Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série. Tome VI. № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ
Томъ VI.
№ 1. 1897-1899

Съ портретомъ К. Вейерштрасса.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильбербергъ.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1897.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série. Tome VI.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ VI.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильбербергъ. Рыбная ул., 30.
1899.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшаю. Харьковъ, 20-го мая 1899 года.

За Предсѣдателя Математическаго Общества Профессоръ *А. Ляпуновъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

VI-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Января 1899 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: К. А. Андреевъ
2. Товарищи предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій.
3. Секретарь: В. А. Стекловъ.

В. Почетные члены.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
2. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ, академикъ.
3. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Московскаго университета.
4. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго университета.
5. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. университета.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василий Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьковскаго университета.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
6. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
7. Влезковъ Сергѣй Ѳедоровичъ, бывш. стипендіатъ Харьк. унив.
8. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ СПБ. технол. инст.
9. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
10. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директоръ Сумского реальн. учил.

11. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харк. унив.
12. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьковскаго унив.
13. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
14. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
15. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Кіевскаго политехникума.
16. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежскаго кадетск. корп.
17. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-ой Харьк. гимн.
18. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, бывш. проф. Харьк. технол. инст.
19. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьковскаго университета.
20. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимназіи.
21. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго университета.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьк.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьковскаго унив.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-ей Харьковской гимн.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьев., бывш. препод. Харьк. реальн. уч.
28. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьковскаго университета.
29. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
30. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новороссійскаго унив.
31. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. технол. инст.
32. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. технол. инст.
33. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
34. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
35. Радцигъ Александръ Александровичъ, инженеръ-технологъ.
36. Раевскій Сергѣй Алексадровичъ, инспект. Харьк. учебн. округа.
37. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
38. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Урюпинскаго реальн. уч.
39. Салтыковъ Николай Николаевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
40. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмскаго реальн. уч.
41. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
42. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-ой Харьк. гимназіи.
43. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьковскаго университ.
44. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьковскаго университета.
45. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
46. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лаборантъ Харьк. унив.
47. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Харьковскаго реальн. уч.
48. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
49. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьковскаго университета.
50. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьковскаго реальн. уч.
51. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-ой Харьковской гимн.
52. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. технол. инст.

D. Члены-корреспонденты.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
2. Вороной Георгій Ѳеодосьевичъ, проф. Варшавскаго университета.
3. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. университета св. Владиміра.
4. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. унив., академикъ.
5. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, попеч. Московскаго учебн. окр.
6. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. университета.
7. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. университета.
8. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варшавскаго университета.
9. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермской гимн.

Къ геометріи распространенія и поглощенія электромагнитной энергіи.

А. Грузинцева.

Хотя вопросъ, рѣшеніемъ котораго мы будемъ здѣсь заниматься, разрѣшенъ, но при помощи различныхъ частныхъ соображеній, безъ указанія на общія источники этихъ соображеній; по этому при сопоставленіи съ дѣйствительностью трудно и иногда невозможно сказать: на счетъ какого частнаго предположенія должно отнести то или другое отступленіе отъ фактовъ опыта. Кромѣ того, большинство ученыхъ, занимавшихся рѣшеніемъ поставленнаго вопроса, главнымъ образомъ имѣли въ виду получить окончательныя рѣшенія по возможности проще и скорѣе, незаботясь особенно объ отдѣленіи требованій болѣе строгой теоріи отъ необходимости прибѣгать къ предположеніямъ, оправдываемымъ лишь окончательнымъ результатомъ. Наконецъ, и это мнѣ кажется не маловажнымъ, трудно сравнивать выводы различныхъ ученыхъ, не имѣя общаго источника ихъ полученія. И сравнительныя достоинства тѣхъ или другихъ пріемовъ яснѣе выступаютъ на фонѣ общихъ соображеній.

Разумѣется, такіе первокласные физики, какъ напримѣръ Кирхгоффъ, рѣшали задачу съ общей точки зрѣнія, но, къ сожалѣнію, ихъ рѣшеніе составлено во время господства механическихъ теорій свѣта и проникнуто духомъ этихъ теорій, а потому въ настоящее время кажется уже недостаточнымъ. Послѣдователи Кирхгоффа, каковы Фойгтъ, Друде и др., придерживались его метода, но ихъ работы имѣютъ цѣну и въ настоящее время, особенно изслѣдованія Фойгта. Французская школа физиковъ въ этомъ отношеніи далеко отстала отъ нѣмецкой, хотя въ силу историческихъ традицій и даетъ рѣшеніе занимающаго насъ вопроса по возможности въ простой и изящной формѣ.

Въ настоящей статьѣ мы постараемся по возможности соединить простоту формы съ полной общностью основаній.

§ 1. Задача, которую мы ставимъ себѣ, слѣдующая:

Даны двѣ поглощающія средины, т. е. двѣ проводящія электромагнитную энергію средины. Найти общіе законы ея распространенія въ одной изъ нихъ, зная ее въ другой.

Средины отдѣлены одна отъ другой плоскостью и обѣ изотропны.

Законы распространенія энергіи *двухъ родовъ*: первые касаются *направленія*, вдоль котораго распространяется энергія; вторые *напряженности* тѣхъ векторовъ, которыми мы представляемъ энергію.

Явленія, отвѣчающія этимъ законамъ, носятъ общее названіе явленій *оптической поляризаціи* или *поляризаціи свѣта*.

По самому смыслу задачи ясно, что оба рода этихъ законовъ органически связаны между собой и должны вытекать *изъ однихъ и тѣхъ-же источниковъ*. Однако, не смотря на очевидность такого соображенія, существуютъ рѣшенія нашего вопроса (въ механическихъ теоріяхъ), раздѣляющія задачу на двѣ части, независимыя одна отъ другой *).

Дадимъ нашей задачѣ точную математическую формулировку.

Пусть электромагнитная энергія распространяется въ поглощающей рединѣ, т. е., напр., въ проводникѣ, и доходитъ до другой средины, отдѣленной отъ первой плоскостью:

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Дойдя до этой плоскости, она раздѣляется на двѣ части: одну—распространяющуюся въ той-же рединѣ,—это *отраженная энергія* и другую—во второй рединѣ—это *преломленная энергія*.

Условимся обозначать количества, относящіяся къ *падающей энергіи* буквами безъ значковъ,—къ отраженной тѣми-же буквами со значкомъ (′) вверху, а къ преломленной—со значкомъ ($_1$) внизу.

Въ такомъ случаѣ составляющіе падающаго свѣтоваго вектора, за который мы принимаемъ здѣсь такъ-называемую электрическую пертурбацію, будутъ:

$$Me^{Q}, \quad Ne^{Q}, \quad Pe^{Q},$$

отраженнаго:

$$M'e^{Q'}, \quad N'e^{Q'}, \quad P'e^{Q'},$$

и преломленнаго:

$$M_1e^{Q_1}, \quad N_1e^{Q_1}, \quad P_1e^{Q_1},$$

*) См. напр. *Ketteler*, Optik, 447; положеніе 25. Къ величайшему нашему удовольствію мы встрѣтили въ недавно появившейся книгѣ проф. Фойгта (Compendium d. th. Ph., Bd. II, S. 607) тѣ-же взгляды, которыхъ придерживаемся и мы.

причемъ

$$Q = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t,$$

$$Q' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t,$$

$$Q_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 t,$$

и количества $\alpha, \ldots \gamma_1$ вообще комплексны, а δ, δ' и δ_1 чисто-мнимыя числа.

Задача наша будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Найти $M', \ldots M_1, \ldots, \alpha', \ldots \alpha_1, \ldots, \delta'$ *и* δ_1, *зная* M, N, P, α, β, γ, δ *и физическія постоянныя, характеризующія средины, т. е. ихъ діэлектрическія постоянныя, коэффиціенты электропроводности, магнитныя проницаемости и періодъ измѣненія кинетическаго состоянія первой средины.*

Опредѣленіе упомянутыхъ сейчасъ количествъ и дастъ намъ *законы поляризаціи* свѣтового вектора.

§ 2. Сначала займемся опредѣленіемъ $\alpha', \ldots, \alpha_1, \ldots, \delta_1$.

Какова-бы ни была система поверхностныхъ условій, *всегда* будемъ имѣть равенства вида:

$$a e^{Q} + a' e^{Q'} = a_1 e^{Q_1},$$

въ которыхъ a, a' и a_1 будутъ количества, независящія отъ x, y, z и t. *Это равенство должно существовать для всѣхъ значеній времени* t *и для всѣхъ значеній координатъ* x, y, z, *удовлетворяющихъ уравненію* (1).

Отсюда мы *заключаемъ*, что это возможно лишь при условіи:

$$Q = Q' = Q_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

такъ-какъ количества a, a', a_1 *не могутъ быть одновременно нулями*.

Равенства (2) и послужатъ намъ основаніемъ для опредѣленія $\alpha', \ldots \delta_1$.

Мы подробно разсмотримъ только преломленную энергію, такъ-какъ отъ нея легко перейти къ отраженной.

Подставляя въ уравненіе

$$Q_1 = Q$$

значеніе этихъ Q и Q_1, получимъ равенство

$$(\alpha_1 - \alpha)\,x + (\beta_1 - \beta)\,y + (\gamma_1 - \gamma)\,z + (\delta_1 - \delta)\,t = 0.$$

Это равенство должно существовать при всѣхъ значеніяхъ координатъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію разграничивающей плоскости (1), но чтобы избавиться отъ этого стѣсняющаго обстоятельства прибѣгнемъ къ методу, данному еще Лягранжемъ, а именно: помножимъ уравненіе (1) на неопредѣленный *пока* коэффиціентъ H и приложимъ результатъ къ предыдущему равенству; найдемъ:

$$\left.\begin{array}{c}(\alpha_1-\alpha+A_1H)\,x+(\beta_1-\beta+B_1H)\,y+(\gamma_1-\gamma+C_1H)\,z+\\ +(\delta_1-\delta)\,t=0.\end{array}\right\}. \quad (3)$$

Здѣсь количество H тоже комплексное.

Теперь, такъ какъ равенство (3) должно существовать *уже для всѣхъ значеній* x, y и z и, какъ раньше, для всѣхъ значеній t, получаемъ слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1-\alpha+A_1H=0\\ \beta_1-\beta+B_1H=0\\ \gamma_1-\gamma+C_1H=0\end{array}\right\} \dots\dots\dots (a)$$

и

$$\delta_1=\delta \dots\dots\dots\dots\dots (b)$$

Послѣднее равенство даетъ

$$\frac{\omega_1}{\lambda_1}=\frac{\omega}{\lambda} \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

ибо

$$\delta_1=-\frac{2\pi\omega_1}{\lambda_1}\sqrt{-1}, \quad \delta=-\frac{2\pi\omega}{\lambda}\sqrt{-1}.$$

Въ равенствѣ (4) ω_1 и λ_1 вообще комплексны, но такого вида, что отношенія между дѣйствительными частями и коэффиціентами при $\sqrt{-1}$ соотвѣтственно равны между собой, т. е. если

$$\omega_1=\omega_1'+\omega_1''\sqrt{-1}, \quad \lambda_1=\lambda_1'+\lambda_1''\sqrt{-1},$$

то

$$\frac{\omega_1'}{\lambda_1'}=\frac{\omega_1''}{\lambda_1''} \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

такъ что ихъ отношеніе $\frac{\omega_1}{\lambda_1}$ дѣйствительно, ибо $\frac{\omega}{\lambda}$ есть дѣйствительное число.

Теперь обратимся къ равенствамъ (a), но предварительно замѣтимъ, что, хотя выборомъ координатной системы мы можемъ упростить ихъ, но это упрощеніе будетъ эквивалентно частному предположенію, что такъ называемый „нормалъ поглощенія" лежитъ въ плоскости паденія, противъ чего можно представить серьезныя возраженія; поэтому мы къ этому упрощенію не будемъ прибѣгать *).

Равенства (a) показываютъ, что α_1, β_1, γ_1 будутъ тотчасъ-же опредѣлены, коль скоро мы знаемъ H.

Съ этой цѣлью возьмемъ уравненія, которымъ должны удовлетворять принятыя нами выраженія для электрической пертурбаціи. Эти уравненія имѣютъ видъ *для періодическихъ измѣненій* въ срединѣ:

$$K\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 4\pi C\mu\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f \quad \text{и такъ же для } g \text{ и } h,$$

если f, g, h будутъ составляющія падающей пертурбаціи въ первой срединѣ.

Подставляя сюда значенія f, g и h (стр. 2), найдемъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta. \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Точно также уравненія для преломленной пертурбаціи даютъ:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = K_1\mu_1\delta_1^2 + 4\pi C_1\mu_1\delta_1. \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Здѣсь K, K_1 діэлектрическія постоянныя срединъ; C, C_1 коэффиціенты электропроводности и μ, μ_1 коэффиціенты магнитной проницаемости ихъ.

Вмѣсто обычныхъ уравненій для f, g, h, которыми мы пользуемся здѣсь, возможно взять другія, болѣе общія, а именно:

$$K\mu\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 4\pi C\mu\frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma f = (1 + A)\,\Delta f + B\frac{\partial \Delta f}{\partial t} \quad \text{и т. п.}$$

Ихъ возможно получить, принимая *во первыхъ* въ разсчетъ воздѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфиръ и *во вторыхъ*, вводя долю участія магнитной энергіи въ происхожденіи пертурбаціонныхъ токовъ; но мы этотъ вопросъ оставляемъ до другой статьи; замѣтимъ лишь, что все послѣдующее остается въ силѣ, стоитъ только вмѣсто

$$K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta$$

---

*) Замѣтимъ еще, что, прибѣгая къ такому упрощенію, мы лишаемся практической выгоды: всѣ наши формулы настолько симметричны, что легко выводятся и повѣряются.

въ равенствахъ (c) и (d) ввести:

$$\frac{K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta + \Gamma}{(1+A) + B\delta}$$

для каждой средины.

Равенства (a) намъ дадутъ значенія α_1, β_1, γ_1 въ функціи α, β, γ и H, именно:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - A_1 H \\ \beta_1 &= \beta - B_1 H \\ \gamma_1 &= \gamma - C_1 H. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Сложивъ квадраты этихъ равенствъ и принявъ въ разсчетъ равенства (c) и (d), получимъ:

$$K_1\mu_1\delta_1^2 + 4\pi C_1\mu_1\delta_1 = K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta + H^2 - 2H(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma).$$

Опредѣляя отсюда H, найдемъ при помощи (b):

$$H = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma \pm$$
$$\pm\sqrt{(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 - (K\mu - K_1\mu_1)\,\delta^2 - 4\pi(C\mu - C_1\mu_1)\delta}.$$

Изъ двухъ знаковъ мы возьмемъ для преломленныхъ волнъ знакъ —, другой-же знакъ дастъ значеніе H, соотвѣтствующее отраженному вектору.

Итакъ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma - \\ -\sqrt{(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 + (K_1\mu_1 - K\mu)\delta^2 + 4\pi(C_1\mu_1 - C\mu)\delta} \end{aligned}\right\} (II)$$

Чтобы получить рѣшеніе для отраженнаго вектора стоитъ только указатель ($_1$) при количествахъ, относящихся къ второй срединѣ, замѣнить указателемъ ($'$), относящимся къ отраженному вектору; кромѣ того, такъ какъ первая средина изотропна, то ясно, что:

$$K' = K, \qquad \mu' = \mu, \qquad C' = C;$$

поэтому получимъ:

$$H' = 2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma) \ldots\ldots\ldots (III)$$

и по равенствамъ (I) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - A_1 H' \\ \beta' &= \beta - B_1 H' \\ \gamma' &= \gamma - C_1 H' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (IV)$$

Такимъ образомъ наша задача относительно α', β', γ' и α_1, β_1, γ_1 разрѣшена: всѣ эти количества найдены при помощи данныхъ.

§ 3. Извлечемъ теперь общія соотношенія между этими количествами, т. е., говоря другими словами, найдемъ законы, относящіеся до *направленія* передачи электромагнитной энергіи, т. е. законы ея отраженія и преломленія.

Обозначимъ комплексные углы паденія и преломленія буквами i_1 и σ_1; для ихъ опредѣленія можно написать слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cos i_1 &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma \\ \varrho_1 \cos\sigma_1 &= A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 \end{aligned}\right\} \dots\dots (e)$$

причемъ ϱ и ϱ_1 опредѣляются изъ равенствъ (c) и (d), такъ какъ:

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \varrho_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$\varrho^2 \sin^2 i_1 = (B_1\gamma - C_1\beta)^2 + (C_1\alpha - A_1\gamma)^2 + (A_1\beta - B_1\alpha)^2,$$
$$\varrho_1^2 \sin^2\sigma_1 = (B_1\gamma_1 - C_1\beta_1)^2 + (C_1\alpha_1 - A_1\gamma_1)^2 + (A_1\beta_1 - B_1\alpha_1)^2.$$

Подставивъ во второе изъ этихъ равенствъ значенія α_1, β_1, γ_1 изъ системы (I), найдемъ, сопоставляя съ первымъ:

$$\varrho^2 \sin^2 i_1 = \varrho_1^2 \sin^2\sigma_1$$

или:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho} \dots\dots\dots (V)$$

Но изъ равенствъ (c) и (d) находимъ:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sqrt{K_1\mu_1 + \dfrac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}{\sqrt{K\mu + \dfrac{4\pi C\mu}{\delta}}},$$

слѣдовательно:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\sqrt{K_1\mu_1 + \dfrac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}{\sqrt{K\mu + \dfrac{4\pi C\mu}{\delta}}} \dots\dots\dots (V\,bis)$$

По уравненіямъ движенія можно заключить, что дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{K\mu+\frac{4\pi C\mu}{\delta}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{K_1\mu_1+\frac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}$$

суть комплексныя скорости распространенія энергіи въ обѣихъ срединахъ; поэтому формула (V *bis*) представляетъ *законъ преломленія*, соотвѣтствующій закону Декарта для прозрачныхъ срединъ (діэлектриковъ).

Если обозначимъ черезъ

$$A_{11}\,, \qquad B_{11}\,, \qquad C_{11}$$

косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости паденія, т. е., если положимъ, что

$$A_{11}A_1+B_{11}B_1+C_{11}C_1=0$$

и

$$A_{11}A+B_{11}B+C_{11}C=0\,,$$

причемъ

$$A\,, \qquad B\,, \qquad C$$

будутъ косинусы направленія *дѣйствительнаго* луча, идущаго въ первой срединѣ,—то изъ равенствъ (I) можемъ получить слѣдующее:

$$A_{11}\alpha_1+B_{11}\beta_1+C_{11}\gamma_1=A_{11}\alpha+B_{11}\beta+C_{11}\gamma \quad . \ . \ . \quad (VII)$$

т. е. дѣйствительный преломленный лучъ лежитъ въ плоскости паденія.

Подобный-же законъ найдемъ и для дѣйствительнаго отраженнаго луча, а именно:

$$A_{11}\alpha'+B_{11}\beta'+C_{11}\gamma'=A_{11}\alpha+B_{11}\beta+C_{11}\gamma \cdot \ . \ . \ . \quad (VIII)$$

Что-же касается до „нормаловъ поглощенія", то ихъ положеніе относительно плоскости паденія зависитъ отъ количествъ M, N, P и т. п., а потому этотъ вопросъ мы отложимъ до второй части нашей задачи. Хотя нѣкоторые авторы склонны думать, что и „нормалъ поглощенія" лежитъ въ плоскости паденія, но къ такому заключенію нѣтъ ни указаній опыта, ни достаточныхъ теоретическихъ основаній. Положеніе „нормала поглощенія" обусловлено, какъ увидимъ ниже, положеніемъ плоскости поляризаціи свѣтоваго вектора.

§ 4. Пользуясь этимъ соотношеніемъ (V), мы можемъ дать для H и H' другія выраженія, совершенно аналогичныя тѣмъ, которыя можно получить для прозрачныхъ срединъ.

Умножая равенства (I) по порядку на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, получимъ при помощи равенствъ (e):

$$\varrho_1 \cos\sigma_1 = \varrho \cos i_1 - H;$$

подставляя-же сюда значеніе ϱ_1 изъ уравненія (V), находимъ:

$$H = -\varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (II\ bis)$$

Зная уголъ σ_1 изъ равенства (V *bis*), мы отсюда найдемъ H.
Точно также найдемъ изъ формулы (III):

$$H' = 2\varrho \cos i_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (III\ bis)$$

Тоже количество H' должны найти изъ равенства (II *bis*), если подставимъ вмѣсто σ_1 уголъ отраженія σ'; черезъ сопоставленіе результатовъ получаемъ для угла отраженія законъ, выражающійся равенствомъ *)

$$\sigma' = 180^0 - i_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (VI)$$

Зная выраженіе для H и H' въ видѣ выраженій (II *bis*) и (III *bis*), мы можемъ дать для опредѣленія α', β', γ' и α_1, β_1, γ_1 слѣдующія формулы:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 2A_1\varrho\cos i_1 \\ \beta' &= \beta - 2B_1\varrho\cos i_1 \\ \gamma' &= \gamma - 2C_1\varrho\cos i_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I\ bis)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + \varrho\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} A_1 \\ \beta_1 &= \beta + \varrho\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} B_1 \\ \gamma_1 &= \gamma + \varrho\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} C_1 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (IV\ bis)$$

Такимъ образомъ имѣемъ для этой половины нашей задачи другую форму рѣшенія.

---

*) Нѣкоторые авторы вмѣсто этого равенства пишутъ:

$$\sigma' = -i_1;$$

но это въ примѣненіи къ прозрачнымъ срединамъ приводитъ къ физической нелѣпости:

$$\omega' = -\omega.$$

Полученныя формулы въ примѣненіи къ прозрачнымъ срединамъ, т. е. когда коэффиціенты электропроводности C и C_1 суть нули, даютъ тѣ-же результаты, какіе получаются для нихъ непосредственно.

§ 5. Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію второй части нашей задачи, т. е. къ опредѣленію M', N', P' и M_1, N_1, P_1, замѣтимъ, что направленіе *комплекснаго вектора* (α, β, γ) какъ разъ совпадаетъ съ направленіемъ такъ называемаго *радіана* (*vecteur-radiant* по терминологіи Пуанкаре). Дѣйствительно, по теоремѣ Пойнтинга радіанъ перпендикуляренъ къ плоскости электрической и магнитной силъ; но, косинусы направленія первой для изотропныхъ срединъ пропорціональны количествамъ

$$M, \; N, \; P;$$

для второй пропорціональны количествамъ

$$N\gamma - P\beta, \qquad P\alpha - M\gamma, \qquad M\beta - N\alpha,$$

а слѣдовательно косинусы направленія радіана будутъ пропорціональны

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$$

такъ какъ вслѣдствіе *условія періодичности*, т. е. вслѣдствіе условія

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

имѣемъ

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0.$$

§ 6. Перейдемъ теперь къ опредѣленію M', N', P'; M_1, N_1 и P_1.

Съ этой цѣлью воспользуемся условіями на границахъ, принявъ за нихъ равенство электрическихъ и магнитныхъ силъ вдоль плоскости раздѣла.

Если свѣтовой векторъ совпадаетъ съ электрической пертурбаціей, то составляющія магнитной силы для падающаго вектора будутъ:

$$\frac{4\pi}{K\mu\delta}(N\gamma - P\beta)e^{\varrho}, \quad \frac{4\pi}{K\mu\delta}(P\alpha - M\gamma)e^{\varrho}, \quad \frac{4\pi}{K\mu\delta}(M\beta - N\alpha)e^{\varrho}$$

и подобныя выраженія для отраженнаго и преломленнаго вектора.

Возьмемъ теперь за координатныя оси x и y двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя въ плоскости границы, а за ось z нормалъ къ границѣ.

Пусть эти оси будутъ OP, OQ и ON и косинусы ихъ угловъ съ прежними осями соотвѣтственно будутъ

$$A'', \; B'', \; C''; \qquad A_{11}, \; B_{11}, \; C_{11} \quad \text{и} \quad A_1, \; B_1, \; C_1.$$

Проектируя электрическія и магнитныя силы на оси OP и OQ и сравнивая эти проекціи, получимъ слѣдующія четыре уравненія:

$$SMA'' + SM'A'' = \frac{K}{K_1} SM_1 A'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$SMA_{11} + SM'A_{11} = \frac{K}{K_1} SM_1 A_{11} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

— для электрическихъ силъ,—и

$$S(N\gamma - P\beta)A'' + S(N'\gamma' - P'\beta')A'' = \frac{K}{K_1} S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A'' \quad . \; (3)$$

$$S(N\gamma - P\beta)A_{11} + S(N'\gamma' - P'\beta')A_{11} = \frac{K}{K_1} S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A_{11} \quad . \; (4)$$

— для магнитныхъ силъ,—причемъ знакомъ S представлена сумма трехъ членовъ, соотвѣтствующихъ написанному за этимъ знакомъ.

Кромѣ этихъ уравненій имѣемъ еще два, выражающихъ „условіе существованія“ періодическихъ измѣненій состоянія срединъ, а именно:

$$M'\alpha' + N'\beta' + P'\gamma' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$M_1\alpha_1 + N_1\beta_1 + P_1\gamma_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Что касается до условія

$$M\alpha + N\beta + P\beta = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

относящагося до падающаго вектора, то оно должно считаться тождественно выполненнымъ и будетъ намъ служить лишь для упрощенія формулъ.

Такъ какъ мы уже опредѣлили всѣ $\alpha', \ldots \gamma_1$, то въ написанныхъ *шести* уравненіяхъ будутъ заключаться *шесть* неизвѣстныхъ M', N', P'; M_1, N_1, P_1, входящихъ въ нихъ линейно, слѣдовательно имѣемъ вполнѣ опредѣленную задачу съ однимъ опредѣленнымъ рѣшеніемъ, какъ это и можно было предвидѣть *à priori*.

Эти неизвѣстныя впослѣдствіи могутъ быть выражены при помощи четырехъ амплитудъ и двухъ азимутовъ плоскостей поляризаціи.

Изъ уравненій (3) и (4) мы можемъ исключить величины α', β', γ'; α_1, β_1, γ_1, уже опредѣленныя нами ранѣе. Подставляя значенія α_1, β_1, γ_1 изъ равенствъ (I), мы находимъ для преломленнаго вектора:

$$S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A'' = SM_1(C''\beta_1 - B''\gamma_1) = SM_1(C''\beta - B''\gamma) - HSM_1A_{11},$$

$$S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A_{11} = SM_1(C_{11}\beta_1 - B_{11}\gamma_1) = SM_1(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + HSM_1A''$$

и подобныя-же выраженія для отраженнаго вектора.

Подставляя все это въ уравненія (3) и (4), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} SM(C''\beta - B''\gamma) + SM'(C''\beta - B''\gamma) - H'SM'A_{11} = \\ = \frac{K}{K_1}[SM_1(C''\beta - B''\gamma) - HSM_1A_{11}] \end{aligned}\right\} \ldots (3\ bis)$$

$$\left.\begin{aligned} SM(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + SM'(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + H'SM'A'' = \\ = \frac{K}{K_1}[SM_1(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + HSM_1A'' \end{aligned}\right\} \ldots (4\,bis)$$

Подобнымъ образомъ равенства (5) и (6) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$SM'\alpha - H'SM'A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (5\ bis)$$

$$SM_1\alpha - H\,SM_1A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (6\ bis)$$

§ 7. Теперь, слѣдовательно, намъ предстоитъ разрѣшить систему уравненій (1), (2), (3 *bis*—6 *bis*) относительно $M', \ldots P_1$.

Для рѣшенія этой системы мы ее предварительно упростимъ. Для этой цѣли примемъ за прежнюю систему координатъ какъ разъ систему прямыхъ: OP, OQ, ON; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} A'' &= 1, & B'' &= 0, & C'' &= 0 \\ A_{11} &= 0, & B_{11} &= 1, & C_{11} &= 0 \\ A_1 &= 0, & B_1 &= 0, & C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Внося эти упрощенія въ уравненія (3 *bis*) и (4 *bis*), получимъ:

$$(N + N')\gamma - (P + P')\beta - H'N' = \frac{K}{K_1}(N_1\gamma - P_1\beta - HN_1)$$

$$(M + M')\gamma - (P + P')\alpha - H'M' = \frac{K}{K_1}(M_1\gamma - P_1\alpha - HM_1),$$

умноживъ-же уравненія (1) и (2), которыя теперь будутъ имѣть видъ:

$$M + M' = \frac{K}{K_1}M_1 \ldots\ldots\ldots (1\ bis)$$

$$N + N' = \frac{K}{K_1}N_1 \ldots\ldots\ldots (2\ bis)$$

на γ и вычтя результаты соотвѣтственно изъ полученныхъ сейчасъ, найдемъ:

$$(P+P')\beta+H'N'=\frac{K}{K_1}(P_1\beta+HN_1)\,.\quad .\ .\ .\ .\ (3\,ter)$$

$$(P+P')\alpha+H'M'=\frac{K}{K_1}(P_1\alpha+HM_1)\,.\quad .\ .\ .\ .\ (4\,ter)$$

Уравненія (5 *bis*) и (6 *bis*) теперь напишутся въ слѣдующемъ упрощенномъ видѣ:

$$M'\alpha+N'\beta+P'\gamma-H'P'=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5\,ter)$$

$$M_1\alpha+N_1\beta+P_1\gamma-HP_1=0.\quad .\ .\ .\ .\ .\ (6\,ter)$$

Такимъ образомъ намъ надо рѣшить систему уравненій (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *ter*—6 *ter*).

Разсматривая эти уравненія, не трудно замѣтить, что количества P' и P_1 входятъ въ нихъ иначе, чѣмъ M', N'; M_1 и N_1; поэтому мы ихъ исключимъ, пользуясь равенствами (5 *ter*) и (6 *ter*); находимъ изъ этихъ послѣднихъ:

$$P'=\frac{M'\alpha+N'\beta}{H'-\gamma},\qquad P_1=\frac{M_1\alpha+N_1\beta}{H-\gamma}.\quad .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

Подставляя эти значенія P' и P_1 въ (3 *ter*) и (4 *ter*), получаемъ послѣ простого упрощенія:

$$\left.\begin{aligned}&M'\alpha\beta+[\beta^2+(H'-\gamma)^2]N'-A_1\{M_1\alpha\beta+N_1[\beta^2+(H-\gamma)^2]\}=\\&\qquad\qquad=(N\gamma-P\beta)(H'-\gamma)\\&M'[\alpha^2+(H'-\gamma)^2]+N'\alpha\beta-A_1\{M_1[\alpha^2+(H-\gamma)^2]+N_1\alpha\beta\}=\\&\qquad\qquad=(M\gamma-P\alpha)(H'-\gamma),\end{aligned}\right\}\ .\ .\ (b)$$

гдѣ положено

$$A_1=\frac{K}{K_1}\cdot\frac{H'-\gamma}{H-\gamma}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

Разсматривая эти уравненія (b), замѣчаемъ, что если въ коэффиціентахъ при M' замѣнимъ количества α и β черезъ β и α, то получимъ коэффиціенты при N'; тоже можно замѣтить относительно коэффиціентовъ при M_1 и N_1; кромѣ того тѣже равенства показываютъ, что, если замѣнимъ въ первомъ уравненіи (b) систему количествъ M', N'; α, β; M_1, N_1; M, N черезъ систему N', M'; β, α; N_1, M_1; N, M, то получимъ второе уравненіе (b). Кромѣ того коэффиціенты при M_1, N_1 отличаются отъ коэффиціентовъ при M' и N', за исключеніемъ множителя $\mathit{Λ}_1$, тѣмъ, что вмѣсто H входитъ H'. Этими замѣчаніями мы воспользуемся съ большой выгодой.

Подставимъ теперь въ уравненія (b) значенія M_1 и N_1 изъ равенствъ (1 *bis*) и (2 *bis*); по упрощеніи получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} M'\alpha\beta + N'[\beta^2 - (H-\gamma)(H'-\gamma)] &= \frac{H'-\gamma}{H'-H}\,U, \\ M'[\alpha^2 - (H-\gamma)(H'-\gamma)] + N'\alpha\beta &= \frac{H'-\gamma}{H'-H}\,V, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (d)$$

гдѣ положено для краткости:

$$U = -M\alpha\beta - N[\beta^2 + H(H-\gamma)] + P\beta(H-\gamma)$$
$$V = -M[\alpha^2 + H(H-\gamma)] - N\alpha\beta + P\alpha(H-\gamma).$$

Но эти выраженія U и V сейчасъ-же упрощаются.

Отдѣляя въ U при M, N члены съ β, а въ V члены съ α, видимъ, что коэффиціентомъ будетъ служить двучленъ $M\alpha + N\beta$, который по условію

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0$$

равенъ $-P\gamma$; значитъ, находимъ:

$$U = -H(H-\gamma)N + HP\beta; \qquad V = -H(H-\gamma)M + HP\alpha.$$

Полагая въ равенствахъ (d) для краткости письма:

$$(H-\gamma)(H'-\gamma) = \Gamma,$$

рѣшимъ ихъ относительно M'; находимъ:

$$M' = \frac{H[M(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma) + PH'\alpha]}{(H'-H)(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma)}.$$

Пользуясь сдѣланнымъ выше замѣчаніемъ, т. е. замѣняя M, α, β черезъ N, β, α, найдемъ N', а именно:

$$N' = \frac{H[N(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma) + PH'\beta]}{(H'-H)(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma)}.$$

Теперь, чтобы получить M_1 и N_1 соотвѣтственно изъ M' и N', стоитъ только замѣнить въ этихъ послѣднихъ H и H' черезъ H' и H и ввести коэффиціентъ $-\dfrac{K_1}{K}$. Получимъ:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'[M(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma) + PH\alpha]}{(H'-H)(\alpha^2 + \beta^2 - \Gamma)}$$

и

$$N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'[N(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)+PH\beta]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}.$$

Остается теперь найти P' и P_1.

Подставляя значенія M', N' и M_1, N_1 въ формулы (a), получимъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$P' = \frac{H(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+H\gamma)P}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)},$$

и

$$P_1 = -\frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+H'\gamma)P}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}$$

Полагая для простоты письма:

$$\alpha^2+\beta^2-\Gamma = \varDelta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

найденныя рѣшенія мы соберемъ въ видѣ системы:

$$M' = \frac{H}{H'-H}\left(M+\frac{PH'\alpha}{\varDelta}\right), \quad N' = \frac{H}{H'-H}\left(N+\frac{PH'\beta}{\varDelta}\right),$$

$$P' = \frac{H}{H'-H}\left(1+\frac{H'(H-\gamma)}{\varDelta}\right)P$$

для отраженнаго вектора,—и

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left(M+\frac{PH\alpha}{\varDelta}\right), \quad N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left(N+\frac{PH\beta}{\varDelta}\right),$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K}\,\frac{H'}{H'-H}\left(1+\frac{H(H'-\gamma)}{\varDelta}\right)P.$$

для преломленнаго.

Такимъ образомъ разрѣшена и вторая часть задачи въ общемъ видѣ.

§ 8. Такимъ образомъ мы получили слѣдующія системы рѣшеній: *для отраженныхъ волнъ*

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{H}{H'-H}\left[M+\frac{H'\alpha}{\varDelta}P\right], \quad N' = \frac{H}{H'-H}\left[N+\frac{H'\beta}{\varDelta}P\right], \\ P' &= \frac{H}{H'-H}\left[1+\frac{H'(H-\gamma)}{\varDelta}\right]P \end{aligned}\right\} . \quad (I)$$

и *для преломленныхъ волнъ*

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{H'}{H'-H}\left[M+\frac{H\alpha}{\Delta}P\right],\\
N_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{H'}{H'-H}\left[N+\frac{H\beta}{\Delta}P\right],\\
P_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{H'}{H'-H}\left[1+\frac{H(H'-\gamma)}{\Delta}\right]P.
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(II)$$

Если введемъ комплексные углы паденія и преломленія, то эти формулы примутъ другой видъ, представляющій ту выгоду, что отъ него легко перейти къ формуламъ отраженія и преломленія для прозрачныхъ срединъ (діэлектриковъ и очень слабыхъ проводниковъ).

Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$H=-\varrho\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin\sigma_1},\qquad H'=2\varrho\cos i_1$$

и, слѣдовательно:

$$H'-H=\varrho\frac{\sin(i_1+\sigma_1)}{\sin\sigma_1},$$

а потому получимъ вмѣсто системъ (I) и (II) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
M' &= -\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[M+\frac{2\varrho\cos i_1\,\alpha}{\Delta}P\right],\\
N' &= -\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\mathrm{sia}(i_1+\sigma_1)}\left[N+\frac{2\varrho\cos i_1\,\beta}{\Delta}P\right],\\
P' &= -\frac{\sin(i_1-\sigma_1)}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[1+\frac{2\varrho\cos i_1\,(H-\gamma)}{\Delta}\right]P
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;(I\,bis)$$

для отраженныхъ лучей, и

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[M-\frac{\varrho\sin(i_1-\sigma_1)\,\alpha}{\Delta\sin\sigma_1}P\right],\\
N_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[N-\frac{\varrho\sin(i_1-\sigma_1)\,\beta}{\Delta\sin\sigma_1}P\right],\\
P_1 &= \frac{K_1}{K}\cdot\frac{2\sin\sigma_1\cos i_1}{\sin(i_1+\sigma_1)}\left[1-\frac{\varrho\sin(i_1-\sigma_1)\,(H'-\gamma)}{\Delta\sin\sigma_1}\right]P.
\end{aligned}\right\}\cdot(II bis)$$

для преломленныхъ.

Послѣднимъ формуламъ можно дать иной окончательный видъ въ тригонометрическихъ функціяхъ.

Мы можемъ найти, что

$$\Delta = \varrho^2 \frac{\sin i_1}{\sin \sigma_1} \cos(i_1 - \sigma_1), \quad H' - \gamma = \varrho \cos i_1, \quad H - \gamma = -\varrho \frac{\sin i_1}{\sin \sigma_1} \cos \sigma_1,$$

поэтому формулы (I bis) обратятся въ слѣдующія:

$$M' = -\frac{\operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\operatorname{tg}(i_1 + \sigma_1)} M - \frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\xi - N\eta);$$

$$N' = \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin(i_1 + \sigma_1)} N + \frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\eta + N\xi);$$

$$P' = +\frac{\operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\operatorname{tg}(i_1 + \sigma_1)} P.$$

Здѣсь положено:

$$\beta^2 = \xi, \quad \eta = \sqrt{\xi \varrho^2 \sin^2 i_1 - \xi^2}$$

и затѣмъ члены съ $P\alpha$ и $P\beta$ въ формулахъ для M' и N' исключались при помощи равенства

$$P\gamma = -M\alpha - N\beta,$$

величина же α исключалась при помощи уравненія

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2 \sin^2 i_1.$$

Для преломленнаго вектора находимъ подобнымъ же образомъ слѣдующія формулы:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \cos\sigma_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)\cos(i_1 - \sigma_1)} M - \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\xi - N\eta)$$

$$N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)} N + \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\eta + N\xi).$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin^2\sigma_1 \cos i_1}{\sin i_1 \cos(i_1 - \sigma_1) \sin(i_1 + \sigma_1)} P.$$

Если-бы пожелали ввести комплексные азимуты, то должны были-бы положить:

$$M = J \sin\Phi \cos i_1, \quad N = J \cos\Phi, \quad P = J \sin\Phi \sin i_1$$

$$M' = -J' \sin\Phi' \cos i_1, \quad N' = J' \cos\Phi', \quad P' = J' \sin\Phi' \sin i_1$$

$$M_1 = J_1 \sin\Phi_1 \cos\sigma_1, \quad N_1 = J_1 \cos\Phi_1, \quad P_1 = J_1 \sin\Phi_1 \sin\sigma_1.$$

Полученныя формулы для $\beta = 0$ обращаются въ обычныя формулы, тождественныя по виду съ формулами Фрэнэля.

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ любопытное слѣдствіе, что нормальныя составляющія колебаній въ отраженныхъ и преломленныхъ волнахъ зависятъ лишь отъ нормальныхъ составляющихъ колебаній падающихъ волнъ, между тѣмъ какъ тангенціальныя составляющія зависятъ не только отъ тангенціальныхъ составляющихъ падающихъ волнъ, но и отъ нормальныхъ.

Эта зависимость изчезаетъ для составляющихъ, перпендикулярныхъ къ плоскости паденія, въ трехъ случаяхъ:

1) Если допустимъ, что „нормалъ поглощенія" падающихъ волнъ лежитъ въ плоскости паденія, т. е., что

$$\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

2) Если падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ азимутѣ, т. е., когда

$$M = P = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

3) Когда лучъ падаетъ нормально, ибо тогда

$$P = 0.$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изчезаетъ и нормальная составляющая.

При общепринятомъ взглядѣ на поглощеніе всегда имѣемъ, что

$$\beta = 0;$$

но, какъ не трудно убѣдиться, „нормалъ поглощенія" долженъ лежать всегда въ плоскости колебанія и нормала къ плоской волнѣ, а потому условіе (a) имѣетъ мѣсто лишь въ случаѣ, когда падающій свѣтъ поляризованъ во второмъ азимутѣ, т. е. когда падающія колебанія лежатъ въ плоскости паденія.

Однако, не смотря на такую разницу во взглядахъ на законы поглощенія, результаты получаются одни и тѣже. Дѣйствительно, мы всегда можемъ разложить падающій свѣтъ на двѣ части: одну поляризованную въ 1-мъ азимутѣ, а другую во 2-мъ и для перваго случая будетъ имѣть мѣсто условіе (b), а для втораго—(a).

§ 9. Чтобы получить окончательныя рѣшенія уравненій (I) и (II) нужно въ нихъ раздѣлить дѣйствительныя и мнимыя части. Съ этой цѣлью положимъ:

$$H' = -\frac{4\pi}{\lambda} P' e^{\Theta' \sqrt{-1}}, \quad H_0 + H_1 \sqrt{-1} = P e^{\Theta \sqrt{-1}}$$

и между этими количествами P, P', Θ и Θ' будутъ существовать соотношенія, получаемыя изъ равенствъ (c) и (d) и равенства (II) § 2:

$$P^2\cos 2\Theta = P'^2\cos 2\Theta' + \Lambda^2\cos 2T, \quad P^2\sin 2\Theta = P'^2\sin 2\Theta' + \Lambda^2\sin 2T \quad (1)$$

гдѣ положено для симметріи формулъ:

$$\omega^2(K - K_1) = \Lambda^2\cos 2T, \quad 2(C - C_1)\omega\lambda = \Lambda^2\sin 2T. \quad . \; . \; . \; (2)$$

Такъ какъ количество h_0 и уголъ паденія i будемъ считать данными, то P и Θ опредѣлятся изъ соотношеній (1), если предварительно будутъ найдены вспомогательныя величины Λ и T изъ условій (2).

Далѣе найдемъ:

$$H = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} + Pe^{\Theta\sqrt{-1}}\right), \; *)$$

$$H' - H = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}\right).$$

Положимъ затѣмъ:

$$\alpha = -\frac{2\pi}{\lambda} Fe^{-\Phi\sqrt{-1}}, \quad \beta = -\frac{2\pi}{\lambda} g_0, \quad \gamma = -\frac{2\pi}{\lambda} P'e^{\Theta'\sqrt{-1}},$$

причемъ F, Φ, P' и Θ' удовлетворяютъ соотношенію:

$$F^2\sin^2\Phi + P'^2\sin^2\Theta' = 1. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Далѣе находимъ

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[F^2 e^{-2\Phi\sqrt{-1}} - PP'e^{(\Theta'+\Theta)\sqrt{-1}} + g_0^2\right]$$

и положимъ, что

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} Ve^{-v\sqrt{-1}},$$

причемъ эти вспомогательныя количества V и v опредѣлятся изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v &= F^2\cos 2\Phi - PP'\cos(\Theta' + \Theta) + g_0^2 \\ V\sin v &= F^2\sin 2\Phi + PP'\sin(\Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (4)$$

Такъ какъ **):

$$F\cos\Phi = f_0, \quad F\sin\Phi = \sin i,$$

то F и Φ тоже извѣстны.

---

*) Можно положить:

$$H = -\frac{2\pi}{\lambda} pe^{\theta\sqrt{-1}},$$

что представляетъ извѣстную выгоду, которой мы впослѣдствіи воспользуемся.

**) Количества f_0, g_0, h_0 пропорціональны дѣйствительнымъ частямъ α, β, γ.

Затѣмъ опредѣляемъ:

$$\frac{H'\alpha}{\Delta} = V'e^{v'\sqrt{-1}}, \quad \frac{H'\beta}{\Delta} = \frac{2g_0P'}{V}e^{(\Theta'+v)\sqrt{-1}}, \quad \frac{H'(H-\gamma)}{\Delta} = V''e^{v''\sqrt{-1}},$$

гдѣ положено:

$$V' = \frac{2P'F}{V}, \quad V'' = \frac{2P'P}{V}, \quad v' = \Theta' - \Phi + v, \quad v'' = \Theta' + \Theta + v \quad . \text{(5)}$$

Потомъ положимъ, что

$$\frac{H}{H'-H} = Ue^{u\sqrt{-1}},$$

причемъ вспомогательныя величины U и u опредѣляются изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} P'U\cos(\Theta'+u) - PU\cos(\Theta+u) &= P'\cos\Theta' + P\cos\Theta \\ P'U\sin(\Theta'+u) - PU\sin(\Theta+u) &= P'\sin\Theta' + P\sin\Theta \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ \text{(6)}$$

такъ какъ

$$\frac{H}{H'-H} = \frac{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} + Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}.$$

Затѣмъ полагаемъ:

$$\frac{H}{H'-H} = U_1e^{u_1\sqrt{-1}},$$

причемъ вспомогательныя величины U_1 и u_1 опредѣляются изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} P'U_1\cos(\Theta'+u_1) - PU_1\cos(\Theta+u_1) &= 2P'\cos\Theta' \\ P'U_1\sin(\Theta'+u_1) - PU_1\sin(\Theta+u_1) &= 2P'\sin\Theta' \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ \text{(7)}$$

такъ какъ

$$\frac{H'}{H'-H} = \frac{2P'e^{\Theta'\sqrt{-1}}}{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}.$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{H\alpha}{\Delta} = U'e^{u'\sqrt{-1}} + U''e^{u''\sqrt{-1}}, \quad \frac{H\beta}{\Delta} = \left[\frac{P'}{V}e^{(\Theta'+v)\sqrt{-1}} + \frac{P}{V}e^{(\Theta+v)\sqrt{-1}}\right]g_0,$$

$$\frac{H(H'-\gamma)}{\Delta} = V_1e^{v_1\sqrt{-1}} + V_{11}e^{v_{11}\sqrt{-1}},$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{array}{c} U' = \dfrac{P'F}{V}, \quad U'' = \dfrac{PF}{V}, \quad V_1 = \dfrac{P'^2}{V}, \quad V_{11} = \dfrac{PP'}{V}, \\ u' = \Theta' - \Phi + v, \quad u'' = \Theta - \Phi + v; \\ v_1 = 2\Theta' + v, \quad v_{11} = \Theta' + \Theta + v, \end{array}\right\} \ldots (8)$$

значитъ:

$$u' = v'; \quad v_{11} = v'', \quad V' = 2U', \quad V'' = 2V_{11} \ldots\ldots (9)$$

§ 10. Теперь надо опредѣлить U, u, U_1 и u_1; мы ограничимся приведеніемъ уравненій (6) и (7) къ виду уравненій (4).

Опредѣлимъ сначала $U\cos u$ и $U\sin u$. Съ этой цѣлью умножимъ уравненія (6) сначала на $\sin x$ и $\cos x$, а затѣмъ на $\cos x$ и $-\sin x$ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$[P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U\cos u +$$
$$+ [P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U\sin u = P'\sin(\Theta' + x) + P\sin(\Theta + x);$$
$$[P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U\cos u -$$
$$- [P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U\sin u = P'\cos(\Theta' + x) + P\cos(\Theta + x).$$

Если сдѣлаемъ здѣсь x равнымъ $-\Theta'$ или $-\Theta$, то получимъ очень удобную для опредѣленія $U\cos u$ и $U\sin u$ систему. Пусть

$$x = -\Theta',$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} P\sin(\Theta' - \Theta)\, U\cos u + [P' - P\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\sin u = -P\sin(\Theta' - \Theta) \\ [P' - P\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\cos u - P\sin(\Theta' - \Theta)\, U\sin u = P' + P\cos(\Theta' - \Theta). \end{array}\right\} . (a)$$

Эту систему можно рѣшить двояко. Положимъ, *во первыхъ*, что опредѣлили двѣ вспомогательныя величины μ и ν изъ равенствъ:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' + P\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \operatorname{tg}\nu = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' - P\cos(\Theta' - \Theta)} \ldots (10)$$

Тогда изъ системы (a) найдемъ:

$$U\cos u = \frac{\sin\nu\cos(\mu + \nu)}{\sin\mu}, \quad U\sin u = -\frac{\sin\nu\sin(\mu + \nu)}{\sin\mu} \ldots (11)$$

Отсюда:

$$U = \pm \frac{\sin v}{\sin \mu}, \quad u = n\pi - (\mu + v). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (12)$$

Верхнему знаку при U соотвѣтствуетъ $n=0$, а нижнему $n=1$, такъ-какъ U всегда положительно.

Во вторыхъ изъ системы (a) прямо находимъ:

$$\left.\begin{aligned} U\cos u &= \frac{P'^2 - P^2}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)} \\ U\sin u &= -\frac{2PP'\sin(\Theta' - \Theta)}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)}. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (bis)$$

Съ другой стороны мы могли-бы взять:

$$x = -\Theta$$

и получили-бы систему, аналогичную (a), а именно:

$$P'\sin(\Theta' - \Theta)\, U\cos u - [P - P'\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\sin u = P'\sin(\Theta' - \Theta),$$
$$[P - P'\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\cos u + P'\sin(\Theta' - \Theta)\, U\sin u = -[P + P'\cos(\Theta' - \Theta)].$$

Отсюда, если положимъ:

$$\operatorname{tg}\mu' = \frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \operatorname{tg}v' = \frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)}. \quad (10\,bis)$$

то найдемъ:

$$U\cos u = -\frac{\sin v'\cos(\mu' + v')}{\sin \mu'}, \quad U\sin u = -\frac{\sin v'\sin(\mu' + v')}{\sin \mu'}. \quad (11\,bis)$$

$$U = \mp \frac{\sin v'}{\sin \mu'}, \quad u = n\pi + (\mu' + v') \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (12\,bis)$$

Верхнему знаку при U соотвѣтствуетъ $n=0$, а нижнему $n=1$.

Итакъ U и u опредѣлены

§ 11. Теперь надо опредѣлить U_1 и u_1.

Система (7) подобно тому, какъ система (6), даетъ:

$$[P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U_1\cos u_1 +$$
$$+ [P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U_1\sin u_1 = 2P'\sin(\Theta' + x)$$

$$[P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U_1\cos u_1 -$$
$$- [P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U_1\sin u_1 = 2P'\cos(\Theta' + x).$$

Положивъ здѣсь

$$x = -\Theta,$$

получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &P'\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\cos u_1 - \\ &-[P-P'\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\sin u_1 = 2P'\sin(\Theta'-\Theta) \\ &-[P-P'\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\cos u_1 - \\ &-P'\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\sin u_1 = 2P'\cos(\Theta'-\Theta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (b)$$

Положивъ же:

$$\operatorname{tg}\mu_1 = \operatorname{tg}(\Theta'-\Theta), \quad \operatorname{tg}\nu_1 = \frac{P'\sin(\Theta'-\Theta)}{P-P'\cos(\Theta'-\Theta)}, \quad \ldots \quad (13)$$

найдемъ:

$$U_1\cos u_1 = -\frac{2\sin\nu_1\cos(\mu_1+\nu_1)}{\sin\mu_1}, \quad U_1\sin u_1 = -\frac{2\sin\nu_1\sin(\mu_1+\nu_1)}{\sin\mu_1}. \quad (14)$$

Отсюда:

$$U_1 = \mp\frac{2\sin\nu_1}{\sin\mu_1}, \quad u_1 = n\pi + (\mu_1+\nu_1) \quad \ldots \ldots (15)$$

причемъ верхнему знаку при U_1 соотвѣтствуетъ $n=0$, а нижнему $n=1$.

Если-бы мы взяли

$$x = -\Theta',$$

то получили-бы для опредѣленія U_1 и u_1 уравненія:

$$[P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\cos u_1 - P\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\sin u_1 = 2P',$$

$$P\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\cos u_1 + [P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\sin u_1 = 0.$$

Полагая здѣсь:

$$\operatorname{tg}\mu_0 = \frac{P'}{P'-P\cos(\Theta'-\Theta)} = \frac{P'\operatorname{tg}\nu}{P\sin(\Theta'-\Theta)}$$

и пользуясь значеніемъ $\operatorname{tg}\nu$, получимъ:

$$U_1\cos u_1 = 2\operatorname{tg}\mu_0\cos^2\nu, \quad U_1\sin u_1 = -2\operatorname{tg}\mu_0\cos\nu\sin\nu \quad \ldots (14\ bis)$$

Отсюда:

$$U_1 = \pm 2\operatorname{tg}\mu_0\cos\nu, \quad u_1 = n\pi - \nu. \quad \ldots \ldots (15\ bis)$$

Мы предпочитаемъ рѣшеніе (15).

Опредѣляя непосредственно, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} U_1\cos u_1 &= \frac{2P'[P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]}{P'^2+P^2-2PP'\cos(\Theta'-\Theta)} \\ U_1\sin u_1 &= -\frac{2P'P\sin(\Theta'-\Theta)}{P'^2+P^2-2PP'\cos(\Theta'-\Theta)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (16)$$

Сравнивая съ (11 *bis*), усматриваемъ, что

$$U\sin u = U_1\sin u_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Это соотношеніе значительно облегчаетъ вычисленія. Пользуясь имъ и выраженіемъ $\operatorname{tg}\mu_0$ въ функціи v, найдемъ изъ (17)

$$\frac{2P'\sin v}{P\sin(\Theta'-\Theta)} = \frac{\sin(\mu+v)}{\sin\mu},$$

а затѣмъ —

$$U_1\cos u_1 = \frac{\cos v\sin(\mu+v)}{\sin\mu}.$$

Если положимъ

$$\frac{P\sin(\Theta'-\Theta)}{2P'} = \operatorname{tg} z,$$

то получимъ:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\sin v\cos z}{2P'\sin(v-z)}.$$

§ 12. Перейдемъ теперь къ рѣшенію первоначальной системы и для удобства разсмотримъ отдѣльно случаи, когда падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ и во второмъ азимутѣ.

Первый случай. Пусть падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ азимутѣ; тогда

$$M=0, \qquad P=0,$$

а потому уравненія (I) и (I) § 8 показываютъ, что

$$M'=0, \qquad P'=0,$$

$$M_1=0, \qquad P_1=0,$$

т. е. въ этомъ случаѣ и отраженный, и преломленный свѣтъ поляризованы въ томъ-же первомъ азимутѣ. Это заключеніе не зависитъ отъ частной формы закона поглощенія.

