ω и ω_s, функціей независимыхъ перемѣнныхъ—можно опредѣлить эту c удовлетворяющею уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial x_r} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r} = \omega_r \\ \text{и}\quad &\frac{\partial \omega_s}{\partial x_r} + \frac{\partial \omega_s}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r} = \frac{\partial \omega_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \omega_r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_s} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (22)$$

—что и докажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 8. Предыдущую систему уравненій (22) можно написать, для краткости, такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}} = \frac{\partial c}{\partial x_r}, \\ \text{и}\quad &\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{\partial \omega_r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Не трудно видѣть, что значенія $\frac{\partial c}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial c}{\partial x_s}$, получаемыя изъ перваго уравненія, отождествляютъ второе: ибо результатомъ исключенія $\frac{\partial c}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial c}{\partial x_s}$ будетъ наше тождество (21).

Точно также, при помощи этого тождества, легко провѣряемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{S_s}{\frac{\partial \omega}{\partial c}}\right)$$

есть тождество, считая c функціею независимыхъ перемѣнныхъ, опредѣляемою первымъ изъ (23).

Коль скоро такъ, то искомое c опредѣляется изъ точнаго дифференціала:

$$dc = \sum_r \frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}} dx_r\,; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

пусть

$$c = c_1 = G_1(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, c_2, c_3 \ldots c_n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

(α_1 — новый параметръ) будетъ его интегралъ.

Кромѣ того, если первое уравненіе изъ (23) умножимъ на всякое $|P_r|$ и результаты сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$\sum \Big| P_r \Big| S_r = \frac{\partial \omega}{\partial c} \sum \Big| P_r \Big| \frac{\partial c}{\partial x_r}\,,$$

лѣвая часть котораго, въ силу перваго изъ (20), есть тождественный нуль; поэтому уравненіе, для опредѣленія c, является линейнымъ въ частныхъ производныхъ c:

$$\sum \Big| P_s \Big| \frac{\partial c}{\partial x_s} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Слѣдовательно, ирійдется интегрировать систему

$$\frac{dx_1}{|P_1|} = \frac{dx_2}{|P_2|} = \ldots = \frac{dx_s}{|P_s|} = \ldots = \frac{dx_n}{|P_n|} = \frac{dc}{0}.$$

Одинъ изъ интеграловъ этой системы есть

$$c = c_1 = \text{const.} = \beta_1.$$

Остальные интегралы пусть будутъ:

$$\beta_2 = H_2(x_1, x_2, \ldots x_n, \beta_1, c_2, c_3 \ldots c_n),\ \beta_3 = H_3, \ldots \beta_n = H_n\,;$$

тогда, какъ извѣстно,

$$\Pi(c_1 H_2 H_3 \ldots H_n) = 0\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

гдѣ Π произвольная функція, будетъ служить интеграломъ (26).

Конечно, какъ (25) такъ и (27), можно считать совпадающими рѣшеніями—стоитъ соотвѣтственно подъискать Π. Рѣшеніе (25), въ связи съ $z=\omega$, приводитъ насъ къ общему интегралу, а (27)—къ главному, для даннаго уравненія (1).

Не трудно видѣть всю простоту предлагаемаго метода. Понятно также, что изложеніе можно было нѣсколько сократить; но я старался быть яснымъ.