Итакъ остаются уравненія:

$$N' = \frac{H}{H' - H} N \quad \text{и} \quad N_1 = \frac{H'}{H' - H} \cdot \frac{K_1}{K} N.$$

Пусть падающій свѣтъ поляризованъ прямолинейно, тогда N количество дѣйствительное, но коэффиціенты при N комплексны, слѣдовательно

$$N' = R_1 + S_1\sqrt{-1}\,, \quad N_1 = P_1 + Q_1\sqrt{-1}$$

а амплитуды будутъ:

$$\sqrt{R_1^2 + S_1^2}\,, \qquad \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

и разности фазъ будутъ:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \frac{S_1}{R_1}\,, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = \frac{Q_1}{P_1}.$$

Подставляя значенія

$$\frac{H}{H' - H} \quad \text{и} \quad \frac{H'}{H' - H}$$

изъ § 9, находимъ по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей слѣдующія выраженія:

$$R_1 = NU\cos u\,, \quad S_1 = NU\sin u\,, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \operatorname{tg} u\,,$$

а потому:

$$\sqrt{R_1^2 + S_1^2} = \pm\frac{\sin v}{\sin\mu} N\,, \quad \frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = n\pi - (\mu + v). \quad . \ . \ . \ (1)$$

Затѣмъ найдемъ:

$$P_1 = \frac{K_1}{K} NU_1\cos u_1\,, \quad Q_1 = \frac{K_1}{K} NU_1\sin u_1\,, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = \operatorname{tg} u_1\,,$$

откуда:

$$\sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \mp\frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin v_1}{\sin\mu_1} N\,, \quad \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = n\pi + (\mu_1 + v_1). \ . \ . \ (2)$$

Если-бы падающій свѣтъ былъ поляризованъ эллиптически, то должно было-бы взять:

$$N = A + \Gamma\sqrt{-1} = Se^{\tau\sqrt{-1}}$$

и амплитуда его была-бы S, а разность фазъ его составляющихъ равнялась-бы $\frac{\lambda\tau}{2\pi}$.

Въ этомъ случаѣ въ уравненіяхъ для N' и N_1 вмѣсто U, U_1, u, u_1 надо взять:

$$US, \quad U_1S, \quad u+\tau \quad \text{и} \quad u_1+\tau_1;$$

слѣдовательно амплитуды увеличились-бы въ S разъ, а фазы на τ, и окончательныя рѣшенія были-бы:

$$\sqrt{R_1^2+S_1^2}=\pm\frac{\sin\nu}{\sin\mu}S, \qquad \frac{2\pi\Delta'}{\lambda}=n\pi-(\mu+\nu)+\tau.$$

$$\sqrt{P_1^2+Q_1^2}=\mp\frac{2\sin\nu_1}{\sin\mu_1}\cdot\frac{K_1}{K}S, \qquad \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1}=n\pi+(\mu_1+\nu_1)+\tau.$$

Если-бы мы подобрали падающій лучъ такъ, чтобы удовлетворялось или равенство

$$\tau=\mu+\nu,$$

или равенство

$$-\tau=\mu_1+\nu_1,$$

то въ такомъ случаѣ или отраженный лучъ, или преломленный, были-бы поляризованы прямолинейно.

§ 12. *Второй случай.* Пусть падающій свѣтъ поляризованъ во второмъ азимутѣ; тогда

$$N=0 \quad \text{и} \quad \beta=0.$$

Разсмотримъ сначала отраженный лучъ. Въ этомъ случаѣ уравненія будутъ:

$$M'=\frac{H}{H'-H}\left(M+\frac{H'\alpha}{\Delta}P\right), \quad P'=\frac{H}{H'-H}\left(1+\frac{H'(H-\gamma)}{\Delta}\right)P.$$

Такъ какъ $\beta=0$, то, слѣдовательно, (§ 9) и $g_0=0$; значитъ, предыдущія уравненія можно будетъ написать при помощи равенствъ того-же § 9 въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned} M'&=Ue^{u\sqrt{-1}}[M+V'e^{v'\sqrt{-1}}P] \\ P'&=Ue^{u\sqrt{-1}}[1+V''u^{v''\sqrt{-1}}]P, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

причемъ, какъ положено раньше:

$$V'=\frac{2P'F}{V}, \quad V''=\frac{2P'P}{V}, \quad v'=\Theta'-\Phi+v, \quad v''=\Theta'+\Theta+v.$$

Такъ-какъ отраженный свѣтъ эллиптически поляризованный, то положимъ:

$$M' = M_1' + M_2'\sqrt{-1}\,,\quad P' = P_1' + P_2'\sqrt{-1}\;.\;.\;.\;.\;.\;(b)$$

и искомыя амплитуды будутъ:

$$M_0' = \sqrt{M_1'^2 + M_2'^2}\,,\quad P_0' = \sqrt{P_1'^2 + P_2'^2}\,,$$

разности-же фазъ опредѣлятся изъ уравненій:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \frac{M_2'}{M_1'},\quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = \frac{P_2'}{P_1'}$$

и разность фазъ обѣихъ составляющихъ отраженнаго луча будетъ опредѣляться разностью

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta' - \Delta'').$$

Подставляя значенія M' и P' изъ (b) въ (a) и сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, получимъ для опредѣленія M_1', M_2', P_1' и P_2' слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} M_1' &= [M\cos u + PV'\cos(u+v')]U;\\ P_1' &= PU[\cos u + V''\cos(u+v'')],\\ M_2' &= [M\sin u + PV'\sin(u+v')]U;\\ P_2' &= PU[\sin u + V''\sin(u+v'')]. \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)$$

Отсюда:

$$\left\{\begin{aligned} M_0'^2 &= U^2[M^2 + P^2V'^2 + 2MPV'\cos v'];\\ P_0'^2 &= P^2U^2[1 + V''^2 + 2V''\cos v'']. \end{aligned}\right.$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \frac{M\sin u + PV'\sin(u+v')}{M\cos u + PV'\cos(u+v')}\,,\quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = \frac{\sin u + V''\sin(u+v'')}{\cos u + V''\cos(u+v'')}\,.$$

Но эти формулы можно преобразовать.

Положимъ, что мы опредѣлили два вспомогательныя количества μ_{11} и v_{11} по равенствамъ:

$$\operatorname{tg}\mu_{11} = \frac{PV'\sin u'}{M + PV'\cos v'}\,,\quad \operatorname{tg}v_{11} = \frac{V''\sin v''}{1 + V''\cos v''}\;.\;.\;.\;.\;.\;(d)$$

Въ такомъ случаѣ, найдемъ:

$$\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = u + \mu_{11}, \quad \frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = u + \nu_{11},$$

откуда разность фазъ будетъ

$$\frac{2\pi(\Delta' - \Delta'')}{\lambda} = \mu_{11} - \nu_{11} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Слѣдовательно, она независитъ непосредственно отъ u.

Затѣмъ изъ (c) находимъ, вводя μ_{11} и ν_{11}:

$$\left.\begin{aligned} M_1' &= PUV'\sin v'\,\frac{\cos(u+\mu_{11})}{\sin\mu_{11}}, \quad P_1' = PUV''\sin v''\,\frac{\cos(u+\nu_{11})}{\sin\nu_{11}} \\ M_2' &= PUV'\sin v'\,\frac{\sin(u+\mu_{11})}{\sin\mu_{11}}, \quad P_2' = PUV''\sin v''\,\frac{\sin(u+\nu_{11})}{\sin\nu_{11}} \end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

и слѣдовательно:

$$M_0' = PUV'\,\frac{\sin v'}{\sin\mu_{11}}, \quad P_0' = PUV''\,\frac{\sin v''}{\sin\nu_{11}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Теперь надо опредѣлить v' и v''.

Изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v &= F^2\cos 2\Phi - PP'\cos(\Theta' + \Theta) \\ V\sin v &= F^2\sin 2\Phi + PP'\sin(\Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v' &= F^2\cos(\Theta' + \Phi) - PP'\cos(\Theta + \Phi) \\ V\sin v' &= F^2\sin(\Theta' + \Phi) + PP'\sin(\Theta + \Phi) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (h)$$

и затѣмъ:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v'' &= F^2\cos(2\Phi + \Theta' + \Theta) - P'P \\ V\sin v'' &= F^2\sin(2\Phi + \Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (i)$$

Замѣтимъ, что хотя въ формулу для опредѣленія μ_{11} входятъ M и P, но ихъ отношеніе исключится, ибо мы имѣемъ:

$$\frac{P}{M} = \operatorname{tg} i. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

§ 14. Опредѣлимъ теперь преломленныя колебанія, т. е. M_1 и P_1. Формулы (II) § 8 даютъ:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} U_1[Me^{u_1\sqrt{-1}} + P(U'e^{(u_1+u')\sqrt{-1}} + U''e^{(u_1+u'')\sqrt{-1}})],$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K} U_1[e^{u_1\sqrt{-1}} + V_1e^{(v_1+u_1)\sqrt{-1}} + V_{11}e^{(v_{11}+u_1)\sqrt{-1}}]P.$$

Положимъ:

$$M_1 = M_{11} + M_{12}\sqrt{-1}, \quad P_1 = P_{11} + P_{12}\sqrt{-1};$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \frac{K_1}{K} U_1[M\cos u_1 + PU'\cos(u_1+u') + PU''\cos(u_1+u'')] \\ M_{12} &= \frac{K_1}{K} U_1[M\sin u_1 + PU'\sin(u_1+u') + PU''\sin(u_1+u'')] \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

и

$$\left.\begin{aligned} P_{11} &= \frac{K_1}{K} U_1[\cos u_1 + V_1\cos(u_1+v_1) + V_{11}\cos(u_1+v_{11})]P \\ P_{12} &= \frac{K_1}{K} U_1[\sin u_1 + V_1\sin(u_1+v_1) + V_{11}\sin(u_1+v_{11})]P. \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Положимъ:

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{P(U'\sin u' + U''\sin u'')}{M + PU''\cos u' + PU''\cos u''};$$

тогда:

$$M_{11} = \frac{K_1}{K} U_1[\cos u_1 \operatorname{ctg}\mu_2 - \sin u_1]P(U'\sin u' + U''\sin u''),$$

$$M_{12} = \frac{K_1}{K} U_1[\sin u_1 \operatorname{ctg}\mu_2 + \cos u_1]P(U'\sin u' + U''\sin u'');$$

а отсюда находимъ:

$$M_{11} = \frac{K_1U_1P}{K} \cdot \frac{\sin(u_1+\mu_2)}{\sin\mu_2}(U'\sin u' + U''\sin u'')$$

$$M_{12} = \frac{K_1U_1P}{K} \cdot \frac{\sin(u_1+\mu_2)}{\sin\mu_2}(U'\sin u' + U''\sin u'').$$

Отсюда наконецъ найдемъ:

$$M_{01}=\pm\frac{K_1U_1}{K}P\cdot\frac{U'\sin u'+U''\sin u''}{\sin\mu_2}\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1}=\operatorname{tg}(u_1+\mu_2),$$

т. е.

$$\frac{2\pi\Delta_1'}{\lambda_1}=u_1+\mu_2.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

Формулы (8) даютъ, если положимъ:

$$\operatorname{tg}v_2=\frac{V_1\sin v_1+V_{11}\sin v_{11}}{1+V_1\cos v_1+V_{11}\cos v_{11}},$$

слѣдующія:

$$P_{11}=\frac{K_1}{K}PU_1(V_1\sin u_1+V_{11}\sin v_{11})\,\frac{\cos(u_1+v_2)}{\sin v_2}$$

$$P_{12}=\frac{K_1}{K}PU_1(V_1\sin v_1+V_{11}\sin v_{11})\,\frac{\sin(u_1+v_2)}{\sin v_2}.$$

Отсюда наконецъ:

$$P_{01}=\pm\frac{K_1}{K}PU_1\,\frac{V_1\sin v_1+V_{11}\sin v_{11}}{\sin v_2}\quad\ldots\ldots\quad(11)$$

и

$$\frac{2\pi\Delta_1''}{\lambda_1}=u_1+v_2.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(12)$$

и слѣдовательно, разность фазъ опредѣлится равенствомъ

$$\frac{2\pi(\Delta_1'-\Delta_1'')}{\lambda_1}=\mu_2-v_2.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(13)$$

Теперь остается дать формулы для u', u'', v_1 и v_{11}, но такъ какъ по § 13, $u'=v'$ и $v_{11}=v''$, то для нихъ формулы даны въ предыдущемъ § [равенства (h) и (i)]. Слѣдовательно, надо составить равенства только для опредѣленія u'' и v_1.

Изъ равенствъ (f) § 13 имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned}V\cos u''&=F^2\cos(\Theta+\Phi)-PP'\cos(\Theta'+\Phi)\\ V\sin u''&=F^2\sin(\Theta+\Phi)+PP'\sin(\Theta'+\Phi)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(k)$$

и

$$\left.\begin{aligned} V\cos v_1 &= F^2\cos 2(\Theta' + \Phi) - PP'\cos(\Theta' - \Theta) \\ V\sin v_1 &= F^2\sin 2(\Theta' + \Phi) - PP'\sin(\Theta' - \Theta). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (l)$$

Итакъ все найдено.

§ 15. Формулы §§ 13—14 можно упростить и привести всѣ опредѣляемыя количества къ другимъ, которыя въ частныхъ случаяхъ, напримѣръ, когда верхняя средина прозрачна, принимаютъ простыя значенія, значительно упрощающія формулы.

Введемъ положеніе (§ 9)

$$H = pe^{\theta\sqrt{-1}},$$

т. е. примемъ, что:

$$P'\cos\Theta' + P\cos\Theta = p\cos\theta, \quad P'\sin\Theta' + P\sin\Theta = p\sin\theta \ldots (1)$$

Отсюда находимъ:

$$p^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\cos(\Theta' - \Theta) \ldots\ldots\ldots (2)$$

и

$$\operatorname{tg}(\Theta' - \theta) = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' + P\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \operatorname{tg}(\Theta - \theta) = -\frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)},$$

и сравнивая съ формулами (10) и (10 *bis*) § 10, находимъ:

$$\Theta' - \theta = \mu, \quad \Theta - \theta = -\mu'.$$

Отсюда получаемъ:

$$\theta = \Theta' - \mu, \quad \Theta' - \Theta = \mu + \mu' \ldots\ldots\ldots (3)$$

Введемъ затѣмъ еще количества p_1 и θ_1, аналогичныя p и θ, а именно положимъ:

$$P\cos\Theta' + P'\cos\Theta = p_1\cos\theta_1, \quad P\sin\Theta' + P'\sin\Theta = p_1\sin\theta_1 \ldots (4)$$

Отсюда находимъ *во первыхъ*

$$p_1 = p \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

и *во вторыхъ*:

$$\operatorname{tg}(\Theta' - \theta_1) = \operatorname{tg}\mu', \quad \operatorname{tg}(\Theta - \theta_1) = -\operatorname{tg}\mu,$$

т. е.

$$\theta_1 = \Theta' - \mu' \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Мы выражаемъ θ и θ_1 при помощи Θ', ибо эта величина для случая, когда верхняя средина прозрачна, равна $\frac{\pi}{2}$.

Изъ формулъ (3) и (6) находимъ еще:

$$\theta_1 - \theta = \mu - \mu' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Замѣтимъ здѣсь еще одно любопытное соотношеніе для p. Выраженіе для $\operatorname{ctg}\mu + \operatorname{ctg}\mu'$ легко даетъ слѣдующее

$$p^2 = \frac{PP'\sin^2(\Theta' - \Theta)}{\sin\mu\sin\mu'} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Это соотношеніе даетъ простую возможность опредѣлить четверти окружности, въ которыхъ лежатъ μ и μ'.

При помощи p, θ и θ_1 мы просто выразимъ $\operatorname{tg}\mu_2$ и $\operatorname{tg}\nu_2$, а также $\operatorname{tg}\mu_{11}$ и $\operatorname{tg}\nu_{11}$.

Съ этой цѣлью положимъ:

$$\left.\begin{aligned} U'\sin u' + U''\sin u'' &= \frac{F}{V^2}\,\Omega\sin(\Phi + \tau) \\ U'\cos u' + U''\cos u'' &= \frac{F}{V^2}\,\Omega_1\cos(\Phi + \tau_1), \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

причемъ Ω и τ, Ω_1 и τ_1 опредѣляются соотношеніями:

$$\Omega\cos\tau = p[F^2\cos\theta + PP'\cos\theta_1], \quad \Omega\sin\tau = p[F^2\sin\theta + PP'\sin\theta_1], \; (10)$$

какъ не трудно убѣдиться при помощи равенствъ (h) § 13 и (k) § 14, и соотношеніями:

$$\Omega_1\cos\tau_1 = p[F^2\cos\theta - PP'\cos\theta_1], \quad \Omega_1\sin\tau_1 = p[F^2\sin\theta - PP'\sin\theta_1] \; (11)$$

вытекающими изъ формулъ (i) § 13 и (l) § 14.

Изъ (10) и (11) обычнымъ путемъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^2 &= p^2[F^4 + P^2P'^2 + 2F^2PP'\cos(\mu' - \mu)] \\ \Omega_1^2 &= p^2[F^4 + P^2P'^2 - 2F^2PP'\cos(\mu' - \mu)]. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Значитъ, вычисливъ одно изъ количествъ Ω или Ω_1, другое найдемъ изъ соотношенія, вытекающаго изъ равенствъ (12), а именно:

$$\Omega^2 + \Omega_1^2 = 2p^2(F^4 + P^2P'^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Для опредѣленія τ и τ_1 (11) составляемъ формулы:

или:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\tau-\theta) &= -\frac{PP'\sin(\mu'-\mu)}{F^2+PP'\cos(\mu'-\mu)}\,,\\
\operatorname{tg}(\tau_1-\theta) &= \frac{PP'\sin(\mu'-\mu)}{F^2-PP'\cos(\mu'-\mu)}\,,\\
\operatorname{tg}(\tau-\theta_1) &= \frac{F^2\sin(\mu'-\mu)}{PP'+F^2\cos(\mu'-\mu)}\,,\\
\operatorname{tg}(\tau_1-\theta_1) &= -\frac{F^2\sin(\mu'-\mu)}{PP'-F^2\cos(\mu'-\mu)}\,.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots (14)$$

Зная эти вспомогательныя величины, получимъ:

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{PF\Omega\sin(\Phi+\tau)}{MV^2+PF\Omega_1\cos(\Phi+\tau_1)}\,.\;\ldots\ldots (15)$$

Для опредѣленія v_2 сначала полагаемъ, что:

$$P'\sin 2\Theta' + P\sin(\Theta'+\Theta) = M\sin m\,,\quad P'\cos 2\Theta' + P\cos(\Theta'+\Theta) = M\cos m\,,$$

а затѣмъ, при помощи формулъ (1), находимъ отсюда:

$$M\cos(\Theta'-m) = p\cos\theta\,,\quad M\sin(\Theta'-m) = -p\sin\theta\,,$$

т. е.

$$M = p\,,\quad m = \Theta'+\theta = 2\Theta'-\mu\,.\;\ldots\ldots (16)$$

Теперь безъ труда находимъ:

$$\operatorname{tg}v_2 = \frac{F^2P'p\sin(2\Phi+2\Theta'-\mu)-PP'^3\sin(\Theta'-\Theta)}{V^2-P^2P'^2+F^2P'p\cos(2\Phi+2\Theta'-\mu)-PP'^3\cos(\Theta'-\Theta)}\,.(17)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ $\operatorname{tg}\mu_{11}$ и $\operatorname{tg}v_{11}$, если предварительно опредѣлимъ вспомогательныя величины q, q_1, t и t_1 по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}
F^2\cos\Theta' + PP'\cos\Theta &= q\cos t\,, & F^2\cos\Theta' - PP'\cos\Theta &= q_1\cos t_1\,,\\
F^2\sin\Theta' + PP'\sin\Theta &= q\sin t\,, & F^2\sin\Theta' - PP'\sin\Theta &= q_1\sin t_1\,,
\end{aligned}\right\}.(81)$$

а именно:

$$\left.\begin{aligned}
q^2 &= F^4+P^2P'^2+2F^2PP\cos(\Theta'-\Theta)\,,\\
q_1^2 &= F^4+P^2P'^2-2F^2PP'\cos(\Theta'-\Theta)\,,
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots (19)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(t-\Theta) &= \frac{F^2\sin(\Theta'-\Theta)}{PP'+F^2\cos(\Theta'-\Theta)}\,, \\ \operatorname{tg}(t-\Theta') &= \frac{PP'\sin(\Theta'-\Theta)}{F^2+PP'\cos(\Theta'-\Theta)}\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (20)$$

или:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(t_1-\Theta') &= \frac{PP'\sin(\Theta'-\Theta)}{F^2-PP'\cos(\Theta'-\Theta)}\,, \\ \operatorname{tg}(t_1-\Theta) &= \frac{F^2\sin(\Theta'-\Theta)}{PP'-F^2\cos(\Theta'-\Theta)}\,. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (21)$$

Теперь можемъ найти

$$\operatorname{tg}\mu_{11} = \frac{2PP'Fq\sin(\Phi+t)}{MV^2+2PP'Fq_1\cos(\Phi+t_1)}\,; \ldots\ldots (22)$$

и наконецъ найдемъ:

$$\operatorname{tg}\nu_{11} = \frac{2PP'F^2\sin(2\Phi+\Theta'+\Theta)}{V^2-2P^2P'^2+2PF^2\cos(2\Phi+\Theta'+\Theta)}\,. \ldots (23)$$

Количество V^2, входящее въ эти формулы, опредѣляется изъ равенства

$$V^2 = F^4+P^2P'^2-2PP'F^2\cos(2\Phi+\Theta'+\Theta)\,. \ldots (24)$$

которое вытекаетъ изъ (f) или (h) или (i) § 13.

При помощи этого значенія V^2 выраженіе (23) превращается въ слѣдующее:

$$\operatorname{tg}\nu_{11} = \frac{2PP'F^2\sin(2\Phi+\Theta'+\Theta)}{F^4-P^2P'^2}\,. \ldots (23\,bis)$$

Фототипія Шереръ, Набгольцъ и К°, Москва.

K. Weierstrass.

Карлъ Вейерштрассъ.

Мм. гг.

Первые два мѣсяца текущаго года ознаменовались чувствительными утратами для математической науки: 18 января скончался въ Финляндіи молодой, но много обѣщавшій математикъ, магистрантъ С.-Петербургскаго Университета, *Владиміръ Андреевичъ Марковъ*, одинъ трудъ котораго напечатанъ въ сообщеніяхъ нашего Математическаго Общества, скончался въ самомъ началѣ своей ученой карьеры; 7-го февраля скончался въ Берлинѣ, на склонѣ лѣтъ, знаменитый германскій ученый *Карлъ Вейерштрассъ*, какъ разъ въ то время, когда подводилъ итоги своей, болѣе чѣмъ 57-ми лѣтней плодотворной ученой дѣятельности, приступивъ къ изданію своихъ трудовъ....

Къ крайнему сожалѣнію, ему не довелось самому окончить это дѣло: вышло только два тома, содержащіе его мемуары, помѣщавшіеся въ разныхъ періодическихъ изданіяхъ, главнымъ образомъ въ ежемѣсячныхъ отчетахъ Берлинской Академіи Наукъ, которой онъ состоялъ сорокъ лѣтъ членомъ, да печатаются теперь III-й томъ мемуаровъ и лекціи по Абелевымъ интеграламъ. Предвидя возможность не довести до конца, по преклонности лѣтъ, предпринятое изданіе и будучи озабоченъ, чтобы оно не прекратилось въ случаѣ его смерти, онъ обратился за содѣйствіемъ къ Берлинской Академіи Наукъ, которая, отнесясь сочувственно къ этому, выбрала изъ свой среды коммиссію изъ 4-хъ членовъ [1]), въ составъ которой вошелъ и самъ авторъ издаваемыхъ сочиненій, и поручила ей наблюденіе за этимъ изданіемъ. Но все-же приходится очень сожалѣть, что не придется уже самому автору довести дѣло до конца, тѣмъ болѣе, что теперь очередь за тѣми томами, которые будутъ посвящены его лекціямъ; послѣднія же записывались и составлялись его многочислеными слушателями, а не были изложены письменно имъ самимъ. Нѣкоторыя, впрочемъ, были уже отлитографированы и слѣдовательно, если не вполнѣ, то уже до нѣкоторой степени

[1]) Auwers, Frobenius, Schwarz, Weierstrass.

обработаны. Будемъ надѣяться, что давно ожидаемое математическимъ міромъ изданіе его лекцій не заставитъ себя долго ждать, что остальные члены коммиссіи и ученики покойнаго удвоятъ теперь свою энергію для ускоренія этого изданія, чтобы выразить тѣмъ свое глубокое почтеніе къ памяти знаменитаго ученаго, столько лѣтъ трудившагося на пользу науки и во славу своего отечества, и всегда привлекавшаго въ Берлинскій Университетъ стольких молодыхъ людей, стремившихся къ точному знанію изъ разныхъ странъ свѣта, въ томъ числѣ и изъ Россіи. Послѣднее обстоятельство налагаетъ и на насъ нравственную обязанность помянуть славнаго учителя столькихъ поколѣній, который своими глубокими излѣдованіями дѣлился прежде всего со своими учениками, изъ коихъ многіе, сдѣлавшись извѣстными учеными, въ томъ числѣ и наша соотечественница, покойная С. В. Ковалевская, распространяли въ ученомъ мірѣ какъ результаты его изысканій, такъ и его научные взгляды. Желаніе исполнить этотъ долгъ по отношенію къ глубоко почитаемому нами ученому, недавно сошедшему въ могилу, но который еще долго будетъ жить въ своихъ твореніяхъ, было побудительною причиною къ составленію предлагаемаго вниманію нашего Математическаго Общества краткаго очерка его жизни и дѣятельности, хотя принимаясь за это, я хорошо сознавалъ, что взятая мною на себя задача не совсѣмъ соразмѣрна съ моими силами, ни съ тѣмъ количествомъ времени, которымъ я теперь располагаю; откладывать же исполненіе этого долга до болѣе благопріятнаго времени не хотѣлось изъ опасенія отложить на всегда.

Карлъ Вейерштрассъ родился 31-го октября 1815 года въ Остенфельдѣ, въ округѣ города Мюнстера въ Вестфаліи (въ Прирейнской Пруссіи). Среднее образованіе получилъ въ приготовительной школѣ при Мюнстерской гимназіи и затѣмъ въ гимназіи въ Падерборнѣ, откуда былъ выпущенъ съ атестатомъ зрѣлости осенью 1834 года и тогда же поступилъ въ Боннскій Университетъ. Въ университетѣ онъ пробылъ до Пасхи 1838 года, изучая государственныя, естественныя и математическія науки. Пробывъ, по кончаніи курса, полгода у своихъ, онъ еще долгое время потомъ посѣщалъ Академію въ Мюнстерѣ, чтобы усовершенствоваться въ высшей математикѣ, работая подъ руководствомъ извѣстнаго профессора *Гудермана*, много занимавшагося тогда молодой еще теоріей эллиптическихъ функцій, но получившей не задолго передъ тѣмъ вдругъ такое громадное развитіе въ совершенно новомъ направленіи, благодаря блестящимъ изслѣдованіямъ геніальныхъ Абеля и Якоби [1]). Неудивительно, что молодой, съ солиднымъ интересомъ къ

[1]) Обозначенія котораго, какъ извѣстно, были упрощены Гудерманомъ, и это Гудермановское обозначеніе Якобіевскихъ эллиптическихъ функцій, которыя онъ называлъ модулярными, весьма распространено теперь.

наукѣ, Вейерштрассъ увлекся именно этой теоріей, занятія которой опредѣлили на всю жизнь его научное направленіе, (что онъ и самъ сознавалъ, какъ то видно изъ его рѣчи, произнесенной при вступленіи въ Академію). Какъ ни много было сдѣлано Абелемъ и Якоби для теоріи эллиптическихъ функцій, все же молодому, но глубоко вникавшему въ науку ученому, удалось замѣтить только затронутые, но еще не рѣшенные вопросы. Во введеніи къ своему „Précis d'une théorie des fonctions élliptiques" [1]) Абель высказалъ то положеніе, что модулярная функція $\mathrm{sn}(u)$, обозначаемая имъ чрезъ $\lambda(u)$, можетъ быть представлена въ видѣ частнаго двухъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ независимой перемѣнной u, сходящихся для всякихъ ея значеній, коэффиціенты которыхъ суть цѣлыя функціи модуля,—но доказательства котораго онъ не успѣлъ дать. Вейерштрассъ поставилъ себѣ первою задачей найти эти разложенія, а также показать какъ изъ нихъ могутъ быть получены другія извѣстныя разложенія эллиптическихъ функцій. Это ему удалось сдѣлать лѣтомъ 1840 г., и осенью того же года онъ защищалъ свою работу подъ заглавіемъ: „Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen" въ испытательной коммиссіи въ Мюнстерѣ для полученія права преподаванія (Facultas docendi). Гудерманъ далъ очень лестный отзывъ о ней, и она должна была быть напечатана, что однако не состоялось по неизвѣстнымъ причинамъ. Часть этой работы вошла позже въ мемуаръ объ Абелевыхъ функціяхъ, напечатанный въ 52 томѣ журнала Крелля [2]), а цѣликомъ она напечатана лишь теперь въ первомъ томѣ полнаго собранія его сочиненій, по желанію лицъ интересующихся исторіей теоріи эллиптическихъ функцій, какъ объясняетъ самъ авторъ въ примѣчаніи, слѣдующемъ за этимъ первымъ мемуаромъ I-го тома. Работа эта занимаетъ 49 стр. in 4^0 и содержитъ изложеніе теоріи тѣхъ функцій, которыя онъ обозначалъ впослѣдствіи черезъ $Al(u)$, и которыми занимались потомъ также Эрмитъ и Кэли. Самъ Вейерштрассъ впослѣдствіи замѣнилъ ихъ функціей $\sigma(u)$, (всѣ эти функціи представляютъ разные частные виды общей Θ-функціи) и за этой своей работой признаетъ лишь историческое значеніе; тѣмъ не менѣе это столь солидный самостоятельный трудъ, что могъ бы въ свое время доставить автору докторскую степень не только въ Германіи, но даже и у насъ, въ Россіи, гдѣ, какъ извѣстно, требованія отъ докторскихъ диссертацій бо́льше германскихъ. Для Вейерштрасса защита этой работы имѣла то практическое значеніе, что онъ былъ допущенъ къ пробнымъ урокамъ въ мѣстной гимназіи втеченіе

[1]) Crelle Journal. Bd. 4. S. 244; Bd. 6. S. 76; см. также „Oeuvres complettes, T. I. p. 527 § 10.

[2]) Послѣдній мемуаръ I-го тома его Mathematische Werke.

1841—42 учебнаго года, а въ началѣ слѣдующаго учебнаго года былъ приглашенъ учителемъ математики и физики въ прогимназію въ Deutsch-Krone, въ Пруссіи, въ Маріенвердерскомъ округѣ, и черезъ годъ былъ утвержденъ штатнымъ преподавателемъ этой прогимназіи.

Какъ въ этой работѣ уже обозначились та научная область, которою онъ не переставалъ интересоваться всю свою долгую жизнь—именно теорія функцій, и расположеніе къ методу рядовъ, а также строгость и точность его научныхъ изслѣдованій, такъ тоже самое замѣтно и въ слѣдующихъ его произведеніяхъ Мюнстеровскаго періода. Второй мемуаръ I-го тома его Math. Werke, озаглавленный: „Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absolute Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt", имѣетъ предметомъ рядъ Лорана, по нынѣшней терминологіи, и содержитъ нѣкоторыя предложенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, тогда еще несуществовавшей, доказанныя съ помощію особаго пріема, не столь легкаго, какъ нынѣшніе, но свидѣтельствующаго о высокихъ математическихъ способностяхъ тогда еще молодаго автора. Въ этой статьѣ онъ даетъ комплексной величинѣ $a+bi$ не приведенную форму Коши, но представляетъ ее въ такомъ видѣ:

$$a+bi=r\,\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i},$$

гдѣ r обозначаетъ модуль (absolute Betrag), а λ есть вещественная величина, измѣняющаяся отъ $-\infty$ до $+\infty$; она связана съ аргументомъ θ равенствомъ

$$\lambda=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

какъ нетрудно видѣть.

Слѣдующій мемуаръ „Zur Theorie der Potenzreihen "имѣетъ задачей дать высшій предѣлъ для абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ одной или нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ того-же вида, какъ въ предыдущемъ мемуарѣ. Здѣсь уже встрѣчаются термины „безусловно и равномѣрно-сходящіеся ряды".

Къ этому же періоду относится и только теперь опубликованный 4-й мемуаръ I-го тома его сочиненій, содержащій доказательство теоремы Коши для системы дифференціальныхъ уравненій, найденное въ эпоху, когда доказательство самого Коши еще не было извѣстно Вейерштрассу; доказательство послѣдняго въ сущности одинаково съ доказательствомъ перваго, но полнѣе его въ томъ отношеніи, что Вейерштрассъ доказываетъ, что ряды представляющіе интегралы не только безусловно, но и *равномѣрно*-сходящіеся, и потому представляютъ аналитическія функніи, (на что обращено вниманіе уже въ предыдущемъ мемуарѣ). Тутъ говорится впервые и объ *аналитическомъ продолженіи функцій*, причемъ усматривается возможность существованія такихъ особенныхъ точекъ, при приближеніи къ которымъ радіусъ круга сходимости уменьшается до нуля.

Этотъ мемуаръ написанъ въ 1842 г., откуда видно, что Вейерштрассъ къ этому понятію подошелъ независимо отъ Puiseux, знаменитый мемуаръ котораго объ алгебраическихъ функціяхъ былъ опубликованъ въ 1850—51 годахъ.

Какъ видимъ, уже Мюнстерскій періодъ ученой дѣятельности Вейерштрасса отмѣченъ солидными изслѣдованіями, и въ этотъ же періодъ выработалось то представленіе объ аналитической функціи, которое проходитъ чрезъ весь рядъ послѣдующихъ работъ Вейерштрасса и его учениковъ и дѣлается въ настоящее время господствующимъ; уже въ этотъ періодъ обращено вниманіе на необходимость равномѣрной сходимости рядовъ, тогда какъ другими было обращено вниманіе только на безусловную сходимость.

Къ эпохѣ пребыванія его въ Deutsch-Krone относятся три сочиненія: 1) Bemerkungen über die analytischen Facultäten (1843); 2) маленькая замѣтка „Reduction eines bestimmten dreifachen Integrals", а также, не вошедшее въ изданные томы его Werke, сочиненіе: 3) „Ueber die Sokratische Lehrmethode" (1845).

Первое изъ этихъ сочиненій возникло по желанію Крелля, котораго „Theorie der analytischen Facultäten", 1824 г., подверглась строгой критикѣ Ома, утверждавшаго, что самыя основанія Креллевской теоріи ложны. Хотя это обвиненіе Вейерштрассу и удалось снять, однако онъ самъ замѣтилъ много не несущественныхъ недостатковъ этой теоріи, что и сообщилъ лично Креллю, который и просилъ его изложить свои изслѣдованія. Впослѣдствіи, въ 1854 г., онъ еще разъ вернулся къ этому предмету по настоятельной просьбѣ того же Крелля, и напечаталъ въ 51-мъ томѣ его журнала систематическій трактатъ по этой теоріи. Онъ былъ перепечатанъ въ 1886 г. въ сборникѣ Вейерштрасса—Abhandlungen aus der Functionenlehre, причемъ въ подстрочномъ примѣчаніи авторъ говоритъ, что по его мнѣнію эта теорія не имѣетъ такого значенія какое ей придавалось прежде, и онъ печатаетъ ее опять лишь потому, что въ этой работѣ найдется кое-что полезное для начинающихъ математиковъ, причемъ онъ измѣнилъ только введеніе, войдя въ бо́льшія подробности относительно критикуемаго сочиненія, въ виду того, что теперь его не всякій можетъ достать.

Въ Deutsch-Krone Вейерштрассъ оставался до 1848 года, когда перешелъ преподавателемъ математики и физики въ католическую гимназію города Braunsberg'а въ восточной Пруссіи (не далеко отъ Кенигсберга), и въ первый-же годъ своей преподавательской дѣятельности въ этой гимназіи, напечаталъ въ ея отчетѣ за 1848—49 годъ, (Braunsberger-Programm) замѣчательную статью подъ заглавіемъ: „Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale“, содержащую нѣкоторые результаты его изслѣдованій. Изъ этой статьи видно, что онъ уже давно занимался этими интегралами и, главнымъ образомъ, задачей Якоби—найти на самомъ дѣлѣ аналитическія выраженія для функцій, обратныхъ Абелевымъ интеграламъ, и это удалось ему сдѣлать путемъ отличнымъ отъ того, которому слѣдовали Göpel и др. Онъ заявляетъ тамъ кромѣ того еще, что онъ въ своихъ упоминаемыхъ изысканіяхъ выходитъ изъ самыхъ интегральныхъ уравненій, которыми эти функціи опредѣляются, и показываетъ затѣмъ съ помощію теоремы Абеля, что всѣ они суть корни уравненія, котораго коэффиціенты выражаются чрезъ нѣкоторое число вспомогательныхъ функцій, вполнѣ аналогичныхъ Θ-функціямъ Якоби въ теоріи эллиптическихъ функцій, и которыя подобно этимъ разлагаются въ постоянно-сходящіеся ряды, составленные по одному весьма простому закону, причемъ эти сходящіеся ряды онъ получаетъ съ помощію нѣсколькихъ характеристическихъ свойствъ этихъ функцій, которыми онѣ вполнѣ опредѣляются. Но для этого нужно знать нѣкоторыя соотношенія между періодами интеграловъ 1-го и 2-го рода, аналогичныя извѣстному Лежандровскому въ теоріи эллиптическихъ функцій, которыя получаются сами собою (in ungesuchter Weise) по пути, которому онъ слѣдовалъ, однако нѣсколько обстоятельно; почему онъ былъ очень обрадованъ, найдя въ одномъ мемуарѣ Абеля: „Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes“ [1]) одно тождество—истинный источникъ, изъ котораго получаются очень просто какъ эти, такъ и многія другія соотношенія, болѣе общія. Выводу упомянутыхъ соотношеній изъ этого тождества, (выведеннаго Абелемъ для болѣе общаго случая) и посвящается статья Вейерштрасса, о которой идетъ рѣчь, причемъ онъ попутно знакомитъ читателя съ гиперэллиптическими функціями многихъ перемѣнныхъ, аналогичными модулярнымъ.

Болѣе подробное изложеніе изслѣдованій Вейерштрасса въ этой области, о которыхъ онъ только упоминалъ въ названной статьѣ, но еще безъ доказательствъ, мы находимъ въ его статьѣ: „Zur Theorie der Abelschen Functionen“, написанной имъ въ 1853 г. въ Saline-Westerkoten въ Вестфаліи и напечатанной въ 47 т. журнала Крелля. Здѣсь, кромѣ изложенія нѣкоторыхъ свойствъ Абелевыхъ функцій и интеграловъ, мы встрѣчаемся впервые съ тѣмъ натуральнымъ переходомъ отъ интеграловъ къ функціямъ многихъ перемѣнныхъ: $Al(u_1, u_2, \ldots u_\rho)$ (представляющихъ частные случаи общей Θ-функціи), который, по нашему мнѣнію, есть одно изъ важнѣйшихъ открытій Вейерштрасса.

[1]) Т. II, стр. 54 прежняго и 43 новаго изданія „Oeuvres complètes“ Абеля.

Послѣ этого мемуара былъ напечатанъ имъ въ 51 томѣ того-же журнала вышеупомянутый мемуаръ „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten“, а въ слѣдующемъ, 52-мъ, мемуаръ подъ заглавіемъ: „Theorie der Abelschen Functionen“, писанный при стѣсненныхъ обстоятельствахъ и, къ сожалѣнію, оставшійся неоконченнымъ, вслѣдствіе потери рукописи, какъ то я лично слышалъ отъ Вейерштрасса. Онъ прервался вначалѣ II-й главы, надписанной такъ: „Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischen Functionen durch Reihen“, содержавшей, въ видѣ отступленія, изслѣдованія изъ области эллиптическихъ функцій, составлявшія предметъ его перваго мемуара и теперь выброшенныя. Это послѣдній мемуаръ I-го тома его Math. Werke. Первая глава съ надписью: „Erklärung der Abelschen Functionen; Bestimmung der Form derselben“, содержитъ доказательство возможности представить Абелевы функціи въ видѣ частного двухъ постоянно-сходящихся рядовъ ϱ аргументовъ, основанное на теоремѣ Абеля и представляющее обобщеніе аналогичнаго положенія въ теоріи эллиптическихъ функцій, высказаннаго въ его самой первой работѣ (Мюнстерской), доказательство, которому онъ самъ придавалъ очень большое значеніе, какъ то я слышалъ лично отъ него. Этотъ мемуаръ содержитъ доказательства и выводы многихъ формулъ, сообщенныхъ въ „программѣ“ и въ 47 т. журнала Крелля, но не всѣхъ.

Эти изслѣдованія, новизною и солидностью результатовъ обратили на Вейерштрасса вниманіе ученыхъ Германіи, и въ 1856 г. онъ былъ приглашенъ въ Берлинскій университетъ экстраординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ чистой математики, а въ слѣдующемъ, 1857-мъ былъ избранъ въ члены Берлинской Академіи Наукъ, въ періодическомъ изданіи которой: Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, онъ съ той поры сталъ помѣщать свои труды за немногими исключеніями. Многіе изъ его мемуаровъ и замѣтокъ переводились на французскій языкъ и печатались во французскихъ изданіяхъ, главнымъ образомъ въ Bulletin Darboux. Для насъ, русскихъ, небезъинтересно, что первая помѣщенная имъ въ томъ же году замѣтка была вызвана извѣстнымъ мемуаромъ нашего знаменитаго ученаго, покойнаго П. Л. Чебышева, объ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ въ логариѳмахъ, помѣщеннымъ въ журналѣ Ліувиля 2-я серія, т. II. По поводу этой работы Вейерштрассъ показалъ, что условія интегрируемости эллиптическаго интеграла въ логариѳмахъ могутъ быть легко выведены, если интегралъ разложить на интегралы трехъ родовъ и выразить эти послѣдніе въ функціи отъ интеграла перваго рода, означаемаго имъ чрезъ u, а затѣмъ ввести вмѣсто интеграловъ третьяго рода ихъ линейныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами; эти послѣднія приводятся въ случаѣ интегрируемости въ логариѳмахъ на основаніи теоремы о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ нормальныхъ интегралахъ третьяго рода и теоремы Абеля каждая къ суммѣ логариѳма отъ нѣкоторой раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$, раздѣленнаго на нѣкоторое четное число, и интеграла перваго рода u, умноженнаго на нѣкоторую постоянную; этотъ послѣдній, равно какъ и интегралъ второго рода должны уйти изъ результата подстановки этихъ выраженій вмѣсто введенныхъ линейныхъ функцій интеграловъ третьяго рода въ разложеніе даннаго интеграла, въ случаѣ интегрируемости его въ логариѳмахъ, что доставитъ еще два условія. Всѣ эти условія, какъ первыя, вытекающія изъ теоремы Абеля, такъ и сейчасъ упомянутыя, получаются сперва въ трансцендентной формѣ, но на основаніи фундаментальныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ функцій легко приводятся къ алгебраическимъ соотношеніямъ между постоянными, входящими въ данный интегралъ; оставляетъ желать лучшаго имѣющійся способъ приведенія даннаго интеграла къ сказанному виду, но и его возможно сдѣлать болѣе удобнымъ при помощи упомянутаго свойства интеграла третьяго рода. Легкость полученія такимъ способомъ условій интегрируемости въ логариѳмахъ побудила его, говоритъ далѣе Вейерштрассъ, поставить эту задачу шире, примѣнительно къ Абелевымъ интеграламъ, и его розысканія по этому вопросу, какъ онъ заявляетъ, были не безуспѣшны, такъ какъ главныя трудности имъ уже преодолѣны, и сравнительно немного остается сдѣлать, чтобы рѣшить эту задачу окончательно. При этомъ изслѣдованіи главными вспомогательными средствами его были соотношенія между періодами интеграловъ и теорема Абеля, которыя составляютъ по его мнѣнію фундаментъ всего интегральнаго исчисленія, причемъ онъ обѣщаетъ показать, въ другой статьѣ, что сама теорема Абеля есть слѣдствіе нѣкотораго другого предложенія. Вопросъ объ интегрируемости въ логариѳмахъ онъ считаетъ неустранимымъ изъ интегральнаго исчисленія, такъ какъ логариѳмы первыя трансцендентныя, съ которыми мы знакомимся, и онъ очень сожалѣетъ, что эти вопросы едва затрогиваются въ учебникахъ, авторамъ которыхъ угодно давать гордое названіе системы интегральнаго исчисленія (den stolzen Namen eines Systems der Integral-Rechnung) собранію отдѣльныхъ результатовъ, добытыхъ усиліями Эйлера, Лагранжа и др. Онъ заявляетъ въ заключеніе, что для интеграла вида $\int F(x, \sqrt[m]{R(x)})\, dx$ изслѣдованіе этого вопроса доведено имъ до конца, и онъ надѣется въ скоромъ времени сообщить Академіи о результатахъ своихъ изысканій. Однако это обѣщаніе, какъ и предыдущее, осталось неисполненнымъ по неизвѣстной причинѣ.

Въ Monats-Berichte мы находимъ еще только одну замѣтку, касающуюся Абелевыхъ интеграловъ, именно замѣтку объ интегрированіи системы гиперэллиптическихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=0}^{i=\rho} \frac{x_i^\lambda\, dx_i}{\sqrt{R(x_i)}} = 0\,, \quad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots \rho - 1]$$

вызванной замѣткой по тому-же предмету Якоби, помѣщенной въ 32-мъ томѣ журнала Крелля [1]), въ которой онъ выводитъ алгебраическіе интегралы этой системы изъ теоремы Абеля, а затѣмъ на самомъ дѣлѣ выводитъ квадратное соотношеніе между двумя симметрическими функціями и линейное между тремя таковыми функціями отъ $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\rho$, существованіе которыхъ было предусмотрѣно Якоби въ упомянутой сейчасъ замѣткѣ.

Другія изслѣдованія, помѣщенныя въ Berliner Berichte, и вошедшія въ составъ первыхъ томовъ его Mathematische Werke, относятся къ другимъ вопросамъ; свои-же изслѣдованія изъ области Абелевыхъ интеграловъ и функцій онъ сообщалъ большею частію на лекціяхъ, иногда въ письмахъ къ другимъ ученымъ. Изъ одного мемуара С. В. Ковалевской видно, что онъ занимался также резсмотрѣніемъ случаевъ, когда Абелевы интегралы какого-либо ранга сводятся къ таковымъ нисшаго ранга, въ частности къ эллиптическимъ; методою Вейерштрасса она и пользовалась при рѣшеніи подобнаго вопроса.

Гиперэллиптическіе интегралы тотчасъ слѣдуютъ за эллиптическими въ системѣ интегральнаго исчисленія; поэтому предшественники Вейерштрасса въ этой области, Якоби, Ришело и Эрмитъ, на нихъ исключительно и обратили свое вниманіе; съ нихъ совершенно естественно началъ свои изысканія и Вейерштрассъ тѣмъ болѣе, что въ этомъ конкретномъ случаѣ всѣ вычисленія могутъ быть не только указаны, но и выполнены на самомъ дѣлѣ [2]). Вейерштрассъ нѣсколько разъ излагалъ полную теорію ихъ на лекціяхъ въ Берлинскомъ Университетѣ, которыя записывались и составлялись его слушателями. Одинъ такой рукописный курсъ я видѣлъ лѣтомъ 1884 г. въ Лейпцигскомъ математическомъ семинарѣ, пріобрѣтенный стараніями профес. Клейна. Лучше всего по этому предмету, какъ я слышалъ отъ самого Вейерштрасса осенью того-же года, курсъ записанный и составленный по его лекціямъ Гурвицемъ [3]), къ которому онъ и совѣтовалъ мнѣ обратиться для разъясненія занимавшаго меня тогда вопроса; однако, такъ какъ для меня было достаточно того указанія, которое я получилъ лично отъ самого Вейерштрасса по этому вопросу, то я не рѣшился просить Гурвица выслать мнѣ этотъ курсъ на просмотръ, и потому не могу его здѣсь описать.

[1]) Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. II, мемуаръ № 13.

[2]) См. наше „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ“. Харьковъ 1885 г.

[3]) Hurwitz, въ 1884 г. профессоръ Кенигсбергскаго Университета, теперь Цюрихскаго Политехникума.

Вейерштрассъ однако не ограничился изученіемъ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ, но также обстоятельно изслѣдовалъ и общіе Абелевы интегралы, зависящіе отъ ирраціональности, опредѣляемой какимъ угодно неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$, но ничего по этому предмету не напечаталъ. Единственное, что мы встрѣтили въ печати, гдѣ сообщались основныя формулы изъ его теоріи Абелевыхъ интеграловъ, хотя безъ доказательствъ, это замѣтка Берлинскаго профессора Геттнера (Hettner) въ Gött. Nachrichten, 1884 г., подъ заглавіемъ: Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindentig-umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen“, написанной по поводу статьи Шварца въ 87-мъ томѣ журнала Борхардта (Крелля), и только теперь напечатанные во II-мъ т. Math. Werke Вейерштрасса отрывки изъ его письма къ Шварцу по поводу той-же статьи этого послѣдняго, въ которой доказывается такое предложеніе: „Если неприводимое алгебраическое уравненіе между двумя перемѣнными допускаетъ безконечный рядъ (eine Schaar) раціонально и однозначно-обратимыхъ преобразованій въ самое себя, то рангъ алгебраическаго образа есть нуль или единица“. Геттнеръ даетъ алгебраическое доказательство этого предложенія на основаніи формулъ Вейерштрасса, которыя онъ поэтому предварительно и приводитъ. Сущность его доказательства заключается въ томъ, что допущеніе существованія преобразованія уравненія въ самое себя при помощи раціонально-обратимой подстановки, содержащей одинъ произвольный параметръ, ведетъ къ противорѣчію съ той истиной, легко доказываемой имъ при помощи формулъ Вейерштрасса, что число мѣстъ алгебраическаго образа опредѣляемаго даннымъ неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$ ранга ϱ, для которыхъ можно найти функцію, которая только въ одномъ этомъ мѣстѣ обращалась бы въ нуль порядка $\leqq \varrho$, есть конечное. Вейерштрассъ въ своемъ письмѣ къ Шварцу показываетъ, что между двумя функціями z_1 и z_r обращающимися въ одномъ только мѣстѣ (a, b) въ ∞^{v_1} и ∞^{v_r} соотвѣтственно, причемъ $v_1 \leqq \varrho$, а v_r число простое съ v_1 и ближайшее къ нему, для котораго существуетъ такая функція, имѣетъ мѣсто неприводимое алгебраическое уравненіе $F(z_1^{v_r}, z_r^{v_1}) = 0$, которое точно также будетъ преобразовываться само въ себя въ одно время съ уравненіемъ $f(x, y) = 0$; опираясь на это, а также на то, какъ и Геттнеръ, что такихъ мѣстъ (a, b) для которыхъ существуетъ функція какъ z_1 имѣется конечное число, онъ заключаетъ, что „если какое либо уравненіе $f(x, y) = 0$ допускаетъ раціональныя преобразованія въ самое себя, то во всякомъ случаѣ, если рангъ его $\varrho > 1$, число такихъ преобразованій будетъ всегда конечное“. Въ этомъ письмѣ онъ замѣчаетъ также, что если r, имѣетъ наименьшее значеніе, то уравненіе между z_1 и z_r будетъ содержать наименьшее число постоянныхъ. Вообще, если v_1 не меньше ϱ, то число ихъ будетъ, согласно съ предложеніемъ Римана равно $3\varrho-3$; но v_1 можетъ спуститься до 2, (какъ для эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ интеграловъ), и число произвольныхъ коэффицiентовъ спускается тогда до $2\varrho-1$. Имѣется и способъ для приведенія даннаго уравненія къ такому „каноническому виду", хотя мало практичный. Тѣмъ не менѣе г-жа Ковалевская нашла для него эти уравненія на самомъ дѣлѣ для $\varrho = 1, 2, 3, 4, 5$.—Въ заключеніе онъ въ первый разъ въ этомъ письмѣ сообщаетъ выраженіе раціональной функціи отъ x, y, связанныхъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$, и общаго Абелева интеграла, зависящаго отъ этой ирраціональности, чрезъ примъ-функціи обоихъ родовъ.

Замѣтка Геттнера, какъ сказано выше, напечатана въ 1884 г., тогда какъ это письмо Вейерштрасса было написано лѣтомъ 1875; къ тому-же времени, именно 1875—76, относится и тотъ рукописный курсъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, читанный въ Берлинскомъ университетѣ, съ которымъ я имѣлъ случай познакомиться въ 1884 г. въ библіотекѣ Лейпцигскаго семинара. Изъ этого курса видно, что у Вейерштрасса все выводится изъ одного тождества, о которомъ уже было выше упомянуто. Отсюда онъ получаетъ формы нормальныхъ интеграловъ второго и третьяго рода, соотношенія аналогичныя Лежандровскому въ теоріи эллиптическихъ функцій между періодами интеграловъ перваго и второго рода, примъ-функціи и выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, а также алгебраической функціи, зависящей отъ той-же ирраціональности; отсюда, какъ простое слѣдствіе теорему Абеля. Частный случай послѣдней приводитъ къ рѣшенію задачи Якоби, именно: онъ выражаетъ чрезъ новыя перемѣнныя—значенія суммъ ϱ интеграловъ перваго рода,—суммы интеграловъ второго и третьяго рода и разсматриваетъ частныя производныя по нимъ суммъ интеграловъ второго рода; оказывается, что эти послѣднія суть частныя производныя нѣкоторой вспомогательной функціи, чрезъ которую все можетъ быть выражено. Если эту функцію взять показателемъ степени числа e, то получается однозначная, конечная и непрерывная функція ϱ новыхъ перемѣнныхъ, обладающая свойствами, аналогичными свойствамъ Якобіевой Θ-функціи. Вейерштрассъ въ заключеніе выводитъ ея разложеніе въ рядъ. Такимъ образомъ теорія Абелевыхъ трансцендентныхъ сводится къ теоріи Θ-функцій многихъ перемѣнныхъ самымъ натуральнымъ, а не искусственнымъ образомъ, какъ у другихъ изслѣдователей. Разъ такой результатъ получился, натурально является желаніе обратно отъ Θ-функціи вернуться къ Абелевымъ интеграламъ. Вейерштрассъ думалъ и объ этомъ, но едвали самъ приступалъ къ подробному рѣшенію этого вопроса, а далъ указанія своему ученику Шоттки (Schottky), изслѣдованія котораго изложены въ его извѣстномъ сочиненіи „Abriss einer Theorie der Abelschen Function von drei Variablen". Leipzig 1880 [1]).

Какъ ни замѣчательна по своей простотѣ, натуральности и изяществу теорія Абелевыхъ интеграловъ Вейерштрасса, но это не она принесла ему его обширную извѣстность. Признававшаяся до сихъ поръ, и не безъ основанія, очень трудною и въ тоже время имѣющая пока мало приложеній (но которая, несомнѣнно, будетъ ихъ имѣть), теорія Абелевыхъ интеграловъ интересовала до недавняго времени сравнительно очень не многихъ. Въ Германіи ею стали больше интересоваться въ семидесятыхъ годахъ, когда появились лекціи Неймана о Римановой теоріи Абелевыхъ интеграловъ и теорія Абелевыхъ функцій Клебша и Гордана; во Франціи-же стали ею заниматься лишь въ слѣдующее десятилѣтіе послѣ Бріо и Букэ, если не считать работы Галуа и Пюизе; въ другихъ-же государствахъ Европы и Америки, куда ее перенесъ Кэли, стали ею интересоваться тоже лишь въ восьмидесятыхъ годахъ. Но это были именно теоріи Римана и Клебша, съ которыми начали знакомиться, тогда какъ другія двѣ: Гёпеля и Розенгайна, и Вейерштрасса, и въ Германіи находили мало послѣдователей,—Вейерштрассовская конечно потому, что распространялась лишь при помощи его лекцій, того-же, что было имъ напечатано, было не совсѣмъ достаточно для составленія полнаго понятія и о его теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ, но достаточно все-таки, чтобы заинтересовать ею. Должно полагать, что Вейерштрассъ медлилъ изданіемъ своего курса сперва изъ желанія еще болѣе усовершенствовать разныя доказательства, а можетъ быть и рѣшить какіе либо частные вопросы и тѣмъ пополнить свой курсъ, а потомъ уже не хватало быть можетъ по преклонности лѣтъ и энергіи приняться за обработку начисто своихъ лекцій, тѣмъ болѣе, что такая работа, въ нѣкоторомъ смыслѣ техническая, не много и скучновата для человѣка особенно склоннаго преимущественно къ созерцательной дѣятельности, къ размышленію, къ углубленію въ науку, какимъ уже давно сталъ Вейерштрассъ, хотя въ молодости былъ отличнымъ вычислителемъ, какъ о томъ свидѣтельствуетъ первая его работа.

---

[1]) О сущности Вейерштрассовской теоріи какъ гиперэллиптическихъ интеграловъ, такъ и Абелевыхъ, можно составить полное понятіе по моимъ сочиненіямъ: „Отчетъ о занятіяхъ моихъ въ Лейпцигѣ. Харьковъ 1885 г."; „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ. Харьковъ 1885 г.", „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Харьковъ, 1895 г.", къ которымъ поэтому я и могу совѣтовать обратиться интересующихся этой теоріей; но долженъ замѣтить, что мои доказательства и выводы часто очень отличаются отъ Вейерштрассовскихъ, ибо послѣднія основаны исключительно на формѣ разложенія разсматриваемыхъ функцій въ степенные ряды (Potenzreihen) вблизи той или другой особенной точки, тогда какъ я предпочелъ чисто алгебраическіе выводы и доказательства. Вышеупомянутая замѣтка Геттнера можетъ дать понятіе о способахъ доказательства Вейерштрасса, обратиться къ которой поэтому я также могу совѣтовать желающимъ.

И дѣйствительно, въ настоящее время появляется много прекрасныхъ курсовъ, обработываемыхъ учениками свѣтилъ первой величины современнаго математическаго міра, которымъ самимъ и некогда и скучно заниматься отшлифовкой своихъ лекцій. Остается пожелать, чтобы и ученики Вейерштрасса, подобно ученикамъ Клейна, Ли, Пуанкарэ, Гурса,—поскорѣе издали замѣчательныя его лекціи по теоріи гиперэллипточескихъ и Абелевыхъ интеграловъ, а также и по другимъ предметамъ. Хотя теперь многія изъ его доказательствъ и методовъ могутъ быть замѣнены уже другими, какъ то можно видѣть изъ работъ Нётера и изъ моихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ", тѣмъ не менѣе эти лекціи долго будутъ еще представлять огромный интересъ и будутъ признаны всѣми однимъ изъ лучшихъ твореній Вейерштрасса, и его теорія—одной изъ лучшихъ теорій науки.

А пока, нужно признаться, ученой славѣ Вейерштрасса способствовали, какъ это впрочемъ чаще всего бываетъ, его труды изъ области знанія, получившей уже раньше права гражданства у математиковъ обоихъ полушарій, именно его изслѣдованія по теоріи эллиптическихъ функцій и по теоріи аналитическихъ функцій вообще.

Послѣ первой работы Вейерштрасса, посвященной теоріи функцій $Al(u)$, имъ самимъ были опубликованы только два мемуара по теоріи эллиптическихъ функцій: одинъ изъ нихъ, написанный въ 1882 году, посвященъ выводу частнаго дифференціальнаго уравненія по u, ω, ω', которому удовлетворяютъ функціи $\sigma(u, \omega, \omega')$ и $\sigma_\lambda(u, \omega, \omega')$ [1]), и примѣненію этого уравненія къ разложенію этихъ функцій въ рядъ — онъ является такимъ образомъ замѣстителемъ самаго перваго мемуара, преслѣдовавшаго подобную цѣль относительно прежнихъ функцій $Al(u)$, замѣненныхъ теперь функціей $\sigma(u)$; второй читанный въ Академіи въ 1883 году, написанъ съ цѣлію восполнить усмотрѣнный Вейерштрассомъ пробѣлъ въ Якобіевой „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" [2]), въ которомъ Якоби рѣшилъ свою задачу только для случая, когда модуль k заключается въ предѣлахъ 0 и 1, Вейерштрассъ-же выражаетъ q въ функціи k рядомъ быстро-сходящимся и для комплекснаго k.

Первымъ, познакомившимъ ученый міръ съ функціями $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ Вейерштрасса, былъ, сколько намъ извѣстно, его ученикъ Kiepert, помѣстившій въ 1882 г. въ одномъ изъ томовъ журнала Крелля мемуаръ, посвященный умноженію аргумента эллиптическихъ функцій, и затѣмъ H. Schwartz, издавшій въ 1883 г. 10 листовъ „Formeln und Lehrsätze

---

[1]) Онъ былъ въ слѣдующемъ году отлитографированъ въ Геттингенѣ съ прибавленіемъ Шварца; этимъ изданіемъ я пользовался при составленіи послѣдней главы моей „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій". Харьковъ, 1895 г.

[2]) Gesammelte Werke, Bd. I. S. 497 ff.

zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwartz". Послѣднее изданіе очень способствовало распространенію Вейерштрассовской теоріи эллиптическихъ функцій, дотолѣ извѣстной лишь его ученикамъ изъ его лекцій, а также и извѣстное сочиненіе Halphen'a: „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications", первый томъ котораго вышелъ уже чрезъ три года послѣ таблицъ Schwartz'a, именно въ 1886 г., а второй въ 1888 г. Не мало способствовали тому также и лекціи, отчасти и книга: „Modulfunctionen" Клейна, который не только ввелъ Вейерштрассовскія функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ въ свои лекціи, но построилъ и для гиперэллиптическихъ интеграловъ функцію аналогичную $\sigma(u)$, обладающей свойствомъ быть „формой" отъ u и ω, ω', т. е. однородной функціей этихъ величинъ, и въ этомъ направленіи сталъ вмѣстѣ съ Burchardt'омъ разрабатывать теоріи этихъ интеграловъ. Что касается до книги Halphen'a, то въ ней Вейерштрассовскія функціи вводятся еще не самостоятельно, но выводятся изъ Якобіевскихъ, что не натурально; какъ можно видѣть изъ статьи Миттагъ-Леффлера: „О введеніи въ анализъ эллиптическихъ функцій", написанной по шведски и напечатанной въ 1876 г. въ Гельсингфорсѣ, а также изъ нашей „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій", они появляются сами собою, равно какъ и Эрмитовская каноническая форма подрадикальной функціи въ эллиптическомъ интегралѣ, принятая Вейерштрассомъ, при извѣстной постановкѣ вопроса о теоремѣ Эйлера. Функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ на столько хорошо извѣстны теперь—онѣ встрѣчаются уже и въ изслѣдованіяхъ русскихъ ученыхъ—, что мнѣ о нихъ распространяться излишне: незнакомымъ-же съ ними могу указать на свое вышеназванное сочиненіе по теоріи эллиптическихъ функцій. Скажу еще только то, что Вейерштрассъ излагалъ теорію эллиптическихъ функцій на своихъ лекціяхъ двоякимъ образомъ: одинъ разъ онъ выходилъ изъ интеграловъ,—это тотъ курсъ, который повидимому слушалъ Миттагъ-Леффлеръ, какъ то можно предполагать на основаніи вышеупомянутой статьи его; другой разъ,—и этотъ курсъ былъ повторяемъ,—онъ принималъ за исходную точку теорему сложенія и доказывалъ, что аналитическая функція одной независимой перемѣнной обладающая алгебраической теоремой сложенія будетъ: или 1) алгебраическая, или 2) алгебраическая отъ $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$, или 3) алгебраическая функція отъ $s=\wp(u)$, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

гдѣ g_2 и g_3 приличнымъ образомъ выбранныя постоянныя, и условіемъ, что $\wp(0) = \infty^2$, а затѣмъ онъ прямо строилъ функцію $\sigma(u)$ по ея нулямъ согласно съ своей извѣстной теоремой, о которой будетъ рѣчь впереди, и оттуда, дифференцируя по взятіи логариѳма разъ и другой, получалъ функцію $\zeta(u)$ и $\wp(u)$ и обнаруживалъ такимъ образомъ ихъ свойства, а затѣмъ и свойства эллиптическихъ интеграловъ. Имъ подробно былъ развитъ и способъ вычисленія этихъ функцій. Такой рукописный курсъ я видѣлъ въ Лейпцигѣ въ 1883 г. Оба курса появятся вмѣстѣ въ одномъ изъ слѣдующихъ томовъ „Mathem. Werke" Вейерштрасса.

При занятіяхъ спеціальными теоріями функцій эллиптическихъ, гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ, естественно было встрѣтиться съ вопросами, касающимися аналитическихъ функцій вообще, и обратиться къ внимательному пересмотру установившихся понятій: отсюда вышли и курсы по введенію въ общую теорію аналитическихъ функцій, читавшіеся нѣсколько разъ Вейерштрассомъ, (между прочимъ и въ осенній семестръ 1884 г., когда я былъ въ Берлинѣ), и рядъ мемуаровъ и замѣтокъ, помѣщавшихся въ ежемѣсячныхъ отчетахъ Академіи, и собранныхъ въ 1886 г. въ особый сборникъ подъ названіемъ: „Abhandlungen aus der Functionenlehre" (Berlin, J. Springer) въ виду громаднаго интереса, возбужденнаго ими въ математическомъ мірѣ и вызвавшаго цѣлый рядъ дальнѣйшихъ изслѣдованій. Въ этой сферѣ вліяніе Вейерштрасса была огромное: если изслѣдованія въ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ вызвали не болѣе какъ 10—12 опубликованныхъ работъ, теорія же эллиптическихъ функцій уже значительно больше, то изслѣдованія по вопросамъ общей теоріи функцій создали цѣлую литературу на всѣхъ почти европейскихъ языкахъ, столь обширную, что одинъ списокъ сочиненій потребовалъ бы не одинъ печатный листъ. Особенно посчастливилось, что впрочемъ весьма понятно, вопросу объ аналитическомъ представленіи однозначныхъ функцій, а затѣмъ непрерывнымъ функціямъ неимѣющимъ производныхъ, и вообще теоріи рядовъ. И дѣйствительно, возможность построить однозначную функцію по даннымъ ея нулямъ, а также и однозначную функцію съ даннымъ числомъ существенно-особенныхъ точекъ, принадлежитъ къ числу замѣчательнѣйшихъ его открытій. И въ этой области его идеи и открытія распространялись его учениками не менѣе, чѣмъ его мемуарами, хотя многіе изъ нихъ переводились на французскій языкъ вскорѣ по выходѣ. Пинкэрле, Коссакъ, Штольцъ, Ковалевская, Миттагъ-Леффлеръ, Бирманъ и другіе были изъ числа первыхъ и наиболѣе ознакомившихъ ученый міръ съ его взглядами и открытіями въ области аналитическихъ функцій. Но до сихъ поръ нѣтъ такого курса, который близко подходилъ бы къ его лекціямъ и далъ бы возможность составить полное и точное понятіе о всей его теоріи аналитическихъ функцій, какъ объ органически цѣломъ. Я даже не знаю была-ли она излагаема полностью и на его лекціяхъ, ибо онъ, ссылаясь на свой курсъ въ нѣкоторыхъ мемуарахъ, называетъ его „введеніемъ въ теорію аналитическихъ функцій“. Мнѣ два раза въ 1884 г. представлялся случай ознакомиться съ такимъ курсомъ: одинъ разъ лѣтомъ въ Лейпцигѣ по рукописнымъ лекціямъ, имѣвшимся въ библіотекѣ математическаго семинара, другой разъ осенью того-же года въ Берлинѣ, когда Вейерштрассъ читалъ этотъ курсъ; но я не воспользовался этими случаями, боясь отвлечься отъ главнаго предмета своихъ тогдашнихъ занятій—теорій гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, и въ Берлинѣ прослушалъ лишь нѣсколько лекцій, посвященныхъ понятію о числѣ и четыремъ дѣйствіямъ надъ числами, съ чего Вейерштрассъ всегда считалъ нужнымъ начинать эти курсы. Это начало однакожъ большинству слушателей показалось скучнымъ, и я былъ свидѣтелемъ знакомаго намъ явленія: послѣ первой лекціи въ большой аудиторіи, не могшей вмѣстить всѣхъ слушателей, онъ долженъ былъ перейти въ громадный залъ, выстроенный отдѣльно въ саду за зданіемъ Университета, который могъ вмѣстить болѣе тысячи слушателей; но число ихъ, (можетъ быть и вслѣдствіе дурныхъ аккустическихъ и оптическихъ свойствъ этой залы), быстро сократилось, такъ что онъ чрезъ нѣсколько лекцій перешелъ въ аудиторію, меньшую первоначальной, которая могла вмѣстить не болѣе 150—200 слушателей, и то далеко была не полна. Онъ читалъ сидя въ креслахъ около доски, на которой формулы писалъ одинъ изъ студентовъ; читалъ онъ не спѣшно и достаточно громко, но возрастъ (ему на слѣдующій годъ исполнилось 70 лѣтъ) уже сказывался: не всякое слово выходило отчетливо, и частенько приходилось ему поправлять свои выраженія. Впрочемъ столь элементарныя вещи часто повторять представляетъ своего рода трудность, ибо приходится задерживать ради слушателей естественное быстрое теченіе своихъ мыслей. Какъ дѣло шло дальше, не знаю, ибо я тоже пересталъ ходить на лекціи по вышеуказанной причинѣ. Но возвратимся отъ лектора и лекцій къ ихъ предмету—теоріи аналитическихъ функцій. Какъ извѣстно, Вейерштрассъ усвоилъ Лагранжевское опредѣленіе аналитической функціи рядомъ расположеннымъ по степенямъ независимой перемѣнной или независимыхъ перемѣнныхъ, если ихъ нѣсколько, но *безусловно* и *равномѣрно-сходящимся* внутри извѣстной области, о чемъ во времена Лагранжа еще не думали; необходимость сходимости ряда была указана раньше Абелемъ и Коши, послѣднимъ даже и необходимость ея безусловности, но равномѣрность, если неявно и заключалась въ нѣкоторыхъ изъ прежнихъ доказатетьствъ, и если даже и были у Вейерштрасса предшественники, обращавшіе на это вниманіе, какъ Стоксъ, Зейдель, Гейне и можетъ быть и еще нѣкоторые другіе, то все-таки онъ былъ первый, который уже въ раннихъ своихъ работахъ подчеркнулъ ея необходимость для ряда представляющаго аналитическую функцію, и постояннымъ употребленіемъ выраженія „безусловно и равномѣрно-сходящійся рядъ“, такъ сказать пріучилъ математиковъ не забывать этого необходимаго условія для того, чтобы рядъ могъ представлять аналитическую функцію. Мы уже упоминали какъ рано и независимо отъ другихъ возникла у него идея объ аналитическомъ продолженіи функцій. Это его привело къ понятію о функціяхъ, которыя не могутъ быть продолжены за извѣстную границу, къ функціямъ прерывнымъ (fonction lacunaire), и къ роли, которую тутъ играютъ существенно особенныя точки. Онъ показалъ, въ мемуарѣ „Zur Functionentheorie", что можно построить такой сходящійся рядъ, который въ разныхъ областяхъ будетъ представлять различныя функціи. Ряды же привели его и къ непрерывнымъ функціямъ, которыя не имѣютъ производныхъ [1]). Строго обосновавъ теорію рядовъ, онъ сдѣлалъ ихъ почти единственнымъ средствомъ и орудіемъ всѣхъ своихъ выводовъ и доказательствъ, проведя строго и послѣдовательно ихъ употребленіе чрезъ всѣ свои изслѣдованія и курсы. Это придаетъ его работамъ и курсамъ единство, стройность, строгость и элементарность, хотя нѣкоторые выводы и доказательства выходятъ чрезъ это-же не рѣдко длинноваты, что затрудняетъ ихъ усвоеніе и нѣсколько вредитъ производимому ими впечатлѣнію. Но съ другой стороны, онъ чрезъ это даетъ своимъ ученикамъ такое орудіе, которое остается нерѣдко единственнымъ дѣйствительнымъ въ тѣхъ областяхъ знанія, въ которыя заведены теперь математики успѣхами науки. Вейерштрассъ, какъ и Кронекеръ, (хотя въ другомъ смыслѣ,) были ариѳметическаго направленія въ математикѣ, въ противоположность ученымъ Клебшевской школы, которые суть геометры по преимуществу, изслѣдуя вопросы чистаго анализа при помощи геометріи. Вейерштрассъ не хотѣлъ пользоваться и Римановой поверхностью при изученіи алгебраическихъ функцій, лишая себя такого хорошаго вспомогательнаго средства только для того, чтобы оставаться чистымъ ариѳметикомъ.

Занятія Абелевыми функціями, зависящими отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ, заставили его, болѣе чѣмъ кого либо, обратить вниманіе и на функціи многихъ перемѣнныхъ вообще, и во II томѣ его Mathem. Werke мы находимъ 4 мемуара [2]), посвященныя такимъ функціямъ. Изъ нихъ три первые показываютъ, что Вейерштрассъ занимался разработкой теоріи функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ системами періодовъ по плану Ліувиля и нашелъ нѣкоторыя теоремы, аналогичныя теоремѣ Ліувиля относительно функцій двояко-періодическихъ отъ од-

---

[1]) 6-й мемуаръ II-го тома.

[2]) Ueber die allgemeinen eindeutigen und 2n-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen. 1869. 2) Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen mehreren Veränderlichen. 1879. 3) Untersuchungen über die 2r-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen. 1880. 4) Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.

ной независимой перемѣнной; но эти изслѣдованія остались неоконченными. Послѣдній мемуаръ, (который былъ отлитографированъ въ 1879 г., а напечатанъ первый разъ въ 1886 г. въ сборникѣ „Abhandlungen aus der Functionenlehre") посвященъ доказательствамъ тѣхъ общихъ предложеній, представляющихъ обобщенія нѣкоторыхъ предложеній, касающихся функцій одной независимой перемѣнной, которыя ему необходимы были въ теоріи Абелевыхъ трансцендентныхъ.

Мы коснулись въ нашемъ очеркѣ лишь тѣхъ областей анализа, разработкой которыхъ Вейерштрассъ главнымъ образомъ занимался—центральныхъ, такъ сказать, областей его научной дѣятельности, ибо не имѣли времени познакомиться съ другими его работами, каковы напр.: Neuer Beweis des Fundamental-Satzes der Algebra (1859). Ueber die homogenen Functionen 2. Grades. Ueber eine Gattung reeller periodischen Functionen. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Ueber sogenannte Dirichlet's Princip. Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differential gleichungen mit constanten Coefficienten. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Zur Lindemann'schen Abhandlung „Ueber die Ludolph'sche Zahl", въ которомъ онъ упрощаетъ доказательство Линдемана, Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationalle Function einer Veränderlichen dargestellt kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen 1891 г. и нѣкоторыя другія. Изъ двухъ здѣсь упомянутыхъ новыхъ доказательствъ основнаго предложенія Алгебры, второе представляетъ нѣкоторое видоизмѣненіе перваго. Они представляютъ интересъ, будучи построены на отличныхъ отъ другихъ доказательствъ основаніяхъ, но не отличаются краткостью.

Сверхъ упомянутыхъ курсовъ по теоріи функцій вообще, по теоріи эллиптическихъ, гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ функцій, Вейерштрассъ читалъ еще лекціи по Варіаціонному исчисленію, представляющія огромный интересъ и въ научномъ и въ педагогическомъ отношеніи. Литографированный курсъ, который я имѣлъ случай просматривать, составляетъ томъ очень мелкаго письма, по размѣрамъ не меньшій перваго тома Math. Werke, и посвященъ только вопросамъ о maxima и minima простыхъ интеграловъ. Этому курсу предпослано введеніе, содержащее нѣкоторыя необходимыя свѣденія изъ Вейерштрассовской теоріи аналитическихъ функцій, (въ которомъ упоминаются уже и изслѣдованія Пуанкарэ, касающіяся Фуксовыхъ функцій); а затѣмъ подробная теорія maxima и minima функцій одной и главнымъ образомъ, нѣсколькихъ перемѣнныхъ, какъ абсолютныхъ, такъ и относительныхъ. Здѣсь я встрѣтилъ между прочимъ то, чего еще нигдѣ не встрѣчалъ, именно критеріи для различенія относительныхъ maxima и minima, когда они розыскиваются при помощи метода Лагранжа. Для вывода этихъ критеріевъ въ случаѣ функціи многихъ перемѣнныхъ ему понадобилось познакомить слушателей съ теоріей квадратичныхъ формъ, которыхъ перемѣнныя или независимы, или связаны нѣкоторыми условіями: условіемъ неизмѣняемости знака такой формы будетъ тогда требованіе, чтобы нѣкоторое уравненіе, легко получаемое въ формѣ опредѣлителя въ обоихъ случаяхъ, имѣло-бы всѣ корни вещественные и одного знака, что узнается по раскрытіи уравненія по числу перемѣнъ знаковъ его коэффиціентовъ. Если n перемѣнныхъ связаны m условіями, то это уравненіе будетъ степени $n-m$, и въ опредѣлителѣ всѣ элементы, находящіеся въ пересѣченіи послѣднихъ m строкъ съ послѣдними m столбцами, будутъ нули, а неизвѣстная входитъ, и притомъ въ первой степени, только въ элементы расположенные по главной діагонали, какъ и для случая, когда n перемѣнныхъ независимы. Если нѣкоторыя условія даны въ формѣ неравенства: $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) > 0$, то онъ полагаетъ $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = x^2_{n+1}$, что для вещественныхъ значеній перемѣнныхъ равносильно данному условію, и такимъ образомъ задача сводится къ обыкновенной задачѣ объ относительныхъ maxima и minima. Это замѣчаніе мнѣ раньше тоже нигдѣ не встрѣчалось. Оба эти отдѣла занимаютъ почти четвертую часть всего курса; часть о maxima и minima разбита на 15 главъ; по этому уже можно судить какъ детально она разработана. Собственно курсъ Варіаціоннаго исчисленія разбивается на четыре части: сперва введеніе, разбивающееся на двѣ главы: первая имѣетъ назначеніемъ указать связь задачъ Варіаціоннаго исчисленія съ обыкновенной теоріей maxima и minima, для чего трактуется задача о плоской кривой, описывающей при вращеніи около прямой, взятой въ той-же плоскости, поверхность наименьшаго объема, по способу этой теоріи, разсматривая сперва многоугольникъ и переходя потомъ къ предѣлу, когда число сторонъ становится безконечно-большимъ; вторая глава посвящена тому, чтобы дать общее понятіе о задачахъ варіаціоннаго исчисленія. Затѣмъ первый отдѣлъ, разбитый на 15 главъ, посвященъ абсолютнымъ maxima и minima простого интеграла вида $\int_{t_0}^{t} F(x, y; x', y')\, dt$, гдѣ $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$. Этотъ отдѣлъ содержитъ много цѣнныхъ разъясненій, а главы VIII—XIII содержатъ и новое. Вейерштрассъ показываетъ сперва на частномъ примѣрѣ, именно на задачѣ Ньютона о тѣлѣ вращенія, поверхность котораго встрѣчаетъ наименьшее сопротивленіе отъ жидкой среды, въ которой движется, что необходимыя условія, выводимыя изъ разсмотрѣнія второй варіаціи, недостаточны, и даетъ новые критеріи. Второй отдѣлъ изъ 10 главъ посвященъ задачѣ объ изопериметрахъ, причемъ Вейерштрасъ развиваетъ свои критеріи и для этого случая; наконецъ послѣдній, третій отдѣлъ, изъ двухъ главъ, посвященъ тому случаю, когда функціи, входящія въ выраженіе, стоящее подъ знакомъ интеграла, и ихъ производныя связаны уравненіями.

Въ 1885 г. ему исполнилось 70 лѣтъ; по уставу германскихъ университетовъ этотъ возрастъ даетъ право профессору, сохраняя званіе, не читать болѣе лекцій. Вейерштрассъ воспользовался этимъ правомъ и уѣзжалъ въ Италію, но не на долго: по словамъ С. В. Ковалевской, съ которой я встрѣтился въ 1887 году, онъ соскучился безъ лекцій и опять сталъ читать ихъ; но едвали это долго продолжалось; по крайней мѣрѣ въ предисловіи къ I т. Math. Werke, отъ 15 мая 1894 г., онъ говоритъ, что пять лѣтъ назадъ онъ рѣшился издать полное собраніе своихъ сочиненій, но едва принялся за работу, какъ его посѣтила упорная болѣзнь, которая на нѣсколько лѣтъ сдѣлала его совершенно неспособнымъ къ работѣ, и только съ прошлаго лѣта т. е. въ 1893 г., состояніе здоровья позволило ему вновь приняться за изданіе своихъ сочиненій при содѣйствіи Академіи, какъ сказано выше, за которымъ онъ къ ней обратился, боясь не дожить до окончанія изданія. Опасенія его, какъ видимъ, оправдались и его не стало прежде, чѣмъ окончилось печатаніе III тома его сочиненій....

Профессоръ *М. Тихомандрицкій.*

Харьковъ,
27 февраля 1897 г.

Ровно черезъ мѣсяцъ послѣ того, какъ прочитана была эта рѣчь, и послѣ того, какъ уже приступлено было къ ея печатанію, мнѣ попался въ читальнѣ Университета только-что наканунѣ полученный № 16 „Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin“, содержащій отчетъ о засѣданіи 5-го марта (нов. стиля) 1897 г., наибольшую часть котораго занимаетъ рѣчь E. Lampe: „Zum Gedächtnisse von Karl Weierstrass“, прочитанная въ этомъ засѣданіи и содержащая много интересныхъ свѣденій о жизни и дѣятельности Вейерштрасса, а также характеристику его какъ учителя и человѣка,—свѣденій, почерпнутыхъ какъ изъ документальныхъ источниковъ, такъ и изъ личныхъ сношеній съ людьми, близко знавшими покойнаго ученаго, тогда какъ у меня подъ руками было лишь то, что помѣщено о немъ въ Braunsberger-progromm и въ „Conversations-lexikon“ Meyer'a, да кое-какія отрывочныя свѣденія, попадающіяся съ статьяхъ, напечатанныхъ въ первыхъ двухъ томахъ его Math. Werke. Такъ какъ весьма интересная рѣчь г-на Лампе, будучи напечатана въ спеціальномъ изданіи, можетъ быть не легко доступна иному читателю, то я позволю себѣ пополнить мою рѣчь нѣкоторыми заимствованными оттуда біографическими свѣденіями.

Карлъ Вейерштрассъ, католическаго вѣроисповѣданія, былъ старшій сынъ бургомистра города Остенфельда, у котораго были еще одинъ сынъ, Петръ Вейерштрассъ, теперь профессоръ филологіи въ Бреславскомъ Университетѣ, и двѣ дочери, Клара и Елизавета. К. Вейерштрассъ былъ холостъ; его сестры проживали вмѣстѣ съ нимъ въ Берлинѣ; одна изъ нихъ, Клара, умерла за годъ до его кончины, послѣдовавшей отъ болѣзни легкихъ, бывшей слѣдствіемъ инфлюэнцы, посѣтившей передъ тѣмъ его домъ. Послѣдніе годы своей жизни онъ не могъ ходить и проводилъ все время дома, въ креслахъ на колесахъ (Rollstuhl). Бывшіе тогда въ Берлинѣ ученики его, собравшись, постановили, чтобы ежедневно одинъ изъ нихъ посѣщалъ любимаго учителя, чтобы доставить ему въ бесѣдѣ развлеченіе, такъ какъ онъ любилъ общество, и отнюдь не былъ исключительно кабинетнымъ ученымъ, какъ то можно было о немъ думать, судя по наружному виду, и какимъ онъ мнѣ лично дѣйствительно представлялся. Въ гимназіи онъ давалъ отъ 28—30 уроковъ въ недѣлю, и не смотря на то, находилъ время заниматься наукою; подъ старость онъ съ любовью вспоминалъ время своего учительства. Въ 1854 г. Кенигсбергскій Университетъ, по предложенію извѣстнаго профессора Ришело, удостоилъ его степени доктора honoris causa. Чрезъ два года послѣ того онъ отправился съ ученою цѣлью въ Берлинъ, гдѣ въ то время открылось мѣсто преподавателя математики въ Технологическомъ Институтѣ (Gewerbeinstitut), на которое онъ былъ назначенъ 29 мая того же года, а 12 ноября того же года былъ назначенъ и экстраординарнымъ профессоромъ Университета; въ Академію былъ избранъ около того же времени, а вступительную рѣчь читалъ 9 іюля 1857 г. (день Лейбница). Въ Институтѣ онъ имѣлъ 12 лекцій въ недѣлю: 6 часовъ по Аналитической Геометріи и 6 часовъ по Дифференціальному и Интегральному исчисленію; здѣсь Hamburger и Schwartz сдѣлались его ревностными учениками. Въ Университетѣ онъ читалъ ежегодно одинъ курсъ publice и по крайней мѣрѣ одинъ privatim, предметомъ которыхъ были сперва теорія эллиптическихъ функцій (сначала по Якоби; функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ появились впервые въ курсѣ 1862—63 года); геометрическая оптика, короткое время послѣ смерти Штейнера синтетическая геометрія, пока не установился окончательно полный циклъ его курсовъ: по теоріи функцій вообще, по теоріи эллиптическихъ функцій, по теоріямъ гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ и по варіаціонному исчисленію.

Множество лекцій по высшимъ наукамъ и усилившіяся съ переходомъ въ Берлинъ собственныя ученыя занятія сильно разстроили его нервную систему, съ нимъ стали дѣлаться головокруженія и обмороки [1]);

---

[1]) Это было причиною, что съ 1862 г. онъ сталъ прибѣгать къ помощи студентовъ, когда нужно было писать формулы на доскѣ.

вслѣдствіе чего по требованію пользовавшихъ его врачей онъ долженъ былъ съ 1862 года сократить свою преподавательскую дѣятельность, и въ Институтѣ онъ былъ временно замѣщенъ Аронгольдомъ, хотя числился тамъ преподавателемъ до 1864 г., когда была учреждена въ Берлинскомъ Университетѣ, нарочно для него, третья ординатура по математикѣ. Какъ извѣстно, подъ его редакціей изданы сочиненія Штейнера и 6 послѣднихъ томовъ сочиненій Якоби; кромѣ того первое время по смерти Борхардта онъ принималъ вмѣстѣ съ Кронекеромъ участіе въ редактированіи журнала Креля.

Прилагаемый при семъ портретъ Вейерштрасса представляетъ увеличенную фотографомъ А. Федецкимъ въ Харьковѣ копію съ фотографической карточки, пріобрѣтенной мною въ Берлинѣ зимою 1884 г. и очень похожей на Вейерштрасса въ то время; когда же именно снята эта фотографія мнѣ осталось неизвѣстнымъ.

М. Т.

29 Марта 1897 г.

О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

В. А. Стеклова.

1.

1. Вообразимъ нѣкоторую область (D) пространства, ограниченную замкнутой поверхностью (S).

Можно показать, что для каждой данной области (D), по крайней мѣрѣ въ томъ случаѣ, когда поверхность (S) конвексна и имѣетъ опредѣленную касательную плоскость и конечную кривизну въ каждой точкѣ, существуетъ безчисленное множество различныхъ между собою положительныхъ чиселъ k, каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная, конечная и непрерывная, вмѣстѣ съ ея производными, функція U координатъ x, y, z, удовлетворяющая условіямъ

$$\Delta U + kU = 0 \quad \text{внутри } (D), \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} + hU = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \tag{2}$$

$$\int U^2 d\tau = 1. \tag{3}$$

Въ этихъ формулахъ употреблены слѣдующія обозначенія: Δ означаетъ знакъ операціи вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

n есть направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S), h есть положительная постоянная, $d\tau$ есть элементъ объема области (D), на которую распространяется интегралъ лѣвой части равенства (3).

Нѣкоторыя данныя для доказательства существованія функцій U читатель можетъ найти въ мемуарѣ H. Poincaré: „Sur les équations de la Physique Mathématique“ и въ моей статьѣ: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“, напечатанной въ Математическомъ Сборникѣ за 1897 годъ.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я остановлюсь главнымъ образомъ на двухъ предѣльныхъ случаяхъ, когда

$$h = 0\,, \qquad \text{или} \qquad h = \infty\,.$$

Въ первомъ случаѣ условіе (2) приводится къ виду

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,,$$

во второмъ

$$U = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,.$$

2. Послѣдній случай подробно изслѣдованъ H. Poincaré въ вышеупомянутомъ мемуарѣ.

H. Poincaré доказалъ, что *для всякой области* (D), ограниченной *какой угодно замкнутой поверхностью*, существуетъ безчисленное множество положительныхъ чиселъ

$$k_1\,,\ k_2\,, \ldots\,, k_s\,, \ldots$$

и имъ соотвѣтствующихъ функцій

$$U_1\,,\ U_2\,, \ldots\,, U_s\,, \ldots\,,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\varDelta U_s + k_s U_s = 0 \qquad \text{внутри } (D)\,, \tag{4}$$

$$U_s = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,, \tag{5}$$

$$\int U_s^2 d\tau = 1\,. \tag{6}$$

$$(s = 1,\, 2,\, 3, \ldots \infty)$$

Функціи U_s H. Poincaré называетъ *гармоническими функціями*, а имъ соотвѣтствующія числа k_s *характеристическими числами* этихъ функцій для данной области.

Мы удержимъ то же названіе для чиселъ k_s, а функціи U_s будемъ называть *гармоническими функціями перваго рода*.

Числа k_s неопредѣленно возрастаютъ съ возрастаніемъ значка s и при достаточно большомъ s

$$k_s > as^{\frac{2}{3}}, \tag{7}$$

гдѣ a есть конечное положительное число, независящее отъ числа s.

Слѣдовательно,

$$\lim_{s=\infty} k_s = \infty.$$

Функціи U_s удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$\int U_s U_r d\tau = 0 \tag{8}$$

при r и s, не равныхъ между собою.

Назовемъ черезъ G извѣстную функцію Грина, вполнѣ опредѣляемую слѣдующими условіями:

1. G есть функція двухъ системъ координатъ

$$x, y, z \quad \text{и} \quad \xi, \eta, \zeta,$$

конечная и непрерывная во всѣхъ точкахъ области (D) за исключеніемъ точки

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta,$$

гдѣ G обращается въ ∞.

2. Разность

$$G - \frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остается конечной при $r = 0$.

3. Внутри области (D) функція G удовлетворяетъ уравненію Лапласа

$$\Delta G = 0.$$

4. На поверхности (S) G удовлетворяетъ условію

$$G = 0.$$

Каждую изъ функцій U_s можно представить подъ видомъ

$$U_s = k_s \int G U'_s d\tau', \tag{9}$$

гдѣ U'_s представляетъ выраженіе функціи U_s послѣ замѣны перемѣнныхъ x, y, z соотвѣтственно черезъ ξ, η, ζ, а $d\tau'$ есть элементъ объема области (D), на которую распространяется интегралъ правой части этого равенства, при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η, ζ.

Назовемъ черезъ l наибольшее изъ разстояній между двумя точками области (D).

Какъ извѣстно,

$$\int G^2 d\tau' < \frac{l}{4\pi} = Q.$$

Если φ и ψ суть какія либо функціи координатъ, то

$$\left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2 < \int \varphi^2 d\tau \int \psi^2 d\tau.$$

Это неравенство называютъ обыкновенно неравенствомъ Shwarz'a.

Но для случая одной перемѣнной оно доказано В. Я. Буняковскимъ еще въ 1859 г. *).

Пользуясь этимъ неравенствомъ, получаемъ [равенство (9)]

$$|U_s| < k_s Q, \tag{10}$$

ибо по условію

$$\int U_s^2 d\tau = 1.$$

Неравенствомъ (10) намъ придется пользоваться впослѣдствіи.

3. Разсмотримъ второй случай, когда $h = 0$.

Въ моемъ сочиненіи „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики" я показалъ, что для всякой области, ограниченной конвексной поверхностью, уклоненіе которой отъ сферы не превосходитъ нѣкотораго предѣла, существуетъ безчисленное множество положительныхъ, неравныхъ между собою чиселъ

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots$$

и имъ соотвѣтствующихъ функцій

$$V_1, \quad V_2, \ldots, V_s, \ldots,$$

---

*) См. ст. проф. К. Андреева: „Нѣкоторыя обобщенія въ вопросѣ о разложеніи опредѣленнаго интеграла по формулѣ, предложенной П. Л. Чебышевымъ". Сообщ. Харьк. Мат. Общ., 1883 г.

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\Delta V_s + \lambda_s V_s = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{11}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S), \tag{12}$$

$$\int V_s^2 d\tau = 1. \tag{13}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

Функціи V_s мы будемъ называть *гармоническими функціями второго рода*, а имъ соотвѣтствующія числа λ_s *характеристическими числами* этихъ функцій для данной области (D).

Гармоническія функціи второго рода существуютъ по всей вѣроятности для любой, по крайней мѣрѣ, конвексной, поверхности, но мы не имѣемъ строгаго доказательства этого общаго предположенія, хотя для нѣкоторыхъ простѣйшихъ случаевъ: цилиндра, эллипсоида онѣ могутъ быть построены при помощи функцій Бесселя и Ляме.

Числа λ_s (также какъ и въ предыдущемъ случаѣ k_s) неопредѣленно возрастаютъ съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ числа s и при s достаточно большомъ

$$\lambda_s > b s^{\frac{2}{3}}, \tag{14}$$

гдѣ b есть конечная положительная постоянная, независящая отъ числа s

Такимъ образомъ

$$\lim_{s=\infty} \lambda_s = \infty.$$

Функціи V_s удовлетворяютъ условіямъ

$$\int V_s V_r d\tau = 0$$

при всякихъ r и s, не равныхъ между собою.

Въ вышеупомянутомъ соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ etc.“ я доказалъ существованіе функціи J, опредѣляемой слѣдующими условіями:

1. J есть функція двухъ системъ координатъ

$$x, y, z \quad \text{и} \quad \xi, \eta, \zeta,$$

конечная и непрерывная во всей области (D) за исключеніемъ точки

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta,$$

гдѣ J обращается въ ∞.

2. Разность

$$J-\frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

остается конечной при $r=0$.

3. Внутри области (D) функція J удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta J=\frac{1}{D},$$

гдѣ D есть величина объема области (D).

4. На поверхности (S) J удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial J}{\partial n}=0.$$

5. Интегралъ отъ функціи J, распространенный на всю область (D), равенъ нулю, т. е.

$$\int J d\tau=0.$$

Функція J симметрична относительно перемѣнныхъ x, y, z и ξ, η, ζ и

$$\int J^2 d\tau<Q, \tag{15}$$

гдѣ Q есть положительная постоянная, зависящая только отъ размѣровъ области (D).

Неравенство (15) справедливо для любой точки ξ, η, ζ, лежащей *внутри* области (D).

Пользуясь функціей J, мы можемъ представить каждую изъ функцій V_s подъ видомъ

$$V_s=\lambda_s\int J V'_s d\tau'.$$

Отсюда, на основаніи (15), заключаемъ, что для любой точки внутри (D)

$$|V_s|<\lambda_s Q. \tag{16}$$

4. Въ настоящемъ изслѣдованіи мы займемся вопросомъ о разложеніи данной функціи f въ ряды по гармоническимъ функціямъ перваго и второго рода.

Начнемъ съ гармоническихъ функцій перваго рода U_s.

Пусть f есть заданная функція координатъ.

Положимъ

$$A_s = \int f U_s d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и составимъ рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s.$$

Въ третьей части вышеупомянутаго мемуара: „Sur les équations etc.“ H. Poincaré высказываетъ слѣдующую теорему:

Рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s$$

представляетъ разложеніе функціи f по функціямъ U_s всякій разъ, когда этотъ рядъ сходится, хотя бы и не абсолютно и не равномѣрно.

Доказательство этой теоремы весьма сложно и искусственно.

Сверхъ того, какъ мы сейчасъ увидимъ, оно и не строго.

Въ первой части не разъ упоминавшагося мемуара: „Sur les équations etc.“ H. Poincaré доказываетъ слѣдующую теорему:

Существуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная функція v координатъ, удовлетворяющая условіямъ

$$\Delta v + kv + f = 0 \quad \text{внутри } (D), \tag{17}$$

$$v = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \tag{18}$$

гдѣ f есть заданная функція координатъ, *конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими производными перваго порядка* внутри области (D), а k есть нѣкоторая постоянная.

Функція v представляется въ видѣ абсолютно и равномѣрно сходящагося ряда

$$v_0 + kv_1 + k^2 v_2 + \cdots + k^n v_n + \cdots, \tag{17_1}$$

гдѣ $v_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ суть функціи координатъ, опредѣляемыя равенствами

$$v_0 = \int G f' d\tau', \qquad v_n = \int G v'_{n-1} d\tau'.$$

Рядъ (17_1) сходится для всѣхъ значеній k, пока

$$|k| < k_1\,,$$

гдѣ k_1 есть нѣкоторое опредѣленное положительное число.

Вообще же, интегралъ уравненія (17) при условіи (18), разсматриваемый какъ функція параметра k, есть мероморфная функція k съ простыми полюсами, которыми служатъ характеристическія числа $k_s\,(s=1\,,\;2\,,\ldots)$.

Доказательство вышеупомянутой теоремы о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ можно раздѣлить на двѣ части.

Въ первой части H. Poincaré старается доказать, что

$$\lim_{k=-\infty} vk = -f\,,$$

если

$$k = -\alpha^2\,, \qquad \alpha = \beta + i\gamma \text{ *)}\,, \qquad \beta > 0\,.$$

Для этого онъ представляетъ функцію v въ видѣ

$$v = \int G f'\,d\tau'\,, \tag{19}$$

гдѣ подъ G разумѣетъ обобщенную функцію Грина, удовлетворяющую условіямъ 1), 2) и 4) §а 2ого, а вмѣсто условія 4) слѣдующему

$$\varDelta G + kG = 0 \qquad \text{внутри } (D).$$

Но существованія функціи G H. Poincaré не доказываетъ, ограничившись замѣчаніемъ, что это можетъ быть доказано соображеніями, аналогичными тѣмъ, при помощи которыхъ доказывается существованіе функціи v.

Можно, дѣйствительно, показать, что вопросъ объ опредѣленіи функціи v, удовлетворяющей условіямъ (17) и (18), и задача объ опредѣленіи функціи w при помощи условій

$$\varDelta w + kw = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{20}$$

$$w = f \qquad \text{на поверхности } (S) \tag{21}$$

эквивалентны, *если f есть также заданная функція координатъ точекъ поверхности (S), независящая отъ параметра k.*

Полагая

$$G = G_1 + \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}\,,$$

*) Черезъ i обозначенъ $\sqrt{-1}$.

H. Poincaré сводитъ опредѣленіе функціи G къ опредѣленію непрерывной внутри (D) функціи G_1 при помощи условій

$$\Delta G_1 + kG_1 = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$G_1 = -\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Условія эти по внѣшнему виду того же типа, что и (20), и (21), но въ данномъ случаѣ роль f играетъ функція

$$\frac{-e^{-\alpha r}}{4\pi r},$$

зависящая отъ параметра k.

Къ разсматриваемому случаю нельзя непосредственно примѣнять сужденія, относящіяся къ доказательству существованія функціи w [условія (20) и (21)].

Необходимы дополнительныя изысканія, которыхъ нѣтъ въ мемуарѣ H. Poincaré и безъ которыхъ рискованно утверждать, что G_1 есть мероморфная функція k съ простыми полюсами, которыми служатъ числа k_s.

Поэтому и исходное равенство оказывается недоказаннымъ съ надлежащей строгостью.

Но допустимъ, что оно справедливо, и что всѣ дальнѣйшія соображенія разсматриваемой части доказательства интересующей насъ теоремы вполнѣ строго приводятъ къ выводу, что

$$\lim_{k=\infty} vk = -f,$$

если

$$k = -\alpha^2, \qquad \alpha = \beta + \gamma i, \qquad \beta > 0.$$

Переходимъ ко второй части доказательства.

Здѣсь H. Poincaré доказываетъ прежде всего, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)} \quad {}^{*)}$$

сходится, если f обращается въ нуль на поверхности (S), рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s}$$

---

*) Въ этой формулѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau \qquad (s=1,2,\dots)$$

сходится, если

$$f=0, \qquad \Delta f=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Замѣтивъ, что интегральные вычеты мероморфной (относительно k) функціи v суть

$$-A_s U_s, \qquad (s=1,2,\ldots)$$

и пользуясь извѣстной теоремой Миттагъ-Лефлера, H. Poincaré полагаетъ

$$v=-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)}+E(k) \tag{22}$$

въ первомъ случаѣ [$f=0$ на поверх. (S)] и

$$v=-\sum_{s-1}^{\infty}\frac{A_s U_s}{k-k_s}+E(k) \tag{23}$$

во второмъ [$f=0$, $\Delta f=0$ на поверхн. (S)], гдѣ $E(k)$ есть голоморфная функція k, зависящая также и отъ координатъ x, y, z.

Замѣтивъ это, онъ останавливается сначала на второмъ случаѣ, когда

$$f=0, \qquad \Delta f=0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

и старается опредѣлить функцію $E(k)$.

Положимъ

$$f_p=f-A_1U_1-A_2U_2-\ldots-A_pU_p$$

и назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, опредѣляемую условіями

$$\Delta v_p+kv_p+f_p=0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$v_p=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

По предыдущему такая функція существуетъ, *если f_p есть непрерывная функція координатъ вмѣстѣ со своими первыми производными.*

Послѣднее обстоятельство несомнѣнно имѣетъ мѣсто при всякомъ данномъ p, конечномъ и опредѣленномъ.

Не трудно убѣдиться, что функцію v можно представить подъ видомъ

$$v=v_p-\sum_{s=1}^{p}\frac{A_s U_s}{k-k_s}.$$

Это равенство справедливо при всякомъ данномъ p.

Отсюда H. Poincaré поспѣшно заключаетъ, что

$$v = \lim_{p=\infty} \left(v_p - \sum_1^p \frac{A_s U_s}{k - k_s} \right).$$

Во первыхъ, если $\lim\limits_{p=\infty} f_p$ или, что тоже, рядъ

$$\sum_1^\infty A_s U_s$$

есть рядъ просто сходящійся, то нельзя утверждать, что v_p имѣетъ предѣлъ, а если и можно считать несомнѣннымъ, что v_p стремится къ опредѣленному предѣлу w, то нельзя утверждать, что эта предѣльная функція удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta w + kw + \lim_{p=\infty} f_p = 0 \quad \text{внутри } (D) \tag{24}$$

при условіи

$$w = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Существованіе функціи v, удовлетворяющей этимъ условіямъ, можетъ быть доказано только въ томъ случаѣ, если f[см. услов. (17) и (18)] есть непрерывная функція координатъ вмѣстѣ со своими первыми производными.

Если же рядъ

$$\sum_{s=1}^\infty A_s U_s$$

сходится неравномѣрно, то

$$\lim f_p = f - \sum_{s=1}^\infty A_s U_s$$

можетъ дать и прерывную функцію и неимѣющую производныхъ, а потому и

$$w = \lim v_p$$

можетъ дать въ предѣлѣ (если только такой существуетъ) функцію w, не удовлетворяющую уравненію (24).

Далѣе, при всякомъ конечномъ p

$$\varDelta \sum_{1}^{p} \frac{A_s U_s}{k-k_s} = -\sum_{1}^{p} \frac{k_s A_s U_s}{k-k_s}.$$

Но отсюда не слѣдуетъ, что и

$$\varDelta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_s A_s U_s}{k-k_s}.$$

А въ такомъ случаѣ нельзя утверждать, что

$$v = \lim \left(v_p - \sum_{1}^{p} \frac{A_s U_s}{k-k_s} \right) = w - \sum_{1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s}.$$

Перейдя къ предѣлу, мы можемъ дѣйствительно получить функцію v', имѣющую тѣ же простые полюсы, что и v, и тѣ же интегральные вычеты, но не удовлетворяющую уравненію (17); быть можетъ даже не имѣющую производныхъ и могущую отличаться отъ v на какую угодно голоморфную по k функцію $E_1(k)$.

Слѣдовательно, мы не имѣемъ вообще права полагать

$$E(k) = \lim v_p = w \tag{25}$$

за исключеніемъ того случая, когда (какъ это прямо слѣдуетъ изъ предыдущихъ соображеній)

$$\lim f_p$$

есть функція координатъ, конечная и непрерывная вмѣстѣ съ ея первыми производными.

Это же обстоятельство можетъ считаться несомнѣннымъ только при допущеніи, что ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial x}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial y}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \tag{26}$$

сходятся равномѣрно.

Только при этихъ допущеніяхъ справедливо и равенство (25) и слѣдующее изъ него заключеніе, что

$$v = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s}. \tag{27}$$

По изслѣдованіямъ H. Poincaré ряды (26) сходятся абсолютно и равномѣрно, если

$$f=0\,, \quad \Delta f=0\,, \quad \Delta_2 f=0\,, \quad \Delta_3 f=0 \quad \text{на поверхности } (S)\,, \tag{28}$$

гдѣ Δ_2 и Δ_3 обозначаютъ дважды и трижды повторенную операцію Δ.

Поэтому для доказательства справедливости равенства (27) недостаточно двухъ условій

$$f=0\,, \qquad \Delta f=0\,,$$

какъ это несправедливо полагаетъ H. Poincaré.

Коль скоро равенство (27) доказано, то, пользуясь соотвѣтствующимъ образомъ предложеніемъ первой части доказательства *), можно убѣдиться, какъ показываетъ H. Poincaré, что

$$\lim_{p=\infty}\left[f-\sum_1^p A_s U_s\right]=0\,,$$

или

$$f=\sum_1^\infty A_s U_s\,,$$

т. е. функція f разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ перваго ряда.

Далѣе H. Poincaré разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ функція

$$v_0=\int G f' d\tau'\,,$$

гдѣ G есть обыкновенная функція Грина, удовлетворяетъ условіямъ

$$v_0=0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,,$$

$$\Delta v_0=f \qquad \text{внутри } (D)\,,$$

то v_0 разлагается въ рядъ по функціямъ U_s, если f удовлетворяетъ только одному условію

$$f=0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,, \tag{28$_1$}$$

---

*) Именно

$$\lim_{k=-\infty} vk=-f\,,$$

если

$$k=-\alpha^2\,, \qquad \alpha=\beta+i\gamma\,, \qquad \beta>0\,.$$

т. е.

$$v_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s}. \tag{29}$$

Замѣтимъ, что въ силу вышесказаннаго такое утвержденіе не основательно.

Равенство (29) можно считать несомнѣннымъ лишь въ томъ случаѣ, если не только v_0 и Δv_0 равны нулю на поверхности (S), но и

$$\Delta_2 v_0 = 0, \quad \Delta_3 v_0 = 0 \quad \text{на поверхности } (S)$$

а это вообще несправедливо, если Δf и $\Delta_2 f$ не обращаются въ нуль на той же поверхности.

Продолжаемъ далѣе разсужденія H. Poincaré.

Если f обращается въ нуль на поверхности (S), то

$$v = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)} + v_0. \tag{30}$$

Выводъ этого равенства точно также не строгъ, какъ и всѣхъ предшествовавшихъ.

Но допустимъ, что справедливость равенства (30) можетъ быть доказана.

Въ такомъ случаѣ, говоритъ H. Poincaré,

$$v = -\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)} + \frac{A_s U_s}{k_s}\right) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s}, \tag{31}$$

ибо f удовлетворяетъ равенству (28_1).

Мы только что показали, что одного условія (28_1) недостаточно для доказательства справедливости равенства (29).

Слѣдовательно, если даже признать справедливымъ равенство (30), все же равенство (31) будетъ неосновательно.

Будутъ неосновательны и всѣ слѣдующіе изъ него выводы.

Изъ равенства (31), имѣющаго тотъ же видъ, что и (27), H. Poincaré прямо заключаетъ, что

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

коль скоро f подчинено одному условію (28_1) и рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s$$

сходится, хотя бы и не равномѣрно, т. е. получаетъ теорему, высказанную нами въ началѣ §-а, которая такимъ образомъ и не можетъ считаться доказанной.

На основаніи сказаннаго мы приходимъ къ заключенію, что изъ всѣхъ сложныхъ и не строгихъ соображеній H. Poincaré можно вывести только слѣдующее предложеніе:

Функція f разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ U_s всякій разъ, когда ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial x}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial y}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial z}$$

сходятся равномѣрно, хотя бы и не абсолютно.

И эта теорема будетъ строго доказанной лишь въ томъ случаѣ, если считать строго доказаннымъ равенство (19), или, что тоже, существованіе функціи G_1, имѣющей тѣ же простые полюсы (относительно k), что и функція v. Но, повторяемъ, строгаго доказательства этого предложенія не имѣется въ мемуарѣ H. Poincaré.

Въ деталяхъ доказательства H. Poincaré встрѣчаются и другія нестрогія заключенія, на одно изъ которыхъ считаю нелишнимъ обратить вниманіе.

Если f и Δf обращаются въ нуль на поверхности (S), то ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s^2} \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s}$$

сходятся абсолютно и равномѣрно.

Такъ какъ

$$\Delta \frac{A_s U_s}{k_s} = -\frac{A_s U_s}{k_s},$$

то, какъ утверждаетъ H. Poincaré,

$$\Delta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s^2} = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s U_s}{k_s}. \tag{32}$$

Это равенство, вообще говоря, несправедливо.

Необходимо еще, чтобы ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{k_s} \frac{\partial U_s}{dx}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{k_s} \frac{\partial U_s}{dy}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{k_s} \frac{\partial U_s}{dz} \tag{33}$$

сходились равномѣрно.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ два ряда

$$s = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$\sigma = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots,$$

гдѣ u_s, $v_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$ суть функціи координатъ, причемъ

$$v_s = \Delta u_s. \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Допустимъ, что

$$u_s = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

и что каждая изъ функцій $v_s (s = 0, 1, \ldots)$ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными.

Въ такомъ случаѣ

$$u_s = -\int G v'_s d\tau'. \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Пусть ряды s и σ сходятся равномѣрно.

Помноживъ обѣ части второго ряда на $Gd\tau$ и интегрируя по всему объему области (D), получимъ

$$\int G\sigma d\tau = -u_0 - u_1 - \ldots - u_n \ldots = -s.$$

Отсюда

$$\Delta s = \sigma, \tag{34}$$

если только σ есть непрерывная функція внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными.

Если же эти условія не соблюдены, то равенство (34) можетъ и не быть справедливымъ.

Такъ какъ H. Poincaré не доказываетъ равномѣрной сходимости рядовъ (33), то равенство (32) также нельзя считать доказаннымъ.

5. Желая по возможности упростить доказательство теоремы H. Poincaré о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ, я предложилъ другой пріемъ доказательства, болѣе простой, въ статьѣ: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ“, напечатанной въ Сообщ. Харьк. Мат. Общ. за 1896 годъ.

Я старался главнымъ образомъ избѣжать употребленія обобщенной функціи Грина G, существованіе которой, какъ говорилось выше, нельзя считать строго доказаннымъ.

Мнѣ удалось достигнуть этого и вмѣстѣ съ тѣмъ значительно упростить доказательство.

Но во время составленія работы, я не замѣтилъ нестрогости второй части доказательства H. Poincaré и точно также сдѣлалъ молчаливо нѣкоторыя допущенія, которыя счелъ затѣмъ доказанными.

Не излагая подробно предложеннаго мною анализа, я обращу вниманіе только на его заключительную часть.

Назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, удовлетворяющую условіямъ

$$\Delta v_p + k v_p + R_p = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$v_p = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

гдѣ

$$R_p = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_p U_p.$$

Для значеній $|k|$, меньшихъ k_1, функція v_p представляется подъ видомъ ряда

$$v_{p0} + k v_{p1} + \ldots + k^n v_{pn} + \ldots,$$

гдѣ

$$v_{p0} = \int G R'_p d\tau', \qquad v_{pn} = \int G v'_{p,n-1} d\tau'.$$

Увеличивая p до безконечности и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim_{p=\infty} v_{ps} = 0. \qquad (s = 2, 3, \ldots)$$

Положимъ

$$\lim v_p = w, \qquad \lim v_{p0} = w_0, \qquad \lim v_{p1} = w_1.$$

Функція v_p въ предѣлѣ обращается, слѣдовательно, въ

$$w = w_0 + k w_1. \tag{35}$$

Положивъ

$$\lim R_p = R,$$

я утверждаю, что

$$w_0 = \int G R' d\tau', \qquad w_1 = \int G w_0' d\tau', \tag{36}$$

или, что тоже,

$$\lim \int G R_p' d\tau' = \int G \lim R_p' d\tau'.$$

Это равенство, вообще говоря, справедливо только при допущеніи, что R есть непрерывная функція координатъ, для чего необходимо предположить, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s \tag{37}$$

сходится равномѣрно.

Далѣе я разсуждаю слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ функція w должна удовлетворять уравненію

$$\Delta w + k w + R = 0,$$

и такъ какъ w_0 и w_1 опредѣляются формулами (36), то, подставивъ выраженіе w (35) въ послѣднее уравненіе, заключаемъ, что

$$w_1 = 0, \qquad w_0 = 0,$$

т. е.

$$w = 0 \quad \text{и} \quad R = 0.$$

Слѣдовательно,

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s.$$

Это заключеніе справедливо лишь въ томъ случаѣ, если

$$\Delta w_0 + R = 0, \qquad \Delta w_1 + w_0 = 0.$$

Первое же изъ этихъ равенствъ требуетъ, чтобы функція R была конечна и непрерывна вмѣстѣ съ ея первыми производными, а для этого не только рядъ (37), но и его первыя производныя по координатамъ должны быть рядами равномѣрно сходящимися.

Такимъ образомъ и нашъ анилизъ приводитъ, строго говоря, къ той же теоремѣ, что и анализъ H. Poincaré, но за то онъ несравненно проще и строже послѣдняго.

Пріемъ, предложенный мною, имѣетъ еще и то преимущество, что онъ легко распространяется и на случай гармоническихъ функцій второго рода, какъ это показано мною въ соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Матем. Физики".

Онъ можетъ быть примѣненъ и къ самому общему случаю функцій, удовлетворяющихъ условіямъ (1), (2) и (3) перваго §-а.

Метода же H. Poincaré относится исключительно къ случаю гармоническихъ функцій перваго рода и во всякомъ случаѣ не распространяется на гармоническія функціи второго рода.

Сопоставляя все сказанное, мы можемъ, такимъ образомъ, считать строго доказанной въ настоящее время слѣдующую теорему:

Рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \tag{38}$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau, \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда этотъ рядъ и ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial x}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial y}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \tag{39}$$

сходятся равномѣрно, хотя бы и не абсолютно.

Что же касается условій сходимости этихъ рядовъ, то мы можемъ утверждать лишь слѣдующее:

Ряды (38) и (39) сходятся абсолютно и равномѣрно, если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ восьми порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ

$$f = 0, \qquad \Delta f = 0, \qquad \Delta_2 f = 0, \qquad \Delta_3 f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Всякая функція f, удовлетворяющая этимъ условіямъ, разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ перваго рода.

Подобныя же теоремы могутъ быть строго доказаны и для случая гармоническихъ функцій второго рода, а именно:

Рядъ

$$A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \tag{40}$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau\,, \qquad A_s = \int f V_s d\tau\,,\,^{*)} \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

представляетъ разложенiе данной функцiи f въ рядъ по гармоническимъ функцiямъ второго рода всякiй разъ, когда этотъ рядъ и ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{dx}\,, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{dy}\,, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{dz} \qquad \textbf{(41)}$$

сходятся равномѣрно, хотя бы и не абсолютно.

Ряды (40) и (41) сходятся абсолютно и равномѣрно, если функцiя f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ восьми порядковъ и удовлетворяетъ условiямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial \Delta_2 f}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial \Delta_3 f}{\partial n} = 0 \qquad \textit{на поверхности } (S).$$

Всякая функцiя f, удовлетворяющая этимъ условiямъ, разлагается въ рядъ по гармоническимъ функцiямъ второго рода.

Доказательство этихъ теоремъ читатель можетъ найти въ III-ьей главѣ моего соч.: „О дифференцiальныхъ уравненiяхъ Матем. Физики".

II.

1. Пусть f есть заданная функцiя координатъ области (D).

Будемъ вычислять функцiю f по функцiямъ U_s, полагая

$$f = B_1 U_1 + B_2 U_2 + \ldots + B_p U_p + R_p\,,$$

гдѣ $B_s (s=1\,,\,2\,,\ldots,p)$ суть нѣкоторыя постоянныя, R_p—функцiя координатъ.

Послѣдняя зависитъ и отъ выбора коэффицiентовъ B_s, и отъ ихъ числа p.

Выберемъ эти коэффицiенты подъ условiемъ, чтобы интегралъ

$$\int R_p^2 d\tau$$

имѣлъ наименьшее значенiе.

---

*) Напомнимъ, D есть объемъ области (D), V_s суть гармоническiя функцiи второго рода (см. § 1).

Удовлетворяя этому условію, получимъ

$$B_s = \int f U_s d\tau . \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Обозначимъ такимъ образомъ опредѣленные коэффиціенты B_s черезъ A_s, а подъ R_p будемъ теперь разумѣть значеніе этой функціи при $B_s = A_s$.

Положимъ

$$W_0^{(p)} = \int R_p^2 d\tau .$$

Такъ какъ функціи U_s удовлетворяютъ условіямъ (8) (см. часть I, § 2-ой), то

$$W_0^{(p)} = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \ldots - A_p^2. \tag{1}$$

Отсюда

$$W_0^{(p+1)} = W_0^{(p)} - A_{p+1}^2 .$$

Слѣдовательно, $W_0^{(p)}$ убываетъ съ возрастаніемъ значка p, и

$$\lim_{p=\infty} W_0^{(p)}$$

есть конечная положительная постоянная, либо нуль.

Равенство (1) справедливо при всякомъ p.

Переходя къ предѣлу, получаемъ при $p=\infty$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 = \int f^2 d\tau - \lim_{p=\infty} W_0^{(p)} .$$

Это равенство приводитъ къ слѣдующей леммѣ:

Лемма I. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 ,$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau , \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, интегрируемая въ области (D).

2. Предположимъ, что функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными и обращается въ нуль на поверхности (S).

Введемъ слѣдующія обозначенія

$$V_0^{(p)} = \int \left[\left(\frac{\partial R_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau ,$$

$$M = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau ,$$

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau = (\varphi , \psi) ,$$

гдѣ φ и ψ какія либо функціи координатъ, которыя могутъ быть и равны между собою.

Изъ равенства

$$R_p = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \dots - A_p U_p$$

выводимъ слѣдующее

$$V_0^{(p)} = M - 2 \sum_{s=1}^{p} A_s (f , U_s) + \sum_{s=1}^{p} A_s^2 (U_s , U_s) + 2 \sum_{r, s = 1, 2, \dots, p} A_r A_s (U_r , U_s) .$$

Такъ какъ по условію f обращается въ нуль на поверхности (S), то по теоремѣ Грина

$$(f , U_s) = - \int f \Delta U_s d\tau = k_s \int f U_s d\tau = k_s A_s .$$

Далѣе,

$$(U_s , U_s) = - \int U_s \Delta U_s d\tau = k_s ,$$

ибо функція U_s удовлетворяетъ условіямъ (5) и (6) §-а 2-ого 1-ой части.

Наконецъ,

$$(U_r , U_s) = 0 \qquad (r \gtrless s)$$

въ силу равенства (8) 1-ой части.

Слѣдовательно,

$$V_0^{(p)} = M - \sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 .$$

Отсюда

$$V_0^{(p+1)} = V_0^{(p)} - k_{p+1} A_{p+1}^2 .$$

Интегралъ $V_0^{(p)}$ убываетъ съ возрастаніемъ значка p, и

$$\lim_{p=\infty} V_0^{(p)}$$

есть конечная положительная постоянная, либо нуль.

Изъ равенства

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2 = M - \lim_{p=\infty} V_0^{(p)}$$

выводимъ слѣдующую лемму:

Лемма II. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s \tag{2}$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными и обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Я полагаю, что ограничивающія условія, которымъ мы подчинили функцію f, не существенны.

Рядъ (2) будетъ сходящимся, коль скоро функція f конечна и интегрируема внутри области (D) и не подчинена никакимъ другимъ условіямъ *). Впрочемъ, строго доказать это предложеніе мнѣ не удалось.

Совершенно такимъ же путемъ мы докажемъ подобныя же леммы и для случая гармоническихъ функцій второго рода V_s, а именно:

Лемма III. *Рядъ*

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s^2 ,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau , \qquad A_s = \int f V_s d\tau , \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, конечная и интегрируемая въ области (D).

---

*) Конечно, я разумѣю при этомъ функцію вполнѣ опредѣленную.

Лемма IV. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2,$$

гдѣ

$$A_s = \int f V_s d\tau, \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, конечная и непрерывная внутри области (D).

3. Само собой разумѣется, подобныя леммы справедливы и для случая двухъ и одной перемѣнной.

Въ послѣднемъ случаѣ можно получить результаты въ извѣстномъ смыслѣ болѣе общаго характера.

Пусть a и b суть положительныя числа, удовлетворяющія условію

$$b > a.$$

Допустимъ, что перемѣнная x измѣняется въ интервалѣ отъ a до b. Этотъ интервалъ будемъ обозначать черезъ

$$(a, b).$$

Назовемъ черезъ p функцію x, положительную и не обращающуюся въ нуль въ интервалѣ (a, b) (включая и предѣлы a и b), черезъ q также положительную функцію x въ разсматриваемомъ интервалѣ. Послѣдняя можетъ равняться нулю.

Извѣстно, что для каждаго интервала (a, b) существуетъ безчисленное множество положительныхъ чиселъ

$$k_1, k_2, \ldots, k_n \ldots$$

и имъ соотвѣтствующихъ функцій

$$U_1, \quad U_2, \ldots, U_n, \ldots,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\frac{d^2 U_s}{dx^2} + (k_s p - q) U_s = 0 \quad \text{внутри } (a, b), \tag{3}$$

$$\frac{dU_s}{dx} + H U_s = 0 \quad \text{при } x = b, \tag{4}$$

$$(s=1, 2, 3, \ldots)$$

$$\frac{dU_s}{dx} - h U_s = 0 \quad \text{при } x = a, \tag{5}$$

$$\int_a^b pU_s^2\,dx = 1\,. \tag{6}$$

Въ формулахъ (4) и (5) H и h суть положительныя постоянныя.

Въ такомъ именно видѣ эта теорема доказана мною въ статьѣ: „Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня“, напечатанной въ Сообщ. Харьк. Матем. Общ. за 1896 г. *).

Функціи U_s удовлетворяютъ условіямъ

$$\int_a^b pU_rU_s dx = 0 \tag{7}$$

при всякихъ r и s, не равныхъ между собою.

Въ только что упомянутой статьѣ я доказалъ, что числа k_s удовлетворяютъ условіямъ

$$k_s > M(s-1)^2\,, \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

гдѣ M есть конечная положительная постоянная, а функціи U_s условіямъ

$$|U_s| < k_s N\,, \tag{8}$$

гдѣ N есть также конечная положительная постоянная.

Положимъ

$$A_s = \int_a^b p\cdot\varphi\cdot U_s dx\,, \tag{9}$$

гдѣ φ есть какая либо заданная функція x.

Допустимъ, что φ имѣетъ первую производную въ интервалѣ $(a,\ b)$. Положимъ

$$R_p = \varphi - A_1U_1 - A_2U_2 - \ldots - A_pU_p$$

и составимъ выраженіе

---

*) Впервые эта теорема доказана, если не ошибаюсь, Liouville'мъ и Sturm'омъ въ 1836 году.

$$T_p = \int_a^b (R_p')^2 dx =$$

$$= \int_a^b [\varphi'(x)]^2 dx - 2\sum_{s=1}^{p} A_s \int_a^b \varphi' U_s' dx + 2 \sum_{r,s=1,2,3,\ldots,p} A_s A_s \int_a^b U_r' U_s' dx +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} A_s^2 \int_a^b (U_s')^2 dx, \tag{10}$$

гдѣ, вообще, черезъ F' обозначена первая производная какой либо функціи F.

Черезъ F'' мы будемъ дальше обозначать вторую производную какой либо функціи F.

При помощи интеграціи по частямъ получаемъ

$$\int_a^b \varphi' U_s' dx = \varphi(b) U_s'(b) - \varphi(a) U_s'(a) - \int_a^b \varphi U_s'' dx,$$

или, въ силу условій (3), (4), (5) и (9),

$$\int_a^b \varphi' U_s' dx = -[H\varphi(b) U_s(b) + h\varphi(a) U_s(a)] + k_s A_s - \int_a^b q\varphi U_s dx.$$

Точно также [при помощи (9)] получимъ

$$\int_a^b U_r' U_s' dx = -[HU_r(b) U_s(b) + hU_r(a) U_s(a)] - \int_a^b q U_s U_r dx.$$

Наконецъ,

$$\int_a^b (U_s')^2 dx = -[HU_s^2(b) + hU_s^2(a)] - \int_a^b q U_s^2 dx + k_s,$$

ибо [рав. (6)]

$$\int_a^b p U_s^2 dx = 1.$$

Подставивъ полученные результаты въ выраженіе T_p [рав. (10)], приведемъ его послѣ несложныхъ преобразованій къ слѣдующему виду

$$T_p = H\varphi^2(b) + h\varphi^2(a) + \int_a^b \varphi^2 dx - \sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 - \int_a^b q\left(\varphi - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s\right)^2 dx -$$

$$- H\left[\varphi(b) - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s(b)\right]^2 - h\left[\varphi(a) - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s(a)\right]^2.$$

Такъ какъ по условію H и h положительны, функція q также положительна въ интервалѣ (a, b) и

$$T_p > 0$$

при всякомъ p, то мы должны имѣть

$$\sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 < H\varphi^2(b) + h\varphi^2(a) + \int_a^b \varphi^2 dx, \qquad (11)$$

каково бы ни было число p.

Равенство (11) приводитъ къ слѣдующей леммѣ:

Лемма V. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2,$$

гдѣ

$$A_s = \int_a^b \varphi p U_s dx,$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своей первой производной въ интервалѣ (a, b).

Послѣднее ограниченіе является простымъ слѣдствіемъ употребленнаго нами способа доказательства и, по всей вѣроятности, не существенно.

Весьма вѣроятно, что и условіе непрерывности функціи $\varphi(x)$ можно отбросить, и лемма V-ая всетаки будетъ справедлива.

Но во всякомъ случаѣ можно считать справедливой слѣдующую лемму:

Лемма VI. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2$$

есть рядъ всегда сходящiйся, какова бы ни была функцiя $\varphi(x)$, *конечная и непрерывная внутри* (a, b).

Подобнымъ же путемъ можно доказать слѣдующую лемму:

Лемма VII. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2$$

есть рядъ всегда сходящiйся, какова бы ни была функцiя $\varphi(x)$, *конечная и интегрируемая въ интервалѣ* (a, b).

4. Сейчасъ же мы дадимъ важное приложенiе доказанныхъ нами леммъ. H. Poincaré въ соч. „Sur les éqnations etc." показалъ, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s ,$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau ,$$

а $U_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ суть гармоническiя функцiи перваго рода, сходится абсолютно и равномѣрно, если функцiя f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ шести порядковъ и удовлетворяетъ условiямъ

$$f = 0 , \qquad \Delta f = 0 , \qquad \Delta_2 f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Точно также въ моей работѣ: „О дифференц. уравн. Матем. Физ." доказано, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s ,$$

гдѣ

$$A_s = \int f V_s d\tau ,$$

а $V_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ суть гармоническiя функцiи второго рода, сходится абсолютно и равномѣрно, если f есть непрерывная функцiя координатъ внутри (D) со своими производными первыхъ шести порядковъ и удовлетворяетъ условiямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 , \qquad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0 , \qquad \frac{\partial \Delta_2 f}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Объ этихъ теоремахъ я упоминалъ уже въ первой части изслѣдованія.

Пользуясь приведенными выше леммами, мы докажемъ слѣдующую болѣе общую теорему:

Теорема I. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s$$

сходится абсолютно и равномѣрно, если функція f конечна и непрерывна внутри (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяетъ на поверхности (S) только двумъ условіямъ

$$f=0\,, \qquad \Delta f=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

При этихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто равенства вида

$$A_s=\int f U_s d\tau=-\frac{1}{k_s}\int f\Delta U_s d\tau=-\frac{1}{k_s}\int U_s\Delta f d\tau=\frac{1}{k_s^2}\int \Delta U_s \Delta f d\tau=$$

$$=\frac{1}{k_s^2}\int U_s \Delta_2 f d\tau\,.$$

Эти равенства легко получаются при помощи теоремы Грина и равенствъ (4) и (5) 1-ой части изслѣдованія.

Положивъ

$$B_s=\int U_s\Delta_2 f d\tau\,,$$

получимъ

$$A_s=\frac{B_s}{k_s^2}.$$

Воспользовавшись неравенствомъ (10) 2-го §-а 1-ой части и послѣднимъ равенствомъ, получимъ

$$|A_s U_s|<\frac{|B_s|}{k_s}.$$

Такъ какъ

$$\left(|B_s|-\frac{1}{k_s}\right)^2>0\,,$$

то

$$\frac{|B_s|}{k_s}<\frac{1}{2}\left(B_s^2+\frac{1}{k_s^2}\right).$$

Модуль каждаго члена ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s \tag{12}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\left(B_s^2+\frac{1}{k_s^2}\right).$$

Послѣднiй же сходится, ибо рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

сходится по леммѣ I-ой, а рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{k_s^2}$$

сходится потому, что числа $k_s (s=1, 2, 3, \ldots)$ удовлетворяютъ неравенствамъ (7) 1-ой части.

Рядъ (12) сходится, слѣдовательно, абсолютно и равномѣрно.

Теорема доказана.

Совершенно такимъ же путемъ убѣдимся при помощи леммы III-ей въ справедливости слѣдующей теоремы:

Теорема II. *Рядъ*

$$A_0+\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s,$$

гдѣ, напомнимъ,

$$A_0=\frac{1}{D}\int f d\tau, \qquad A_s=\int f V_s d\tau, \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

а V_s суть гармоническiя функцiи второго рода, сходится абсолютно и равномѣрно, если функцiя f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ съ ея производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяетъ только двумъ условiямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n}=0, \quad \frac{\partial \Delta f}{\partial n}=0 \quad \textit{на поверхности } (S).$$

Останавливаться на доказательствѣ этой теоремы, вполнѣ сходномъ съ доказательствомъ предыдущей, нѣтъ надобности.

5. Особаго вниманія заслуживаетъ случай одной перемѣнной.

Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня приводится въ концѣ концовъ къ разысканію условій разложимости данной функціи φ въ рядъ вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} U_s \int_a^b p\varphi U_s dx\,, \tag{13}$$

гдѣ U_s, p, φ имѣютъ тотъ же смыслъ, что и въ 3-тьемъ §-ѣ.

Въ вышеупомянутой статьѣ: „Задача объ охлажденіи и т. д." я доказалъ, что этотъ рядъ представляетъ разложеніе функціи φ по функціямъ U_s, коль скоро онъ сходится равномѣрно, хотя бы и не абсолютно *).

Задача, слѣдовательно, сводится на изслѣдованіе условій равномѣрной сходимости разсматриваемаго ряда.

Я показалъ, что онъ сходится абсолютно и равномѣрно въ интервалѣ (a, b), если функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная въ этомъ интервалѣ вмѣстѣ со своими производными первыхъ 4-хъ порядковъ, удовлетворяетъ еще условіямъ.

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(a)-h\varphi(a)&=0\,,\\ \varphi'(b)+H\varphi(b)&=0\,,\end{aligned}\right. \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi'(a)-h\psi(a)&=0\,,\\ \psi'(b)+H\psi(b)&=0\,,\end{aligned}\right. \tag{15}$$

гдѣ

$$\psi(x)=\frac{\varphi(x)q-\varphi''(x)}{p} \quad **).$$

Условія (14) не налагаютъ въ сущности никакого ограниченія на функцію $\varphi(x)$, такъ какъ только функціи, удовлетворяющія этимъ условіямъ, и могутъ разлагаться въ рядъ (13) во всемъ интервалѣ (a, b) (включая и предѣлы).

Условія же (15) вносятъ излишнее ограниченіе, отъ котораго желательно освободиться.

---

*) Пользуюсь кстати случаемъ исправить неправильно формулированную теорему XIV статьи: „Задача объ охлажденіи и т. д.".

Вмѣсто словъ: „хотя бы и не абсолютно, *и не* равномѣрно" должно быть: „хотя бы и не абсолютно, *но* равномѣрно".

**) См. теорему XV „Задача объ охлажденіи и т. д."; q имѣетъ тотъ же смыслъ, что и въ §-ѣ 3-тьемъ.

Этого мы достигнемъ, пользуясь леммой VI.

Допустимъ, что $\varphi(x)$ удовлетворяетъ только условiямъ (14) и остается конечной и непрерывной въ интервалѣ (a, b) вмѣстѣ со своими производными только двухъ первыхъ порядковъ.

Въ такомъ случаѣ, какъ показано въ статьѣ: „Задача объ охлажденiи и т, д." (стрн. 41, 42),

$$A_s = \int_a^b p\varphi U_s dx = \frac{1}{k_s}\int_a^b \psi_1 U_s dx = \frac{B_s}{k_s}, \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

гдѣ

$$\psi_1 = q\varphi - \varphi'', \quad B_s = \int_a^b \psi_1 U_s dx.$$

Такъ какъ

$$\left(|B_s| - \frac{1}{k_s}\right)^2 > 0,$$

то

$$\frac{|B_s|}{k_s} < \frac{1}{2}\left(B_s^2 + \frac{1}{k_s^2}\right).$$

Пользуясь этимъ неравенствомъ и (8) §-а 3-тьяго, получаемъ

$$|U_s A_s| < \frac{N}{2} k_s B_s^2 + \frac{1}{2k_s}.$$

Модуль каждаго члена ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s \tag{16}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\left(Nk_s B_s^2 + \frac{1}{k_s}\right).$$

Послѣднiй же сходится.

Въ самомъ дѣлѣ, рядъ

$$\frac{N}{2}\sum_{s=1}^{\infty} k_s B_s^2$$

сходится въ силу леммы VI, а рядъ

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{k_s}$$

сходится потому, что числа $k_s(s=1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots)$ удовлетворяютъ условіямъ

$$k_s > M(s-1)^2$$

(см. § 3).

Рядъ (16) сходится, слѣдовательно, абсолютно и равномѣрно.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую важную теорему:

Теорема III. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s ,$$

гдѣ

$$A_s = \int_a^b p\varphi U_s dx ,$$

а $U_s(s=1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots)$ *суть функціи, опредѣляемыя условіями* (3), (4), (5) *и* (6) §-*а* 3-*тьяг*, *сходится абсолютно и равномѣрно въ интервалѣ* $(a\,,\,b)$, *если функція* $\varphi(x)$ *конечна и непрерывна въ интервалѣ* $(a\,,\,b)$ *вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ*

$$\varphi'(a) - h\varphi(a) = 0\,,$$

$$\varphi'(b) + H\varphi(b) = 0\,.$$

Сопоставляя эту теорему съ теоремой, высказанной въ началѣ §-а, выводимъ слѣдующую:

Теорема IV. *Всякая функція* $\varphi(x)$, *конечная и непрерывная въ интервалѣ* $(a\,,\,b)$ *вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющая условіямъ*

$$\varphi'(a) - h\varphi(a) = 0\,,$$

$$\varphi'(b) + H\varphi(b) = 0\,,$$

разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ

$$\sum_{s=}^{\infty} A_s U_s .$$

Такимъ образомъ, задачу объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня можно считать рѣшенной при весьма общихъ предположеніяхъ о характерѣ данной функціи $\varphi(x)$ *).

Я думаю, что условіе существованія второй производной функціи $\varphi(x)$ несущественно.

Замѣтимъ, что всѣ предыдущія соображенія не теряютъ силы и въ предѣльныхъ случаяхъ, когда

$$H = h = 0\,,$$

или когда

$$H = \infty\,, \qquad h = \infty\,.$$

6. Разсмотримъ теперь гармоническія функціи второго рода.

Будемъ разумѣть подъ $B_s (s = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$ какія либо (неопредѣленныя) постоянныя и положимъ

$$R_p = f - B_0 - B_1 V_1 - B_2 V_2 - \ldots - B_p V_p. \tag{17}$$

Положимъ затѣмъ

$$V^{(p)} = \int \left[\left(\frac{\partial R_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\,, \qquad W^{(p)} = \int R_p^2 \, d\tau\,,$$

$$M = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\,, \qquad N = \int f^2 d\tau\,.$$

Легко убѣдиться, что

$$V^{(p)} = M + \sum_{s=1}^{p} B_s^2 (V_s, V_s) - 2 \sum_{s=1}^{p} B_s (f, V_s) + 2 \sum_{s,r=1,2,\ldots,p} B_s B_r (V_s, V_r).$$

По предыдущему

$$(V_s, V_s) = \lambda_s\,, \qquad (V_s, V_r) = 0\,.$$

Сверхъ того

$$(f, V_s) = \lambda_s \int f V_s d\tau = \lambda_s A_s\,.$$

---

*) См. мою статью: „Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня" „Сообщ. Харьк. Матем. Общ." Т. V, 1897 г., стр. 1—3 и 38—48.

Слѣдовательно,

$$V^{(p)} = M + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s B_s^2 - 2\sum_{s=1}^{p} \lambda_s B_s A_s =$$

$$= M + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s [(B_s - A_s)^2 - A_s^2] = M + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s (C_s^2 - A_s^2),$$

гдѣ положено для сокращенія

$$C_s = B_s - A_s. \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

Составимъ теперь выраженіе $W^{(p)}$.

Получимъ

$$\int R_p^2 d\tau = W^{(p)} = \int \Big(f^2 - 2fB_0 - 2\sum_{s=1}^{p} B_s f V_s + B_0^2 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} B_s^2 V_s^2 + 2\sum_{s=1}^{p} B_0 B_s V_s + 2\sum_{s, r = 1, 2, \ldots, p} B_s B_r V_s V_r \Big) d\tau.$$

Такъ какъ

$$\int V_s^2 d\tau = 1, \qquad \int V_s d\tau = 0, \qquad \int V_r V_s d\tau = 0, \qquad (r \gtrless s)$$

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau, \qquad A_s = \int f V_s d\tau, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

то

$$W^{(p)} = N + D(B_0^2 - 2A_0 B_0) + \sum_{s=1}^{p} B_s^2 - 2\sum_{s=1}^{p} B_s A_s =$$

$$= N + D[(B_0 - A_0)^2 - A_0^2] + \sum_{s=1}^{p} [(B_s - A_s)^2 - A_s^2] =$$

$$= N + D(C_0^2 - A_0^2) + \sum_{e=1}^{p} (C_s^2 - A_s^2),$$

гдѣ, очевидно,

$$C_s = B_s - A_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

Если

$$B_s = A_s, \qquad {\scriptstyle s=0,1,2,\ldots,p}$$

то

$$V_0^{(p)} = M - \sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_s^2, \qquad W_0^{(p)} = N - \sum_{s=1}^{p} A_s^2 - DA_0^2.$$

Слѣдовательно,

$$V^{(p)} = V_0^{(p)} + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s C_s^2,$$

$$W^{(p)} = W_0^{(p)} + \sum_{s=1}^{p} C_s^2. \qquad (18)$$

Здѣсь $V_0^{(p)}$ и $W_0^{(p)}$ обозначаютъ, очевидно, интегралы $V^{(p)}$ и $W^{(p)}$ по замѣнѣ въ послѣднихъ постоянныхъ B_s черезъ $A_s (s=0, 1, 2, \ldots, p)$ *).

Изъ равенства (18) слѣдуетъ, что

$$\frac{V^{(p)} - V_0^{(p)}}{W^{(p)} - W_0^{(p)}} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} \lambda_s C_s^2}{\sum\limits_{s=1}^{p} C_s^2}. \qquad (19)$$

Это равенство справедливо при какомъ угодно p и каковы бы ни были коэффиціенты $B_s (s = 0, 1, 2, \ldots, p)$.

Равенство (19) даетъ

$$\frac{V^{(p)} - V_0^{(p)}}{W^{(p)} - W_0^{(p)}} < \lambda_p,$$

или

$$V^{(p)} - \lambda_p W^{(p)} < V_0^{(p)} - \lambda_p W_0^{(p)}. \qquad (20)$$

Обозначимъ черезъ φ какую либо функцію координатъ и положимъ

$$B_0 = \int \varphi d\tau, \qquad B_s = \int \varphi V_s d\tau. \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

Возьмемъ затѣмъ m произвольныхъ функцій

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$$

---

*) Напомнимъ, что

$$A_0 = \frac{1}{D} \int f d\tau, \qquad A_s = \int f V_s d\tau. \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

и m произвольныхъ постоянныхъ

$$\alpha_1\,,\quad \alpha_2\,,\,\ldots\,,\;\alpha_m$$

и положимъ

$$\varphi=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2+\ldots+\alpha_m\varphi_m.$$

Получимъ

$$\begin{aligned} B_0&=\alpha_1\int\varphi_1 d\tau+\alpha_2\int\varphi_2 d\tau+\ldots+\alpha_m\int\varphi_m d\tau,\\ B_s&=\alpha_1\psi_{1s}+\alpha_2\psi_{2s}+\ldots+\alpha_m\psi_{ms}, \\ &\qquad (s=1,2,\ldots,p)\end{aligned} \tag{21}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\psi_{ks}=\int\varphi_k V_s d\tau. \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

Подставивъ такимъ образомъ опредѣленныя постоянныя B_s въ выраженіе

$$B_0+\sum_{s=1}^{p}B_sV_s,$$

приведемъ его къ виду

$$\alpha_1\vartheta_1+\alpha_2\vartheta_2+\ldots+\alpha_m\vartheta_m,$$

гдѣ

$$\vartheta_k=\int\varphi_k d\tau+\sum_{s=1}^{p}V_s\psi_{ks}. \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$R_p=f-\alpha_1\vartheta_1-\alpha_2\vartheta_2-\ldots-\alpha_m\vartheta_m.$$

Разобъемъ объемъ области (D) на m составляющихъ объемовъ.

Назовемъ наибольшее изъ разстояній между двумя точками k'таго изъ составляющихъ объемовъ черезъ $l_{k,m}$.

Наибольшее изъ чиселъ $l_{k,m}$ обозначимъ просто черезъ l_m.

Положимъ

$$L_m=\left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{1}{l_m^2}.$$

Всегда можно производить дѣленіе объема области (D) на составляющіе объемы такимъ образомъ, что при возрастаніи числа m число l_m будетъ стремиться къ нулю, и мы получимъ

$$\lim_{m=\infty} L_m = \infty .$$

Въ своемъ мемуарѣ: „Sur les équations etc.“ H. Poincaré доказалъ слѣдующую лемму:

Лемма VIII. *Если функція F удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int F d\tau_k = 0 , \qquad (k=1, 2, \ldots, m)$$

гдѣ $d\tau_k$ есть элементъ k'таго изъ m составляющихъ объемовъ, на который распространяется интегралъ

$$\int F d\tau_k ,$$

то отношеніе $\dfrac{V}{W}$ интеграловъ

$$V = \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \quad \text{и} \quad W = \int F^2 d\tau$$

болѣе числа L_m, т. е.

$$\frac{V}{W} > L_m .$$

Эта лемма оказывается весьма полезной при изслѣдованіи различныхъ вопросовъ, относящихся къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій Математической Физики, и дважды доказана H. Poincaré: одинъ разъ въ XII томѣ журнала: „Amarican Journal of Mathematics“, другой —въ вышеупомянутомъ мемуарѣ: „Sur les équations etc.“.

Въ своей статьѣ: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“ я далъ третье доказательство этой леммы, находящееся въ непосредственной связи съ вопросами интегрированія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій, и потому считаю возможнымъ не останавливаться на доказательствѣ этой леммы въ настоящемъ изслѣдованіи.

Опредѣлимъ теперь коэффиціенты $\alpha_k (k = 1 , 2 , \ldots , m)$, пока совершенно произвольные, при помощи равенствъ

$$\int f d\tau_k = \alpha_1 \int \vartheta_1 d\tau_k + \alpha_2 \int \vartheta_2 d\tau_k + \ldots + \alpha_m \int \vartheta_m d\tau_k . \qquad (k=1, 2, \ldots, m) \quad (22)$$

Всегда можно подобрать произвольныя функціи $\varphi_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \int \vartheta_1 d\tau_1, & \int \vartheta_2 d\tau_1, \ldots, & \int \vartheta_m d\tau_1 \\ \int \vartheta_1 d\tau_2, & \int \vartheta_2 d\tau_2, \ldots, & \int \vartheta_m d\tau_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int \vartheta_1 d\tau_m, & \int \vartheta_2 d\tau_m, \ldots, & \int \vartheta_m d\tau_m \end{vmatrix}$$

не будетъ равенъ нулю.

Уравненія (22) дадутъ вполнѣ опредѣленныя величины постоянныхъ $\alpha_k (k = 1, 2, \ldots, m)$, послѣ чего по формуламъ (21) опредѣлимъ и коэффиціенты $B_s (s = 0, 1, 2, \ldots, p)$.

Назовемъ интегралы $V^{(p)}$ и $W^{(p)}$ при этомъ выборѣ коэффиціентовъ B_s соотвѣтственно черезъ $V_1^{(p)}$ и $W_1^{(p)}$.

На основаніи леммы VIII можемъ писать

$$\frac{V_1^{(p)}}{W_1^{(p)}} > L_m,$$

или

$$V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0. \tag{23}$$

Числа m и p независимы между собою.

При всякомъ данномъ числѣ p, сколь бы велико оно ни было, всегда можно найти такое число m, что будетъ имѣть мѣсто неравенство вида

$$L_m > \lambda_p.$$

При этомъ будемъ имѣть

$$V_1^{(p)} - \lambda_p W_1^{(p)} > V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0.$$

Сопоставляя послѣднія неравенства съ (20), получаемъ

$$V_0^{(p)} - \lambda_p W_0^{(p)} > V_1^{(p)} - \lambda_p W_1^{(p)} > V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0,$$

т. е.

$$W_0^{(p)} < \frac{V_0^{(p)}}{\lambda_p}. \tag{24}$$

Это неравенство справедливо при всякомъ p.

Увеличивая p до безконечности и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim_{p=\infty} W_0^{(p)} = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\int f^2 d\tau = DA_0^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема V. *Если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, то*

$$\int f^2 d\tau = DA_0^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \tag{25}$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau, \quad A_s = \int f V_s d\tau.$$

Формула подобная (25) была выведена еще раньше проф. А. М. Ляпуновымъ. Въ сообщеніяхъ, сдѣланныхъ Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіяхъ 13 декабря 1896 г., 2 января и 2 мая 1897 г., онъ доказалъ, что въ случаѣ тригонометрическихъ и обобщенныхъ сферическихъ функцій равенство типа (25) справедливо всегда, коль скоро функція f *конечна* и *интегрируема* въ извѣстной области измѣненія входящихъ въ нее перемѣнныхъ, независимо отъ того, разлагается ли f въ ряды по вышеупомянутымъ функціямъ, или нѣтъ.

Онъ указалъ также примѣненіе этой формулы къ разысканію точныхъ низшихъ предѣловъ многихъ опредѣленныхъ интеграловъ и къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ Математической Физики, напр., къ рѣшенію извѣстной задачи электростатики.

Прежде чѣмъ перейти къ главной цѣли изслѣдованія, остановимся подробнѣе на равенствѣ (25) и, руководствуясь идеями проф. А. М. Ляпунова, выведемъ изъ него нѣкоторыя слѣдствія.

На основаніи только что сказаннаго мы можемъ думать, что условіе существованія первыхъ производныхъ отъ f (также какъ и въ случаѣ проф. А. М. Ляпунова) несущественно и является лишь слѣдствіемъ употребленнаго нами пріема доказательства.

Пусть f есть функція, конечная и непрерывная внутри (D), но не имѣющая производныхъ.

Можно найти такую функцію f_1, которая принимала бы внутри (D) тѣ же значенія, что и f, и имѣла бы опредѣленныя производныя по координатамъ.

При этомъ будемъ имѣть

$$\int f d\tau = \int f_1 d\tau\,, \qquad \int f^2 d\tau = \int f_1^2 d\tau\,,$$

$$\int f V_s d\tau = \int f_1 V_s d\tau\,. \qquad (s=1,2,\ldots) \tag{26}$$

По теоремѣ V-ой будемъ имѣть

$$\int f_1^2 d\tau = \frac{1}{D}\left(\int f_1 d\tau\right)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\int f_1 V_s d\tau\right)^2.$$

Въ силу же (26) получимъ

$$\int f^2 d\tau = \frac{1}{D}\left(\int f d\tau\right)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\int f V_s d\tau\right)^2.$$

Можно думать, что и условіе непрерывности функціи f несущественно. Равенство (25) будетъ, по всей вѣроятности, справедливо, коль скоро f конечна и интегрируема внутри (D).

Однако строго доказать это предложеніе намъ пока не удалось.

7. Обозначимъ черезъ φ и ψ двѣ конечныя и непрерывныя внутри (D) функціи координатъ и положимъ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int \varphi d\tau\,, \qquad A_s = \int \varphi V_s d\tau\,,$$

$$B_0 = \frac{1}{D}\int \psi d\tau\,, \qquad B_s = \int \psi V_s d\tau\,. \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Примѣнивъ къ функціямъ

$$\varphi + \psi \qquad \text{и} \qquad \varphi - \psi$$

теорему V-ую, получимъ

$$\int (\varphi+\psi)^2 d\tau = D(A_0+B_0)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}(A_s+B_s)^2\,,$$

$$\int (\varphi-\psi)^2 d\tau = D(A_0-B_0)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}(A_s-B_s)^2\,.$$

Вычитая изъ перваго равенства второе, находимъ

$$\int \varphi\psi d\tau = DA_0B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_sB_s.$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема VI. *Коль скоро функціи* φ *и* ψ *конечны и непрерывны внутри области* (D), *то*

$$\int \varphi\psi d\tau = DA_0B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_sB_s, \tag{27}$$

гдѣ

$$DA_0 = \int \varphi d\tau, \qquad A_s = \int \varphi V_s d\tau,$$

$$DB_0 = \int \psi d\tau, \qquad B_s = \int \psi V_s d\tau.$$

Равенство (27) всегда справедливо, независимо отъ того, разлагаются ли функціи φ и ψ въ ряды по функціямъ V_s, или нѣтъ.

Можно думать, что это равенство справедливо и при болѣе общихъ условіяхъ относительно функцій φ и ψ, когда эти функціи только конечны и интегрируемы внутри (D).

Замѣтимъ, что рядъ правой части равенства (27) есть рядъ *абсолютно* сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(|A_s| - |B_s|)^2 > 0,$$

т. е.

$$|A_s|\,|B_s| < \frac{1}{2}(A_s^2 + B_s^2).$$

Каждый членъ ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s|\,|B_s|$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}(A_s^2 + B_s^2).$$

Но по леммѣ III-тьей каждый изъ рядовъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \quad \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

сходится.

Слѣдовательно, рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s| \, |B_s|$$

есть рядъ сходящійся, т. е. рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s$$

сходится абсолютно.

8. Все вышеизложенное съ незначительными измѣненіями примѣнимо и къ гармоническимъ функціямъ перваго рода U_s.

Пусть f какая либо функція координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D) и обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Положимъ

$$f = B_1 U_1 + B_2 U_2 + \cdots + B_p U_p + R_p,$$

гдѣ $B_s (s = 1, 2, \ldots, p)$ суть какія либо постоянныя.

Выберемъ B_s такъ, чтобы интегралъ

$$\int R_p^2 d\tau$$

былъ minimum.

Получимъ

$$B_s = \int f U_s d\tau.$$

Будемъ обозначать, такимъ образомъ, опредѣленныя постоянныя B_s черезъ A_s.

При этихъ значеніяхъ постоянныхъ B_s интегралы

$$V_0^{(p)} = \int \left[\left(\frac{\partial R_p}{dx} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{dy} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{dz} \right)^2 \right] d\tau, \quad W_0^{(p)} = \int R_p^2 d\tau$$

будутъ убывать съ возрастаніемъ значка p.

Разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ §-ѣ 6-омъ, убѣдимся въ справедливости неравенства

$$V^{(p)} - k_p W^{(p)} < V_0^{(p)} - k_p W_0^{(p)},$$

гдѣ $k_p (p = 1, 2, \ldots)$ суть характеристическія числа функцій U_s для области (D).

Положимъ

$$B_s = \int \varphi U_s d\tau,$$

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_m \varphi_m,$$

гдѣ α_s суть пока неопредѣленныя постоянныя, а φ_s какія либо функціи координатъ.

Обозначимъ интегралы $V^{(p)}$ и $W^{(p)}$ при этихъ значеніяхъ постоянныхъ B_s соотвѣтственно черезъ $V_1^{(p)}$ и $W_1^{(p)}$.

По леммѣ VIII можемъ выбрать постоянныя α_s такъ, чтобы было

$$V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0.$$

Сверхъ того числомъ m при всякомъ данномъ p можно распорядиться такъ, что будетъ

$$L_m > k_p.$$

При этихъ условіяхъ будемъ имѣть

$$V_0^{(p)} - k_p W_0^{(p)} > 0,$$

или

$$W_0^{(p)} < \frac{V_0^{(p)}}{k_p}.$$

Это неравенство показываетъ, что

$$\lim_{p=\infty} W_0^{(p)} = 0.$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема VII. *Если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными по координатамъ и обращается въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int f^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \tag{28}$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau. \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Равенство (28) справедливо независимо отъ того, разлагается ли f въ рядъ по функціямъ U_s, или нѣтъ.

Теорема VII-ая справедлива, хотя бы f и не имѣла частныхъ производныхъ внутри (D).

Она справедлива, вѣроятно, коль скоро f конечна и интегрируема внутри области (D).

Какъ слѣдствіе получается слѣдующая теорема:

Теорема VIII. *Если φ и ψ суть двѣ функціи координатъ, конечныя и непрерывныя внутри (D) и обращающіяся въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int \varphi\psi d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \tag{29}$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi U_s d\tau, \quad B_s = \int \psi U_s d\tau. \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Рядъ правой части равенства (29) сходится абсолютно.

9. Пусть φ есть функція координатъ, конечная и непрерывная внутри (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющая условію

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Положимъ

$$\psi = \Delta\varphi.$$

Функція ψ должна удовлетворять условію

$$\int \psi d\tau = 0. \tag{30}$$

По теоремѣ VI-ой

$$\int \varphi\psi d\tau = DA_0B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s.$$

Въ данномъ случаѣ [въ силу (30)]

$$B_0 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\int \varphi\psi d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s.$$

Такъ какъ $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ равно нулю на поверхности (S), то по теоремѣ Грина

$$\int \varphi\psi d\tau = \int \varphi \Delta\varphi d\tau = -\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau. \quad (31)$$

Сверхъ того

$$\int \Delta\varphi V_s d\tau = \int \varphi \Delta V_s d\tau = -\lambda_s \int \varphi V_s d\tau = -\lambda_s A_s,$$

ибо V_s удовлетворяетъ условіямъ (11) и (12) §-а 3-тьяго первой части.

Но

$$B_s = \int \psi V_s d\tau = \int \Delta\varphi V_s d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$B_s = -\lambda_s A_s$$

и

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s = -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2. \quad (32)$$

Равенства (31) и (32) приводятъ къ заключенію, что

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2.$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема IX. *Если функція φ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяетъ условію*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2,$$

ніе

$$A_s = \int \varphi V_s d\tau. \qquad (s=1, 2, \ldots)$$

Пусть φ и ψ двѣ функціи координатъ, конечныя и непрерывныя внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Функціи

$$\Phi_1 = \varphi + \psi \qquad \text{и} \qquad \Phi_2 = \varphi - \psi$$

также конечны и непрерывны внутри (D) вмѣстѣ съ ихъ производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

По теоремѣ IX-ой можемъ писать

$$(\Phi_1, \Phi_1) = \int \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left(\int \Phi_1 V_s d\tau \right)^2,$$

$$(\Phi_2, \Phi_2) = \int \left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left(\int \Phi_2 V_s d\tau \right)^2.$$

Такъ какъ

$$\int \Phi_1 V_s d\tau = A_s + B_s,$$

$$\int \Phi_2 V_s d\tau = A_s - B_s,$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi V_s d\tau, \qquad B_s = \int \psi V_s d\tau,$$

а

$$(\Phi_1, \Phi_1) - (\Phi_2, \Phi_2) = 4(\varphi, \psi) = 4 \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau,$$

то

$$(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s B_s.$$

Такимъ образомъ, какъ слѣдствіе теоремы IX-ой, получается слѣдующая теорема:

Теорема X. *Если функціи* φ *и* ψ *конечны и непрерывны внутри области* (D) *вмѣстѣ съ ихъ производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяютъ условіямъ*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\,,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0\qquad \textit{на поверхности } (S)\,,$$

то

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s A_s B_s\,. \tag{33}$$

Рядъ правой части равенства (33) сходится абсолютно.

10. Подобныя же теоремы могутъ быть доказаны и для функцій U_s (гармоническія функціи перваго рода).

Пусть ψ есть функція координатъ, конечная и непрерывная внутри (D) и обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Опредѣлимъ функцію φ при помощи условій

$$\Delta\varphi=\psi\qquad \text{внутри } (D)\,, \tag{34}$$

$$\varphi=0\qquad \text{на поверхности } (S)\,. \tag{35}$$

Условія (34) и (35) опредѣляютъ функцію φ вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Функція φ представится въ видѣ

$$\varphi=-\int G\psi' d\tau'\,,$$

гдѣ G есть обыкновенная функція Грина (см. 1-ую часть).

Такъ какъ φ и ψ обращаются въ нуль на поверхности (S), то по теоремѣ VIII-ой

$$\int\varphi\psi d\tau=\sum_{s=1}^{\infty}A_s B_s\,.$$

Но

$$B_s=\int\psi U_s d\tau=\int\Delta\varphi U_s d\tau=\int\varphi\Delta U_s d\tau=-\,k_s\int\varphi U_s d\tau=-\,k_s A_s\,.$$

Поэтому

$$\int \varphi\psi d\tau = \int \varphi \Delta\varphi d\tau = -\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2.$$

Но по теоремѣ Грина

$$\int \varphi \Delta\varphi d\tau = -\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = -(\varphi\,,\ \varphi).$$

Слѣдовательно,

$$(\varphi\,,\ \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2.$$

Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Теорема XI. *Если функція φ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и обращается въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2\,,$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi U_s d\tau. \qquad (s = 1, 2, \ldots$$

Какъ слѣдствіе этой теоремы получимъ слѣдующую:

Теорема XII. *Если φ и ψ суть двѣ функціи координатъ, конечныя и непрерывныя внутри (D) вмѣстѣ съ ихъ производными первыхъ двухъ порядковъ и обращающіяся въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s B_s\,,$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi U_s d\tau\,, \quad B_s = \int \psi U_s d\tau. \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

11. Равенство (27) теоремы VI доказано нами въ предположеніи, что обѣ функціи φ и ψ *конечны* и *непрерывны* внутри области (D).

Допустимъ теперь, что одна изъ этихъ функцій, положимъ ψ, не подчиняется условію непрерывности. Предположимъ только, что ψ *конечна* и *интегрируема* внутри области (D).

Помножимъ обѣ части равенства

$$\varphi = A_0 + \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + R_p$$

на функцію ψ и интегрируемъ результатъ по какой либо части (D_1) области (D).

Называя черезъ $d\tau_1$ элементъ области (D_1), получимъ

$$\int \varphi\psi d\tau_1 = A_0 \int \psi d\tau_1 + \sum_{s=1}^{p} A_s B_s + \int R_p \psi d\tau_1 ,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int \varphi d\tau , \quad A_s = \int \varphi V_s d\tau , \quad B_s = \int \psi V_s d\tau_1 . \quad (s=1, 2, \ldots, p)$$

Имѣемъ

$$\left(\int R_p \psi d\tau_1\right)^2 < \int R_p^2 d\tau_1 \int \psi^2 d\tau_1 .$$

Такъ какъ ψ есть конечная функція координатъ, то

$$\int \psi^2 d\tau_1$$

есть конечная положительная постоянная.

Обозначимъ ее черезъ M.

Далѣе, очевидно, что

$$\int R_p^2 d\tau_1 < \int R_p^2 d\tau .$$

Слѣдовательно,

$$\left(\int R_p \psi d\tau_1\right)^2 < M \int R_p^2 d\tau .$$

Это неравенство справедливо при всякомъ p.

Увеличивая p до безконечности и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim_{p=\infty} \int R_p \psi d\tau_1 = 0 ,$$

ибо, по теоремѣ V-ой,

$$\lim_{p=\infty} \int R_p^2 d\tau = 0 .$$

Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XIII. *Если φ есть функція координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D), а ψ функція координатъ только конечная и интегрируемая внутри (D) (хотя бы и прерывная), то*

$$\int \varphi\psi d\tau_1 = \frac{1}{D}\int \varphi d\tau \cdot \int \psi d\tau_1 + \sum_{s=1}^{\infty}\int \varphi V_s d\tau \cdot \int \psi V_s d\tau_1 .$$

Это равенство справедливо на какую бы часть (D_1) области (D) ни распространялись интегралы, содержащіе функцію ψ.

Полагая въ частности

$$\psi = 1,$$

получаемъ

$$\int \varphi d\tau_1 = \frac{D_1}{D}\int \varphi d\tau + \sum_{s=1}^{\infty}\int \varphi V_s d\tau \cdot \int V_s d\tau_1 . \tag{36}$$

Этой формулой воспользуемся впослѣдствіи.

12. Укажемъ на нѣкоторыя приложенія полученныхъ нами результатовъ.

Въ своей статьѣ: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ" я, пользуясь обобщеннымъ тождествомъ E. Picard'a, приведеннымъ имъ въ „Traité d'Analyse", доказалъ слѣдующую теорему:

Теорема XIV. *Если функція f, конечная и непрерывная внутри (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, обращается въ нуль на поверхности (S), то* т о ч н ы й *низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ интеграловъ*

$$V = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \quad W = \int f^2 d\tau \tag{37}$$

равенъ k_1, наименьшему изъ характеристическихъ чиселъ гармоническихъ функцій перваго рода.

Эта теорема можетъ быть получена весьма просто, какъ слѣдствіе теоремъ VIII-ой и XI-ой.

Если φ обращается въ нуль на поверхности (S), то

$$V = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2, \quad W = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 .$$

Отсюда

$$\frac{V}{W}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty}k_s A_s^2}{\sum\limits_{s=1}^{\infty}A_s^2}\geqq k_1.$$

Число k_1 есть точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$, ибо для функціи U_1, удовлетворяющей условіямъ

$$\Delta U_1+k_1 U_1=0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$U_1=0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

имѣемъ

$$\frac{\int\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)^2\right]d\tau}{\int U_1^2 d\tau}=k_1.$$

Теорема доказана.

Я уже пользовался одной леммой H. Poincaré, состоящей въ томъ, что отношеніе $\frac{V}{W}$ [рав. (37)] болѣе числа $\left(\frac{4}{3l}\right)^2$, гдѣ l есть наибольшее изъ разстояній между двумя точками поверхности (S), если функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f\,d\tau=0. \tag{38}$$

При помощи вышедоказанныхъ теоремъ мы можемъ не только доказать эту лемму, но и найти *точный* низшій предѣлъ отношенія интеграловъ V и W при условіи (38).

Не трудно убѣдиться, что

$$(\varphi\,,\ \psi)^2<(\varphi\,,\ \varphi)\cdot(\psi\,,\ \psi), \tag{39}$$

каковы бы ни были функціи φ и ψ, имѣющія производныя перваго порядка внутри области (D).

Доказательство этого неравенства можно найти въ моемъ соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“, напечатанномъ въ Математическомъ Сборникѣ (стр. 501, 1897 г.).

Допустимъ, что ψ удовлетворяетъ условіямъ

$$\Delta\psi+\varphi=0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{40}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{41}$$

Условіями (40) и (41) функція ψ вполнѣ опредѣлится до нѣкоторой произвольной постоянной C.

При этомъ функція φ должна удовлетворять одному условію вида

$$\int \varphi d\tau = 0.$$

Неравенство (39) при помощи теоремы Грина приведется къ слѣдующему

$$\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^2 < (\varphi\,,\ \varphi)\cdot\int \varphi\psi d\tau.$$

Но

$$\left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2 < \int \varphi^2 d\tau\cdot\int \psi^2 d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^2 < (\varphi\,,\ \varphi)\cdot\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int \psi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\frac{\int \varphi^2\, d\tau}{(\varphi\,,\ \varphi)} < \frac{\left(\int \psi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Опредѣлимъ постоянную C изъ условія

$$\int \psi d\tau = 0.$$

По теоремѣ V-ой получимъ

$$\int \varphi^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad \int \psi^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2,$$

гдѣ, напоминаемъ,

$$A_s = \int \varphi V_s d\tau, \quad B_s = \int \psi V_s d\tau. \qquad (s=1\ 2,\ldots)$$

На основаніи (40) получаемъ

$$A_s = -\int \Delta\psi\, V_s d\tau.$$

По теоремѣ Грина

$$\int \Delta\varphi V_s d\tau = \int \Delta V_s \psi\, d\tau = -\lambda_s \int V_s \psi d\tau = -\lambda_s B_s.$$

Слѣдовательно,

$$A_s = \lambda_s B_s$$

и

$$\frac{\int \varphi^2 d\tau}{\int \psi^2 d\tau} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 B_s^2}{\sum\limits_{s=1}^{\infty} B_s^2}.$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{V}{W} = \frac{\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}{\int \varphi^2 d\tau} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 B_s^2}}{\sqrt{\sum\limits_{s=1}^{\infty} B_s^2}}. \tag{42}$$

Отсюда

$$\frac{V}{W} \geqq \lambda_1,$$

т. е. отношеніе $\frac{V}{W}$ всегда больше, или въ крайнемъ случаѣ равно числу λ_1, если среднее ариѳметическое изъ значеній функціи φ внутри области (D) есть нуль.

Для функціи V_1, удовлетворяющей условіямъ

$$\Delta V_1 + \lambda_1 V_1 = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

это отношеніе какъ разъ равно λ_1.

Такимъ образомъ можно считать доказанной слѣдующую теорему:

Теорема XV. *Если функція φ, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, удовлетворяетъ условію*

$$\int \varphi d\tau = 0, \tag{43}$$

то точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ *интеграловъ*

$$V=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau\,,\qquad W=\int\varphi^2 d\tau$$

равенъ λ_1, *наименьшему изъ характеристическихъ чиселъ гармоническихъ функцій второго рода.*

Равенство (42) справедливо, если функція φ подчинена лишь одному условію (43).

Допустимъ, что φ удовлетворяетъ еще слѣдующимъ условіямъ

$$\int\varphi V_1 d\tau=0\,,\qquad \int\varphi V_2 d\tau=0\,,\ldots,\int\varphi V_p d\tau=0. \tag{44}$$

Въ такомъ случаѣ

$$\frac{V}{W}=\frac{\sqrt{\sum\limits_{s=p+1}^{\infty}\lambda_s^2 B_s^2}}{\sqrt{\sum\limits_{s=p+1}^{\infty}B_s^2}}\,.$$

Отсюда

$$\frac{V}{W}\geqq\lambda_{p+1}\,.$$

Такимъ образомъ низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ для функціи φ, удовлетворяющей условіямъ (43) и (44), равенъ λ_{p+1}.

Число λ_{p+1} есть *точный* низшій предѣлъ, ибо для функціи

$$\varphi=V_{p+1}$$

имѣемъ

$$\frac{V}{W}=\lambda_{p+1}\,.$$

Этотъ результатъ мы можемъ формулировать въ видѣ слѣдующей теоремы:

Теорема XVI. *Если функція* φ, *конечная и непрерывная внутри области* (D) *вмѣстѣ со своими первыми производными, удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int\varphi d\tau=0\,,\qquad\int\varphi V_1 d\tau=0\,,\qquad\int\varphi V_2 d\tau=0\,,\ldots,\int\varphi V_p d\tau=0\,,$$

то точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ *интеграловъ*

$$V=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau\,,\quad W=\int\varphi^2 d\tau$$

равенъ λ_{p+1}.

Подобнымъ же путемъ легко доказать слѣдующую теорему:

Теорема XVII. *Если функція φ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, обращается въ нуль на поверхности (S) и удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int\varphi U_1 d\tau=0\,,\quad \int\varphi U_2 d\tau=0\,,\ldots,\int\varphi U_p d\tau=0\,,$$

то точный низшій предѣлъ отношенія $\dfrac{V}{W}$ *равенъ* k_{p+1}.

13. Предположимъ, что несжимаемая жидкость, ограниченная поверхностью (S), течетъ съ потенціаломъ скоростей V, и пусть нормальная составляющая скорости теченія на поверхности (S) равна заданной функціи f.

Функція V опредѣляется условіями

$$\begin{aligned} &\Delta V=0 &&\text{внутри } (D),\\ &\frac{\partial V}{\partial n}=f &&\text{на поверхности } (S). \end{aligned}\tag{45}$$

Функція f конечна и должна удовлетворять условію

$$\int f d\tau=0,$$

въ остальномъ же она вполнѣ произвольна.

Функція V вполнѣ опредѣляется условіями (45) до нѣкоторой постоянной произвольной.

Во многихъ задачахъ Гидродинамики требуется опредѣлить удвоенную живую силу $2T$ жидкой массы, не опредѣляя самой функціи V.

Имѣемъ

$$2T=\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Интегралъ правой части этого равенства распространяется на весь объемъ жидкой массы.

Для вычисленія $2T$ при каждомъ данномъ значеніи f необходимо опредѣлить сначала функцію V, т. е. каждый разъ рѣшать извѣстную задачу C. Neumann'a.

Рѣшеніе этой задачи представляетъ громадныя трудности, даже съ чисто теоретической точки зрѣнія; даже не существуетъ общей методы для доказательства существованія функціи V для какой угодно замкнутой поверхности (S).

Въ моей статьѣ: „Къ вопросу о существованіи конечной и непрерывной внутри данной области функціи координатъ, удовлетворяющей уравненію Лапласа при заданныхъ значеніяхъ ея нормальной производной на поверхности, ограничивающей область“ я указывалъ, что употреблявшіяся до сихъ поръ методы рѣшенія разсматриваемой задачи (напр. метода C. Neumann'а) недостаточно обоснованы.

Я предложилъ въ этой статьѣ вполнѣ строгую методу рѣшенія задачи C. Neumann'а, но примѣнимую, строго говоря, только къ конвексным поверхностямъ, отклоненіе которыхъ отъ сферы не превосходитъ нѣкотораго предѣла.

Но и эта метода имѣетъ лишь чисто теоретическое значеніе, и вычисленіе при помощи ея функціи V почти невыполнимо практически, даже для простѣйшихъ случаевъ сферы, цилиндра, эллипсоида.

Вычисленіе же интеграла $2T$, даже въ только что упомянутыхъ простѣйшихъ случаяхъ, еще затруднительнѣе.

Пользуясь вышеприведенными теоремами можно значительно упростить дѣло во всѣхъ случаяхъ, когда извѣстны для данной области (D) гармоническія функціи второго рода.

Вычисленіе этихъ функцій, вообще говоря, также весьма затруднительно, но для сферы, цилиндра, эллипсоида и т. п. функціи $V_s (s=1, 2, \ldots)$ можно построить, пользуясь хорошо извѣстными сферическими функціями, функціями Бесселя, Лямэ и т. п.

Въ этихъ случаяхъ и во всѣхъ другихъ, когда извѣстны функціи V_s, вычисленіе интеграла $2T$, какъ мы сейчасъ покажемъ, можно производить, не рѣшая каждый разъ (при каждомъ данномъ f) задачу C. Neumann'а.

Назовемъ черезъ v функцію координатъ, конечную и непрерывную внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющую одному условію

$$\frac{\partial v}{\partial n} = f \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{46}$$

Существуетъ безчисленное множество функцій, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ.

Возьмемъ какую либо опредѣленную изъ нихъ.

Положимъ

$$V = V_0 + v. \tag{47}$$

Такъ какъ V удовлетворяетъ условіямъ (45), а v условію (46), то V_0 есть функція координатъ, удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ

$$\Delta V_0 + \Delta v = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{48}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{49}$$

Подставивъ въ $2T$ вмѣсто V его выраженіе черезъ V_0 и v (47), получимъ

$$2T = (V_0, V_0) + 2(V_0, v) + (v, v) \text{ *)}.$$

По теоремѣ Грина и въ силу (48) и (49) получаемъ

$$(V_0, v) = -\int v\Delta V_0 d\tau = \int v\Delta v d\tau = -(v, v) + \int v\frac{\partial v}{\partial n}ds,$$

или, въ силу (46),

$$(V_0, v) = -(v, v) + \int vfds.$$

Слѣдовательно,

$$2T = (V_0, V_0) - (v, v) + 2\int vfds.$$

Вычисленіе интеграловъ

$$(v, v) \quad \text{и} \quad \int vfds,$$

теоретически говоря, не представляетъ затрудненій.

Функцію v можно подобрать такъ, чтобы это вычисленіе было возможно легкимъ.

Остается только опредѣлить интегралъ (V_0, V_0).

Такъ какъ V_0 есть конечная и непрерывная функція координатъ вмѣстѣ съ ея производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

то къ функціи V_0 примѣнима теорема IX-ая.

---

*) Напомнимъ, черезъ (F, Φ) мы обозначаемъ интегралъ вида

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)d\tau.$$

Въ силу этого можемъ писать

$$(V_0, V_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2.$$

Но

$$A_s = \int V_0 V_s d\tau = -\frac{1}{\lambda_s} \int V_0 \Delta V_s d\tau.$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial V_s}{\partial n} = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то, по теоремѣ Грина,

$$\int V_0 \Delta V_s d\tau = \int V_s \Delta V_0 d\tau,$$

или, въ силу (48),

$$\int V_0 \Delta V_s d\tau = -\int V_s \Delta v d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$\lambda_s A_s^2 = \frac{1}{\lambda_s} \left(\int V_s \Delta v d\tau \right)^2 \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и

$$(V_0, V_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s} \left(\int V_s \Delta v d\tau \right)^2.$$

Рядъ правой части этого равенства хорошо сходится.

Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ, когда для области (D) извѣстны функціи $V_s (s = 1, 2, \ldots)$, вычисленіе живой силы T приводится къ опредѣленію функціи v, конечной и непрерывной внутри (D) вмѣстѣ съ ея производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющей условію

$$\frac{\partial v}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

и затѣмъ къ вычисленію интеграловъ

$$(v, v), \quad \int v f ds, \quad \int V_s \Delta v d\tau. \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Опредѣленіе функціи V при каждомъ данномъ f оказывается излишнимъ.

14. Чтобы еще болѣе отмѣтить значеніе гармоническихъ функцій при рѣшеніи самыхъ разнообразныхъ вопросовъ Анализа и Математической Физики, разсмотримъ слѣдующую задачу.

Допустимъ, что намъ извѣстна по опыту составляющая по какому либо направленію силы притяженія внѣшней точки тѣломъ, матерія котораго заполняетъ область (D), ограниченную замкнутой поверхностью (S), или извѣстенъ потенціалъ этого тѣла на внѣшнія точки.

Опредѣлить плотность ϱ тѣла.

Пусть ξ, η, ζ координаты внѣшней точки, пусть r есть разстояніе точекъ объема (D) отъ точки ξ, η, ζ.

Обозначимъ черезъ

$$\alpha_1\,,\quad \alpha_2\,,\quad \alpha_3$$

cosinus'ы угловъ направленія s извѣстной намъ составляющей U силы притяженія.

Имѣемъ

$$\alpha_1\int\frac{\varrho(x-\xi)}{r^3}\,d\tau+\alpha_2\int\frac{\varrho(y-\eta)}{r^3}\,d\tau+\alpha_3\int\frac{\varrho(z-\zeta)}{r^3}\,d\tau=U,$$

гдѣ U есть извѣстная функція координатъ ξ, η и ζ.

Это равенство можно представить подъ видомъ

$$\int\varrho\,\frac{\cos(r\,,\,s)}{r^2}\,d\tau=U.$$

Функція

$$\varphi=\frac{\cos(r\,,\,s)}{r^2}$$

конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ внутри области (D).

Примѣняя къ интегралу

$$\int\varrho\varphi d\tau$$

теорему XIII-ую, получаемъ

$$\int\varrho\varphi d\tau=a_0A_0+a_1A_1+\ldots+a_sA_s+\ldots, \tag{50}$$

гдѣ

$$a_0=\int\varrho d\tau\,,\qquad a_s=\int\varrho V_s d\tau\,,$$

$$(s=1,2,\ldots)$$

$$A_0=\frac{1}{D}\int\varphi d\tau\,,\qquad A_s=\int\varphi V_s d\tau.$$

Равенство (50) справедливо, если мы допустимъ только, что плотность ϱ тѣла есть функція координатъ, конечная и интегрируемая внутри области (D) *).

Такимъ образомъ получаемъ

$$a_0 A_0 + a_1 A_1 + \cdots + a_s A_s + \ldots = U.$$

Рядъ лѣвой части этого равенства сходится абсолютно, какъ было указано выше (см. теорему VI-ую).

Допустимъ, что намъ извѣстны по опыту значенія U въ n различныхъ внѣшнихъ точкахъ.

Для каждой такой точки и каждаго даннаго направленія s мы можемъ вычислить n интеграловъ $A_s (s = 0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots,n-1)$.

Назовемъ значенія этихъ интеграловъ въ какой либо k'той изъ n взятыхъ точекъ черезъ

$$A_{s,k}\,, \qquad\qquad (s=0\,,1\,,2\,,\ldots,n-1)$$

соотвѣтствующее значеніе U обозначимъ черезъ U_k.

Для приближеннаго вычисленія коэффиціентовъ $a_s (s=0,\,1,\,2,\ldots,n-1)$ мы можемъ воспользоваться n уравненіями вида

$$\begin{aligned} a_0 A_{0,1} + a_1 A_{1,1} + a_2 A_{2,1} + \cdots + a_{n-1} A_{n-1,1} &= U_1\,,\\ a_0 A_{0,2} + a_1 A_{1,2} + a_2 A_{2,2} + \cdots + a_{n-1} A_{n-1,2} &= U_2\,, \qquad\qquad (51)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ a_0 A_{0,n} + a_1 A_{1,n} + a_2 A_{2,n} + \cdots + a_{n-1} A_{n-1,n} &= U_n\,. \end{aligned}$$

Здѣсь всѣ $A_{s,k} (s = 0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots,\,n-1\,; \quad k = 1\,,\,2\,,\ldots,\,n)$ и $U_k (k = 1\,,\,2\,,\ldots,\,n)$ суть вполнѣ опредѣленныя постоянныя.

Внѣшнія точки всегда можно выбрать такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A_{0,1}\,, & A_{1,1}\,, & A_{2,1}\,, & \ldots, & A_{n\;1,1} \\ A_{0,2}\,, & A_{1,2}\,, & A_{2,2}\,, & \ldots, & A_{n-1,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{0,n}\,, & A_{1,n}\,, & A_{2,n}\,, & \ldots, & A_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

не будетъ равенъ нулю.

Изъ уравненій (51) получимъ вполнѣ опредѣленныя выраженія коэффиціентовъ $a_s (s = 0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots,n-1)$.

---

*) Плотность ρ, слѣдовательно, можетъ быть и прерывной функціей координатъ.

Коэффиціентъ a_0 даетъ, очевидно, массу всего тѣла.

Средняя плотность δ тѣла представится подъ видомъ

$$\delta = \frac{1}{D} a_0 = \frac{1}{D} \int \varrho d\tau .$$

Если бы ϱ разлагалось въ рядъ по функціямъ V_s, то мы получили бы приближенное выраженіе ϱ въ видѣ

$$\varrho = \frac{a_0}{D} + a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_{n-1} V_{n-1} . \tag{52}$$

Соотвѣтствующимъ выборомъ числа n можно увеличивать степень приближенія сколь угодно далеко.

Но если ϱ и не разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ V_s, то все же иногда можно пользоваться формулой (52) для приближеннаго вычисленія ϱ при помощи функцій V_s, ибо при такомъ вычисленіи (при взятыхъ нами постоянныхъ a_s) погрѣшность вычисленія, за мѣру которой примемъ по Чебышеву интегралъ

$$\int \left(\varrho - \frac{a_0}{D} - a_1 V_1 - a_2 V_2 - \ldots - a_{n-1} V_{n-1} \right)^2 d\tau ,$$

есть наименьшая, и по теоремѣ V-ой стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастаніи числа n, если только сдѣлать гипотезу, что плотность ϱ есть непрерывная функція координатъ.

Есть основанія предполагать, что сказанное будетъ справедливо и независимо отъ послѣдней гипотезы.

Примѣнимъ къ разсматриваемому случаю формулу (36) §-а 11-аго.

Получимъ приближенно

$$\int \varrho d\tau_1 = \frac{D_1}{D} a_0 + \sum_{s=1}^{n-1} a_s \int V_s d\tau_1 ,$$

гдѣ, напомнимъ, $d\tau_1$ есть элементъ объема какой либо части (D_1) области (D), а D_1 объемъ этой части.

При помощи этой формулы можемъ вычислять съ достаточной степенью приближенія интегралъ отъ функціи ϱ, распространенный на любую часть области (D).

Съ физической точки зрѣнія это равносильно опредѣленію плотности тѣла въ любой его точкѣ.

Разумѣя подъ D_1 какой либо достаточно малый объемъ тѣла и называя черезъ δ плотность въ какой либо точкѣ, характеризующей положеніе этого объема въ тѣлѣ, получимъ съ достаточнымъ приближеніемъ

$$\delta = \frac{a_0}{D} + \frac{1}{D_1} \sum_{s=1}^{n-1} a_s \int V_s d\tau_1.$$

Все это безусловно справедливо въ предположеніи, что ϱ есть непрерывная функція координатъ.

Въ силу сдѣланныхъ выше замѣчаній можно думать, что указанная метода справедлива и въ болѣе общемъ случаѣ, когда ϱ не подчиняется условію непрерывности, а есть только конечная и интегрируемая функція координатъ внутри области (D).

Указанная метода примѣнима непосредственно къ весьма важной задачѣ объ опредѣленіи плотности земли.

Поверхность земли можно принимать за эллипсоидъ вращенія или, еще проще, за сферу.

Для этихъ случаевъ опредѣленіе функцій $V_s (s = 1, 2, \ldots, n-1)$ не представляетъ особыхъ затрудненій.

Построивъ функціи $V_s (s = 1, 2, \ldots, n-1)$ и опредѣливъ изъ n наблюденій въ различныхъ точкахъ надъ земной поверхностью составляющія силы притяженія земли по какимъ либо направленіямъ, найдемъ постоянныя $A_{s,k}$, а затѣмъ при помощи уравненій (51) и коэффиціенты $a_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$.

Такимъ образомъ рѣшимъ задачу о распредѣленіи матеріи внутри земного шара.

Все дѣло сводится къ опредѣленію изъ опыта значеній U_k въ различныхъ точкахъ надъ земной поверхностью.

Наблюденія, которыя давали бы соотвѣтствующія значенія U_k, не представляются намъ невозможными, тѣмъ болѣе, что наблюденія, аналогичныя съ интересующими насъ, уже производились.

Предположимъ далѣе, что намъ извѣстны величины $U_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ составляющихъ по какимъ либо направленіямъ силы притяженія земли въ n внѣшнихъ точкахъ.

При достаточно большомъ n можемъ, по предыдущему, опредѣлить съ достаточной точностью коэффиціенты $a_s (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Зная же эти коэффиціенты, можемъ вычислить составляющую силы притяженія по какому угодно направленію въ какой угодно точкѣ ξ, η, ζ.

Выраженіе этой составляющей по направленію s въ точкѣ

$$\xi = \alpha, \qquad \eta = \beta, \qquad \zeta = \gamma$$

представится подъ видомъ

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \int \varrho \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau;$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

По теоремѣ XIII-ой получаемъ

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + \dots + a_n B_n + \dots$$

Зная коэффиціенты $a_s (s = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ и вычисливъ интегралы

$$B_0 = \frac{1}{D} \int \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau, \qquad B_s = \int \frac{V_s \cos(r, s)}{r^2} d\tau, \quad {\scriptstyle (s=1, 2, \dots, n-1)}$$

получимъ приближенное выраженіе функціи U въ точкѣ α, β, γ подъ видомъ

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + \dots + a_{n-1} B_{n-1}.$$

Подобнымъ же путемъ можно рѣшать слѣдующую задачу:

Извѣстна величина составляющей по нѣкоторымъ направленіямъ силы притяженія всего земного шара въ n внѣшнихъ точкахъ. Опредѣлить составляющую притяженія по данному направленію s какой либо опредѣленной части D_1 земного шара.

Назовемъ черезъ $d\tau_1$ элементъ объема этой части.

Искомая составляющая въ точкѣ

$$\xi = \alpha, \qquad \eta = \beta, \qquad z = \gamma$$

представится подъ видомъ

$$U_1(\alpha, \beta, \gamma) = \int \varrho \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau_1.$$

Интегралъ правой части этого равенства распространяется на всю часть (D_1) земного шара.

По теоремѣ XIII-ой имѣемъ

$$U_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{a_0}{D} \int \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau_1 + a_1 \int \frac{V_1 \cos(r, s)}{r^2} d\tau_1 + \dots$$

$$\dots + a_n \int \frac{V_n \cos(r, s)}{r^2} d\tau_1 + \dots \tag{53}$$

Опредѣливъ, подобно предыдущему, по даннымъ задачи коэффиціенты $a_s (s=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, получимъ приближенное выраженіе $U_1(\alpha, \beta; \gamma)$, отбросивъ въ равенствѣ (53) всѣ члены, слѣдующіе за $(n-1)$'ымъ.

15. Переходимъ теперь къ главной цѣли нашего изслѣдованія: къ задачѣ о разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

Пусть f есть заданная функція координатъ.

Положимъ

$$f = A_0 + A_1 V_1 + A_2 V_2 + \cdots + A_p V_p + R_p,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau, \qquad A_s = \int f V_s d\tau. \qquad (s=1, 2, \ldots)$$

Если f есть конечная и непрерывная функція координатъ внутри области (D), то по теоремѣ V-ой

$$\lim_{p=\infty}\int R_p^2 d\tau = 0.$$

Если рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s \tag{54}$$

сходится и представляетъ непрерывную функцію координатъ, то $\lim\limits_{p=\infty} R_p$ есть также непрерывная функція координатъ, и мы можемъ писать

$$\lim_{p=\infty}\int R_p^2 d\tau = \int \lim_{p=\infty} R_p^2 d\tau = \int (\lim_{p=\infty} R_p)^2 d\tau = 0.$$

При этомъ необходимо

$$\lim_{p=\infty} R_p = 0,$$

и мы получаемъ

$$f = A_0 + A_1 V_1 + A_2 V_2 + \cdots + A_n V_n + \cdots$$

Рядъ (54) представитъ непрерывную функцію координатъ, если онъ сходится равномѣрно.

Такимъ образомъ можно считать доказанной слѣдующую теорему:

Теорема XVIII. *Рядъ*

$$A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau\,, \qquad A_s = \int f V_s d\tau\,, \qquad (s=1,2,\ldots)$$

а D есть объемъ области (D), представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ второго рода всякій разъ, когда онъ сходится равномѣрно (хотя бы и не абсолютно).

Сопоставляя эту теорему съ теоремой II-ой, выводимъ слѣдующую:

Теорема XIX. *Всякая функція f координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяющая двумъ условіямъ*

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ вида

$$f = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s.$$

16. Точно такія же теоремы могутъ быть доказаны и для гармоническихъ функцій перваго рода U_s.

Такъ, пользуясь теоремой VII, безъ труда выводимъ слѣдующую:

Теорема XX. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s\,,$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau\,, \qquad (s=1\,,2\,,\ldots)$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ перваго рода всякій разъ, когда онъ сходится равномѣрно (хотя бы и не абсолютно).

Сопоставляя, наконецъ, эту теорему съ теоремой I-ой выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XXI. *Всякая функція f координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяющая только двумъ условіямъ*

$$f = 0\,, \qquad \Delta f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ вида

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s.$$

17. Изслѣдованія послѣдней части нашей работы значительно подвигаютъ впередъ рѣшеніе вопроса о разложеніи данной функціи въ ряды по гармоническимъ функціямъ (перваго и второго рода).

Какъ было показано въ первой части статьи, мы могли до сихъ поръ на основаніи изысканій H. Poincaré и тѣхъ, которыя приведены мною въ статьяхъ: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ“ и „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“, утверждать, что разложеніе данной функціи f по функціямъ U_s и $V_s (s = 1, 2, \ldots)$ возможно, если f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ 8-ми порядковъ и удовлетворяетъ въ первомъ случаѣ (при разложеніи по функціямъ U_s) условіямъ

$$f = 0, \qquad \Delta f = 0, \tag{55}$$

на поверхности (S)

$$\Delta_2 f = 0, \qquad \Delta_3 f = 0, \tag{56}$$

а во второмъ (при разложеніи по функціямъ V_s) условіямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0, \tag{55$_1$}$$

на поверхности (S)

$$\frac{\partial \Delta_2 f}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_3 f}{\partial n} = 0. \tag{56$_1$}$$

Послѣднія теоремы показываютъ, что въ обоихъ случаяхъ достаточно допустить существованіе конечныхъ и непрерывныхъ производныхъ функціи f только до 5-аго порядка (невключительно) и не принимать въ разсчетъ условія (56) въ первомъ (при функціяхъ U_s) и (56$_1$) во второмъ случаѣ (при функціяхъ V_s).

Есть основаніе предполагать, что и условія

$$\Delta f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)$$

въ первомъ (при функціяхъ U_s) и

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)$$

во второмъ случаѣ (при функціяхъ V_s) не существенны.

Я позволю себѣ ограничиться этимъ замѣчаніемъ, такъ какъ вполнѣ строгаго доказательства только что высказаннаго предположенія я пока дать не въ состояніи.

Нѣсколько словъ объ Эваристѣ Галуа.

М. А. Тихомандрицкаго.

Мм. гг.!

Въ настоящемъ засѣданіи нашего Общества, мнѣ хотѣлось бы сказать нѣсколько словъ въ память того геніальнаго юноши, безвременной кончинѣ котораго на злополучной дуэли исполнится чрезъ двѣ недѣли ровно 65 лѣтъ.

Вы догадываетесь, конечно, что я намѣренъ говорить объ Эваристѣ Галуа.

На дняхъ Французское Математическое Общество издало отдѣльною брошюрой его „Oeuvres mathématiques“ съ предисловіемъ президента этого общества Эм. Пикара. Это первое, за 65 лѣтъ, отдѣльное изданіе полнаго собранія сочиненій Галуа; раньше, именно въ 1846 г., слѣдовательно чрезъ 14 лѣтъ послѣ его смерти, эти сочиненія были напечатаны Ліувилемъ въ его журналѣ. Какое громадное вліяніе эти спѣшные наброски, какъ ихъ правильнѣе можно назвать, имѣли на развитіе Высшей Алгебры и теоріи группъ вообще, во второй половинѣ и особенно въ концѣ настоящаго столѣтія—это представляетъ общеизвѣстный фактъ, и не о заслугахъ Галуа въ этой области я намѣренъ говорить теперь: есть еще другая область, менѣе извѣстная, гдѣ онъ также далеко опередилъ свое время. Г. Эм. Пикаръ въ своемъ предисловіи, впервые, сколько мнѣ извѣстно, обращаетъ вниманіе на то, что было сдѣлано Галуа въ теоріи самыхъ общихъ Абелевыхъ интеграловъ; этого самаго предмета и я намѣренъ коснуться, чтобы нѣсколько пополнить своими соображеніями указанія Эм. Пикара, что я считаю тѣмъ болѣе необходимымъ, что гг. Бриль и Нётеръ въ своемъ весьма интересномъ и очень подробномъ обозрѣніи „Развитія теоріи алгебраическихъ функцій (и ихъ интеграловъ, какъ слѣдовало-бы прибавить) въ прежнее и новѣйшее время“ *) о Галуа вовсе не упоминаютъ. Рукописей, содер-

*) „Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit“. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von D-r A. Brill und D-r M. Noether. Jahresbericht der D. M. V. 3 Bd. 1892—1893. Berlin 1894.

жащихъ изслѣдованія Галуа въ этой области не осталось вовсе; о результатахъ же этихъ изслѣдованій мы знаемъ только изъ письма его къ Огюсту Шевалье, писанному наканунѣ дуэли. Перечень этихъ результатовъ занимаетъ не много болѣе двухъ страницъ: отъ конца 29-й до начала 32-й, въ упомянутомъ новомъ изданіи его математическихъ сочиненій. Вотъ они: имъ найдена была теорема Абеля для интеграловъ, зависящихъ отъ какой угодно алгебраической функціи, опредѣляемой какимъ угодно алгебраическимъ уравненіемъ, а не отъ радикаловъ только; работа Абеля (XII мемуаръ новаго изданія его „Oeuvres"), представленная въ 1826 г. Парижской Академіи Наукъ, ему не могла быть извѣстна, ибо она напечатана только въ 1841 г. въ „Mémoires des Savants Etrangers"; онъ могъ быть только наведенъ на нее тѣмъ, что касательно этого предмета было напечатано Абелемъ и Якоби въ журналѣ Крелля *). Далѣе онъ, подобно Абелю, нашелъ, что есть интегралы, для которыхъ извѣстная сумма ихъ приводится къ постоянной, и которые онъ назвалъ функціями перваго рода; что есть интегралы второго рода, для которыхъ таковая же сумма приводится къ алгебраической функціи, и интегралы третьяго рода, сумма которыхъ приводится къ одному логариѳму. Сверхъ того онъ нашелъ, опередивъ въ этомъ Абеля и Якоби **), что эти интегралы имѣютъ періоды, число которыхъ всегда четное: $2n$, и что число независимыхъ интеграловъ перваго рода равно половинѣ числа періодовъ, и столько же независимыхъ интеграловъ второго рода. *Періоды эти очевидно суть интегралы по сомкнутымъ путямъ*, ибо далѣе онъ говоритъ: „relatives à une même revolution de x ***). Отсюда видно, что онъ разсматривалъ независимую перемѣнную какъ комплексную величину—иначе трудно себѣ представить это „revolution de x". О полярномъ періодѣ интеграловъ третьяго рода онъ не упоминаетъ. Относительно функціи (интеграла) третьяго рода $\Pi(x, a)$ онъ нашелъ далѣе, что она обладаетъ свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = \sum \varphi(a)\psi(x), \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ $\varphi(a)$ и $\psi(x)$ функціи (интегралы) перваго и второго рода. Это весьма важный моментъ: отсюда одинъ шагъ остается до нормальнаго интеграла третьяго рода, относительно котораго имѣется теорема о пе-

*) *Abel.* Oeuvres completes. Мемуары XXI и XXVII перваго тома, и *Jacobi.* Gesammelte Werke. II Bd. Мемуаръ № 1.

**) Мемуаръ Якоби: „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodis, quibus theoria transcendentium Abelianorum initur" напечатанъ только въ 1834 г., слѣд. черезъ 2 года послѣ смерти Галуа.

***) Пикаръ же говоритъ: pour les intégrales hyperelliptiques nous n'avons aucune difficulté à comprendre ce qu'il entend par période, mais il en est autrement dans le cas général....

ремѣнѣ параметра съ аргументомъ. Изъ этого равенства получается, замѣчаетъ онъ далѣе, для періода $\Pi(a)$ функціи $\Pi(x, a)$, такое выраженіе:

$$\Pi(a) = \sum \psi \times \varphi(a), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ ψ періодъ $\psi(x)$, относящійся къ тому же сомкнутому пути x (relative à une même revolution de x). Изъ соотношенія (1) можно, говоритъ онъ, получить теоремы аналогичныя Лежандровской въ теоріи эллиптическихъ функцій:

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

т. е. вывести соотношенія между періодами интеграловъ I и II рода, найденныя потомъ Вейерштрассомъ. Все это мѣсто письма къ Шевалье заставляетъ думать, что *Галуа получилъ эти результаты изъ того-же тождества, изъ котораго вывелъ ихъ позднѣе Вейерштрассъ*, (конечно самостоятельно, ибо хотя Braunsberger-Programm вышла въ 1849 г. а сочиненія Галуа напечатаны были въ журналѣ Ліувиля уже въ 1846 г., но тогда на нихъ еще мало было обращено вниманіе, и Вейерштрассъ, занимавшійся этимъ вопросомъ уже задолго до этого времени, живя въ провинціи, могъ и не видѣть этого журнала; да кромѣ того, чтобы оцѣнить и воспользоваться этими строками, надобно уже быть достаточно знакомымъ съ этими вопросами). То обстоятельство, что двое ученыхъ независимо одинъ отъ другого пришли, повидимому, одинаковымъ путемъ къ тѣмъ же результатамъ, много говоритъ въ пользу мнѣнія о натуральности этого пути.

Замѣтимъ еще, что мемуаръ V Абеля, въ которомъ подобное тождество выводится для болѣе общихъ интеграловъ, врядъ ли былъ извѣстенъ Галуа, такъ какъ онъ былъ напечатанъ по норвежски въ мемуарахъ Королевскаго Норвежскаго Общества Наукъ (и не вошелъ даже въ первое изданіе сочиненій Абеля).

Слѣдовательно и *это фундаментальное тождество по всей вѣроятности было найдено имъ самимъ.*

Далѣе Галуа говоритъ о задачѣ умноженія и дѣленія „интегральныхъ функцій“ на цѣлое число p. Онъ нашелъ именно, что уравненіе, дающее дѣленіе періодовъ на p частей, степени $p^{2n} - 1$, и что его группа состоитъ изъ

$$(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p) \ldots (p^{2n} - p^{2n-1})$$

размѣщеній (permutation), уравненіе же дающее дѣленіе на p суммы n интеграловъ, степени p^{2n} и рѣшимо въ радикалахъ. Онъ занимался, по его словамъ и преобразованіемъ Абелевыхъ интеграловъ; это мѣсто письма не вполнѣ ясно; но и здѣсь сквозитъ важный законъ сохраненія ранга при раціональныхъ преобразованіяхъ. Ясно выраженное понятіе о рангѣ у него не встрѣчается (у Абеля есть формула для его вычисленія, хотя не для общаго случая), но онъ говоритъ объ интегралахъ съ одинаковымъ числомъ періодовъ, а это число равно удвоенному рангу. Интересно упоминаніе о томъ, что всегда можно преобразовать данный интегралъ въ другой, котораго одинъ періодъ былъ бы въ p разъ меньше, а остальные $2n-1$ тѣ же самые (аналогично съ transformatio prima въ „Fundamenta" Якоби). Далѣе онъ размышлялъ также надъ задачей: найти, какія можно производить перемѣны въ количествахъ и трансцендентныхъ функціяхъ, не нарушая соотношеній между ними. Здѣсь виднѣется зародышъ того, что нѣмецкіе ученые называютъ invariante Darstellung функцій, чѣмъ они стали заниматься уже въ послѣдней трети настоящаго столѣтія.—Такимъ образомъ мы видимъ, что если бы несчастная дуэль не унесла бы этого геніальнаго юношу столь рано въ могилу, давно бы мы имѣли натуральную теорію Абелевыхъ интеграловъ. Дважды естественный ходъ развитія этой теоріи былъ останавливаемъ преждевременными кончинами, одинъ разъ геніальнаго Абеля, другой разъ не менѣе геніальнаго Галуа, и только Вейерштрассу удалось довести эту теорію до извѣстной степени законченности—говорю такъ потому, что науку едва ли когда либо можно будетъ считать вполнѣ законченною.

Справедливо Пикаръ заканчиваетъ свое предисловіе словами:

„Ce n'est pas sans émotion que l'on achève la lecture du testament scientifique de ce jeune homme de vingt ans, écrit la veille du jour ou il devait disparaître dans une obscure querelle. Sa mort fut pour la science une perte immense; l'influence de Galois, s'il eût vécu, aurait grandement modifié l'orientation des recherches mathématiques. Je ne me risquerai pas à des comparaisons perilleuses: Galois a sans doute des égaux parmi les mathématiciens de ce siècle; aucun ne le surpasse par l'originalité et la profondeur de ses conceptions".

Sur le potentiel de la double couche.

Par A. M. LIAPOUNOFF.

Dans le № 19 des *Comptes rendus* (tome CXXV, 1897, second semestre) sont publiés deux théorèmes contenant les résultats de mes recherches sur le potentiel de la double couche.

En publiant ces résultats, je les ai regardés comme nouveaux, en croyant que la théorie du potentiel de la double couche demeure encore en état, où elle était à l'époque de la publication de l'Ouvrage bien connu de M. Neumann *Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential.*

Mais récemment j'ai fait connaissance d'une Note de M. Tauber publiée il y a quelques mois dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* (VIII. Jahrgang 1897; 1 Vierteljahr), ainsi que d'une Note de M. Neumann insérée encore dans le tome XVI des *Mathematische Annalen*, et à présent je vois qu'à l'égard de l'état actuel de la question je fus tombé en erreur.

Le résultat que j'énonce comme le théorème I se trouve déjà dans la Note de M. Tauber. Il est vrai qu'en ce qui concerne la démonstration M. Tauber se restreint au cas du plan, tandis que moi je considère le cas de l'espace; mais ces deux cas présentent des circonstances de la même nature, et d'ailleurs, dans l'énoncé de son théorème, M. Tauber les embrasse tous les deux.

Quant à mon théorème II, on trouve dans la Note citée de M. Neumann une proposition qui donne la solution de la même question, quoique dans des suppositions plus restrictives.

Donc, contrairement à ce que j'ai pensé, la question se trouve déjà assez bien explorée.

Toutefois je crois qu'il ne serait pas inutile de publier mon analyse, puisque d'une part elle se rapporte au cas de l'espace et n'en est pas moins simple que celle de M. Tauber, et que d'autre part mon deuxième théorème est plus général que celui de M. Neumann.

D'ailleurs, en entreprenant mes recherches sur le potentiel, j'avais eu en vue certaines applications au problème de Dirichlet, et bientôt je me propose de publier un Mémoire, où ces applications seront indiquées et où j'aurai à m'appuyer sur les théorèmes que j'ai énoncés dans les *Comptes rendus*.

C'est pourquoi je reprends la question et je publie la présente Note qui contiendra la démonstration de ces théorèmes.

---

1. Soit S une surface mesurable ayant un plan tangent déterminé en chacun de ses points et telle qu'on puisse distinguer sur elle les deux côtés pour pouvoir fixer le sens de la direction de la normale pour tous ses points.

Soit M un point de S appartenant à l'élément superficiel ds, P un point quelconque de l'espace, r la distance MP et φ l'angle que fait la direction MP avec celle de la normale à S au point M.

En désignant par μ une fonction continue définie pour tous les points de S, considérons l'intégrale

$$W = \int \frac{\mu \cos\varphi \, ds}{r^2},$$

étendue à S, qui représente ce qu'on appelle le potentiel d'une double couche répandue sur S.

Cette intégrale est une fonction des coordonnées rectangulaires x, y, z du point P, continue ainsi que toutes ses dérivées, tant que le point P ne se trouve pas sur S. On sait, d'ailleurs, comment varie cette fonction, lorsque le point P vient à traverser cette surface en un point quelconque: on sait qu'en tout point M_0 de S, outre la valeur propre de W, on a encore deux valeurs limites correspondant aux passages à M_0 de deux côtés différents par rapport à S, et que ces trois valeurs, différentes en général, sont parfaitement déterminées.

Quant aux valeurs sur S des dérivées de W, on ne peut les considérer que comme certaines valeurs limites, et elles ne sont déterminées que sous certaines restrictions.

Dans les applications, c'est la dérivée estimée suivant la normale à S qui se présente ordinairement, et c'est à cette dérivée que se rapportent les propositions constituant l'objet de cette Note.

En désignant par n la direction de la normale au point quelconque M_0 de S, concevons deux points P et P', *situés sur cette normale* de côtés différents par rapport à M_0, et considérons les valeurs, en ces points, de l'expression

$$\frac{\partial W}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial W}{\partial y}\cos(n, y)+\frac{\partial W}{\partial z}\cos(n, z).$$

Soient

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}$$

ces valeurs.

On admet généralement que, les points P et P' se rapprochant indéfiniment du point M_0, on a

$$\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P=\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}.$$

Mais il est facile de s'assurer que cette proposition n'est exacte que sous certaines restrictions, relatives à la surface S et à la fonction μ, puisque déjà dans le cas le plus simple, celui où S se réduit à une portion de plan, on peut prendre pour μ une fonction *continue* telle, que les limites

$$\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \quad \lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}$$

n'existent point.

Or j'ai reconnu que, si l'on modifie convenablement l'énoncé de la proposition, et si l'on fait certaines restrictions à l'égard de la surface au voisinage du point M_0, on peut se dispenser de toute supposition particulière à l'égard de la fonction μ, et voici le résultat que j'ai obtenu:

Théorème I.—*La fonction μ étant une fonction continue quelconque, supposons que, au point M_0, les sections normales de la surface ont toutes des courbures finies et déterminées et que le rapport de l'angle de contingence à l'arc, lorsqu'on fait tendre l'arc vers zéro, tend vers sa limite, courbure, uniformément pour toutes ces sections normales. Alors, si les points P et P' tendent vers M_0 de manière qu'on ait toujours*

$$PM_0=M_0P',$$

on aura

$$\lim\left[\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P-\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}\right]=0.$$

C'est ce résultat qui constitue le premier théorème que j'ai énoncé dans les *Comptes rendus* (sous une forme un peu moins exacte) et qui, au fond, n'est autre chose que le théorème de M. Tauber.

Ce théorème ne suppose pas l'existence des limites

$$\lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \qquad \lim\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}.$$

Il fait seulement voir que, si l'une des deux limites existe, l'autre existera aussi et lui sera égale.

Mais dans certains cas il est indispensable de savoir reconnaître, par la nature même de la fonction μ, si les limites dont il s'agit existent.

Alors pourra être utile le théorème suivant:

Théorème II.—*La condition précédente relative à la surface au voisinage du point M_0 étant remplie, prenons ce point pour pôle des coordonnées polaires, le rayon vecteur ρ et l'angle polaire ψ, dans le plan tangent à la surface, et posons*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu\, d\psi = \bar{\mu}.$$

Alors, toutes les fois que l'on pourra trouver un nombre positif α, tel qu'on ait

$$\lim_{\rho=0}\left(\frac{\bar{\mu}-\mu_0}{\rho^{1+\alpha}}\right) = 0,$$

μ_0 étant la valeur de μ au point M_0, on aura des limites déterminées pour

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_P, \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{P'}$$

et ces limites seront égales *).

C'est ces théorèmes que je veux établir dans cette Note.

2. En prenant le point M_0 pour origine des coordonnées et la normale en ce point pour axe des z, considérons le potentiel W pour un point P situé sur cet axe. Ce potentiel deviendra alors une fonction de z que nous désignerons par $W(z)$.

Concevons un cylindre de révolution C ayant pour axe l'axe des z et pour la plus courte distance de ses génératrices à l'axe une quantité suffisamment petite R.

---

*) Si S est une portion de surface limitée par une courbe, le point M_0 ne doit pas se trouver sur cette courbe; c'est ce que l'on supposera toujours dans la suite.

Soit S_0 la portion de S découpée par C et contenant le point M_0 et S_1 le reste de S.

En désignant les potentiels dûs à S_0 et à S_1 respectivement par $W_0(z)$ et par $W_1(z)$, on aura

$$W(z) = W_0(z) + W_1(z).$$

Cela posé, formons l'expression de $W_0(z)$, en supposant R assez petit pour que toute parallèle à l'axe des z située à l'intérieur de C rencontre S_0 en un seul point.

Les coordonnées du point M de l'élément ds étant désignées par ξ, η, ζ, soit

$$\xi = \varrho\cos\psi, \qquad \eta = \varrho\sin\psi.$$

Alors, en considérant ζ comme fonction de ϱ et de ψ et en désignant par ϑ l'angle que fait la normale au point M avec l'axe des z, on aura

$$\cos\varphi = \left(z - \zeta + \varrho\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\right)\frac{\cos\vartheta}{r}.$$

D'ailleurs on pourra prendre

$$ds = \frac{\varrho\, d\psi\, d\varrho}{\cos\vartheta}.$$

On aura donc

$$W_0(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu\left(z - \zeta + \varrho\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\right)\frac{\varrho\, d\varrho}{r^3},$$

avec cette expression pour r:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (z-\zeta)^2}.$$

De là, en différentiant par rapport à z, on déduit

$$W_0'(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu\frac{\varrho\, d\varrho}{r^3} - 3\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu\left(z - \zeta + \varrho\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho}\right)(z-\zeta)\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5},$$

ce que l'on peut présenter sous la forme

$$W_0'(z) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu(\varrho^2 - 2z^2)\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5} - 2z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu\zeta\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}$$

$$+ 4\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu\zeta^2\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5} - 3\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu\left(\varrho\frac{\partial\zeta}{\partial\varrho} - 2\zeta\right)(z-\zeta)\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}.$$

Maintenant, en partant de cette formule, nous allons chercher une expression asymptotique de $W_0'(z)$, en entendant par là toute expression $\Theta(z, R)$, telle qu'en attribuant à R une valeur assez petite et *indépendante de z* on puisse rendre la différence

$$W_0'(z) - \Theta(z, R)$$

aussi voisine de zéro que l'on veut, *et cela pour toutes les valeurs de z*.

3. Soit ω_0 la courbure, au point M_0, de la section normale définie par l'angle ψ.

Comme on a

$$\omega_0 = \lim_{\rho=0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right),$$

on trouve

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = \rho (\omega_0 + \varepsilon),$$

ε étant une fonction de ρ et de ψ tendant vers zéro pour $\rho = 0$.

Par suite on aura

$$\zeta = \frac{1}{2} (\omega_0 + \varepsilon_1) \rho^2, \qquad \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - 2\zeta = \varepsilon' \rho^2,$$

en désignant par ε_1, ε' des fonctions de la même espèce que ε.

D'ailleurs, en vertu de la supposition exprimée dans l'énoncé du théorème I, la fonction ε et par suite aussi ε_1 et ε' tendront vers zéro avec ρ *uniformément* pour toutes les valeurs de ψ.

D'autre part, en posant

$$\frac{2z\zeta - \zeta^2}{\rho^2 + z^2} = t,$$

on aura

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \sqrt{1 - t}.$$

Par suite, en remarquant que l'on a

$$|t| < \left| \frac{\zeta}{\rho} \right| + \frac{\zeta^2}{\rho^2},$$

quel que soit z, on voit qu'on pourra prendre R suffisamment petit pour que le rapport

$$\frac{r}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

soit aussi voisin de 1 que l'on veut pour toutes les valeurs de z et de ψ et pour toutes les valeurs de ϱ qui ne surpassent pas R.

De tout cela il est facile de conclure que, quel que soit z, les valeurs absolues des deux intégrales qui figurent à la seconde ligne de l'expression de $W_0'(z)$, que nous avons obtenue au n^0 précédent, ne pourront surpasser une certaine limite, *indépendante de z et tendant vers zéro pour* $R=0$.

Donc, dans notre recherche, il n'y aura à considérer que les deux intégrales

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu(\varrho^2-2z^2)\frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}, \qquad \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \mu z\zeta \frac{\varrho\, d\varrho}{r^5}$$

qui figurent à la première ligne.

Or, en développant

$$\frac{1}{r^5}=\frac{(1-t)^{-\frac{5}{2}}}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

suivant les puissances croissantes de t, on trouve, pour l'expression asymptotique de la première intégrale,

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 5z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-2z^2)\zeta\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}$$

et, pour celle de la seconde,

$$z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu\zeta\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Par suite, pour l'expression asymptotique de $W_0'(z)$, on aura

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 3z\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^R \frac{\mu(\varrho^2-4z^2)\zeta\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

D'ailleurs, dans la seconde intégrale, on pourra évidemment remplacer $\mu\zeta$ par $\frac{1}{2}\mu_0\omega_0\varrho^2$, μ_0 étant la valeur de μ au point M_0.

Alors, en posant

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mu\, d\psi=\bar{\mu}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega_0\, d\psi=\tilde{\omega}_0,$$

et en remarquant que

$$\int_0^R \frac{(\varrho^2 - 4z^2)\varrho^3 d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} = - \frac{R^4}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

on aura simplement

$$W_0'(z) = 2\pi \int_0^R \frac{\overline{\mu}(\varrho^2 - 2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \ldots,$$

et les termes mis en évidence constitueront l'expression asymptotique cherchée.

4. Maintenant, pour démontrer le théorème I, nous remarquons que la formule que nous venons d'obtenir donne

$$W_0'(z) - W_0'(-z) = - \frac{6\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + F(z, R),$$

$F(z, R)$ étant une fonction qu'on peut faire, en attribuant à R une valeur suffisamment petite et indépendante de z, aussi voisine de zéro qu'on veut pour toutes les valeurs de z.

Or, en passant au potentiel $W(z)$ de la surface entière, on en déduit

$$\begin{aligned} W'(z) - W'(-z) = {} & F(z, R) \\ & + W_1'(z) - W_1'(-z) - \frac{6\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

où la fonction figurant à la seconde ligne tend vers zéro pour $z = 0$, quelle que soit la valeur attribuée à R, pourvu qu'elle ne soit pas nulle.

On voit donc qu'en donnant à R une valeur assez petite, puis, en fixant R et en faisant $|z|$ suffisamment petit, on pourra rendre la différence

$$W'(z) - W'(-z)$$

aussi voisine de zéro qu'on voudra.

Par suite on doit conclure que l'on a

$$\lim_{z=0} \Big(W'(z) - W'(-z) \Big) = 0,$$

et c'est bien le théorème I.

5. Supposons maintenant que les conditions du second théorème se trouvent remplies.

Comme, dans ces conditions, l'intégrale

$$\int_0^R \frac{|\overline{\mu} - \mu_0|}{\varrho^2} d\varrho$$

aura une valeur déterminée, tendant vers zéro pour $R = 0$, on pourra, si l'on n'a à obtenir qu'une expression asymptotique, remplacer dans l'intégrale

$$\int_0^R \frac{\overline{\mu}(\varrho^2 - 2z^2)\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$\overline{\mu}$ par μ_0, ce qui la réduira à

$$-\frac{\mu_0 R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

De là on voit que la formule obtenue au n⁰ 3 pourra être écrite ainsi

$$W_0'(z) = -\frac{2\pi\mu_0 R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + \Phi(z, R),$$

en désignant par $\Phi(z, R)$ une fonction de la même espèce que la fonction $F(z, R)$ considérée tout à l'heure.

Or, en considérant la dérivée $W_1'(z)$ du potentiel $W_1(z)$, on s'assure facilement que, dans les conditions où nous nous sommes placé, la quantité

$$W_1'(0) - \frac{2\pi\mu_0}{R}$$

tend, pour $R = 0$, vers une limite déterminée.

Soit L cette limite.

En vertu de l'expression ci-dessus de $W_0'(z)$ on pourra écrire

$$W'(z) - L = \Phi(z, R) + W_1'(0) - \frac{2\pi\mu_0}{R} - L$$
$$+ W_1'(z) - W_1'(0) + 2\pi\mu_0 \left\{ \frac{1}{R} - \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} - \frac{3\pi\mu_0\tilde{\omega}_0 R^4 z}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Donc, en raisonnant comme au n⁰ précédent, on arrive à la conclusion que

$$\lim_{z=0} W'(z) = L\,,$$

ce qui prouve le théorème II.

6. Nous nous sommes appuyé sur ce que l'expression

$$W_1'(0) - \frac{2\pi\mu_0}{R}\,,$$

dans les conditions du théorème II, tend vers une limite pour $R=0$.

Il est facile de l'établir.

A cet effet on partira de la formule

$$W_1'(0) = 3\int\limits_{(R)} \frac{\mu\cos\varphi\,\zeta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^2} + \int\limits_{(R)} \frac{\mu\cos\vartheta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

où l'indice (R) placé sous les signes des intégrales sert à indiquer que celles-ci doivent être étendues à S_1.

De là, en entendant par A une valeur fixe de R, on déduit

$$W_1'(0) - \frac{2\pi\mu_0}{R} = \quad 3\int\limits_{(R)} \frac{\mu\cos\varphi\,\zeta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^2} + \int\limits_{(A)} \frac{\mu\cos\vartheta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\mu_0}{A}$$

$$+\int_0^{2\pi} d\psi \int_R^A \left[\frac{1}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\varrho^3}\right]\mu\varrho\,d\varrho + 2\pi\int_R^A \frac{\bar{\mu}-\mu_0}{\varrho^2}\,d\varrho\,,$$

et cette expression tend évidemment, pour $R=0$, vers une limite déterminée.

On trouve d'ailleurs, pour cette limite,

$$L = \quad 3\int \frac{\mu\cos\varphi\,\zeta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^2} + \int\limits_{(A)} \frac{\mu\cos\vartheta\,ds}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\pi\mu_0}{A}$$

$$+\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^A \left[\frac{1}{(\varrho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\varrho^3}\right]\mu\varrho\,d\varrho + 2\pi\int_0^A \frac{\bar{\mu}-\mu_0}{\varrho^2}\,d\varrho\,,$$

formule qui est exacte quel que soit A, pourvu qu'il ne surpasse pas une certaine limite.

Объ опредѣленіи длины въ неэвклидовой геометріи.

В. П. Алексѣевскаго.

Измѣреніе длины въ неэвклидовой геометріи основано на принципѣ: „если три точки A, B, C лежатъ на одной прямой, то разстояніе отъ A до C равно суммѣ разстояній отъ A до B и отъ B до C".

Такому требованію сложное отношеніе четырехъ точекъ не удовлетворяетъ, поэтому за мѣру длины принимается величина пропорціональная логариѳму сложнаго отношенія *).

Не смотря на очевидность этого принципа позволительно требовать доказательства его необходимости, такъ какъ ссылка на то, что онъ заимствуется изъ опыта, врядъ-ли можетъ служить достаточнымъ основаніемъ въ геометріи „неэвклидовой".

Съ другой стороны возникаетъ вопросъ, какъ согласить его съ положеніемъ, что два послѣдовательныхъ перемѣщенія прямой по ея направленію эквивалентны одному перемѣщенію, т. е. съ положеніемъ, что движенія составляютъ группу. Не удивительно ли, что понятіе объ эквивалентности перемѣщеній переводится на аналитическій языкъ въ видѣ алгебраической суммы? Конечно, нѣтъ сомнѣнія въ возможности этого, но рѣчь идетъ о необходимости.

Попытки согласить эти понятія привели меня къ болѣе общему опредѣленію длины. Оказывается, что упомянутый принципъ сводится къ признанію эвклидова постулата для той прямой, которая служитъ масштабомъ. Далѣе, сложное отношеніе, какъ и его логариѳмъ одинаково пригодны для опредѣленія длины, равно какъ и множество другихъ частныхъ случаевъ болѣе общей мѣры.

---

*) *F. Klein.* Nicht-Euklidische Geometrie. Zweiter Abdruck. Göttingen. 1893. S. 67.

**) *Clebsch-Lindemann.* Vorlesungen über Geometrie. Bd. 2. Leipzig. 1891. S. 465.

Эти результаты являются слѣдствіемъ введенія понятія суммы относительно инваріантныхъ точекъ; такое суммованіе есть не что иное, какъ интерпретація инволюціоннаго соотвѣтствія.

I.

Пусть имѣемъ прямую, между точками которой и рядомъ вещественныхъ чиселъ установлено одназначное соотвѣтствіе. Число, соотвѣтствующее точкѣ, называется координатой ея.

Допустимъ, что, при движеніи прямой вдоль нея самой, двѣ точки a и b остаются неподвижными; такія точки будемъ называть *инваріантными.*

Извѣстно, что передвиженіе прямой по ея направленію можетъ быть разсматриваемо, какъ преобразованіе, опредѣляемое уравненіемъ:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\mu, \qquad (1)$$

гдѣ c координата нѣкоторой точки до передвиженія прямой, x координата точки, съ которой первая совпадаетъ послѣ перемѣщенія прямой, μ параметръ, характеризующій величину этого перемѣщенія.

Координаты c и x опредѣляютъ начало и конецъ нѣкотораго отрѣзка прямой.

Изъ сказаннаго не трудно вывести опредѣленіе равенства двухъ отрѣзковъ одной и той-же прямой.

Какое бы понятіе мы ни соединяли со словомъ „длина", какъ-бы ни измѣрялось разстояніе, два отрѣзка одной и той-же прямой съ разными началами c и y и разными концами x и z будутъ равны, когда имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{y-b}{y-a}\cdot\frac{z-a}{z-b}. \qquad (2)$$

Отсюда обнаруживается, что всякій отрѣзокъ можно замѣнить ему *равнымъ*, начало котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ. Положивъ въ предыдущемъ равенствѣ $c=0$, находимъ:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{y-b}{y-a}\cdot\frac{z-a}{z-b}. \qquad (3)$$

Такимъ образомъ координата x характеризуетъ отрѣзокъ ox равный yz; одновременно, x можетъ замѣнить и параметръ μ, въ силу одназначной зависимости между ними.

Равенство (3) можетъ быть истолковано иначе.

Пусть прямой сообщено перемѣщеніе, такъ что начало координатъ 0 перешло въ y; затѣмъ той-же прямой сообщено новое перемѣщеніе, равное перемѣщенію отъ 0 до x; требуется опредѣлить перемѣщеніе эквивалентное обоимъ предыдущимъ. Обозначимъ положеніе 0 послѣ этого перемѣщенія чрезъ z. Ясно, что перемѣщеніе отъ y до z должно быть равно перемѣщенію отъ 0 до x. Выразивъ это заключеніе аналитически, придемъ къ равенству (3), откуда

$$z = \frac{ab(x+y) - (a+b)xy}{ab - xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Если-бы существовалъ только единственный способъ установленія однозначнаго соотвѣтствія между точками прямой и рядомъ чиселъ, то для сужденія о величинахъ отрѣзковъ, имѣющихъ одно и то-же начало въ 0, достаточно было-бы назвать координаты ихъ концовъ. Поэтому для прямыхъ съ однѣми и тѣми-же инваріантными точками a и b и съ тождественной нумераціей точекъ *подъ словомъ длина отрѣзка, имѣющаго начало въ* 0, *можно разумѣть координату* конца его.

Согласившись съ такимъ терминомъ, найдемъ въ формулѣ (4) рѣшеніе вопроса: по даннымъ длинамъ x и y двухъ отрѣзковъ найти длину отрѣзка эквивалентнаго имъ обоимъ.

Другими словами, формула (4) представляетъ опредѣленіе сложенія длинъ отрѣзковъ одной и той-же прямой; координату z мы будемъ называть *суммой* x *и* y *относительно инваріантныхъ точекъ* a *и* b.

Эти опредѣленія вполнѣ согласуются съ понятіями эвклидовой геометріи; предположивъ, что инваріантныя точки совпадаютъ и удалены въ безконечность, получаемъ

$$z = x + y.$$

Не трудно перейти теперь къ понятію о разности относительно инваріантныхъ точекъ. Очевидно такою разностью отрѣзковъ z и y будетъ x, при чемъ

$$x = \frac{ab(z-y)}{ab - (a+b)y + zy}.$$

Тотъ-же результатъ мы получимъ и изъ рав. (3), а это приводитъ къ такому заключенію.

Такъ какъ координатами z, y опредѣляется отрѣзокъ съ началомъ въ y и концомъ въ z, а x выражаетъ *длину* равнаго ему отрѣзка, то заключаемъ: *длина отрѣзка равняется разности координатъ его конца и начала, разности относительно инваріантныхъ точекъ.*

Теперь вернемся къ равенству (2). Приравнявъ каждую часть его выраженію:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b},$$

видимъ, что u представляетъ длину каждаго изъ разсматриваемыхъ отрѣзковъ (c, x) и (y, z); слѣдовательно, опредѣленіе равенства двухъ отрѣзковъ, данное выше, сводится къ признанію равенства ихъ длинъ.

До сихъ поръ мы разсматривали отрѣзки, имѣющіе одно и то же направленіе. Чтобы составить себѣ понятіе о равныхъ, но противоположныхъ отрѣзкахъ, полагаемъ, что ихъ сумма $z=0$; слѣдовательно, такіе отрѣзки связаны соотношеніемъ:

$$y=-\frac{abx}{ab-(a+b)x}.$$

Изъ того же равенства (4) находимъ зависимость между отрѣзками, сумма которыхъ равна безконечности, именно:

$$ab-xy=0.$$

Наконецъ, если $x=a$ или b, то, каково бы ни было y, сумма ихъ z будетъ $=a$ или b: при прибавленіи къ отрѣзку a какого угодно отрѣзка сумма остается a. Вотъ это-то свойство и можетъ служить объясненіемъ причины, почему инваріантныя точки обыкновенно называются безконечно-удаленными.

Не трудно вывести формулы умноженія и дѣленія отрѣзковъ.

Полагая въ рав. (3) $y=x$, находимъ

$$\frac{z-a}{z-b}=\frac{b}{a}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2.$$

Обобщая этотъ результатъ, находимъ, что сумма m отрѣзковъ равныхъ x опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{z-a}{z-b}=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^m.$$

Представивъ себѣ, что сумма n отрѣзковъ равныхъ u тоже равна z, послѣ несложныхъ преобразованій найдемъ формулу для вычисленія u въ функціи x:

$$u=ab\frac{\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}-1}{a\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}-b}\quad\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Таково выраженіе отрѣзка „пропорціональнаго“ отрѣзку x; коэффиціентъ пропорціональности равенъ $\frac{m}{n}$. Такой отрѣзокъ удобно изображать символически такъ

$$u = \frac{m}{n}(x).$$

Согласуется-ли этотъ выводъ съ эвклидовой геометріей? Чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ равенство (5) въ видѣ:

$$\frac{m}{n} = \frac{\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b}\right)}{\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)}.$$

Полагая здѣсь $a = b = \infty$, находимъ

$$\frac{m}{n} = \frac{u}{x}.$$

Выведенные результаты относятся къ гиперболической геометріи, такъ какъ было предположено, что a и b числа вещественныя и различныя; чтобы перейти къ эллиптической геометріи достаточно, какъ извѣстно, принять, что координаты инваріантныхъ точекъ—числа комплексныя сопряженныя.

Сдѣлавъ допущеніе $a = b$, мы должны получить формулы, относящіяся къ параболической геометріи; но основное равенство (2) при этомъ обращается въ тождество; тѣмъ не менѣе слѣдствія, выведенныя изъ него, сохраняютъ смыслъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что вмѣсто параметра μ, можемъ взять другой, находящійся съ нимъ въ однозначномъ соотвѣтствіи. Вычтя изъ обѣихъ частей равенства (1) по единицѣ, приведемъ результатъ къ виду

$$\frac{c-x}{(c-a)(x-b)} = \frac{\mu-1}{b-a}.$$

Слѣдовательно, если принять за параметръ число v, опредѣляемое изъ формулы

$$v = \frac{\mu-1}{b-a},$$

то равенство (2) можно будетъ замѣнить слѣдующимъ:

$$\frac{c-x}{(c-a)(x-b)} = \frac{y-z}{(y-a)(z-b)},$$

которое уже не обращается въ тождество при $a = b$. Конечно въ этомъ случаѣ v должно разсматривать, какъ предѣлъ опредѣляющаго его отношенія.

II.

До сихъ поръ мы имѣли въ виду тождественныя прямыя, или, лучше сказать, тождественные ряды точекъ; теперь переходимъ къ общему случаю.

Прямыя могутъ различаться инваріантными точками и нумераціей точекъ, поэтому, о совмѣщеніи ихъ и рѣчи быть не можетъ; между ними возможно только соотвѣтствіе.

Положимъ, что мы нашли способъ установить однозначное соотвѣтствіе между точками разныхъ прямыхъ; положимъ, что начала координатъ ихъ другъ другу соотвѣтствуютъ и координатѣ x одной прямой соотвѣтствуетъ x' второй, x'' третьей и т. д., словомъ, отрѣзки ox, ox', ox'' другъ другу соотвѣтствуютъ. Если условиться считать такіе отрѣзки имѣющими равныя длины, то будетъ безразлично, которыя изъ чиселъ x, x', x'', ... принять за длину. Чтобы избѣгнуть путаницы, удобно избрать одну изъ прямыхъ за основную, за масштабъ, и названіе длины отнести къ координатамъ ея точекъ.

Такимъ образомъ, *длиною отрѣзка съ началомъ въ 0 называется координата конца соотвѣтственнаго отрѣзка масштаба*, поэтому число выражающее длину отрѣзка будетъ различно, смотря потому, на какомъ масштабѣ производится отсчитываніе. Это опредѣленіе обращается въ прежнее, когда масштабъ тождествененъ съ измѣряемой прямой.

При такомъ опредѣленіи длина отрѣзка ox есть функція $F(x)$ координаты x, относительно которой намъ пока извѣстно, что $F(0) = 0$.

Остается указать, какимъ образомъ можно установить соотвѣтствіе между точками измѣряемой прямой и точками масштаба. Мы достигаемъ этого предположеніемъ: *длина суммы двухъ отрѣзковъ равняется суммѣ ихъ длинъ*. Это предположеніе напоминаетъ принципъ слагаемости, но разница въ томъ, что здѣсь сложеніе на прямой и на масштабѣ совершается относительно ихъ инваріантныхъ точекъ.

Пусть инваріантныя точки прямой суть a и b, координаты концовъ двухъ данныхъ отрѣзковъ x, y, кордината ихъ суммы z.

Предположимъ, что α и β суть инваріантныя точки масштаба; тогда длины предыдущихъ отрѣзковъ будутъ $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ и по условію, въ силу извѣстной теоремы сложенія, два слѣдующія равенства:

$$F(z) = \frac{\alpha\beta[F(x) + F(y)] - (\alpha + \beta) F(x) F(y)}{\alpha\beta - F(x) F(y)}$$

$$z = \frac{ab(x+y) - (a+b)\,xy}{ab - xy}$$

существуютъ совмѣстно.

Такимъ образомъ, опредѣленіе длины сводится къ опредѣленію вида функціи $F(x)$.

Изъ разсмотрѣнія предыдущихъ равенствъ слѣдуетъ, что z появляется изъ x какъ результатъ линейной подстановки

$$\begin{pmatrix} ab - (a+b)y\,, & aby \\ -y & , \quad ab \end{pmatrix}$$

и одновременно $F(x)$ подвергается линейному преобразованію

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta - (\alpha+\beta) F(y)\,, & \alpha\beta F(y) \\ -F(y) & , \quad \alpha\beta \end{pmatrix},$$

а изъ условія $F(0) = 0$ вытекаетъ, что $F(y)$ становится безконечно-малой величиной одновременно съ y. Изъ этихъ двухъ положеній заключаемъ, что безконечно-малому преобразованію x отвѣчаетъ безконечно-малое преобразованіе $F(x)$.

Такой выводъ намѣчаетъ путь для составленія дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ $F(x)$.

Составивъ приращенія

$$F(z) - F(x) = F(y)\frac{[F(x) - \alpha][F(x) - \beta]}{\alpha\beta - F(x) F(y)},$$

$$z - x = y\frac{(x-a)(x-b)}{ab - xy},$$

по раздѣленіи ихъ, получимъ:

$$\frac{F(z) - F(x)}{z - x} = \frac{F(y)}{y} \cdot \frac{[F(x) - \alpha][F(x) - \beta]}{(x-a)(x-b)} \cdot \frac{ab - xy}{\alpha\beta - F(x) F(y)}.$$

Переходя къ предѣлу, при уменьшеніи y до нуля, находимъ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(0)\frac{[F(x) - \alpha][F(x) - \beta]}{(x-a)(x-b)}\,\frac{ab}{\alpha\beta}.$$

Очевидно, что постоянное $F'(0)$ должно быть отлично отъ нуля; обозначимъ его чрезъ k.

Интегрируя полученное уравненіе отъ 0 до x, получимъ:

$$F(x) = \alpha\beta \frac{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda} - 1}{\alpha\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda} - \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$\lambda = k \frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}.$$

Таково выраженіе длины отрѣзка ox, когда a не равно b.

Сопоставимъ этотъ результатъ съ формулой (5) предыдущаго §.

Полагая $\alpha = a$, $\beta = b$, получимъ $\lambda = k$ и

$$F(x) = ab \frac{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{k} - 1}{a\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{k} - b}.$$

Отсюда видимъ, что, не смотря на одинаковость координатъ трехъ соотвѣтственныхъ точекъ o, a, b, $F(x)$ отлично отъ x. Произвольное постоянное k даетъ возможность установить соотвѣтствіе любой точки c данной прямой съ произвольною точкою γ на масштабѣ. Сравнивая теперь этотъ выводъ съ формулой (5) предыдущаго §, убѣждаемся, что *мѣра длины ox на масштабѣ съ инваріантными точками a и b выражается отрѣзкомъ равнымъ отрѣзку $k.(x)$ данной прямой.*

Слѣдовательно, постоянное $F'(0) = k$ должно разсматривать какъ коэффиціентъ пропорціональности.

Въ общемъ случаѣ, при неравенствѣ координатъ инваріантныхъ точекъ прямой и масштаба, дѣло обстоитъ нѣсколько иначе.

Формула (1) является какъ результатъ исключенія u изъ равенствъ

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{u-a}{u-b} = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda},$$

и

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{F(x)-\alpha}{F(x)-\beta} = \frac{b}{a} \cdot \frac{u-a}{u-b},$$

изъ коихъ первое показываетъ, что u есть координата точки $\lambda.(x)$ на данной прямой; второе, что точки масштаба $F(x)$ находятся въ проективномъ соотвѣтствіи съ точками $\lambda.(x)$ данной прямой. Ясно, что это проективное соотвѣтствіе устанавливается тремя парами точекъ: (a, α), (b, β), (o, o).

Такимъ образомъ: *мѣра длины ох выражается отрѣзкамъ масштаба проективно-соотвѣтственнымъ съ отрѣзкомъ $\lambda.(x)$ данной прямой.*

Предположимъ теперь, что инваріантныя точки масштаба совпадаютъ, т. е. $\alpha=\beta$. Тогда дифференціальное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{\alpha^2 dF}{(F-\alpha)^2}=\frac{k\,ab\,dx}{(x-a)(x-b)}.$$

Откуда

$$F(x)=\frac{\alpha\lambda\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)}{\lambda\ \mathrm{og}\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+\alpha}\quad\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

при чемъ

$$\lambda=\frac{k\,ab}{a-b}.$$

Теперь мы имѣемъ возможность выяснить значеніе предположенія, которое принимается какъ принципъ въ неэвклидовой геометріи.

Предположимъ, что инваріантныя точки масштаба не только совпадаютъ, но и удалены въ безконечность; т. е. примемъ, что $\alpha=\infty$, тогда

$$F(x)=\lambda\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

и теорема сложенія на масштабѣ обращается въ слѣдующую:

$$F(z)=F(x)+F(y).$$

Выраженіе (3) представляетъ обыкновенное опредѣленіе мѣры длины въ неэвклидовой геометріи. Выводъ его основываютъ на принципѣ слагаемости; очевидно: *принципъ слагаемости равносиленъ принятію за масштабъ такой прямой, инваріантныя точки которой совпадаютъ и удалены въ безконечность*; другими словами, въ данномъ случаѣ масштабъ есть не что иное какъ эвклидова прямая.

Итакъ *принципъ слагаемости длинъ и постулатъ Эвклида представляютъ одно и то-же предположеніе, выраженное въ различной формѣ.*

Общее опредѣленіе длины, данное выше, даетъ возможность измѣрить длину отрѣзка какой угодно прямой гиперболической, эллиптической или параболической на какомъ угодно масштабѣ и мы видимъ, что нѣтъ никакой необходимости принимать за масштабъ эвклидову прямую; такой выборъ можно оправдывать удобствомъ, привычкой, но отнюдь не необходимостью. Ясно также, что принципъ слагаемости нельзя разсматривать, какъ начало, непосредственно вытекающее изъ самаго понятія объ измѣреніи.

Формула (3) есть частный случай (1); легко убѣдиться, что и функція обратная (3) также представляетъ длину.

Это заключеніе основывается на простомъ замѣчаніи, что *между координатой конца измѣряемаго отрѣзка и его длиною существуетъ взаимность*: координаты масштаба выражаютъ длины соотвѣтственныхъ отрѣзковъ данной прямой и, обратно, координаты точекъ данной прямой представляютъ длины отрѣзковъ масштаба. Въ частномъ случаѣ при предположеніи, что данная прямая есть эвклидова, а машстабъ гиперболическая прямая, т. е. полагая $a = b = \infty$, получаемъ:

$$F(x) = \alpha\beta \frac{e^{\lambda x} - 1}{\alpha e^{\lambda x} - \beta},$$

при чемъ

$$\lambda = \frac{k(\alpha - \beta)}{\alpha\beta}.$$

Нѣкоторые частные случаи этой формулы заслуживаютъ упоминанія.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = +1$, $k = 1$, тогда

$$F(x) = \operatorname{tgh} x,$$

гиперболическій тангенсъ есть длина эвклидова отрѣзка на гиперболическомъ масштабѣ.

Если же $\alpha = +i$, $\beta = -i$, $k = 1$, длина опредѣляется равенствомъ:

$$F(x) = \operatorname{tg} x,$$

тангенсъ эвклидова отрѣзка x есть его длина на эллиптическомъ масштабѣ.

Въ силу взаимности координаты съ длиною, функціи $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctgh} x$ представляютъ эвклидовы длины эллиптическаго и гиперболическаго отрѣзковъ, при извѣстномъ выборѣ инваріантныхъ точекъ.

Простѣйшія выраженія длины, конечно, будутъ раціональныя функціи координатъ. Полученіе ихъ не представляетъ затрудненія благодаря произвольности постояннаго k. Если $a = b$, $\alpha = \beta$, то можно выбрать k такъ, чтобы $\lambda = 1$; для этого должно быть

$$k = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} : \frac{ab}{a - b};$$

тогда формула (1) обращается въ такую:

$$F(x) = \frac{\alpha\beta(a - b)x}{(a\beta - \alpha b)x + ab(\alpha - \beta)}.$$

Если же $a = b$, $\alpha = \beta$,

$$F(x) = \frac{ka\alpha x}{(ka - \alpha)x + a\alpha}.$$

Итакъ, во всякой геометріи можно выбрать масштабъ такъ, что длина выражается дробно-линейной функціей координаты, при чемъ *мѣра длины выражается отрѣзкомъ масштаба проективно-соотвѣтственнымъ съ измѣряемымъ отрѣзкомъ.*

Наконецъ, въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда

$$a\beta - \alpha b = 0,$$

находимъ

$$F(x) = kx,$$

при чемъ

$$k = \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}.$$

То же имѣетъ мѣсто и въ параболической геометріи.

Слѣдовательно, *во всякой геометріи гиперболической, эллиптической и параболической можно выбрать масштабъ такъ, что мѣра длины будетъ пропорціональна самому отрѣзку.*

III.

Опредѣленіе длины, котораго мы придерживались до сихъ поръ, не представляетъ еще полнаго обобщенія, мы удержали *особенность длины уничтожаться одновременно съ отрѣзкомъ.* Необходимость устранить это ограниченіе обнаруживается непосредственно изъ предыдущихъ формулъ: онѣ теряютъ смыслъ при допущеніи, что одна или обѣ инваріантныя точки прямой или масштаба совпадаютъ съ началомъ координатъ.

Для объясненія причины этого обстоятельства надо напомнить, что всѣ выводы основаны на движеніи прямой по ея направленію. Чтобы судить о величинѣ перемѣщенія, мы разсматривали перемѣщенія начала координатъ и тѣмъ самымъ устранили возможность его совпаденія съ инваріантными точками. Поэтому для изслѣдованія тѣхъ случаевъ, когда начало неподвижно, необходимо видоизмѣнить формулы, принявъ за начало отрѣзковъ точку, отличную отъ начала координатъ и не совпадающую съ другой неподвижной точкой прямой.

Разсмотримъ сначала одинъ частный случай, когда инваріантныя точки прямой суть $a = 0$, $b = \infty$. Положимъ, что отъ нѣкотораго перемѣщенія прямой точка c совпала съ x, въ то же время точка y совпала съ z.

Выраженіе равенства перемѣщеній получимъ изъ формулы (2) § 1, положивъ въ ней $a=0$, $b=\infty$, а именно:

$$\frac{x}{c}=\frac{z}{y},$$

при чемъ каждое изъ этихъ отношеній равно параметру перемѣщенія μ.

Пользуясь этимъ равенствомъ можно, по даннымъ началу y и концу z отрѣзка, найти конецъ равнаго ему отрѣзка, имѣющаго начало въ c.

Такъ какъ перемѣщеніе точки c до точки x вполнѣ характеризуется координатой x, то *длиной отрѣзка cx можно называть координату конца отрѣзка x*; слѣдовательно, предыдущая формула даетъ возможность опредѣлить длину всякаго отрѣзка прямой съ инваріантными точками 0 и ∞. Конечно, для упрощенія лучше всего принять $c=1$.

Напомнимъ, что теорема сложенія на прямой выражается тѣмъ же самымъ равенствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если сообщить прямой перемѣщеніе отъ c до y, потомъ перемѣщеніе отъ c до x, то точка y перейдетъ въ z, такъ какъ отрѣзки cx и yz должны быть равны; слѣдовательно равенство

$$z=\frac{xy}{c}$$

представляетъ теорему сложенія въ данномъ частномъ случаѣ.

Между новымъ опредѣленіемъ длины и прежнимъ нѣтъ существеннаго различія, хотя теперь длиной отрѣзка, не имѣющаго протяженія, будетъ c, число отличное отъ нуля. Не трудно догадаться, что существуетъ масштабъ на которомъ длины отрѣзковъ разсматриваемой прямой измѣряются посредствомъ

$$x-c,$$

такъ что одновременное уничтоженіе отрѣзка и его длины вновь востановляется. Инваріантныя точки этого масштаба будутъ $-c$ и ∞, а теорема сложенія принимаетъ видъ:

$$F(z)=F(x)+F(y)+\frac{1}{c}F(x)F(y).$$

Сказанное справедливо вообще, какъ это видно изъ тождества:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{b-c}{a-c}\cdot\frac{(x-c)-(a-c)}{(x-c)-(b-c)},$$

которое выражаетъ, что *длина* x *на масштабѣ* (a, b) *при отсчитываніи отъ точки* c *равна длинѣ* $x-c$ *на масштабѣ* $(a-c, b-c)$ *при отсчитываніи отъ нуля.* Этотъ выводъ остается неизмѣннымъ и при допущеніи, что 0 есть инваріантная точка какъ на прямой, такъ и на масштабѣ, лишь-бы только c было отлично отъ нуля.

Итакъ, опредѣленіе длины слѣдуетъ дополнить замѣчаніемъ, что вообще нѣтъ надобности принимать начало координатъ за начало отрѣзковъ какъ на измѣряемой прямой, такъ и на масштабѣ, вслѣдствіе чего *длина отрѣзка безъ протяженія можетъ изображаться какимъ угодно числомъ.*

Примемъ точку c за начало отрѣзковъ на прямой (a, b) и точку γ за начало на масштабѣ (α, β). Обозначимъ длину отрѣзка cx чрезъ $F(x)$, тогда по условію будетъ:

$$F(c)=\gamma.$$

На основаніи формулы (2) § 1 теорема сложенія на прямой приметъ видъ:

$$z=\frac{ab(x+y)-(a+b)xy-c(ab-xy)}{ab-xy+c(x+y-a-b)}.$$

Аналогичная формула для масштаба получится изъ предыдущей, замѣняя c, a, b, x, y, z соотвѣтственно чрезъ γ, α, β, $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$. Пользуясь этими зависимостями не трудно приложить пріемъ § 2 для составленія дифференціальнаго уравненія, опредѣляющаго $F(x)$; но можно обойтись и безъ этихъ вычисленій.

Мы только что установили связь между длинами на масштабахъ c, a, b и o, $a-c$, $b-c$; извѣстно, что вторая прямая есть преобразованіе первой вида:

$$x'=x-c.$$

Пусть искомая длина ξ отрѣзка cx вычисляется изъ уравненія

$$\xi=\Phi(x, c, a, b, \gamma, \alpha, \beta).$$

Преобразовавъ прямую x въ $x-c$ и ξ въ $\xi-\gamma$, получимъ:

$$\xi-\gamma=\Phi(x-c, o, a-c, b-c, o, \alpha-\gamma, \beta-\gamma),$$

такъ что $\xi-\gamma$ будетъ длиною $x-c$, при томъ начала отрѣзковъ на обѣихъ прямыхъ совпадаютъ съ началами координатъ. Слѣдовательно, это равенство отличается отъ формулы (1) § 2 только новыми обозначеніями; введя ихъ въ эту формулу и написавъ $F(x)$ вмѣсто ξ, получимъ:

$$F(x)=\gamma+(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\frac{\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda}-1}{(\alpha-\gamma)\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda}-(\beta-\gamma)} \ldots (1)$$

Соотвѣтственный показатель λ имѣетъ видъ:

$$\lambda=k\frac{(a-c)(b-c)}{a-b}\cdot\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},$$

при чемъ постоянное k отлично отъ прежняго.

Едва-ли необходимо упоминать, что при $c=\infty$ или $\gamma=\infty$ предыдущее преобразованіе должно быть замѣнено преобразованіемъ типа $\frac{1}{x}$.

Если-же $\alpha=\beta$, то предыдущая формула приводится къ виду:

$$F(x)=\frac{\alpha\lambda\log\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+\gamma(\alpha-\gamma)}{\lambda\log\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+(\alpha-\gamma)} \quad \ldots\ldots (2)$$

и

$$\lambda=\frac{k(a-c)(b-c)}{a-b}.$$

Разсмотримъ теперь одинъ изъ тѣхъ случаевъ, когда формула (1) § 2 становится непригодной, именно положимъ $\alpha=0$, $\beta=\infty$, $\gamma=1$. Выраженіе длины будетъ такое:

$$F(x)=\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda},$$

когда $a \gtrless b$; если же $a=b$, то

$$F(x)=e^{k(c-a)\frac{x-c}{x-a}}.$$

Слѣдовательно, простѣйшими выраженіями длины будутъ функціи:

$$x^k,\quad e^x.$$

Если-же выбрать постоянное k такъ, чтобы $\lambda=1$, то первая изъ двухъ послѣдихъ формулъ даетъ:

$$F(x)=\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}.$$

Правая часть этого выраженія есть не что иное какъ параметръ μ, характеризующій величину перемѣщенія отъ c до x; слѣдовательно, *параметръ перемѣщенія есть длина отрѣзка* cx *прямой* (c, a, b) *на масштабѣ* $(1, o, \infty)$.

Такимъ образомъ утвержденіе, что параметръ μ не годится для измѣренія длины отрѣзковъ, можемъ считать лишеннымъ основанія.

IV.

Вопросъ, которымъ мы занимались находится въ тѣсной связи съ одной задачей проективной геометріи.

Пусть имѣемъ двѣ прямыя, точки которыхъ находятся въ инволюціонномъ соотвѣтствіи. Положимъ, что a и b суть сопряженныя точки на одной прямой, α и β — на другой. Какое соотвѣтствіе можно установить между тѣми точками этихъ прямыхъ, которыя находятся внѣ отвѣзковъ (a, b) и (α, β)?

Возьмемъ еще двѣ пары сопряженныхъ точекъ (x, y) (c, z) на первой прямой и двѣ пары такихъ-же точекъ на второй: (ξ, η) (γ, ζ).

По опредѣленію

$$\frac{(c-x)(y-a)(b-z)}{(z-y)(x-b)(a-c)}=-1,$$

$$\frac{(\gamma-\xi)(\eta-\alpha)(\beta-\zeta)}{(\zeta-\eta)(\xi-\beta)(\alpha-\gamma)}=-1.$$

Требуется опредѣлить зависимость между соотвѣтственными точками ξ и x, предполагая, что точки c и γ другъ другу соотвѣтствуютъ.

Первое изъ этихъ условій выражаетъ не что иное, какъ то, что z есть сумма отрѣзковъ x, y, отсчитываемыхъ отъ c, сумма относительно инваріантныхъ точекъ a, b; это видно изъ послѣдней формулы § 1. Второе выражаетъ то же свойство на другой прямой. Слѣдовательно, вопросъ, который требуется рѣшить, отличается отъ опредѣленія длины въ неэвклидовой геометріи только формой выраженія, а потому искомая зависимость ξ отъ x рѣшается формулами, данными въ предыдущемъ; самое общее его рѣшеніе даетъ формула (1) § 3.

Sur le problème de la distribution de l'électricité.

Par W. Stekloff.

Dans une Note, inserée dans le № 21 (22 November 1897) des Comptes Rendus, M. Liapounoff a indiqué une méthode pour résoudre le problème de la distribution électrostatique sous certaines conditions par rapport à la surface du conducteur.

Dans cette Note nous allons indiquer une autre méthode de la solution du même problème, présentant une modification convenable de la méthode connue de M. Robin et toute différente de celle de M. Liapounoff.

Soit (S) une surface fermée convexe à courbure finie, determinée et différente de zéro.

Désignons par s un point de la surface (S), par M un point quelconque. Soit r la distance du point s au point M, ds l'élément de la surface (S), n la direction de la normale extérieure à cette surface. Soit enfin ϱ_0 une fonction quelconque finie et continue en tout point de (S).

Prenons une fonction V du point M finie et continue avec ses dérivées à l'intérieur et à l'extérieur du domaine (D), limité par (S).

Désignons par $\frac{\partial V_s}{\partial n}$ (ou simpl. $\frac{\partial V}{\partial n}$) la valeur de l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n,\ x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n,\ y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n,\ z) \tag{1}$$

au point s, par $\frac{\partial V_{is}}{\partial n}$ (ou simpl. $\frac{\partial V_i}{\partial n}$) la limite, vers laquelle tend (1), quand le point M tend vers s, en étant à l'intérieur de (S), par $\frac{\partial V_{es}}{\partial n}$

(ou simpl. $\frac{\partial V_e}{\partial n}$) la limite, vers laquelle tend (1), quand le point M tend vers s, en étant à l'extérieur de (S) *).

Formons la suite d'intégrales

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \varrho_0 \frac{1}{r} ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}\frac{1}{r} ds. \qquad (k=2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

V_k sont des fonctions du point M.

Supposons que M est un point de la surface (S).

Désignons par ψ l'angle de la droite $\overline{Ms}$ avec la normale n en M et par φ l'angle de la droite $\overline{Ms}$ avec la normale n en s.

On aura

$$\varrho_k = \frac{1}{2\pi}\int \varrho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r^2} ds, \qquad (k=1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

où

$$\varrho_{k-1} = \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}. \qquad (k=2, 3, \ldots)$$

Reprenons maintenant la fonction V et posons

$$W = \int V_i \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \quad P = \int \frac{\partial V_i}{\partial n}\frac{1}{r} ds.$$

Supposons que V satisfait à l'équation de Laplace.

On a

$$V = \frac{1}{4\pi} W + \frac{1}{4\pi} P$$

pour chaque point M à l'intérieur de (S).

En supposant que M tend vers s et en passant à la limite, nous avons

$$V_{is} = \frac{1}{2\pi} W_s + \frac{1}{2\pi} P_s.$$

En appliquant cette formule à la fonction V_{k-1} et en tenant compte des égalités (2) et (3), on trouve

$$V_k = \frac{1}{2\pi}\int V_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2} ds \qquad (k=2,3,\ldots)$$

en tous les points de la surface (S).

---

*) Nous supposons que M reste constamment sur la normale à la surface (S) en s.

Soit ϱ_0 une fonction positive. On a

$$v_k = \frac{1}{2\pi}\int v_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds,$$

v_k étant le module de V_k sur (S).

Soient M_k et m_k le maximum et le minimum de v_k.

On sait que

$$M_k < M_{k-1}, \qquad m_k > m_{k-1}, \tag{4}$$

$$\lim_{k=\infty} V_k = \text{const.} \tag{5}$$

Si la courbure de la surface (S) est finie et différente de zéro, on peut assigner une limite supérieure D_1 et une limite inférieure D_0 du rapport

$$\frac{r}{\cos\psi}.$$

Soit en particulier $\varrho_0 = 1$.

Désignons les valeurs correspondantes de V_k par K_k, les valeurs de ϱ_k par I_k.

Soient M_k^0 et m_k^0 le maximum et le minimum de $|K_k|$.

On peut démontrer sans peine que

$$\frac{m_k^0}{D_1} \leqq I_k \leqq \frac{M_k^0}{D_0}. \tag{6}$$

Désignons par

$$I_{sk}^{\gamma}$$

l'intégrale I_k relative au point s et étendue à une portion quelconque γ de la surface (S).

Nous tirerons des égalités (3) à l'aide de la méthode de la moyenne arithmétique de C. Neumann

$$N_k - n_k \leqq (N_{k-1} - n_{k-1})\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{I_{sk}^{\beta}}{I_{sk}} + \frac{I_{s'k}^{\alpha}}{I_{sk}}\right)\right] =$$
$$= (N_{k-1} - n_{k-1})(1 - \tau_k),$$

N_k et n_k étant le maximum et le minimum du rapport

$$\frac{\varrho_k}{I_k}.$$

α et β sont les portions de la surface (S) telles que l'on a

$$\alpha + \beta = S,$$

S étant l'aire de la surface (S).

En tenant compte des inégalités (4) et (6), on peut démontrer que

$$\tau_k > Q \frac{D_0^2}{2D_1^2} \frac{l}{L^2} = \mu, \qquad (\mu < 1)$$

l et L étant le minimum et le maximum de l'intégrale

$$\int \frac{ds}{r},$$

Q le minimum de la somme

$$\int\limits_\alpha \frac{ds}{r} + \int\limits_\beta \frac{ds}{r_1}{}^{*)}.$$

Par suite

$$N_k - n_k \leq (M_0 - m_0)(1-\mu)^k = (M_0 - m_0)\lambda^k, \qquad (\lambda < 1)$$

où M_0 et m_0 sont le maximum et le minimum de ϱ_0 sur (S).

Supposons que ϱ_0 satisfait à la condition

$$\int \varrho_0 \, ds = 0.$$

Dans ce cas tous les ϱ_k changent le signe sur (S); il en est de même du rapport

$$\frac{\varrho_k}{I_k}.$$

On a par conséquent pour toutes les valeurs de k [inégalités (4) et (6)]

$$|\varrho_k| \leqq (M_0 - m_0) I_k \lambda^k \leqq (M_0 - m_0) \frac{M_1^0}{D_0} \lambda^k.$$

Donc *la série*

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

---

*) Nous désignons par $\int\limits_\alpha \frac{ds}{r}$ et $\int\limits_\beta \frac{ds}{r_1}$ l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ relative aux points s et s' et étendue aux portions α et β.

D'après cela formons la fonction

$$V = \frac{1}{2\pi} \int (\lambda \varrho_0 + \lambda^2 \varrho_1 + \ldots + \lambda^{k+1} \varrho_k + \ldots) \frac{1}{r}\, ds,$$

λ étant une constante dont le module est inférieur ou au plus égal à l'unité.

Il est évident que V satisfait aux conditions de la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{à l'intérieur de } (D),$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \lambda \varrho_0 + (\lambda - 1)[\lambda \varrho_1 + \lambda^2 \varrho_2 + \ldots + \lambda^k \varrho_k + \ldots],$$

$$\text{sur } (S)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = -\lambda \varrho_0 + (\lambda + 1)[\lambda \varrho_1 + \lambda^2 \varrho_2 + \ldots + \lambda^k \varrho_k + \ldots].$$

En posant $\lambda = 1$ nous obtiendrons la solution du problème intérieur de C. Neumann, en posant $\lambda = -1$, la solution du problème extérieur.

Supposons maintenant que ϱ_0 est toujours positif sur (S).

On a

$$\varrho_k' = \frac{1}{2\pi} \int \varrho_{k-1}' \frac{\cos \psi}{r^2}\, ds,$$

en posant pour abréger

$$\varrho_{k-1}' = \varrho_k - \varrho_{k-1}.$$

D'après ce que nous avons expliqué on peut affirmer que la série

$$\varrho_1' + \varrho_2' + \ldots + \varrho_k' + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

Donc ϱ_k tend vers une limite ϱ $(\varrho > 0)$.

En tenant compte des égalités (2) et en passant à la limite, nous avons [d'après (5)]

$$\int \frac{\varrho}{r}\, ds = \text{const.}$$

Par conséquent $\varrho = lim\, \varrho_k$ *est la densité d'une couche superficielle sans action sur un point intérieur.*

Le problème de la distribution de l'électricité est donc résolu pour toutes les surfaces convexes ayant la courbure finie et différente de zéro.

Mais cette dérniere restriction n'a rien d'essentiel.

Les résultats obtenus seront encore vrais, quand la surface (S) contient un nombre fini des portions planes et l'aire des portions, où la courbure est différente de zéro, n'est pas nulle.

Къ задачѣ о равновѣсіи упругихъ изотропныхъ цилиндровъ.

В. А. Стеклова.

(Сообщено въ засѣданіи Харьк. Матем. Общества 24 января 1897 года).

1. Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ указать одно рѣшеніе уравненій равновѣсія упругихъ изотропныхъ цилиндровъ, болѣе общее, чѣмъ извѣстныя до сихъ поръ рѣшенія С. Венана и Клебша.

Изслѣдованіе этого рѣшенія приводитъ къ довольно интереснымъ результатамъ.

Такъ, пользуясь имъ, можно во первыхъ рѣшать нѣкоторые, сколько я знаю, до сихъ поръ не разсматривавшіеся вопросы о равновѣсіи цилиндровъ подъ дѣйствіемъ произвольно заданныхъ силъ, одинаково приложенныхъ къ точкамъ каждаго изъ сѣченій, перпендикулярнаго къ оси цилиндра, а также и подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ болѣе общаго характера.

Во вторыхъ, оно даетъ возможность изслѣдовать условія равновѣсія разсматриваемыхъ тѣлъ при довольно разнообразныхъ гипотезахъ и болѣе общихъ, чѣмъ извѣстныя гипотезы С. Венана и Клебша, относительно распредѣленія такъ называемыхъ напряженій внутри тѣла.

Наконецъ, рѣшеніе, о которомъ идетъ рѣчь, позволяетъ связать теоріи упругихъ массивныхъ стержней С. Венана и массивныхъ упругихъ пластинокъ Клебша, такъ какъ рѣшенія уравненій упругости, соотвѣтствующія этимъ теоріямъ, являются весьма частными случаями того болѣе общаго рѣшенія, которое я имѣю въ виду указать въ предлагаемой работѣ.

2. Прежде чѣмъ приступить къ главной цѣли изслѣдованія считаю не безполезнымъ напомнить читателю основныя положенія, опредѣленія и обозначенія теоріи деформируемыхъ тѣлъ.

Разсмотримъ тѣло (A), матерія котораго заполняетъ нѣкоторую область (D) пространства, ограниченную замкнутой поверхностью (S).

Въ теоріи деформируемыхъ и въ частности упругихъ твердыхъ тѣлъ предполагается, что матерія распредѣляется непрерывно внутри области (D), такъ что плотность ϱ тѣла есть конечная и непрерывная функція координатъ точекъ области (D).

Предполагается далѣе, что между матеріальными точками, непрерывная совокупность которыхъ образуетъ тѣло (A), дѣйствуютъ силы взаимодѣйствія.

Разсмотримъ какую либо часть (B), выдѣленную изъ тѣла (A) и ограниченную замкнутой поверхностью (S_1).

Оставшуюся часть тѣла (A) назовемъ черезъ (C).

Частицы объема (B) находятся подъ дѣйствіемъ силъ взаимодѣйствія частицъ, заключенныхъ въ этомъ объемѣ (B), и частицъ, составляющихъ объемъ (C).

Предполагается, что векторъ и моментъ силъ взаимодѣйствія частицъ объема (B) равны нулю, а силы дѣйствія части (C) на часть (B) замѣняются силами, сплошнымъ образомъ приложенными къ поверхности (S_1).

Пусть $\sum X$, $\sum Y$ и $\sum Z$ суть проекціи на оси координатъ вектора силъ послѣдней категоріи, дѣйствующихъ на площадку Δs поверхности (S_1).

Предполагается, что отношенія

$$\frac{\sum X}{\Delta s}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta s}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta s}$$

стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ при $\Delta s = 0$.

Эти предѣлы обозначаются черезъ

$$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n,$$

гдѣ подъ n разумѣется направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S_1) въ той точкѣ s, въ которую обращается въ предѣлѣ контуръ, ограничивающій площадку Δs.

Такимъ образомъ имѣемъ

$$\lim \frac{\sum X}{\Delta s} = X_n,$$

$$\lim \frac{\sum Y}{\Delta s} = Y_n,$$

$$\lim \frac{\sum Z}{\Delta s} = Z_n.$$

Величины X_n, Y_n и Z_n зависятъ отъ положенія точки s на поверхности (S_1) и отъ предѣльнаго направленія площадки Δs, опредѣляемаго нормалью n къ (S_1) въ точкѣ s, и называются *проекціями на оси координатъ напряженія, отнесеннаго къ единицѣ площади и дѣйствующаго въ точкѣ s площадки даннаго направленія* (послѣднее опредѣляется направленіемъ n).

Напряженія X_n, Y_n и Z_n представляются непрерывными функціями координатъ.

Проведемъ черезъ точку s три взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ координатъ.

Согласно принятому обозначенію, проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ точкѣ s на площадки перпендикулярныя къ осямъ x, y и z, представятся въ слѣдующемъ видѣ:

	на ось x	на ось y	на ось z
проекція напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ s площадки перпендикулярной къ оси x	X_x	Y_x	Z_x
. . . . y	X_y	Y_y	Z_y
. . . . z	X_z	Y_z	Z_z

Въ теоріи деформируемыхъ тѣлъ доказывается, что

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z), \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \\ Z_n &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z), \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$Z_y = Y_z, \qquad X_z = Z_x, \qquad Y_x = X_y. \tag{2}$$

Упругое твердое тѣло есть частный случай тѣлъ деформируемыхъ какимъ бы то ни было способомъ.

Все вышеизложенное справедливо и для упругихъ твердыхъ тѣлъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить только о послѣднихъ.

Въ упругомъ тѣлѣ напряженія развиваются подъ вліяніемъ сообщаемыхъ тѣлу деформацій.

Состояніе тѣла, когда всѣ напряженія равны нулю, называется *естественнымъ*.

Назовемъ черезъ x, y, z координаты какой либо точки тѣла въ естественномъ состояніи.

Координаты этой точки послѣ деформаціи можно представить подъ видомъ

$$x+u, \qquad y+v, \qquad z+w,$$

гдѣ u, v и w суть функціи координатъ x, y, z и, вообще, времени t.

Характерная особенность деформацій упругаго твердаго тѣла состоитъ въ слѣдующемъ:

Измѣненіе размѣровъ какой угодно части тѣла при деформаціи безконечно мало въ сравненіи съ размѣрами этой части.

Въ силу такого опредѣленія деформаціи упругаго твердаго тѣла величины u, v и w, равно какъ и ихъ производныя по координатамъ, должно считать безконечно малыми величинами.

За элементы, характеризующіе деформацію упругаго твердаго тѣла, принимаютъ величины, опредѣляющія измѣненіе послѣ деформаціи угловъ между каждыми двумя изъ трехъ реберъ элементарнаго прямоугольнаго до деформаціи параллелепипеда, пересѣкающихся въ одной вершинѣ, и удлинненія этихъ реберъ.

Назовемъ послѣдніе три изъ элементовъ деформаціи черезъ

$$x_x, \qquad y_y, \qquad z_z, \tag{3}$$

а удвоенныя величины первыхъ трехъ черезъ

$$z_y = y_z, \qquad x_z = z_x, \qquad y_x = x_y. \tag{3_1}$$

Въ теоріи упругости доказывается, что

$$\begin{gathered} x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ z_y = y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad x_z = z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad y_x = x_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{gathered} \tag{4}$$

Напряженія X, Y и Z со значками x, y и z предполагаются частными производными по перемѣннымъ (3) и (3_1) отъ квадратичной всегда отрицательной формы f шести аргументовъ (3) и (3_1), *) т. е.

$$\begin{gathered} X_x = \frac{\partial f}{\partial x_x}, \qquad Z_y = Y_z = \frac{\partial f}{\partial z_y}, \\ Y_y = \frac{\partial f}{\partial y_y}, \qquad X_z = Z_x = \frac{\partial f}{\partial x_z}, \\ Z_z = \frac{\partial f}{\partial z_z}, \qquad Y_x = X_y = \frac{\partial f}{\partial x_y}. \end{gathered} \tag{5}$$

*) Это допущеніе равносильно допущенію существованія потенціала частичныхъ силъ.

Форма f вообще содержитъ 21 постоянный коэффиціентъ.

При различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно строенія упругаго тѣла число коэффиціентовъ уменьшается.

Тѣло называется *изотропнымъ*, если видъ функціи f не зависитъ отъ направленія координатныхъ осей.

Для такого тѣла, какъ доказывается въ теоріи упругости,

$$f = -K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k\Theta^2\right), \tag{6}$$

гдѣ

$$\Theta = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{7}$$

а K и k двѣ положительныя постоянныя, зависящія отъ физическихъ свойствъ тѣла.

Такимъ образомъ, для изотропнаго тѣла, въ силу равенствъ (5) и (6),

$$\begin{aligned} X_x &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ Y_y &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ Z_z &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} Y_z = Z_y &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ Z_x = X_z &= -K\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ X_y = Y_x &= -K\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

3. Пусть тѣло деформируется подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ его объема и силъ, приложенныхъ къ поверхности, его ограничивающей.

Назовемъ проекціи на оси координатъ первыхъ силъ черезъ

$$X, \quad Y, \quad Z,$$

а вторыхъ черезъ

$$P, \quad Q, \quad R.$$

Тѣ и другія будемъ предполагать непрерывными и конечными функціями координатъ.

Предположимъ, что тѣло находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ только что указанныхъ силъ.

При сдѣланныхъ выше предположеніяхъ, задача о равновѣсіи какого угодно упругаго твердаго тѣла приводится къ опредѣленію функцій u, v, w при помощи уравненій

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\varrho X=0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\varrho Y=0, \qquad \textbf{(10)}$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\varrho Z=0,$$

при условіяхъ на поверхности

$$P=X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z),$$

$$Q=Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)+Y_z\cos(n,z), \qquad \textbf{(11)}$$

$$R=Z_x\cos(n,x)+Z_y\cos(n,y)+Z_z\cos(n,z).$$

Послѣднія являются слѣдствіями равенствъ (1), которыя должны имѣть мѣсто для любой точки тѣла.

Разсматриваемая задача будетъ вполнѣ опредѣлена условіями (10) и (11), если еще поставимъ условіе, что упругое твердое тѣло не можетъ испытывать перемѣщеній, свойственныхъ неизмѣняемой системѣ.

Въ случаѣ изотропнаго тѣла уравненія равновѣсія, при помощи равенствъ (8) и (9), представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$\varDelta u+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\varrho}{K}X=0,$$

$$\varDelta v+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\varrho}{K}Y=0, \qquad \textbf{(12)}$$

$$\varDelta w+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\varrho}{K}Z=0,$$

гдѣ $\varDelta$ есть знакъ операціи вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а

$$\mu=2k+1.$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ мы будемъ говорить только о тѣлахъ изотропныхъ.

4. При настоящихъ средствахъ анализа задача объ опредѣленіи функцій u, v и w при помощи уравненій (12) и условій (11) не можетъ быть рѣшена въ общемъ видѣ при произвольно заданныхъ функціяхъ X, Y, Z; P, Q, R и для какого угодно тѣла.

Даже для простѣйшихъ видовъ тѣлъ, за весьма рѣдкими исключеніями, она представляетъ почти неодолимыя трудности.

Въ настоящемъ изслѣдованіи мы разсмотримъ только тѣла цилиндрическія и допустимъ, что на ихъ внутреннія массы не дѣйствуетъ силъ, т. е.

$$X = Y = Z = 0.$$

За ось z примемъ по обыкновенію ось цилиндра, за плоскость xy плоскость одного изъ его основаній.

При этомъ условія опредѣленности *) задачи можно представить подъ видомъ

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

при

$$x = y = z = 0. \tag{13}$$

Назовемъ черезъ a уголъ, составляемый внѣшней нормалью n къ боковой поверхности (S') цилиндра съ осью x.

Условія (11) для боковой поверхности цилиндра примутъ видъ

$$\begin{aligned} X_x \cos a + X_y \sin a &= P, \\ Y_x \cos a + Y_y \sin a &= Q, \\ Z_x \cos a + Z_y \sin a &= R, \end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ P, Q и R суть заданныя функціи координатъ точекъ поверхности (S').

Тѣ же условія (11) для основаній цилиндра приведутся къ слѣдующимъ

$$Z_x = P_1, \quad Z_y = Q_1, \quad Z_z = R_1, \tag{15}$$

гдѣ P_1, Q_1 и R_1 суть заданныя функціи x и y.

---

*) Условія, что тѣло не можетъ испытывать перемѣщеній, свойственныхъ неизмѣняемой системѣ.

Задача о равновѣсіи упругаго изотропнаго цилиндра при отсутствіи внѣшнихъ силъ приводится къ опредѣленію функцій u, v и w при помощи уравненій

$$\Delta u + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 ,$$

$$\Delta v + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 , \tag{16}$$

$$\Delta w + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

и условій (13), (14) и (15).

Къ уравненіямъ (16) должно присоединить еще слѣдующее

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{16$_1$}$$

Но и при сдѣланныхъ простѣйшихъ предположеніяхъ задачу нельзя рѣшить въ общемъ видѣ безъ нѣкоторыхъ, соотвѣтствующимъ образомъ составленныхъ, гипотезъ либо относительно распредѣленія напряженій внутри тѣла, либо относительно деформацій u, v и w.

Въ настоящее время извѣстно два частныхъ рѣшенія, сравнительно общаго характера, разсматриваемой задачи.

Одно принадлежитъ С. Венану, другое Клебшу.

С. Венанъ ставитъ гипотезу, что въ любой точкѣ внутри цилиндра напряженія на двѣ взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ zx и zy, параллельны оси цилиндра и допускаетъ, что на боковую поверхность цилиндра не дѣйствуетъ силъ, т. е.

$$P = Q = R = 0 .$$

При этомъ само собою опредѣляется общій типъ силъ P_1, Q_1 и R_1, которыя должны быть приложены къ основаніямъ цилиндра для того, чтобы оправдывались сдѣланныя имъ допущенія.

Клебшъ дѣлаетъ какъ бы обратныя предположенія.

Онъ допускаетъ, что въ каждой точкѣ тѣла напряженія, дѣйствующія на площадки, перпендикулярныя къ оси цилиндра, равны нулю и на основанія цилиндра не дѣйствуетъ силъ.

При этомъ въ получаемомъ имъ рѣшеніи самъ собою опредѣляется (до извѣстной степени) общій типъ силъ, которыя должны дѣйствовать на боковую поверхность цилиндра, чтобы поставленная имъ гипотеза дѣйствительно имѣла мѣсто.

Эти двѣ задачи разсматриваются въ настоящее время независимо другъ отъ друга и рѣшенія, имъ соотвѣтствующія, получаются въ каждомъ изъ этихъ случаевъ особо интегрированіемъ уравненій (16) вмѣстѣ съ уравненіями, служащими аналитическимъ выраженіемъ гипотезъ, соотвѣтствующихъ каждому изъ разсматриваемыхъ случаевъ.

Въ настоящемъ изслѣдованіи, какъ было уже упомянуто, я укажу болѣе общее рѣшеніе уравненій упругости, въ которомъ, какъ весьма частные случаи, заключаются и рѣшенія С. Венана и Клебша.

5. Назовемъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты послѣ деформаціи той точки упругаго тѣла, координаты которой въ естественномъ состояніи (до деформаціи) суть x, y, z.

Имѣемъ

$$x_1 = x + u,$$

$$y_1 = y + v,$$

$$z_1 = z + w.$$

Всякая прямая, параллельная до деформаціи оси цилиндра (оси z), преобразуется послѣ деформаціи въ нѣкоторую кривую, уравненіе которой, съ приближеніемъ до безконечно малыхъ порядка не выше перваго, можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + u_1, \\ y_1 &= y + v_1, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

гдѣ u_1 и v_1 суть выраженія функцій u и v по замѣнѣ въ послѣднихъ перемѣнной z черезъ z_1.

Если u и v суть цѣлыя раціональныя функціи перемѣнной z, то уравненія (17) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_0 + m_1 z_1 + \ldots + m_s z_1^s, \\ y_1 &= n_0 + n_1 z_1 + \ldots + n_s z_1^s, \end{aligned}\right\} \qquad (17_1)$$

гдѣ m_j и $n_j (j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ суть нѣкоторыя функціи отъ x и y.

При этомъ, какъ показываютъ уравненія (17_1), всякая прямая, параллельная до деформаціи оси цилиндра, обратится послѣ деформаціи въ кривую, проекціи которой на плоскости xz и yz суть параболы степени s.

Такую деформацію будемъ называть *параболической деформаціей степени* s.

Деформаціи, соотвѣтствующія задачамъ С. Венана и Клебша, суть параболическія: для первой третьей, для послѣдней второй степени.

Исходнымъ пунктомъ нашихъ изысканій будетъ служить слѣдующая задача:

Опредѣлить самый общій типъ функцій u, v и w при условіи, что деформація упругаго цилиндра есть параболическая третьей степени.

Такимъ образомъ, вмѣсто частныхъ гипотезъ о распредѣленіи напряженій внутри цилиндра мы беремъ за исходную точку опредѣленную и навѣрно возможную гипотезу о характерѣ деформацій u, v и w.

Очевидно, что въ опредѣленныхъ подъ этимъ условіемъ функціяхъ u, v и w должны будутъ содержаться, какъ частные случаи, и выраженія, соотвѣтствующія рѣшеніямъ С. Венана и Клебша, представляющимъ частные виды параболической деформаціи третьей степени.

6. Положимъ

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z u_1 + \frac{z^2}{2!} u_2 + \frac{z^3}{3!} u_3 , \\ v &= v_0 + z v_1 + \frac{z^2}{2!} v_2 + \frac{z^3}{3!} v_3 , \\ w &= w_0 + z w_1 + \frac{z^2}{2!} w_2 + \frac{z^3}{3!} w_3 , \\ \Theta &= \Theta_0 + z \Theta_1 + \frac{z^2}{2!} \Theta_2 + \frac{z^3}{3!} \Theta , \end{aligned} \tag{18}$$

гдѣ u_j, v_j, w_j, Θ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ суть функціи отъ x и y.

Эти выраженія для u, v, w и Θ должны удовлетворять уравненіямъ (16) и (16_1) при всякомъ z.

Подставляя ихъ въ уравненія (16) и (16_1) и приравнивая нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ z, получаемъ слѣдующую систему уравненій для опредѣленія функцій u_j, v_j, w_j и Θ_j

$$\begin{aligned} u_2 + \Delta u_0 + \mu \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} &= 0 , \\ u_3 + \Delta u_1 + \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} &= 0 , \\ \Delta u_2 + \mu \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} &= 0 , \\ \Delta u_3 + \mu \frac{\partial \Theta_3}{\partial x} &= 0 , \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} v_2 + \Delta v_0 + \mu \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} &= 0 , \\ v_3 + \Delta v_1 + \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} &= 0 , \\ \Delta v_2 + \mu \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} &= 0 , \\ \Delta v_3 + \mu \frac{\partial \Theta_3}{\partial y} &= 0 , \end{aligned} \tag{20}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta w_0 + w_2 + \mu\Theta_1 = 0\,, \\
&\Delta w_1 + w_3 + \mu\Theta_2 = 0\,, \\
&\Delta w_2 + \mu\Theta_3 = 0\,, \\
&\Delta w_3 = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_1\,, \\
&\Theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2\,, \\
&\Theta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\,, \\
&\Theta_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{22}
$$

Первыя два каждой изъ группъ уравненій (19), (20) и (21) даютъ

$$
(23)\quad \left.\begin{aligned}
&u_2 = -\Delta u_0 - \mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}\,, \\
&u_3 = -\Delta u_1 - \mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\,,
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&v_2 = -\Delta v_0 - \mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\,, \\
&v_3 = -\Delta v_1 - \mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial y}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&w_1 = \Theta_0 - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right), \\
&w_2 = \Theta_1 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{25}
$$

Рѣшая второе изъ (21) и третье изъ (22) относительно Θ_2 и w_3, получаемъ

$$
\Theta_2(1+\mu) = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} - \Delta w_1\,,
$$

$$
w_3 = -\Delta w_1 - \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right).
$$

Отсюда, при помощи (23), (24) и (25), получаемъ

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta_2 = -\Delta\Theta_0\,, \\
&w_3 = \Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_0\right).
\end{aligned}\right\} \tag{26}
$$

Наконецъ, послѣднее изъ уравненій (22), при помощи (23) и (24), даетъ

$$\Theta_3 = -\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \mu\Theta_1\right). \tag{27}$$

Уравненія (23), (24), (25), (26) и (27) даютъ выраженія функцій u_k, v_k, $\Theta_k (k = 2, 3)$ и $w_i (i = 1, 2, 3)$ черезъ шесть функцій u_j, v_j и $\Theta_j (j = 0, 1)$.

Задача такимъ образомъ сводится къ опредѣленію этихъ послѣднихъ и функціи w_0.

Подставивъ найденныя выраженія u_k, v_k, w_k и $\Theta_k (k = 2, 3)$ въ два послѣднія изъ уравненій каждой изъ группъ (19), (20) и (21), получимъ слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять искомыя функціи

$$\Delta_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_0\right) = 0, \tag{28}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_1\right) = 0, \tag{28$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\left(\Delta u_j + 2\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x}\right) = 0, \\ &\Delta\left(\Delta v_j + 2\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (j = 0, 1) \tag{29}$$

Въ первомъ изъ этихъ уравненій Δ_2 обозначаетъ дважды повторенную операцію Δ.

Наконецъ, первое изъ уравненій (21) даетъ слѣдующее уравненіе для функціи w_0

$$\Delta w_0 + (1+\mu)\Theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}. \tag{30}$$

Такимъ образомъ, параболическая деформація третьей степени возможна для цилиндрическаго тѣла тогда и только тогда, когда функціи u_j, v_j, $\Theta_j (j = 0, 1)$, при помощи которыхъ по формуламъ предыдущаго §-а выражаются всѣ коэффиціенты при степеняхъ z въ равенствахъ (18), *удовлетворяютъ уравненіямъ (28), (28$_1$), (29) и (30).*

Каждому рѣшенію этихъ уравненій будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное рѣшеніе уравненій упругости, т. е. одна изъ возможныхъ параболическихъ деформацій третьей степени.

7. Прежде чѣмъ перейти къ изслѣдованію наиболѣе интересныхъ изъ этихъ рѣшеній, выразимъ напряженія X, Y, Z со значками x, y, z черезъ функціи u_j, v_j и $\Theta_j\,(j=0\,,\,1)$.

При помощи формулъ (8), (9), (18), (23), (24), (25), (26) и (27) получимъ

$$
\begin{gathered}
X_x=\sum_0^3 \frac{z^k}{k!}X_{x,k}\,,\qquad Y_y=\sum_0^3 \frac{z^k}{k!}Y_{y,k}\,,\qquad Z_z=\sum_0^3 \frac{z^k}{k!}Z_{z,k}\,,\\
X_y=Y_x=\sum_0^3 \frac{z^k}{k!}X_{y,k}\,,\quad Y_z=Z_y=\sum_0^3 \frac{z^k}{k!}Y_{z,k}\,,\quad Z_x=X_z=\sum_0^3 \frac{z^k}{k!}Z_{x,k}\,,
\end{gathered}
\tag{31}
$$

гдѣ, какъ нетрудно убѣдиться,

$$
\begin{gathered}
X_{x,j}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Theta_j+\frac{\partial u_j}{\partial x}\right),\\
Y_{y,j}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Theta_j+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right),\qquad (j=0,1)\\
X_{y,j}=-K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}+\frac{\partial v_j}{\partial x}\right);\\
X_{x,i}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Delta\Theta_j+\Delta\frac{\partial u_j}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial x^2}\right),\\
Y_{y,i}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Delta\Theta_j+\Delta\frac{\partial v_j}{\partial y}+\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial y^2}\right),\qquad (i=2,3;\,j=0,1)\\
X_{y,i}=-K\left[\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}+\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)+2\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial x\,\partial y}\right];\\
Z_{x,0}=-K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+u_1\right),\qquad Z_{y,0}=-K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+v_1\right),\\
Z_{x,k}=-K\left[(1-\mu)\frac{\partial\Theta_j}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\Delta u_j\right],\\
(k=1,2;\,j=0,1)\\
Z_{y,k}=-K\left[(1-\mu)\frac{\partial\Theta_j}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\Delta v_j\right],\\
Z_{x,3}=-K\frac{\partial\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_0\right)}{\partial x},
\end{gathered}
\tag{32}
$$

$$Z_{y,3} = -K\frac{\partial\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_0\right)}{\partial y};$$

$$Z_{z,j} = -2K\left[\frac{\mu+1}{2}\Theta_j-\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right], \quad (j=0,1)$$

$$Z_{z,2} = -2K\left[\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-\frac{1-\mu}{2}\Delta\Theta_0\right], \tag{32}$$

$$Z_{z,3} = K(\mu-1)\Delta\Theta_1.$$

8. Переходимъ теперь къ рѣшенію слѣдующей задачи:

Найти общее рѣшеніе уравненій равновѣсія упругаго изотропнаго цилиндра при слѣдующихъ условіяхъ:

1) Тѣло испытываетъ параболическую деформацію третьей степени,

2) На внутреннія массы тѣла не дѣйствуетъ силъ,

3) На боковую поверхность цилиндра дѣйствуютъ силы

$$X=X_0+zX_1,\quad Y=Y_0+zY_1,\quad Z=Z_0+zZ_1,$$

гдѣ X_j, Y_j, $Z_j (j=0, 1)$ *суть произвольно заданныя функціи* x *и* y.

Рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j $(j=0, 1)$, w_0 при помощи уравненій (28), (28_1), (29), (30) и условій

$$X_x\cos a+X_y\sin a=X_0+zX_1,$$
$$Y_x\cos a+Y_y\sin a=Y_0+zY_1,$$
$$Z_x\cos a+Z_y\sin a=Z_0+zZ_1.$$

Послѣднія, при помощи (31), приведутся къ слѣдующимъ

$$\begin{aligned} &X_{x,j}\cos a+X_{y,j}\sin a=X_j, && (j=0,1)\\ &X_{x,i}\cos a+X_{y,i}\sin a=0, && (i=2,3)\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned} &X_{y,j}\cos a+Y_{y,j}\sin a=Y_j, && (j=0,1)\\ &X_{y,i}\cos a+Y_{y,i}\sin a=0, && (i=2,3)\end{aligned}\tag{34}$$

$$Z_{x,0}\cos a+Z_{y,0}\sin a=Z_0, \tag{35_0}$$

$$Z_{x,k}\cos a+Z_{y,k}\sin a=Z_k, \quad (k=1,2) \quad (Z_2=0) \tag{35}$$

$$Z_{x,3}\cos a+Z_{y,3}\sin a=0. \tag{35_1}$$

Положимъ

$$\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\Delta\Theta_0=P.$$

Въ силу уравненія (28) имѣемъ

$$\Delta P=0. \tag{36}$$

Условіе (35_1), въ силу (32), приводится къ виду

$$\frac{\partial P}{\partial n}=0, \tag{37}$$

гдѣ n есть направленіе внѣшней нормали къ боковой поверхности цилиндра.

Изъ уравненій (36) и (37) слѣдуетъ, что

$$P=\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\Delta\Theta_0=C=\text{const}. \tag{38}$$

При этомъ

$$Z_{x,3}=0,\qquad Z_{y,3}=0. \tag{39}$$

Задача приведена къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j, w_0 при помощи уравненій (38), (28_1), (29), (30) и поверхностныхъ условій (33), (34), (35_0) и (35).

Уравненія (38) и (28_1) мы можемъ заключить въ одно, положивъ

$$\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\Delta\Theta_j=C_j \qquad (j=0,1) \tag{38_1}$$

и условившись считать

$$C_1=0.$$

Положивъ въ общихъ уравненіяхъ равновѣсія (10)

$$X=Y=Z=0$$

и подставивъ вмѣсто X_x, X_y, $\ldots$, Z_z ихъ выраженія (31), разобьемъ уравненія (10) на систему 12-ти уравненій, между которыми будетъ 4 слѣдующаго вида [въ силу (39)]

$$\frac{\partial X_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y,i}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial Y_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial Y_{y,i}}{\partial y}=0. \qquad (i=2,3) \tag{40}$$

Помножимъ эти уравненія соотвѣтственно на u_i и v_i и, сложивъ, проинтегрируемъ результатъ по всей площади сѣченія, перпендикулярнаго къ оси цилиндра, которое будемъ называть *нормальнымъ сѣченіемъ цилиндра*.

Получимъ

$$\int\left[u_i\left(\frac{\partial X_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y,i}}{\partial y}\right)+v_i\left(\frac{\partial X_{y,i}}{\partial x}+\frac{\partial Y_{y,i}}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,$$

гдѣ dq есть элементъ площади только что упомянутаго сѣченія.

Это равенство легко приводится къ слѣдующему виду

$$\int[(X_{x,i}\cos a+X_{y,i}\sin a)\,u_i+(X_{y,i}\cos a+Y_{y,i}\sin a)\,v_i]\,ds-$$
$$-\int\left[X_{x,i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+Y_{y,i}\frac{\partial v_i}{\partial y}+X_{y,i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right]dq=0\,,$$

гдѣ ds есть элементъ периферіи нормальнаго сѣченія.

Первый изъ этихъ интеграловъ (считая слѣва) равенъ нулю въ силу уравненій (33).

Слѣдовательно,

$$\int\left[X_{x,i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+Y_{y,i}\frac{\partial v_i}{\partial y}+X_{y,i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right]dq=0.$$

Замѣтивъ, что

$$X_{x,i}=-2K\left(k\Theta_i+\frac{\partial u_i}{\partial x}\right),\quad Y_{y,i}=-2K\left(k\Theta_i+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right),$$
$$X_{y,i}=-K\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right),$$

получимъ

$$\int\left[2k\,\Theta_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0. \quad \textbf{(41)}$$

Уравненіе (27) при помощи (38_1) (при $j=1$) приводится къ слѣдующему виду

$$\Theta_3=-\Delta\Theta_1.$$

Принимая въ разсчетъ первое изъ уравненій (26), можемъ писать

$$\Theta_i=-\Delta\Theta_j. \qquad (i=2,3;\ j=0,1) \qquad \textbf{(42)}$$

Воспользовавшись затѣмъ уравненіями (23) и (24), получимъ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=-\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\mu\varDelta\Theta_j, \qquad (i=2,3;\, j=0,1)$$

или, на основаніи (38_1),

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=-C_j-\varDelta\Theta_j. \qquad (i=2,3;\, j=0,1)$$

При помощи этого равенства и (42) приводимъ (41) къ слѣдующему виду

$$2kC_j\int\varDelta\Theta_j\,dq+\int\left[2k(\varDelta\Theta_j)^2+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0. \qquad \mathbf{(43)}$$

Подставимъ во второе изъ условій (35) (при $k=2$) вмѣсто $Z_{x,2}$ и $Z_{y,2}$ ихъ выраженія (32).

Получимъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_j\right]\cos a+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_j\right]\sin a=$$
$$=-(\varDelta u_j\cos a+\varDelta v_j\sin a).$$

Положимъ

$$P_j=\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_j.$$

Интегрируя предыдущее равенство по всей периферіи нормальнаго сѣченія, находимъ

$$\int\frac{\partial P_j}{\partial n}\,ds=-\int(\varDelta u_j\cos a+\varDelta v_j\sin a)\,ds.$$

Но

$$\int(\varDelta u_j\cos a+\varDelta v_j\sin a)\,ds=\int\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)dq=(1-\mu)\int\varDelta\Theta_j\,dq+C_jq,$$

гдѣ q есть площадь нормальнаго сѣченія цилиндра.

Интегрируемъ затѣмъ (38_1) по всей площади этого сѣченія.

Получаемъ

$$\int \Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right) dq-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq = C_j q = \int \frac{\partial P_j}{\partial n}\, ds.$$

Слѣдовательно,

$$C_j q = -(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq - C_j q\,,$$

т. е.

$$-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq = 2k\int \Delta\Theta_j\, dq = 2C_j q\,,$$

гдѣ q есть площадь нормальнаго сѣченія.

Вслѣдствіе этого равенство (43) приметъ видъ

$$2C_j^2 q+\int\left[2k(\Delta\Theta_j)^2+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right] dq = 0\,.$$

Слѣдовательно, необходимо

$$C_j=0\,,\quad \Delta\Theta_j=0\,,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial v_i}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}=0\,. \qquad \textbf{(44)}$$

Отсюда

$$u_i=\Phi_i(y)\,,\qquad v_i=\Psi_i(x)\,.$$

Подставивъ эти выраженія въ послѣднее изъ уравненій (44), получимъ

$$\Phi_i'(y)+\Psi_i'(x)=0\,,$$

т. е.

$$\Phi_i(y)=a_i y+b_i\,,\qquad \Psi_i(x)=-a_i x+c_i\,, \qquad (i=2,3)$$

гдѣ a_i, b_i, c_i суть произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ уравненія (44) даютъ

$$C_j=0\,,\quad \Delta\Theta_j=0\,,\quad u_i=a_i y+b_i\,,\quad v_i=-a_i x+c_i\,.$$
$$(i=2,3;\ j=0,1).$$

При помощи этихъ уравненій и уравненій (23) и (24) получаемъ

$$\Delta u_j+\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x}=a_j y+b_j\,,\quad \Delta v_j+\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y}=-a_j x+c_j\,. \qquad \textbf{(45)}$$

Въ этихъ уравненіяхъ черезъ a_j, b_j и c_j замѣнены постоянныя a_i, b_i и c_i.

Замѣтимъ, что уравненія (45) по внѣшнему виду не отличаются отъ уравненій равновѣсія плоской упругой пластинки, деформирующейся въ ея плоскости подъ дѣйствіемъ двухъ силъ, приложенныхъ къ ея периферіи: постоянной силы, равной

$$\sqrt{b_j^2 + c_j^2}$$

и составляющей съ осями координатъ углы, cosinus'ы которыхъ

$$\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 + c_j^2}}, \qquad \frac{c_j}{\sqrt{b_j^2 + c_j^2}}$$

и силы, пропорціональной разстоянію точекъ периферіи отъ начала координатъ и направленной по касательной къ периферіи.

Но въ данномъ случаѣ Θ_j, вообще, не равно

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}.$$

Воспользовавшись уравненіями (45), получимъ [рав. (32)]

$$X_{x,i} = 0\,, \quad X_{y,i} = 0\,, \quad Y_{y,i} = 0\,. \qquad (i=2,3)$$

При этомъ вторыя изъ условій (33) и (34) удовлетворяются сами собой.

9. Такимъ образомъ задача сведена къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j *) при помощи уравненій

$$\Delta\Theta_j = 0\,, \quad \Delta u_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x} = a_j y + b_j\,, \quad \Delta v_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y} = -a_j x + c_j \qquad (46)$$
$$(j=0,1)$$

при слѣдующихъ условіяхъ на периферіи нормальнаго сѣченія

$$\left((\mu-1)\Theta_j + 2\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)\cos a + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\sin a = -\frac{X_j}{K} = X'_j\,, \qquad (47)$$
$$(s=0,1)$$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\cos a + \left((\mu-1)\Theta_j + 2\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\sin a = -\frac{Y_j}{K} = Y'_j\,, \qquad (47_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right]\cos a + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right]\sin a =$$
$$= (b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a + Z'_j\,, \qquad (48)$$

*) Мы пока оставляемъ въ сторонѣ функцію w_0.

если условимся считать

$$Z'_0 = -\frac{Z_1}{K}, \quad Z'_1 = 0.$$

Положимъ

$$S_j = \Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right).$$

Легко видѣть, что S_j удовлетворяетъ уравненію Лапласа

$$\Delta S_j = 0, \tag{49}$$

а на периферіи сѣченія условію [рав. (48)]

$$\frac{\partial S_j}{\partial n} = P_j, \tag{50}$$

гдѣ

$$P_j = (b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a + Z'_j.$$

Условіями (49) и (50) функція S_j опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной.

Задача возможна, если

$$\int P_j\, ds = 0.$$

Такъ какъ

$$\int [(b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a]\, ds = 0,$$

то должно быть

$$\int Z'_j\, ds = 0.$$

Такимъ образомъ функція Z_1 должна удовлетворять условію

$$\int Z_1\, ds = 0,$$

въ остальномъ же она вполнѣ произвольна.

Существуютъ общіе методы для опредѣленія функцій, удовлетворяющихъ условіямъ вида (49) и (50).

Одна изъ такихъ методъ принадлежитъ C. Neumann'у, другая предложена недавно мною (идея принадлежитъ Robin'у).

*

Обѣ эти методы примѣнимы къ конвекснымъ контурамъ, имѣющимъ опредѣленную касательную и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Опредѣливъ такъ или иначе функцію S_j, получимъ

$$S_j = f_j(x, y),$$

гдѣ $f_j(x, y)$ есть опредѣленная до нѣкоторой произвольной постоянной функція координатъ.

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\Theta_j = f_j(x, y) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right). \qquad (j=0, 1) \qquad \mathbf{(51)}$$

При этомъ условіе (48) удовлетворено, а уравненіе

$$\varDelta \Theta_j = 0$$

является простымъ слѣдствіемъ двухъ послѣднихъ изъ уравненій (46) и уравненія (51).

Задача сведена къ опредѣленію функцій u_j, $v_j (j = 0, 1)$ при помощи уравненій

$$\begin{aligned} \varDelta u_j + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) &= a_j y + b_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial x}, \\ \varDelta v_j + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) &= - a_j x + c_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial y} \end{aligned} \qquad \mathbf{(52)}$$

и условій (47) и (47_1) на периферіи.

Опредѣливъ при помощи этихъ уравненій функціи u_j и v_j, найдемъ и Θ_j при помощи (51).

10. Нетрудно убѣдиться, что уравненія (52) можно представить подъ видомъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{x,j}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y,j}}{\partial y} &= - K\left(a_j y + b_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial X_{y,j}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{y,j}}{\partial y} &= - K\left(- a_j x + c_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Допустимъ, что возможны два рѣшенія уравненій (52) при условіяхъ (47) и (47_1).

Пусть значенія функцій u_j, v_j, Θ_j, соотвѣтствующихъ этимъ рѣшеніямъ, суть

$$u_j^0,\ v_j^0,\ \Theta_j^0 \quad \text{и} \quad u_j',\ v_j',\ \Theta_j'.$$

Положимъ

$$U_j = u_j^0 - u_j', \qquad V_j = v_j^0 - v_j', \qquad \Theta_j = \Theta_j^0 - \Theta_j'.$$

Будемъ разумѣть подъ $X'_{x,j}$, $X'_{y,j}$, $Y'_{y,j}$ выраженія $X_{x,j}$, $X_{y,j}$, $Y_{y,j}$ по замѣнѣ въ послѣднихъ функцій u_j, v_j черезъ U_j, V_j.

Получимъ

$$\frac{\partial X'_{x,j}}{\partial x} + \frac{\partial X'_{y,j}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X'_{y,j}}{\partial x} + \frac{\partial Y'_{y,j}}{\partial y} = 0. \tag{53}$$

На периферіи сѣченія будемъ имѣть

$$\begin{aligned} X'_{x,j}\cos a + X'_{y,j}\sin a = 0, \\ X'_{y,j}\cos a + Y'_{y,j}\sin a = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Совершимъ надъ уравненіями (53) ту же операцію, что и надъ уравненіями (40) въ §-ѣ 8-мъ.

Получимъ [при помощи (54)]

$$\int\left[X'_{x,j}\frac{\partial U_j}{\partial x} + Y'_{y,j}\frac{\partial V_j}{\partial y} + X'_{y,j}\left(\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right)\right] dq = 0. \tag{55}$$

Но

$$X'_{x,j} = -2K\left(k\Theta_j + \frac{\partial U_j}{\partial x}\right), \quad Y'_{y,j} = -2K\left(k\Theta_j + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right),$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right), \quad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}.$$

Эти равенства, вмѣстѣ съ (55), приводятъ къ заключенію, что

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_j}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x} = 0,$$

т. е.

$$U_j = A_j y + B_j, \qquad V_j = -A_j x + C_j, \qquad (j=0,1)$$

гдѣ A_j, B_j, C_j суть произвольныя постоянныя.

Если мы воспользуемся еще условіями (13) §-а 4-аго, то получимъ

$$A_0 = B_0 = C_0 = 0.$$

Слѣдовательно, уравненія (52) вмѣстѣ съ поверхностными условіями (47) и (47_1) (при $j=0$) и условіями (13) опредѣляютъ функціи u_0 и v_0 вполнѣ и единственнымъ образомъ, Функціи же u_1 и v_1 опредѣляются вполнѣ до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій

$$A_1 y + B_1\,, \qquad -A_1 x + C_1\,.$$

11. Пусть u_j^0 и v_j^0 суть какія либо частныя рѣшенія уравненій (52). Положивъ

$$u_j = u_j^0 + U_j\,, \qquad v_j = v_j^0 + V_j\,,$$

сведемъ задачу къ опредѣленію функцій U_j и V_j при помощи уравненій

$$\Delta U_j + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) = 0\,, \quad \Delta V_j + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) = 0 \qquad \textbf{(56)}$$

при поверхностныхъ условіяхъ типа (47) и (47_1), только въ правыхъ частяхъ вмѣсто функцій X_j' и Y_j' будутъ стоять нѣкоторыя другія, выраженія которыхъ мы не будемъ выписывать, а въ лѣвыхъ подъ функціей Θ_j нужно будетъ разумѣть выраженіе вида

$$\Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\,.$$

Въ уравненіяхъ (52)

$$\mu = 2k + 1\,.$$

Положивъ

$$\frac{1}{1+k} = 1 - \lambda\,,$$

приведемъ уравненія (56) къ виду

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + (1+\lambda)\frac{\partial^2 V_j}{\partial x \partial y} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} = 0\,, \\ 2\frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2} + (1+\lambda)\frac{\partial^2 U_j}{\partial x \partial y} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (j=0,1)$$

Эти уравненія по виду тождественны съ уравненіями равновѣсія упругой пластинки въ задачѣ Clebsch'а *).

---

*) См. Clebsch. „Theorie d. Elasticität". Leipzig, 1862, s. 166 etc. Постоянная λ въ данномъ случаѣ не равна постоянной μ въ задачѣ Clebsch'а, а именно

$$\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}\,.$$

Опредѣленіе функцій U_j и V_j, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ при условіяхъ типа (47) и (47_1), для частнаго случая прямого кругового цилиндра произведено мною въ статьѣ: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ“, напечатанной въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общества“ за 1891 годъ.

Повторять относящіяся сюда изслѣдованія нѣтъ надобности.

12. Окончательное рѣшеніе задачи, поставленной нами въ §-ѣ 8-омъ, приводится къ опредѣленію функціи w_0.

Для этого служитъ уравненіе (30), которое легко приводится къ слѣдующему виду

$$\Delta w_0 = f_1(x, y) - \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \psi(x, y), \tag{57}$$

гдѣ $\psi(x, y)$ есть, очевидно, извѣстная функція координатъ (f_1, u_1 и v_1 извѣстны).

На периферіи нормальнаго сѣченія функція w_0 должна удовлетворять условію (35_0), которое при помощи равенствъ (32) преобразуется къ виду

$$\frac{\partial W_0}{\partial n} = -(u_1 \cos a + v_1 \sin a) - \frac{Z_0}{K} = \varphi(x, y), \tag{58}$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ есть извѣстная функція координатъ точекъ периферіи.

Задача возможна, если

$$\int \psi(x, y)\, dq + \int \varphi(x, y)\, ds = 0.$$

Этому условію можно удовлетворить, подобравъ соотвѣтствующимъ образомъ добавочную произвольную постоянную къ функціи $f_1(x, y)$.

Условіями (57) и (58) функція w_0 опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной.

Послѣдняя опредѣлится изъ условія [услов. (13)]

$$w_0 = 0 \qquad \text{при } x = y = 0.$$

Опредѣленіе функціи w_0 легко приводится къ рѣшенію извѣстной задачи C. Neumann'a.

Задачу, поставленную въ началѣ 8-ого §-а, можно считать разрѣшенной въ самомъ общемъ видѣ.

13. *Въ частности можемъ положить*

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0.$$

Получимъ рѣшеніе задачи о равновѣсіи упругаго изотропнаго цилиндра при условіи, что на его внутреннія массы не дѣйствуетъ силъ, а къ боковой поверхности приложены произвольно заданныя силы, одинаково къ периферіи любого изъ нормальныхъ сѣченій цилиндра, независимо отъ разстоянія этого сѣченія отъ основанія цилиндра.

Положивъ, наконецъ, еще

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0\,,$$

получимъ самое общее рѣшеніе уравненій равновѣсія при условіи, что на боковую поверхность не дѣйствуетъ силъ.

Это рѣшеніе является обобщеніемъ извѣстнаго рѣшенія С. Венана.

Послѣднее получится изъ приведеннаго нами, если ввести еще добавочное условіе, что моментъ и векторъ всѣхъ упругихъ силъ имѣютъ одну и ту же величину и направленіе въ каждомъ изъ нормальныхъ сѣченій цилиндра, независимо отъ разстоянія этого сѣченія отъ основанія цилиндра.

Это предложеніе является простымъ слѣдствіемъ общей теоремы, доказанной мною въ вышеупомянутой статьѣ: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ“ въ 1891 году.

14. Укажемъ теперь одно *частное рѣшеніе уравненій (28), (28$_1$), и (29), которое содержитъ въ себѣ, какъ частные случаи, и рѣшенія С. Венана и Клебша.*

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, полагая

$$\Delta u_j + m_j \frac{\partial \Theta_j}{dx} = A_j\,,$$

$$\Delta v_j + m_j \frac{\partial \Theta_j}{dy} = B_j\,, \qquad (j=0,1) \qquad \textbf{(59)}$$

$$\Theta_j = n_j\left(\frac{\partial u_j}{dx} + \frac{\partial v_j}{dy}\right) + A_j x + B_j y + C_j\,,$$

гдѣ A_j, B_j, C_j, m_j и n_j произвольныя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, прямымъ слѣдствіемъ уравненій (59) будутъ слѣдующія

$$\Delta\left(\frac{\partial u_j}{dx} + \frac{\partial v_j}{dy}\right) + m_j \Delta\Theta_j = 0\,,$$

$$n_j \Delta\left(\frac{\partial u_j}{dx} + \frac{\partial v_j}{dy}\right) - \Delta\Theta_j = 0\,.$$

Если только постоянныя m_j и n_j таковы, что

$$1 + m_j n_j \gtrless 0,$$

то необходимо

$$\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) = 0, \qquad \varDelta\Theta_j = 0. \qquad {\scriptstyle (j=0,1)}$$

Уравненія (28), (28_1) и (29) оказываются прямыми слѣдствіями уравненій (59).

Уравненіе (30) преобразуется въ слѣдующее

$$\varDelta w_0 = [1 - n_1(1+\mu)]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - (1+\mu)(A_1 x + B_1 y + C_1). \quad \mathbf{(60)}$$

Первыя два изъ уравненій (59) можно представить подъ видомъ

$$\begin{aligned} (1 + m_j n_j)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + m_j n_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} &= (1 - m_j) A_j, \\ & \qquad {\scriptstyle (j=0,1)} \qquad \mathbf{(61)} \\ (1 + m_j n_j)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + m_j n_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} &= (1 - m_j) B_j. \end{aligned}$$

Разумѣя теперь подъ u_j, v_j функціи, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, подъ w_0 функцію, удовлетворяющую уравненію (60), получаемъ рѣшеніе уравненій равновѣсія подъ видомъ

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z u_1 + \frac{z^2}{2}\left[n_0(m_0 - \mu)\frac{\partial P_0}{\partial x} + (m_0 - \mu - 1) A_0\right] + \\ &\quad + \frac{z^3}{6}\left[n_1(m_1 - \mu)\frac{\partial P_1}{\partial x} + (m_1 - \mu - 1) A_1\right], \\ v &= v_0 + z v_1 + \frac{z^2}{2}\left[n_0(m_0 - \mu)\frac{\partial P_0}{\partial y} + (m_0 - \mu - 1) B_0\right] + \qquad \mathbf{(62)} \\ &\quad + \frac{z^3}{6}\left[n_1(m_1 - \mu)\frac{\partial P_1}{\partial y} + (m_1 - \mu - 1) B_1\right], \\ w &= w_0 + z[(n_0 - 1) P_0 + A_0 x + B_0 y + C_0] + \\ &\quad + \frac{z^2}{2}[(n_1 - 1) P_1 + A_1 x + B_1 y + C_1], \\ \Theta &= n_0 P_0 + A_0 x + B_0 y + C_0 + z[n_1 P_1 + A_1 x + B_1 y + C_1]. \end{aligned}$$

Коэффиціенты при степеняхъ z въ выраженіяхъ проекцій напряженій на оси координатъ будутъ опредѣляться слѣдующими формулами

$$X_{x,j} = -2K\left[\frac{\mu-1}{2}(n_j P_j + A_j x + B_j y + C_j) + \frac{\partial u_j}{\partial x}\right],$$

$$Y_{y,j} = -2K\left[\frac{\mu-1}{2}(n_j P_j + A_j x + B_j y + C_j) + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \qquad (j=0,1)$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right),$$

$$X_{x,i} = -2Kn_j(\mu - m_j)\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}, \quad Y_{y,i} = -2Kn_j(\mu - m_j)\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2}, \qquad (i=2,3$$

$$X_{y,i} = 0,$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right), \qquad \mathbf{(63)}$$

$$Z_{x,k} = -K\left[[(1-\mu)n_j + m_j n_j - 1]\frac{\partial P_j}{\partial x} + (m_j - \mu)A_j\right],$$

$$(k=1,2;\ j=0,1)$$

$$Z_{y,k} = -K\left[[(1-\mu)n_j + m_j n_j - 1]\frac{\partial P_j}{\partial y} + (m_j - \mu)B_j\right],$$

$$Z_{x,3} = 0, \quad Z_{y,3} = 0,$$

$$Z_{z,j} = -K\Big[[n_j(\mu+1) - 2]P_j + (\mu+1)(A_j x + B_j y + C_j)\Big], \qquad (j=0,1)$$

$$Z_{z,i} = 0. \qquad (i=2,3)$$

Въ уравненіяхъ (62) и (63)

$$P_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}.$$

Функціи u_j и v_j можно опредѣлить при помощи уравненій (61) при условіяхъ на поверхности

$$X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a = X_j,$$

$$X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a = Y_j, \qquad (j=0,1)$$

гдѣ X_j и Y_j суть заданныя функціи координатъ x и y.

Для опредѣленія функціи w_0, удовлетворяющей уравненію (60), можно поставить на поверхности цилиндра условіе вида

$$Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a = Z_0\,,$$

разумѣя подъ Z_0 заданную функцію координатъ.

Вообще, какъ не трудно видѣть, *получается рѣшеніе задачи о равновѣсіи цилиндра подъ дѣйствіемъ слѣдующихъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности*

$$P = X_0 + zX_1 + z^2X_2 + z^3X_3\,,$$

$$Q = Y_0 + zY_1 + z^2Y_2 + z^3Y_3\,,$$

$$R = Z_0 + zZ_1 + z^2Z_2\,,$$

гдѣ X_k, Y_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, Z_i $(i = 0, 1, 2)$ *суть функціи координатъ* x *и* y.

Пять изъ этихъ одиннадцати функцій можно задать произвольно, остальныя опредѣлятся по этимъ пяти.

15. До сихъ поръ мы предполагали постоянныя m_j и n_j какими угодно, подчиненными лишь одному условію

$$1 + m_jn_j \gtrless 0\,, \tag{64}$$

а постоянныя A_j, B_j, C_j совершенно произвольными.

Разсмотримъ теперь два частныхъ случая:

1) Постоянныя A_j, B_j, C_j произвольны, а

$$m_0 = m_1 = \mu\,, \qquad n_1 = n_0 = 1\,, \tag{65}$$

2) Постоянныя A_j, B_j, C_j равны нулю, а

$$m_0 = m_1 = \frac{3\mu - 1}{2}\,, \quad n_0 = n_1 = \frac{2}{\mu + 1}. \tag{66}$$

Эти значенія постоянныхъ m_j, n_j возможны, такъ какъ условіе (64) навѣрно выполняется въ обоихъ случаяхъ.

Предположимъ, что m_j и n_j удовлетворяютъ условіямъ (65).

Уравненія (60) и (61) примутъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} &(1+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x\partial y} = (1-\mu)A_j\,, \\ &\hspace{18em}(j=0,1) \\ &(1+\mu)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x\partial y} = (1-\mu)B_j\,, \\ &\Delta w_0 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (1+\mu)(A_1x + B_1y + C_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Уравненія (62) дадутъ слѣдующія выраженія для проекцій на оси координатъ перемѣщеній точекъ упругаго тѣла

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + zu_1 - \frac{z^2}{2} A_0 - \frac{z^3}{6} A_1 , \\
v &= v_0 + zv_1 - \frac{z^2}{2} B_0 - \frac{z^3}{6} B_1 , \\
w &= w_0 + z(A_0 x + B_0 y + C_0) + \frac{z^2}{2}(A_1 x + B_1 y + C_1) .
\end{aligned} \tag{68}
$$

Наконецъ, уравненія (63) приведутся къ слѣдующимъ

$$
\begin{aligned}
X_{x,j} &= - K\left[(\mu+1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu-1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \\
Y_{y,j} &= - K\left[(\mu-1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu+1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \\
Z_{z,j} &= - K[(\mu-1)P_j + (\mu+1)(A_j x + B_j y + C_j)], \\
X_{y,j} &= - K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right), \\
&\qquad (j=0,1) \\
Z_{x,0} &= - K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = - K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right), \\
X_{x,i} &= 0, \quad Y_{y,i} = 0, \quad X_{y,i} = 0, \quad Z_{z,i} = 0, \qquad (i=2,3) \\
Z_{x,k} &= 0, \quad Z_{y,k} = 0. \qquad (k=1,2,3)
\end{aligned} \tag{69}
$$

Задача будетъ рѣшена, коль скоро будутъ извѣстны функціи u_j, v_j $(j=0, 1)$ и w_0.

Эти функціи должны удовлетворять уравненіямъ (67), на поверхности же цилиндра (боковой) можно поставить слѣдующія условія

$$
\begin{aligned}
X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a &= X_j , \\
X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a &= Y_j , \\
Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a &= Z_0 ,
\end{aligned} \tag{70}
$$

гдѣ подъ $X_{x,j}, \ldots, Z_{y,0}$ разумѣются выраженія (69), а подъ X_j, Y_j $(j=0, 1)$, Z_0 заданныя функціи координатъ x, y.

Уравненія (67) вмѣстѣ съ условіями (70) опредѣляютъ функціи u_j и v_j до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій типа

$$Ay + B, \quad -Ax + C, \tag{71}$$

а функцію w_0 до произвольной постоянной.

Въ разсматриваемомъ случаѣ получается рѣшеніе аналогичное тому, которое мы указывали въ §-ахъ отъ 8-ого до 14-аго.

16. Предположимъ, что

$$X_j = 0, \qquad Y_j = 0.$$

Опредѣленіе функцій u_j, v_j приводится къ интегрированію уравненій

$$\begin{aligned} \Delta u_j + \mu \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= A_j, \\ \Delta v_j + \mu \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= B_j, \end{aligned} \tag{72}$$

гдѣ

$$\Theta_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + A_j x + B_j y + C_j,$$

при слѣдующихъ условіяхъ на поверхности

$$\begin{aligned} &\left[(\mu+1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu-1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right]\cos a + \\ &\qquad + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right]\sin a = 0, \\ &\qquad \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right]\cos a + \\ &+ \left[(\mu-1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu+1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right]\sin a = 0. \end{aligned} \tag{73}$$

Такъ какъ условіями (72) и (73) функціи u_j, v_j опредѣляются вполнѣ до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій типа (71), то, найдя какое бы то ни было рѣшеніе уравненій (72), удовлетворяющее въ тоже время и условіямъ (73), мы получимъ самое общее рѣшеніе, прибавивъ къ найденному только что упомянутыя линейныя функціи вида (71).

Положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = \frac{1-\mu}{\mu}(A_j x + B_j y + D_j), \tag{74}$$

гдѣ D_j есть нѣкоторая постоянная.

Уравненія (72) приведутся къ слѣдующимъ

$$\Delta u_j = 0\,, \quad \Delta v_j = 0. \tag{75}$$

При помощи уравненій (74) и (75) находимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial x} = \frac{1-\mu}{\mu}(B_j x - A_j y + E_j)\,, \tag{74_1}$$

гдѣ E_j произвольная постоянная.

Принявъ въ разсчетъ это уравненіе и (74), приводимъ равенства (73) къ слѣдующему виду

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x} + \lambda(A_j x + B_j y + F_j)\right]\cos a + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \lambda(B_j x - A_j y + E_j)\right]\sin a = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v_j}{\partial x} - \lambda(B_j x - A_j y + E_j)\right]\cos a + \left[\frac{\partial v_j}{\partial y} + \lambda(A_j x + B_j y + F_j)\right]\sin a = 0, \tag{76}$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{\mu - 1}{2\mu}\,, \quad F_j = \mu C_j - (\mu - 1) D_j.$$

Положимъ

$$\varphi_j = \lambda\left[A_j\frac{x^2-y^2}{2} + B_j xy + F_j x + E_j y\right],$$

$$\psi_j = \lambda\left[A_j xy - B_j\frac{x^2-y^2}{2} - E_j x + F_j y\right].$$

Можемъ писать [рав. (76)]

$$\frac{\partial(u_j+\varphi_j)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial(u_j+\varphi_j)}{\partial y}\sin a = 0,$$

$$\frac{\partial(v_j+\psi_j)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial(v_j+\psi_j)}{\partial y}\sin a = 0. \tag{77}$$

Такъ какъ

$$\Delta(u_j+\varphi_j) = 0\,, \qquad \Delta(v_j+\psi_j) = 0\,,$$

то

$$u_j = -\lambda\left[A_j\frac{x^2-y^2}{2} + B_j xy + F_j x + E_j y\right] + M_j\,,$$

$$v_j = -\lambda\left[A_j xy - B_j\frac{x^2-y^2}{2} - E_j x + F_j y\right] + N_j.$$

Уравненія (74) и (74_1) будутъ удовлетворены, если положимъ

$$C_j = D_j.$$

Самое общее рѣшеніе получимъ, прибавивъ къ найденнымъ функціямъ u_j и v_j линейныя функціи типа (71).

Остается только опредѣлить функцію w_0 при помощи послѣдняго изъ уравненій (67) и послѣдняго изъ условій (70).

Очевидно, *что полученное такимъ путемъ рѣшеніе совпадетъ съ рѣшеніемъ С. Венана, если положить еще*

$$Z_0 = 0.$$

17. Разсмотримъ второй случай

$$A_j = B_j = C_j = 0, \qquad m_0 = m_1 = \frac{3\mu - 1}{2}, \qquad n_0 = n_1 = \frac{2}{\mu + 1}.$$

Уравненія (61) обратятся въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} 4\mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + (\mu + 1) \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + (3\mu - 1) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} = 0, \\ 4\mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + (\mu + 1) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + (3\mu - 1) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (j=0,1) \qquad (78)$$

а равенства (63) въ слѣдующія

$$X_{x,j} = -\frac{2K}{\mu + 1}\left[2\mu \frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu - 1)\frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \quad X_{x,i} = -K\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}, \qquad (j=0,1;\ i=2,3)$$

$$Y_{y,j} = -\frac{2K}{\mu + 1}\left[(\mu - 1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \quad Y_{y,i} = -K\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2},$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right), \quad X_{y,i} = 0,$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right),$$

$$Z_{x,k} = 0, \quad Z_{y,k} = 0, \qquad (k=1,2,3)$$

$$Z_{z,s} = 0. \qquad (s=0,1,2,3)$$

Проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность цилиндра представятся подъ видомъ

$$P = X_0 + zX_1 + z^2X_2 + z^3X_3\,,$$

$$Q = Y_0 + zY + z^2Y_2 + z^3Y_3\,,$$

$$R = Z_0\,,$$

гдѣ X_s, $Y_s (s = 0, 1, 2, 3)$, Z_0 суть функціи x и y.

Изъ нихъ пять, напр., X_0, Y_0, X_1, Y_1 и Z_0, какъ упоминалось выше, могутъ быть заданы произвольно, остальныя опредѣлятся сами собой.

Предположимъ, что

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1 = 0\,, \qquad \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1 = 0\,. \tag{79}$$

Въ такомъ случаѣ

$$Z_{x,0} = 0\,, \qquad Z_{y,0} = 0\,.$$

Уравненіе (60) приметъ видъ

$$\varDelta w_0 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0$$

и является прямымъ слѣдствіемъ уравненій (79).

Уравненія (78) при $j = 1$ приводятся, при помощи (79), къ двумъ слѣдующимъ

$$\frac{\partial \varDelta w_0}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial \varDelta w_0}{\partial y} = 0\,,$$

или

$$\varDelta w_0 = M\,,$$

гдѣ M есть произвольная постоянная.

Положивъ

$$w_0 = f + \frac{M}{4}(x^2 + y^2)\,,$$

получимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія f

$$\varDelta f = 0\,.$$

Функціи u_1 и v_1 выразятся черезъ f слѣдующимъ образомъ

$$u_1 = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{M}{2}x\,, \qquad v_1 = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{M}{2}y\,.$$

Послѣднее изъ уравненій (59) даетъ

$$\frac{\mu+1}{2}\,\Theta_1=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=-M.$$

Принявъ во вниманіе все сказанное, получаемъ [изъ (62)]

$$u=u_0-z\left(\frac{M}{2}\,x+\frac{\partial f}{\partial x}\right)+z^2\,\frac{\mu-1}{\mu+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),$$

$$v=v_0-z\left(\frac{M}{2}\,y+\frac{\partial f}{\partial y}\right)+z^2\,\frac{\mu-1}{\mu+1}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),$$

$$w=f+\frac{M}{2}(x^2+y^2)+z\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-\frac{z^2}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\,M.$$

Здѣсь f есть функція, удовлетворяющая уравненію Лапласа, а u_0, v_0 удовлетворяютъ уравненіямъ вида

$$4\mu\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+(\mu+1)\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+(3\mu-1)\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}=0\,,$$

$$4\mu\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+(\mu+1)\,\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+(3\mu-1)\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}=0\,.$$

Полученное такимъ образомъ рѣшеніе очевидно совпадаетъ съ извѣстнымъ рѣшеніемъ Clebsch'a [см. Clebsch. „Theorie d. Elasticität“, Leipzig, 1862, s. 152, форм. (130) и (131)].

18. Въ заключеніе замѣтимъ, что, пользуясь вышеприведенными изслѣдованіями, мы могли бы рѣшить задачу о равновѣсіи цилиндра при гипотезѣ, что напряженія, дѣйствующія въ каждой точкѣ тѣла на двѣ взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ xz и yz, лежатъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ только что упомянутымъ (обобщеніе извѣстной гипотезы С. Венана), а также и при нѣкоторыхъ другихъ предположеніяхъ относительно распредѣленія напряженій внутри цилиндра.

Я позволю себѣ ограничиться этимъ замѣчаніемъ, не приводя относящихся сюда изслѣдованій.

Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла.

Г. В. Колосова.

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла приводятся, какъ извѣстно, къ виду:

$$Mx'' = V_x, \quad My'' = V_y, \quad Mz'' = V_z,$$

$$\left.\begin{aligned} Ap' &= (B - C)\,qr + Л_\xi, \\ Bq' &= (C - A)\,rp + Л_\eta, \\ Cr' &= (A - B)\,pq + Л_\zeta, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ x, y, z координаты его центра инерціи C *) по отношенію къ 3-мъ неподвижнымъ въ пространствѣ осямъ OX, OY, OZ, V_x, V_y, V_z проэкціи на эти оси главнаго вектора силъ и реакцій связей, приложенныхъ къ тѣлу, p, q, r проэкціи угловой скорости его на главныя оси инерціи Ξ, Y, Z въ C, а $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ проэкціи на послѣднія главнаго момента силъ и реакцій.

Вообразивъ въ C перпендикуляръ Z къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида нашего тѣла въ этой точкѣ, сдѣлаемъ слѣдующее предположеніе на счетъ силъ и реакцій связей: главный моментъ ихъ вокругъ Z остается все время движенія равнымъ нулю. Если α, β, γ будутъ косинусы угловъ, образованныхъ этимъ перпендикуляромъ съ осями инерціи, то

$$\beta = 0, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1, \quad A\alpha^2 (B - C) = C\gamma^2 (A - B) \text{ **)}, \qquad (2)$$

---

*) Дифференціальныя уравненія (1) будутъ имѣть тотъ же видъ, если C не центръ инерціи, а какая угодно точка тѣла, но неподвижная. Все нижеслѣдующее распространимо и на этотъ случай.

**) Мы предполагаемъ A, B, C различными другъ отъ друга и

$$A > B > C.$$

откуда между прочимъ:

$$A\alpha^2 + C\gamma^2 = \frac{AC}{B}\,, \tag{3}$$

а предположеніе на счетъ силъ и реакцій будетъ:

$$Л_\xi \alpha + Л_\zeta \gamma = 0\,. \tag{4}$$

Дифференціальныя уравненія (1) допускаютъ въ этихъ предположеніяхъ частное рѣшеніе, соотвѣтствующее уравненію

$$A\alpha p + C\gamma r = 0\,, \tag{5}$$

выражающему, что главный моментъ количествъ движенія лежитъ все время въ плоскости круговыхъ сѣченій гираціоннаго эллипсоида. Въ настоящей замѣткѣ мы изслѣдуемъ это частное рѣшеніе и для этого вмѣсто главныхъ осей инерціи Ξ, Y, Z мы примемъ за оси неизмѣнно связанныя съ тѣломъ оси X, Y, Z, получающіяся изъ Ξ, Y, Z, если мы повернемъ послѣднія около оси Y до совпаденія Z съ Z. Будемъ имѣть слѣдующія формулы преобразованія:

$$P = \gamma p - \alpha r\,, \quad Q = q\,, \quad R = \alpha p + \gamma r \text{ *)} \tag{6}$$

и наоборотъ:

$$p = \gamma P + \alpha R \qquad \text{и т. д.}. \tag{7}$$

Такія же формулы мы получимъ для преобразованія $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ въ моменты вокругъ осей X, Y, Z: $Л_X$, $Л_Y$, $Л_Z$, напримѣръ изъ (7), замѣчая, что $Л_Z = 0$, получимъ:

$$Л_\xi = \gamma Л_X\,. \tag{8}$$

Дифференцируя (6) и пользуясь (1), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \gamma\frac{dp}{dt} - \alpha\frac{dr}{dt} = q\left(\frac{\gamma}{A}(B-C)r - \frac{\alpha}{C}(A-B)p\right) + \\ &\qquad + \frac{C\gamma Л_\xi - A\alpha Л_\zeta}{AC} \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}rp + \frac{Л_\eta}{B}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

*) P, Q, R проэкціи угловой скорости на новыя оси.

Изъ формулъ (6) при помощи (5) и условія (3), получимъ:

$$P=\frac{Ap}{B\gamma},$$

$$R=\frac{\gamma(A-C)r}{A},$$

$$\frac{\gamma}{A}(B-C)r-\frac{\alpha}{C}(A-B)p=\left(\frac{\gamma}{A}(B-C)+\frac{\alpha}{C}(A-B)\frac{C\gamma}{A\alpha}\right)r=R,$$

$$\frac{C-A}{B}rp=-RP.$$

Точно также на основаніи (4), (3) и (8):

$$\frac{C\gamma Л_{\xi}-A\alpha Л_{\zeta}}{AC}=\left(\frac{\gamma}{A}+\frac{\alpha^2}{C\gamma}\right)Л_{\xi}=\frac{A\alpha^2+C\gamma^2}{AC\gamma}Л_{\xi}=\frac{Л_{\xi}}{B\gamma}=\frac{Л_X}{B},$$

и уравненія (9) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP}{dt}&=RQ+\frac{Л_X}{B},\\ \frac{dQ}{dt}&=-RP+\frac{Л_Y}{B}.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Эти 2 уравненія вмѣстѣ съ (5), которое при новыхъ осяхъ приметъ видъ:

$$R-aP=0,\ \left(\text{гдѣ }\ a=\frac{B(C-A)\alpha\gamma}{AC}\right),\qquad(11)$$

мы примемъ вмѣсто уравненій системы (1), и тогда эта система выразитъ слѣдующую особенность нашей задачи: при рѣшеніи ея, данное матерьяльное твердое тѣло можно замѣнить нематерьяльнымъ одинаковаго съ нимъ вида, къ разнымъ точкамъ котораго приложены силы совершенно также, какъ къ нашему тѣлу, и движенія котораго стѣснены тѣми же связями, какъ и нашего, а по оси Z новаго тѣла расположена масса M въ видѣ безконечно тонкаго стержня такъ, что центръ инерціи ея въ C, а моментъ инерціи относительно C равенъ B, если только къ полученнымъ въ этихъ предположеніяхъ дифференціальнымъ уравненіямъ прибавить уравненіе (11).

Для дальнѣйшаго интегрированія мы предположимъ, что относительное расположеніе осей OX, OY, OZ и $O\mathrm{X}$, $O\mathrm{Y}$, $O\mathrm{Z}$ задано 3-мя Эйлеровыми углами *ж*, *ф*, *э* *), такъ что

*) См. курсъ Аналит. Механики пр. Д. К. Бобылева; наши P, Q, R соотвѣтствуютъ p, q, r Д. К.

$$P = -ж' \sin ф \cos э + ф' \sin э, \qquad R = ж' \cos ф + э', \tag{12}$$

и сдѣлаемъ еще слѣдующія предположенія на счетъ силъ и реакцій: 1) силы имѣютъ потенціалъ; 2) не только главный моментъ силъ и реакцій вокругъ оси Z равенъ 0, но и отдѣльно: моментъ силъ $= 0$ и моменты каждой изъ реакцій $= 0$. Если потенціалъ силъ будетъ U, а уравненія связей: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_p = 0$, гдѣ U, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$ нѣкоторыя функціи отъ x, y, z, $ф$, $ж$, $э$, то послѣднее требованіе равносильно требованію, чтобы уголъ $э$ не входилъ въ U, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Въ этихъ предположеніяхъ уголъ $э$ въ дѣйствительности войдетъ только въ уравненіе (11), а въ ураненія (10) войдетъ только видимымъ образомъ и немедленно изчезнетъ, если вмѣсто проэкцій на оси X и Y мы введемъ проэкціи на направленіе CN, перпендикулярное къ плоскости, опредѣляемой направленіями CZ, CZ, и на перпендикулярное къ CN пересѣченіе плоскостей XY и ZZ. Уравненіе (11) и система (10) могутъ быть тогда интегрированы отдѣльно. Уравненіе (11) по введеніи въ него выраженій (12) приметъ видъ:

$$ж' \cos ф + э' - a(ф' \sin э - ж' \sin ф \cos э) = 0.$$

Введя въ него новую перемѣнную,

$$\tau = e^{э\sqrt{-1}} = \cos э + \sqrt{-1} \sin э,$$

приведемъ его къ виду:

$$\frac{d\tau}{dt} = l\tau^2 + m\tau + n, \tag{13}$$

гдѣ

$$l = \frac{a}{2}(ф' - \sqrt{-1} \sin ф\, ж'),$$

$$m = -\sqrt{-1} \cos ф\, ж',$$

$$n = -\frac{a}{2}(ф' + \sqrt{-1} \sin ф\, ж').$$

Уравненіе (13), какъ извѣстно, подстановкою $\tau = -\dfrac{1}{l}\dfrac{\omega'}{\omega}$ сводится къ линейному уравненію 2-го порядка въ ω.

Примѣры:

1) Движеніе по инерціи $Л_\xi = Л_\eta = Л_\zeta = 0$.

Замѣнивъ данное тѣло стержнемъ, сведемъ задачу къ вопросу о движеніи по инерціи безконечно тонкаго стержня. Это есть равномѣрное вращеніе около оси, сохраняющей постоянное направленіе въ пространствѣ, такъ что при надлежащемъ выборѣ осей OX, OY, OZ можно положить:

$$ж = 0\,, \qquad ф = \omega t.$$

Уравненіе (11) будетъ $\vartheta' = a\omega \sin\vartheta$, откуда

$$\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} = e^{a\omega t + \varepsilon}\,,$$

гдѣ ε постоянное произвольное.

2) Вращеніе твердаго тѣла (тяжелаго) вокругъ неподвижной точки на оси Z (случай Гесса-Некрасова). Замѣнивъ тѣло стержнемъ, найдемъ, что движеніе центра инерціи совершается по законамъ коническаго маятника; въ уравненіи (13) коэффиціенты выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ (см. статью пр. П. А. Некрасова. Мат. Сб., XVIII).

3) Движеніе твердаго тяжелаго тѣла, опирающагося остріемъ (на оси Z) на гладкую плоскость (волчекъ Гесса) *). Замѣнивъ тѣло стержнемъ, приведемъ задачу къ обращенію ультраэллиптическаго интеграла, а въ уравненіи (13) коэффиціенты будутъ зависѣть отъ функцій, получающихся черезъ такое обращеніе.

Въ заключеніе замѣтимъ, что наше тѣло можетъ составлять часть цѣлой системы тѣлъ и, если взаимодѣйствія его съ другими тѣлами подчинены условіямъ, требуемымъ нашей задачей для реакцій связей,— все сказанное нами распространимо и на этотъ случай. Какъ примѣръ, разсмотримъ слѣдующую задачу:

4) Катаніе сферы съ гироскопомъ Гесса внутри по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Эта задача одинакова съ задачей Д. К. Бобылева о сферѣ съ гироскопомъ внутри, только вмѣсто оси симметріи съ однимъ изъ діаметровъ шара неизмѣнно связанъ перпендикуляръ Z. Замѣняя данное тѣло стержнемъ и предполагая вмѣстѣ съ проф. Н. Е. Жуковскимъ, что въ экваторіальной плоскости (перпендикулярной къ Z) имѣется кольцо **), разность моментовъ инерціи котораго около оси Z и экваторіальной оси $= B$, мы сведемъ нашу задачу къ задачѣ о катаніи однородной сферы по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Направленіе и величина угловой скорости сферы остаются здѣсь, какъ извѣстно, неизмѣнными, и надлежащимъ образомъ выбравъ оси OX, OY, OZ, можно положить:

$$ж = \omega t\,, \qquad ф = \alpha.$$

---

*) Распространимость случая Гесса на волчекъ Гесса замѣчена пр. А. М. Ляпуновымъ и почти одновременно мною.

**) При отсутствіи кольца задача приводитъ къ эллиптическимъ функціямъ подобно задачѣ Д. К. Бобылева.

Уравненіе (11) будетъ:

$$\omega \cos\alpha + \vartheta' + a\omega \sin\alpha \cos\vartheta = 0\,,$$

откуда

$$\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{a\sin\alpha + \cos\alpha}{a\sin\alpha - \cos\alpha}\;\frac{e^{(\omega t+\varepsilon)\sqrt{a^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}+1}{e^{(\omega t+\varepsilon)\sqrt{a^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}-1}}\,,$$

гдѣ ε постоянное произвольное.

О законѣ взаимности простыхъ чиселъ.

В. П. Алексѣевскаго.

Между доказательствами закона взаимности простыхъ чиселъ заслуживаютъ большого вниманія доказательства Эйзенштейна, Шеринга и Кронекера; не смотря на различіе ихъ по формѣ, можно установить между ними преемственную связь. Къ этому же кругу идей относится и предлагаемое доказательство, которое мнѣ кажется болѣе простымъ и естественнымъ.

Пусть p и q числа простыя, h — одно изъ чиселъ натуральнаго рода отъ 1 до $\frac{p-1}{2}$, g_h — наиболѣе подходящее цѣлое число къ дроби $\frac{hq}{p}$, такъ что остатокъ r отъ дѣленія hq на p можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ, но абсолютная его величина меньше $\frac{p}{2}$; слѣдовательно

$$-\frac{p}{2} < hq - g_h p < \frac{p}{2},$$

откуда

$$g_h = E\left(\frac{hq}{p} + \frac{1}{2}\right).$$

Наименьшее значеніе g_h можетъ быть нулемъ; наибольше получится, полагая $h = \frac{p-1}{2}$, и изъ тождества

$$\frac{(p-1)q}{2p} + \frac{1}{2} = \frac{q-1}{2} + \frac{2p-q}{2p}$$

видно, что maximum g_h не можетъ быть болѣе $\frac{q-1}{2}$.

Изъ равенства

$$hq = g_h p + r$$

слѣдуетъ, что знакъ остатка r одинаковъ со знакомъ $(hq - g_h p)$, вслѣдствіе чего предыдущее равенство можно представить въ видѣ сравненія

$$hq \equiv \varrho \cdot \operatorname{sgn}(hq - g_h p), \qquad (\text{mod. } p)$$

гдѣ $\varrho = |r|$, а $\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = \pm 1$.

Если въ этомъ сравненіи дадимъ h всѣ значенія отъ 1 до $\frac{p-1}{2}$ и перемножимъ результаты, то, основываясь на извѣстныхъ предложеніяхъ, получимъ:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} (hq - g_h p).$$

Каковъ бы ни былъ знакъ разности

$$hq - g_h p,$$

произведеніе

$$[hq - (g_h - 1)p][hq - (g_h - 2)p] \ldots [hq - p]$$

состоитъ изъ положительныхъ множителей, когда $g_h > 1$, поэтому

$$\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{g_h} (hq - kp),$$

или, переставивъ члены бимоновъ во второй части,

$$\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = (-1)^{g_h} \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{g_h} (kp - hq).$$

Число множителей второй части можно сдѣлать постояннымъ, каково-бы ни было h. Дѣйствительно, maximum $g_h \leqq \frac{q-1}{2}$, и въ произведеніи

$$[(g_h + 1)p - hq] \ldots \left[\frac{q-1}{2} p - hq\right]$$

всѣ множители положительные, поэтому отъ присоединенія ихъ къ предыдущему произведенію знакъ его не нарушится; слѣдовательно, можно написать:

$$\operatorname{sgn}(hq - g_h p) = (-1)^{g_h} \operatorname{sgn} \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} (kp - hq).$$

Не трудно убѣдиться, что формула эта остается справедливой и въ случаяхъ $g_h = 0$ или 1.

Отсюда, на основанiи замѣченнаго выше, находимъ, что

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\Sigma g_h} \prod_{k,h} (kp - hq),$$

$$k = 1, 2 \ldots \frac{q-1}{2}, \quad h = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}.$$

Складывая равенства вида

$$hq = g_h p + r$$

находимъ

$$q \sum h = p \sum g_h + \sum r.$$

Такъ какъ въ числѣ остатковъ существуютъ положительные ϱ' и отрицательные $-\varrho''$, а сумма абсолютныхъ величинъ всѣхъ вычетовъ, какъ извѣстно, равна $\sum h$, то предыдущее равенство можно написать въ видѣ:

$$q \sum h = p \sum g_h + \sum h - 2 \sum \varrho'',$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\sum g_h \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

когда $q > 2$. Поэтому выраженiе для символа Лежандра принимаетъ видъ:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k,h} (kp - hq).$$

Вслѣдствiе этого и

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \operatorname{sgn} \prod_{k,h} (hq - kp).$$

Перемноживъ эти равенства и замѣтивъ, что соотвѣтственныя пары множителей правыхъ частей отличаются знакомъ, а число ихъ $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$, получимъ:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити.

Н. Н. Салтыкова.

1. Вопросъ о разысканіи интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, рѣшается въ этомъ изслѣдованіи по способу А. Н. Коркина, основанному, какъ извѣстно, на его же теоріи интегрированія системъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи *).

2. Назовемъ черезъ X_1, X_2, X_3 проекціи силы на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3, отнесенной къ единицѣ массы гибкой, нерастяжимой нити, плотность которой есть k, натяженіе — T, дуга, отсчитываемая отъ нѣкоторой ея данной точки, — x_0. Полагая

$$T\frac{dx_i}{dx_0}=x_{3+i}, \qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

представимъ дифференціальныя уравненія равновѣсія нити въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{dx_0}{T}=\frac{dx_1}{x_4}=\frac{dx_2}{x_5}=\frac{dx_3}{x_6}=\frac{dx_4}{-kTX_1}=\frac{dx_5}{-kTX_2}=\frac{dx_6}{-kTX_3},$$

гдѣ

$$T=\sqrt{x_4^2+x_5^2+x_5^2}.$$

---

*) А. Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. С.-Пб. 1867.

Изслѣдуемый вопросъ состоитъ въ разысканіи интеграловъ послѣдней системы дифференціальныхъ уравненій, общихъ со всякой другой системой, отличной отъ нея значеніями функцій k, X_1, X_2, X_3. Назовемъ соотвѣтствующія послѣднимъ значенія функцій для всякой другой подобной системы уравненій черезъ k_1, Y_1, Y_2, Y_3. Если уравненіе

$$z(x_0, x_1, \dots x_6) = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная, представляетъ интегралъ, общій обѣимъ указаннымъ системамъ уравненій, то, очевидно, функція z есть частный интегралъ системы двухъ линейныхъ, однородныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными $p_0, p_1, \dots p_6$ функціи z по независимымъ перемѣннымъ $x_0, x_1, \dots x_6$

$$Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_{3+i}\, p_i - kTX_i\, p_{3+i}) = 0,$$

$$Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_{3+i}\, p_i - k_1 TY_i\, p_{3+i}) = 0.$$

Вмѣсто второго уравненія возьмемъ разность обоихъ уравненій

$$S_1 p_4 + S_2 p_5 + S_3 p_6 = 0,$$

гдѣ введены обозначенія

$$S_i = kX_i - k_1 Y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Мы предполагаемъ, что силы, приложенныя къ единицѣ длины нити, въ сравниваемыхъ задачахъ различны. Поэтому одна, по крайней мѣрѣ, изъ функцій S_i отлична отъ нуля. Очевидно, не нарушая общности рѣшенія, мы можемъ положить, что

$$S_1 \lessgtr 0.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія, опредѣляющія искомые интегралы, представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} &Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} x_{3+i}\, p_i + T(U_1 p_5 + U_2 p_6) = 0, \\ &p_4 + V_1 p_5 + V_2 p_6 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

гдѣ мы положили

$$\frac{S_2}{S_1}=V_1\,,\qquad \frac{S_3}{S_1}=V_2\,,$$

$$k(X_1V_1-X_2)=U_1\,,\qquad k(X_1V_2-X_3)=U_2. \tag{2}$$

Всякая задача интегрированія дифференціальныхъ уравненій равновѣсія гибкой, нерастяжимой нити разрѣшается вполнѣ шестью интегралами. Поэтому задачи эти не могутъ имѣть болѣе пяти общихъ интеграловъ. Система уравненій (1), въ зависимости отъ значеній своихъ коэффиціентовъ, можетъ имѣть отъ пяти до одного частныхъ интеграловъ. Соотвѣтственно этому задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити имѣютъ столько же общихъ интеграловъ. Условія существованія опредѣленнаго числа частныхъ интеграловъ системы (1) даютъ уравненія для опредѣленія функцій V и U. Присоединивъ къ послѣднимъ равенства (2), получимъ условія, при которыхъ эти интегралы имѣютъ мѣсто. Дальнѣйшее изложеніе состоитъ въ изслѣдованіи всѣхъ указанныхъ возможныхъ случаевъ. При этомъ мы будемъ предполагать, *что k есть функція дуги x_0, а силы X_1, X_2, X_3 зависятъ отъ дуги и координатъ, такъ что функціи V и U зависятъ только отъ перемѣнныхъ x_0, x_1, x_2, x_3.*

3. Частные интегралы y_4, y_5 второго уравненія (1), гдѣ

$$y_4=x_5-V_1x_4\,,\qquad y_5=x_6-V_2x_4\,, \tag{3}$$

принимаемъ независимыми перемѣнными вмѣсто x_4, x_5, x_6. Обозначимъ въ этомъ предположеніи черезъ q_i, V_{1i}, ... частныя производныя функцій z, V_1, ... по перемѣннымъ значка i. Второе уравненіе (1) утождествляется, а первое принимаетъ видъ

$$\sqrt{ax_4^2+2bx_4+d}\,(A+Bx_4)+C+Dx_4+Ex_4^2=0\,, \tag{4}$$

гдѣ

$$a=1+V_1^2+V_2^2\,,$$

$$b=y_4V_1+y_5V_2\,,$$

$$d=y_4^2+y_5^2\,,$$

$$A=q_0+U_1q_4+U_2q_5\,,$$

$$B=-(V_{10}q_4+V_{20}q_5)\,,$$

$$C=y_4q_2+y_5q_3\,,$$

$$D=q_1+V_1q_2+V_2q_3-(V_{12}y_4+V_{13}y_5)\,q_4-(V_{22}y_4+V_{23}y_5)q_5\,,$$

$$E=-\,[(V_{11}+V_1V_{12}+V_2V_{13})q_4+(V_{21}+V_1V_{22}+V_2V_{23})q_5].$$

По теорiи Коркина уравненiе (4) не должно зависѣть отъ x_4. Выраженiе

$$b^2 - ad = -[y_4^2 + y_5^2 + (y_4 V_2 - y_5 V_1)^2]$$

равняется нулю только при условiяхъ

$$y_4 = 0, \quad y_5 = 0.$$

Исключая послѣднiй случай, какъ невозможный, заключаемъ, что выраженiе

$$ax_4^2 + 2bx_4 + d$$

не можетъ быть точнымъ квадратомъ. Поэтому, для того чтобы равенство (4) не зависѣло отъ x_4, необходимо должны имѣть мѣсто равенства

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

которыя и представляютъ уравненiя, опредѣляющiя искомые интегралы. Изъ второго и пятаго уравненiй послѣдней системы заключаемъ, или

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0,$$

или

$$\frac{V_{10}}{V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}} = \frac{V_{20}}{V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}}. \tag{5}$$

Первое предположенiе не имѣетъ мѣста, ибо ведетъ къ интегралу

$$z = \text{пост.},$$

каковой мы исключаемъ изъ разсмотрѣнiя. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ изъ перваго уравненiя слѣдуетъ $q_0 = 0$, изъ третьяго, такъ какъ z не зависитъ отъ y_4, y_5, слѣдуетъ $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ и, наконецъ, изъ четвертаго получаемъ $q_1 = 0$.

Итакъ, искомые интегралы опредѣляются системой уравненiй

$$\left.\begin{aligned}
&q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0, \\
&q_1 + V_1 q_2 + V_2 q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13})\, q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23})\, q_5 = 0, \\
&y_4 q_2 + y_5 q_3 = 0, \\
&V_{10} q_4 + V_{20} q_5 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при чемъ функцiи V удовлетворяютъ уравненiю (5).

Выполненное преобразованіе всегда имѣетъ мѣсто, когда функціи V конечны, опредѣленны и дифференцируемы, что мы разумѣемъ при всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ. Это преобразованіе справедливо въ частности и для значеній $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, такъ какъ при этихъ условіяхъ выраженія (3) принимаютъ видъ x_5, x_6 и представляютъ частные интегралы уравненія $p_4 = 0$, къ которому приводится въ этомъ случаѣ второе уравненіе системы (1). Такимъ образомъ уравненія (6) опредѣляютъ всѣвозможные интегралы, общіе задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, и мы приходимъ къ изслѣдованію всѣхъ возможныхъ случаевъ, когда система (6) имѣетъ отъ пяти до одного частныхъ интеграловъ.

4. Если система (6) имѣетъ пять частныхъ интеграловъ, то три изъ ея уравненій должны уничтожаться, или въ силу остальныхъ уравненій, или тождественно, при чемъ всѣ q_i сохраняютъ значенія, отличныя отъ нуля. Если число частныхъ интеграловъ системы (6) должно быть четыре, то, или два изъ ея уравненій должны уничтожаться, при чемъ всѣ $q_i \lessgtr 0$, или уничтожаются три изъ ея уравненій и одна изъ производныхъ q_i. Очевидно, ни одинъ изъ указанныхъ случаевъ не можетъ имѣть мѣста. Поэтому заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити, не могутъ имѣть пяти и четырехъ общихъ интеграловъ.

5. Если система уравненій (6) имѣетъ три частныхъ интеграла, то одно изъ ея уравненій должно быть слѣдствіемъ остальныхъ. Составляя функціональные опредѣлители четвертаго порядка изъ первыхъ частей уравненій (6) по перемѣннымъ $q_0, q_1, \ldots q_5$, заключаемъ, что единственное условіе, при которомъ система (6) приводится къ тремъ уравненіямъ, выражается равенствами

$$V_{10} = 0, \quad V_{20} = 0. \tag{7}$$

По той же самой причинѣ и принимая во вниманіе разсужденія, изъ которыхъ мы пришли къ условіямъ (5), получаемъ

$$V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13} = 0, \qquad V_{21} + V_1 V_{22} + V_{23} = 0. \tag{8}$$

Уравненія, опредѣляющія искомые интегралы, принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned}
&F_0 = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0,\\
&F_1 = q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0,\\
&F_2 = q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти уравненія должны представлять якобіевскую систему, т. е. равенства

$$\left.\begin{aligned} (F_0, F_2) = \frac{1}{y_4}\left(\frac{y_5}{y_4}U_1 - U_2\right)q_3 + \left(U_{12} + \frac{y_5}{y_4}U_{13}\right)q_4 + \\ + \left(U_{22} + \frac{y_5}{y_4}U_{23}\right)q_5 = 0\,, \\ (F_0, F_1) = 0\,, \qquad (F_1, F_2) = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

должны удовлетворяться тождественно. Такъ какъ функціи V, U не зависятъ отъ y_4, y_5, то изъ перваго равенства заключаемъ

$$U_1 = 0\,, \qquad U_2 = 0\,.$$

Такимъ же образомъ изъ остальныхъ двухъ равенствъ находимъ

$$V_{13} = 0\,, \qquad V_{12} = V_{23}\,, \qquad V_{22} = 0\,, \qquad V_{122} = 0\,.$$

Послѣднія уравненія совмѣстно съ (7) и (8) приводятъ опредѣленіе функцій V къ интегрированію точныхъ дифференціаловъ

$$dV_1 = -\frac{V_1 dx_1}{x_1 + a_1} + \frac{dx_2}{x_1 + a_1}\,,$$

$$dV_2 = -\frac{V_2 dx_1}{x_1 + a_1} + \frac{dx_3}{x_1 + a_1}\,,$$

гдѣ a_1 — произвольная постоянная. Отсюда

$$V_1 = \frac{x_2 + a_2}{x_1 + a_1}\,, \qquad V_2 = \frac{x_3 + a_3}{x_1 + a_1}\,,$$

гдѣ a_2, a_3 — произвольныя постоянныя.

Искомые интегралы опредѣляются интегрированіемъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_3 - \frac{x_3 + a_3 - \dfrac{y_5}{y_4}(x_2 + a_2)}{x_1 + a_1}dx_1 - \frac{y_5}{y_4}dx_2 = 0\,,$$

$$dy_4 + \frac{y_4}{x_1 + a_1}dx_1 = 0\,,$$

$$dy_4 + \frac{y_5}{x_1 + a_1}dx_1 = 0\,.$$

Интегралы послѣднихъ двухъ уравненій очевидны. Первое же уравненіе въ силу послѣднихъ двухъ интеграловъ становится точнымъ дифференціаламъ. Такимъ образомъ искомые интегралы принимаютъ видъ

$$y_4(x_1 + a_1) = C_1\,,$$

$$y_5(x_1 + a_1) = C_2\,,$$

$$\frac{x_3 + a_3}{x_1 + a_1} - \frac{y_5}{y_4}\frac{x_2 + a_2}{x_1 + a_1} = C_3\,,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — произвольныя постоянныя. Возвращаясь къ исходной системѣ перемѣнныхъ, заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой X_1, X_2, X_3 *на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ* x_1, x_2, x_3 *выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити* x_0, *удовлетворяющими условіямъ*

$$\frac{X_1}{x_1 + a_1} = \frac{X_2}{x_2 + a_2} = \frac{X_3}{x_3 + a_3}\,,$$

имѣютъ три общихъ интеграла

$$T\left[(x_2 + a_2)\frac{dx_1}{dx_0} - (x_1 + a_1)\frac{dx_2}{dx_0}\right] = C_1\,,$$

$$T\left[(x_3 + a_3)\frac{dx_1}{dx_0} - (x_1 + a_1)\frac{dx_3}{dx_0}\right] = C_2\,,$$

$$\frac{(x_2 + a_2)\dfrac{dx_3}{dx_0} - (x_3 + a_3)\dfrac{dx_2}{dx_0}}{(x_2 + a_2)\dfrac{dx_1}{dx_0} - (x_1 + a_1)\dfrac{dx_2}{dx_0}} = C_3\,,$$

гдѣ T — *натяженіе нити,* C_1, C_2, C_3 — *произвольныя постоянныя.*

Очевидно, послѣдній результатъ остается безъ измѣненія и въ томъ случаѣ, когда нить однородна, т. е. k — постоянная величина, а силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги.

6. Если изслѣдуемыя задачи имѣютъ два общихъ интеграла, то уравненія (6) должны представлять замкнутую систему. Составляя скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей ея уравненій третьяго и четвертаго, заключаемъ, такъ какъ эти скобки должны уничтожаться въ силу тѣхъ же уравненій третьяго и четвертаго, что и въ разсматриваемомъ случаѣ должны имѣть мѣсто уравненія (7) и (8). Такимъ образомъ искомые интегралы опредѣляются уравненіями (9), которые въ этомъ случаѣ приводятся къ замкнутой системѣ прибавленіемъ одного изъ равенствъ (10), положимъ перваго.

Излѣдуемая система уравненій становится

$$\left.\begin{aligned}
&F_0 = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0\,,\\
&F_1 = q_1 + \Big(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\Big) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0\,,\\
&F_2 = q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0\,,\\
&F_3 = \frac{1}{y_4}\left(\frac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) q_3 + \left(U_{12} + \frac{y_5}{y_4} U_{13}\right) q_4 +\\
&\qquad + \left(U_{22} + \frac{y_5}{y_4} U_{23}\right) q_5 = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Условія замкнутости послѣдней системы

$$(F_0\,,\, F_3) = 0\,,\qquad (F_1\,,\, F_2) = 0\,,$$

$$(F_0\,,\, F_1) = 0\,,\qquad (F_1\,,\, F_3) = 0\,,\qquad (F_2\,,\, F_3) = 0$$

должны быть слѣдствіями уравненія $F_3 = 0$. Такъ первое изъ этихъ условій даетъ

$$\frac{\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2}{U_{20} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{10} + \dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U - U_2\right) U_1} =$$

$$= \frac{U_{12} + \dfrac{y_5}{y_4} U_{13}}{\dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) U_{13} - U_{120} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{130}} =$$

$$= \frac{U_{22} + \dfrac{y_5}{y_4} U_{23}}{\dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) U_{23} - U_{220} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{230}}\,.$$

Функціи U_1, U_2 независятъ отъ перемѣнныхъ y_4, y_5. Поэтому изъ послѣднихъ равенствъ слѣдуютъ новыя

$$U_2 U_{13} + U_1 U_{12} = 0\,,$$

$$U_2 U_{120} - U_{20} U_{12} = 0\,,$$

$$U_2 U_{130} - U_1 U_{120} + U_{10} U_{12} - U_{20} U_{13} = 0\,,$$

$$U_{10} U_{13} - U_1 U_{130} = 0\,,$$

$$U_2 U_{23} + U_1 U_{22} = 0\,,$$

$$U_2 U_{220} - U_{20} U_{22} = 0\,,$$

$$U_2 U_{230} - U_1 U_{220} + U_{10} U_{22} - U_{20} U_{23} = 0\,,$$

$$U_{10} U_{23} - U_1 U_{230} = 0.$$

Изъ условія $(F_2, F_3) = 0$ подобнымъ же образомъ получаемъ уравненія

$$U_2 U_{122} - 2U_{22} U_{12} = 0\,,$$

$$-U_1 U_{122} + 2U_2 U_{132} + 2(U_{12} - U_{23})U_{12} - 2U_{22} U_{13} = 0\,,$$

$$U_2 U_{133} - 2U_1 U_{132} + 2U_{13} U_{12} + 2(U_{12} - U_{23})U_{13} = 0\,,$$

$$-U_1 U_{133} + 2U_{13}^2 = 0\,,$$

$$U_2 U_{222} - 2U_{22}^2 = 0\,,$$

$$-U_1 U_{222} + 2U_2 U_{232} + 2(U_{12} - U_{23})U_{22} - 2U_{22} U_{23} = 0\,,$$

$$U_2 U_{233} - 2U_1 U_{232} + 2U_{13} U_{22} + 2(U_{12} - U_{23})U_{23} = 0\,,$$

$$-U_1 U_{233} + 2U_{13} U_{23} = 0.$$

Эти 16 уравненій выведены въ предположеніи, что $U_1 \lessgtr 0$, $U_2 \lessgtr 0$. Въ противномъ предположеніи всѣ они удовлетворяются тождественно и послѣдній случай является частнымъ случаемъ разсматриваемаго. Будемъ называть эти уравненія соотвѣтственно ихъ порядку первымъ, вторымъ,... шестнадцатымъ. Легко видѣть, что уравненія второе и шестое, девятое и тринадцатое, двѣнадцатое и шестнадцатое и, наконецъ, первое и пятое даютъ два интегральныхъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} U_{22} &= \psi U_{12} \\ U_{23} &= \psi U_{13}\,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

гдѣ ψ — произвольная функція одной только перемѣнной x_1. Въ силу послѣднихъ уравненій, разсматриваемая система 16 уравненій приводится къ пяти независимымъ между собой уравненіямъ

$$U_2 U_{13} + U_1 U_{12} = 0\,,$$
$$U_2 U_{120} - U_{20} U_{12} = 0\,,$$
$$U_1 U_{130} - U_{10} U_{13} = 0\,,$$
$$U_2 U_{122} - 2 U_{22} U_{12} = 0\,,$$
$$U_1 U_{133} - 2 U_{13}^2 = 0\,.$$

Изъ первыхъ трехъ послѣдней системы уравненій и изъ (12) получаемъ

$$\left.\begin{aligned} U_{12} &= f U_2\,, & U_{13} &= - f U_1\,, \\ U_{22} &= \psi f U_2\,, & U_{23} &= - \psi f U_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

гдѣ f — произвольная функція перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3. Внося эти значенія въ четвертое и пятое уравненія послѣдней системы пяти уравненій и полагая $U_1 \lessgtr 0$, $U_2 \lessgtr 0$, получаемъ два уравненія, опредѣляющія функцію f,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \psi f^2 = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} + f^2 = 0\,. \tag{14}$$

Выраженіе $\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2$ отлично отъ нуля, ибо функціи U неравны нулю. Поэтому уравненіе $F_3 = 0$, въ силу равенствъ (13), принимаетъ видъ

$$F_3' = q_3 - y_4 f(q_4 + \psi q_5) = 0\,.$$

Условіе $(F_1, F_2) = 0$ должно удовлетворяться въ силу послѣдняго уравненія. Отсюда получаемъ шесть уравненій, опредѣляющихъ функціи V,

$$\left.\begin{aligned} V_{122} &= 2 f V_{22}\,, \\ V_{132} &= f(V_{23} - V_{12})\,, \\ V_{133} &= - 2 f V_{13}\,, \\ V_{222} &= \psi V_{122}\,, \\ V_{232} &= \psi V_{132}\,, \\ V_{233} &= \psi V_{133}\,. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Условіе $(F_0, F_1) = 0$ приводитъ къ четыремъ уравненіямъ. Въ силу равенствъ (13), два изъ нихъ удовлетворяются тождественно, а два остальные принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} U_{11} + (V_{12} - fV_2)U_1 + (V_{13} + fV_1)U_2 = 0\,, \\ U_{21} + (V_{22} - \psi f V_2)U_1 + (V_{23} + \psi f V_1)U_2 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Наконецъ, условіе $(F_1, F_3') = 0$ даетъ четыре уравненія. Въ силу равенствъ (14) и (15), два изъ нихъ удовлетворяются тождественно, остальныя же приводятся къ виду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + f(V_{12} + \psi V_{13}) - f^2(V_2 - \psi V_1) = 0\,, \tag{17}$$

$$f[\psi' + \psi(V_{23} - \psi V_{13}) + V_{22} - \psi V_{12}] = 0\,, \tag{18}$$

гдѣ ψ' обозначаетъ производную по x_1 функціи ψ.

7. Мы приходимъ къ разсмотрѣнію двухъ случаевъ, соотвѣтствующихъ равенству нулю каждого изъ двухъ множителей лѣвой части уравненія (18). Вычисливъ значенія функцій V, U въ предположеніи, что первый изъ этихъ множителей равенъ нулю, легко заключить, что эти значенія представляютъ частный случай значеній, которыя мы получимъ приравнивая нулю второй множитель лѣвой части уравненія (18). Въ самомъ дѣлѣ, если

$$f = 0\,,$$

то изъ уравненій (7) и (15) слѣдуетъ

$$V_{12} = v_1\,, \quad V_{13} = v_2\,, \quad V_{22} = v_3\,, \quad V_{23} = v_4\,,$$

гдѣ v_1, v_2, v_3, v_4 — произвольныя функціи одной только перемѣнной x_1. Обозначая по Лагранжу производныя по x_1 послѣднихъ функцій, мы получимъ для вычисленія ихъ, въ силу уравненій (8), слѣдующую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned} v_1' &= -(v_1^2 + v_2 v_3)\,, \\ v_2' &= -v_2(v_1 + v_4)\,, \\ v_3' &= -v_3(v_1 + v_4)\,, \\ v_4' &= -(v_4^2 + v_2 v_3)\,. \end{aligned}$$

Общій интегралъ послѣдней системы уравненій представляется слѣдующимъ образомъ

$$v_1 = \frac{x_1 + a_1}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_2 = \frac{a_2}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_3 = \frac{a_3}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_4 = \frac{x_1 + a_4}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольныя постоянныя. Наконецъ, интегрируя систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dV_1 = V_{11} dx_1 + V_{12} dx_2 + V_{13} dx_3,$$

$$dV_2 = V_{21} dx_1 + V_{22} dx_2 + V_{23} dx_3,$$

которая рѣшеніемъ относительно выраженій $dx_2 - V_1 dx_1$, $dx_3 - V_2 dx_1$, приводится къ двумъ точнымъ дифференціаламъ, находимъ:

$$V_1 = \frac{(x_1 + a_1)(x_2 + a_5) + a_2(x_3 + a_6)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$V_2 = \frac{(x_1 + a_4)(x_3 + a_6) + a_3(x_2 + a_5)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3}.$$

Изъ уравненій (13) и (16) слѣдуетъ

$$U_{12} = 0, \quad U_{13} = 0, \quad U_{22} = 0, \quad U_{23} = 0,$$

$$U_{11} + v_1 U_1 + v_2 U_2 = 0,$$

$$U_{21} + v_3 U_1 + v_4 U_2 = 0.$$

Уравненія, представляющія результаты рѣшенія послѣднихъ двухъ уравненій относительно U_1, U_2, легко представляются въ видѣ точныхъ производныхъ по перемѣнной x_1. Отсюда получаемъ

$$U_1 = \frac{(x_1 + a_1)\Psi_1(x_0) + a_2 \Psi_2(x_0)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$U_2 = \frac{(x_1 + a_4)\Psi_2(x_0) + a_3 \Psi_1(x_0)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

гдѣ Ψ_1, Ψ_2 — произвольныя функціи перемѣнной x_0.

8. Если $f \lesseqgtr 0$, то изъ уравненія (18) слѣдуетъ

$$\psi' + \psi(V_{23} - \psi V_{13}) + V_{22} - \psi V_{12} = 0. \tag{19}$$

Полагаемъ

$$V_2 - \psi V_1 = Z.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій (15) и уравненій (8) получаемъ

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} + Z \frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0.$$

Слѣдовательно

$$Z = \frac{c_2 x_2 + x_3 + c_3}{x_1 + c_1},$$

и потому изъ уравненія (19) находимъ

$$\psi = \frac{c_4 - c_2 x_1}{x_1 + c_1},$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольныя постоянныя.

Функція V_1 опредѣляется первымъ уравненіемъ (8) и тремя первыми (15), которыя легко приводятся къ слѣдующему виду

$$V_{11} + V_1 V_{12} + (Z + \psi V_1) V_{13} = 0,$$

$$V_{122} = 2f\left(\frac{c_2}{x_1 + c_1} + \psi V_{12}\right),$$

$$V_{132} = f\left(\frac{1}{x_1 + c_1} + \psi V_{13} - V_{12}\right),$$

$$V_{133} = -2f V_{13}.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій получаемъ, исключая V_{12}, V_{13},

$$V_{122} + 2\psi V_{123} + \psi^2 V_{133} = 2nf,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(V_{12} + \psi V_{13}) + \psi \frac{\partial}{\partial x_3}(V_{12} + \psi V_{13}) = 2nf,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$n = \frac{c_1 c_2 + c_4}{(x_1 + c_1)^2}.$$

Изъ уравненій (14) заключаемъ, что

$$f = \frac{1}{x_3 - \psi x_2 + \varphi},$$

гдѣ φ — произвольная функція перемѣнной x_1. Поэтому, интегрируя послѣднее уравненіе въ частныхъ производныхъ функціи $V_{12} + \psi V_{13}$, мы получимъ, въ силу уравненій (7),

$$V_{12} + \psi V_{13} = [2nx_2 + \Pi(x_1, \omega)] f,$$

гдѣ Π — произвольная функція перемѣнной x_1 и перемѣннаго аргумента $\omega = x_3 - \psi x_2$. Внося значенія функцій f, $V_{12} + \psi V_{13}$, Z, ψ въ уравненіе (17), получаемъ

$$\Pi(x_1, \omega) = \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + \varphi',$$

гдѣ φ' представляетъ производную функціи φ по перемѣнной x_1. Такимъ образомъ опредѣленіе функціи V_1 приводится къ интегрированію системы трехъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &V_{12} + \psi V_{13} - Nf = 0, \\ &V_{11} + Z V_{13} + Nf V_1 = 0, \\ &V_{133} + 2f V_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

гдѣ мы положили

$$N = nx_2 + Z + \varphi'.$$

Если уравненіе $\Psi(V_1, x_1, x_2, x_3) = 0$ есть общій интегралъ первыхъ двухъ уравненій (20), то функція Ψ опредѣляется уравненіями

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \psi \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + Nf \frac{\partial \Psi}{\partial V_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + Z \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} - Nf V_1 \frac{\partial \Psi}{\partial V_1} = 0.$$

Частные интегралы ω, ω_1 перваго изъ этихъ уравненій, гдѣ

$$\omega = x_3 - \psi x_2, \qquad \omega_1 = V_1 - (Z + \psi') x_2 f,$$

принимаемъ независимыми перемѣнными вмѣсто перемѣнныхъ x_2, x_3, V; значеніе функціи Ψ въ новыхъ перемѣнныхъ назовемъ чрезъ Φ. Первое изъ нашихъ уравненій утождествляется, второе же принимаетъ видъ

$$C + Dx_2 = 0,$$

гдѣ

$$C = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} - \frac{\omega_1}{\omega + \varphi} \left(\frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + \varphi' \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1},$$

$$D = 2n \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} - \frac{\varphi'' + 2n\omega_1}{\omega + \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}.$$

По теоріи Коркина слѣдуетъ

$$C = 0, \qquad D = 0. \tag{21}$$

Такъ какъ выраженіе (C, D) зависитъ только отъ $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}$, линейно и однородно по нимъ, то равенство $(C, D) = 0$ не можетъ давать новаго уравненія, но должно уничтожаться въ силу уравненія $D = 0$.

Отсюда получаемъ уравненіе

$$3\varphi'' + (x_1 + c_1)\varphi''' = 0,$$

которое даетъ значеніе функціи φ

$$\varphi = \frac{c_5'}{x_1 + c_1} + c_6 x_1 + c_7',$$

гдѣ c_5', c_6, c_7' — произвольныя постоянныя. Система уравненій (21) имѣетъ одинъ только частный интегралъ, который находится интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\omega_1 + \frac{1}{\omega + \varphi} \left[\frac{c_5(\omega + c_3)}{(x_1 + c_1)^2} + \omega_1 \varphi' \right] dx_1 +$$

$$+ \frac{1}{\omega + \varphi} \left(\omega_1 - \frac{c_5}{x_1 + c_1} \right) d\omega = 0,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$c_5 = -\frac{c_5'}{c_1 c_2 + c_4}.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія есть

$$\omega_1(\omega + \varphi) - c_5 \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} = h,$$

гдѣ h — произвольная постоянная. Поэтому для функціи V_1 получаемъ слѣдующее значеніе

$$V_1 = [(Z + \varphi')\, x_2 + c_5 \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + a_8] f,$$

гдѣ a_8 — произвольная постоянная. Легко убѣдиться непосредственной подстановкой, что послѣднее значеніе V_1 утождествляетъ также и третье уравненіе (20). Вводя обозначеніе

$$c_7 = c_7' - c_2 c_5$$

и пользуясь уравненіемъ $V_2 - \psi V_1 = Z$, получаемъ значенія функцій V въ слѣдующемъ видѣ

$$V_1 = \frac{(x_3 + c_2 x_2 + c_3)(x_2 + c_5) + (c_6 x_2 + c_8)(x_1 + c_1)}{(x_3 + c_6 x_1 + c_7)(x_1 + c_1) + (c_2 x_1 - c_4)(x_2 + c_5)},$$

$$V_2 = \frac{(x_3 + c_2 x_2 + c_3)(x_3 + c_6 x_1 + c_7) + (c_6 x_2 + c_8)(c_4 - c_2 x_1)}{(x_3 + c_6 x_1 + c_7)(x_1 + c_1) + (c_2 x_1 - c_4)(x_2 + c_5)}.$$

Значенія функцій U вычисляются изъ уравненій (13) и (16). Вводя новую функцію W, опредѣляемую уравненіемъ

$$U_2 - \psi U_1 = W,$$

получаемъ изъ указанныхъ уравненій

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{W}{x_1 + c_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_3} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$W = \frac{\Psi_1(x_0)}{x_1 + c_1},$$

гдѣ Ψ_1 — произвольная функція перемѣнной x_0. Функція U_1 опредѣляется уравненіями

$$U_{11} = -\left[\frac{(c_1 c_2 + c_4)(x_2 + c_5)}{x_1 + c_1} + c_6 (x_1 + c_1)\right] \frac{U_1}{S} - \frac{\Psi_1(x_0)(x_2 + c_5)}{(x_1 + c_1)\, S},$$

$$U_{12} = \frac{(c_4 - c_2 x_1)\, U_1 + \Psi_1(x_0)}{S},$$

$$U_{13} = -\frac{(x_1 + c_1)\, U_1}{S},$$

гдѣ

$$S=(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5).$$

Поэтому легко получить

$$U_1=\frac{(x_2+c_5)\Psi_1(x_0)+(x_1+c_1)\Psi_2(x_0)}{(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5)},$$

$$U_2=\frac{(x_3+c_6x_1+c_7)\Psi_1(x_0)+(c_4-c_2x_1)\Psi_2(x_0)}{(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5)},$$

гдѣ Ψ_2 — вторая произвольная функцiя x_0.

Теперь легко убѣдиться, что выраженiя функцiй V, U, полученныя въ n^0 7 настоящаго изслѣдованiя, представляютъ частный случай послѣднихъ значенiй. Въ самомъ дѣлѣ, они получаются какъ предѣлы послѣднихъ выраженiй, когда $c_2=0$, а постоянныя c_5', c_6, c_7, c_8 и функцiя $\Psi_2(x_0)$, независимо отъ значенiй перемѣнной x_0, которая измѣняется между нѣкоторыми двумя конечными предѣлами, стремятся къ ∞, при томъ такъ, что отношенiя величинъ c_5, c_7, c_8 къ c_6 стремятся къ конечнымъ предѣламъ, а отношенiе функцiи $\Psi_2(x_0)$ къ c_6 стремится къ конечной, но вполнѣ произвольной функцiи перемѣнной x_0.

9. Возвращаемся къ уравненiямъ (11), и внесемъ въ нихъ найденныя значенiя функцiй V, U. Искомые интегралы опредѣляются интегрированiемъ системы уравненiй въ полныхъ дифференцiалахъ

$$dy_4+U_1dx_0+(Ay_4+By_5)dx_1-y_5fdx_2+y_4fdx_3=0,$$

$$dy_5+U_2dx_0+(Cy_4+Dy_5)dx_1-y_5\varphi fdx_2+y_4\varphi fdx_3=0,$$

гдѣ введены обозначенiя

$$A=\frac{c_2(x_2+c_5)+c_6(x_1+c_1)}{S},$$

$$B=\frac{x_2+c_5}{S},$$

$$C=\frac{c_2(x_3+c_7)+c_4c_6}{S},$$

$$D=\frac{x_3+c_6x_1+c_7}{S},$$

а выраженіе S имѣетъ прежнее значеніе. Интегралы послѣдней системы уравненій суть

$$(c_2x_1 - c_4)y_4 + (x_1 + c_1)y_5 + \int \Psi_1(x_0)dx_0 = \alpha,$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)y_4 - (x_2 + c_5)y_5 + \int \Psi_2(x_0)dx_0 = \beta,$$

гдѣ α, β — произвольныя постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ тождества

$$(c_2x_1 - c_4)U_1 + (x_1 + c_1)U_2 = \Psi_1(x_0),$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)U_1 - (x_2 + c_5)U_2 = \Psi_2(x_0).$$

Поэтому сумма произведеній перваго изъ нашихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ на $c_2x_1 - c_4$ и второго на $x_1 + c_1$ представляетъ точный дифференціалъ. Сумма произведеній перваго уравненія на $x_3 + c_6x_1 + c_7$ и второго на $-(x_2 + c_5)$ тоже — точный дифференціалъ.

Принимаемъ во вниманіе тождества

$$(c_2x_1 - c_4)V_1 + (x_1 + c_1)V_2 = x_3 + c_2x_2 + c_3,$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)V_1 - (x_2 + c_5)V_2 = c_6x_2 + c_8,$$

и возвращаемся къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ; вводя новыя обозначенія

$$c_3 = \frac{a_1}{a_4}, \quad c_4 = \frac{a_2}{a_4}, \quad c_1 = -\frac{a_3}{a_4}, \quad c_2 = -\frac{a_5}{a_4},$$

$$c_8 = \frac{a_6}{a_9}, \quad c_7 = -\frac{a_7}{a_9}, \quad c_5 = \frac{a_8}{a_9}, \quad c_6 = -\frac{a_{10}}{a_9},$$

$$a_4\Psi_1(x_0) = F_1(x_0), \qquad a_9\Psi_2(x_0) = F_2(x_0),$$

$$\alpha a_4 = C_1, \qquad \beta a_9 = C_2,$$

приходимъ къ заключенію:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити плотности k, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ массы нити, проекціи которой X_1, X_2, X_3 на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3 выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити x_0, удовлетворяющими условіямъ

$$k[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4(x_3 X_1 - x_1 X_3) + a_5(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = F_1(x_0),$$
$$k[a_6 X_1 + a_7 X_2 + a_8 X_3 + a_9(x_2 X_3 - x_3 X_2) + a_{10}(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = F_2(x_0),$$

имѣютъ два общихъ интеграла

$$T\left[a_1 \frac{dx_1}{dx_0} + a_2 \frac{dx_2}{dx_0} + a_3 \frac{dx_3}{dx_0} + a_4\left(x_3 \frac{dx_1}{dx_0} - x_1 \frac{dx_3}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_5\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int F_1(x_0)\,dx_0 = C_1,$$
$$T\left[a_6 \frac{dx_1}{dx_0} + a_7 \frac{dx_2}{dx_0} + a_8 \frac{dx_3}{dx_0} + a_9\left(x_2 \frac{dx_3}{dx_0} - x_3 \frac{dx_2}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{10}\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int F_2(x_0)\,dx_0 = C_2,$$

гдѣ T — натяженіе нити, C_1, C_2 — произвольныя постоянныя.

10. Предположимъ, что нить однородна, т. е. k — величина постоянная, а силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги. Легко видѣть, что для этого случая въ предыдущихъ формулахъ $n^0 n^0$ 7, 8 произвольныя функціи $\Psi_1(x_0)$, $\Psi_2(x_0)$ должны быть замѣнены произвольными постоянными.

11. Переходимъ, наконецъ, къ разсмотрѣнію случая, когда изслѣдуемыя задачи имѣютъ одинъ общій интегралъ. Система уравненій (6) въ этомъ предположеніи должна имѣть одинъ частный интегралъ и, слѣдовательно, приводится къ якобіевской прибавленіемъ одного уравненія. За послѣднее мы возьмемъ уравненіе, лѣвая часть котораго представляетъ скобки Пуассона, составленная изъ лѣвыхъ частей третьяго и четвертаго уравненій (6). Въ предыдущихъ вычисленіяхъ это уравненіе удовлетворялось тождественно въ силу уравненій (6) и приводило, такимъ образомъ, къ условіямъ (7). Въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе является независимымъ отъ уравненій (6) и, слѣдовательно, вообще функціи V_{10}, V_{20} отличны отъ нуля. Воспользовавшись этимъ замѣчаніемъ, положимъ

$$\frac{V_{20}}{V_{10}} = W_1 \tag{22}$$

и замѣтимъ, что въ изслѣдуемомъ случаѣ функція W_1 сохраняетъ конечное и опредѣленное значеніе. Искомый интегралъ мы будемъ вычислять по способу Коркина, исходя изъ системы уравненій (6). Частный интегралъ ω_4 послѣдняго изъ этихъ уравненій, гдѣ

$$\omega_4 = y_4 W_1 - y_5,$$

принимаемъ независимой перемѣнной вмѣсто двухъ перемѣнныхъ y_4, y_5. Обозначимъ въ этомъ предположеніи черезъ s_i, W_{1i}, ... частныя производныя функцій z, W_1, ... по перемѣннымъ значка i. Система уравненій (6) преобразовывается въ слѣдующую:

$$A + By_4 = 0\,,$$
$$C + Dy_4 = 0\,,$$
$$E + Fy_4 + Gy_4^2 = 0\,,$$

гдѣ легко составить выраженія значеній A, B, ... G. По теоріи Коркина необходимо

$$A = 0\,, \qquad B = 0\,, \ldots \qquad G = 0. \tag{23}$$

Если введемъ новыя функціи W_2, W_3, опредѣляемыя уравненіями

$$U_1 W_1 - U_2 = W_2\,, \qquad V_1 W_1 - V_2 = W_3\,,$$

то изъ уравненій (23) получаются слѣдующія уравненія, опредѣляющія искомый интегралъ

$$\left.\begin{aligned} & s_0 - W_2 s_4 = 0\,, \\ & s_1 - \omega_4 W_{33} s_4 = 0\,, \\ & s_2 - \omega_4 W_{13} s_4 = 0\,, \\ & s_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и уравненія, опредѣляющія функціи W_1, W_3,

$$W_{10} = 0\,,$$
$$W_{12} + W_1 W_{13} = 0\,,$$
$$W_{11} - W_3 W_{13} - W_1 W_{33} - W_{32} = 0.$$

Изъ уравненій (5) и (22) въ силу послѣднихъ уравненій, получаемъ

$$W_{31} - W_3 W_{33} = 0\,,$$
$$W_{30} = 0.$$

Наконецъ, система уравненій (24) должна быть якобіевской. Составляя равенства, выражающія послѣднее условіе, получимъ уравненія, опредѣляющія функціи W,

$$W_{23}=0\,,\qquad W_{333}=0\,,\qquad W_{133}=0\,,$$
$$W_{21}-W_2 W_{33}=0\,,$$
$$W_{22}+W_2 W_{13}=0\,,$$
$$W_{332}+W_{131}=0\,.$$

Интегрируя послѣднюю систему одиннадцати уравненій въ частныхъ производныхъ трехъ функцій W, легко получимъ ихъ значенія

$$W_1=\frac{x_3+c_3x_1+c_4}{x_2+c_1x_1+c_2}\,,$$

$$W_3=\frac{c_3x_2-c_1x_3+c_5}{x_2+c_1x_1+c_2}\,,$$

$$W_2=\frac{F(x_0)}{x_2+c_1x_1+c_2}\,,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольныя постоянныя, F — произвольныя функція x_0.

Искомый интегралъ опредѣляется интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\omega_4+\frac{1}{x_2+c_1x_1+c_2}[\omega_4dx_2+\omega_4c_1dx_1+F(x_0)dx_0]=0$$

и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\omega_4(x_2+c_1x_1+c_2)+\int F(x_0)dx_0=\alpha\,,$$

гдѣ α — произвольная постоянная. Вводимъ новыя обозначенія

$$c_1=-\frac{a_5}{a_4},\quad c_2=\frac{a_3}{a_4},\quad c_3=-\frac{a_6}{a_4},\quad c_4=-\frac{a_2}{a_4},$$

$$c_5=\frac{a_1}{a_4},\quad a_4F(x_0)=\Psi(x_0),\quad \alpha=\frac{C}{a_4}\,;$$

возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити плотности k, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой X_1, X_2, X_3 на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3 выражаются функціями послѣднихъ и дуги x_0, удовлетворяющими условію

$$k[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4(x_2 X_3 - x_3 X_2) + a_5(x_3 X_1 - x_1 X_3) + \\ + a_6(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = \Psi(x_0),$$

имѣютъ одинъ общій интегралъ

$$T\left[a_1 \frac{dx_1}{dx_0} + a_2 \frac{dx_2}{dx_0} + a_3 \frac{dx_3}{dx_0} + a_4\left(x_2 \frac{dx_3}{dx_0} - x_3 \frac{dx_2}{dx_0}\right) + \right. \\ \left. + a_5\left(x_3 \frac{dx_1}{dx_0} - x_1 \frac{dx_3}{dx_0}\right) + a_6\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int \Psi(x_0) dx_0 = C,$$

гдѣ T — натяженіе нити, C — произвольная постоянная.

12. Преобразованія предыдущаго n^0 11 возможны только въ предположеніи, что V_{10}, V_{20} отличны отъ нуля. Если же функціи V_1, V_2 не зависятъ отъ x_0, какъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда нить однородна и силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги x_0, то для разысканія одного интеграла въ этомъ случаѣ возвращаемся къ системѣ пяти уравненій n^0 3

$$A = 0, \qquad B = 0, \ldots \qquad E = 0.$$

При нашемъ условіи второе изъ этихъ урявненій уничтожается тождественно, остальные же принимаютъ видъ:

$$q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0,$$

$$q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0,$$

$$q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0,$$

$$q_4 + W_1 q_5 = 0,$$

гдѣ

$$W_1 = \frac{V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}}{V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}},$$

при чемъ функція W_1 зависитъ только отъ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3. Принимаемъ частный интегралъ послѣдняго изъ уравненій разсматриваемой системы за независимую перемѣнную вмѣсто y_4, y_5. Очевидно дальнѣйшія вычисленія будутъ тѣ же, что и въ n^0 11, лишь только произвольная функція $F(x_0)$ должна быть замѣнена въ разсматриваемомъ случаѣ произвольной постоянной.

Обобщеніе перваго способа Якоби интегрированія дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

Въ предлагаемой статьѣ преслѣдуется мысль распространить первый способъ Якоби интегрированія одного уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи на случай системы нѣсколькихъ уравненій.

Назовемъ черезъ $p_1, p_2, \ldots p_n$ частныя производныя перваго порядка неизвѣстной функціи z по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Возьмемъ систему m уравненій, не заключающихъ явно перемѣнной z,

$$\left.\begin{array}{c} p_h + H_h(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m;\ m < n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Предполагаемъ, что эти уравненія находятся въ *инволюціи*, т. е. равенства

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0 \qquad (2)$$

имѣютъ мѣсто тождественно для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до m. Составляемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+i} &= \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}\, dx_h\,, \\ dp_{m+i} &= -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}\, dx_h\,, \\ i &= 1\,,\ 2\,, \ldots\, n-m. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Послѣднія представляютъ, какъ извѣстно, въ силу равенствъ (2), систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи имѣется въ виду установить зависимость между задачами интегрированія дифференціальныхъ уравненій (1) и (3), вводя въ теорію разсматриваемыхъ уравненій понятіе о *главной функціи*. При этомъ въ излагаемомъ обобщеніи принимается за исходное то выраженіе *главной функціи* Якоби для одного уравненія, которое указано Майеромъ *). Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что съ равнымъ успѣхомъ можно пользоваться и соображеніями Бертрана и Дарбу **) отросительно вида послѣдней. Рѣшеніе вопроса о связи между задачами интегрированія уравненій (1) и (3) вытекаетъ изъ справедливости слѣдующихъ предложеній.

Теорема первая. *Если значеніе*

$$z = V(x_1\,,\ x_2\,, \ldots x_n\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_{n-m}) + b\,, \tag{4}$$

гдѣ $b\,,\ b_1\,,\ b_2\,, \ldots b_{n-m}$ *— произвольныя постоянныя, представляетъ полный интегралъ уравненій (1), при чемъ функціональный опредѣлитель*

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}\,,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}\,, \ldots\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1\,,\qquad b_2\,, \ldots\, b_{n-m}}\right) \tag{5}$$

отличенъ отъ нуля, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}\,,\quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \\ i = 1\,,\ 2\,, \ldots\, n-m\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

---

*) Math. An., Bd. 3, S. 433.

**) Comptes R., t. LXXIX, p. 1488, t. LXXX, p. 160, t. LXXXII, p. 641. Bullet. des sciences math. et astron., t. 8. p. 249.

гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{n-m}$ *— новыя произвольныя постоянныя, опредѣляютъ значенія* x_{m+i}, p_{m+i}, *представляющія общій интегралъ* *) *уравненій (3).*

Въ силу послѣднихъ значеній x_{m+i}, p_{m+i}, уравненія (6) становятся тождествами. Дифференцируя ихъ по перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, получаемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_{m+k}}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_{m+k}}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=0.$$

Дифференцируя по x_{m+i}, b_i тождества, получаемыя подстановкой въ уравненія (1) ихъ рѣшенія (4), и принимая во вниманіе выраженія (6) функцій p_{m+i}, получаемъ новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_h\partial x_{m+i}}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}+\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_h\partial b_i}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial b_i}=0.$$

Изъ двухъ послѣднихъ системъ тождествъ легко получаются слѣдующія

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}\left(\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\right)=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h}+\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}},$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_{m+k}}\left(\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\right)=0,$$

$$i=1,2,\ldots n-m.$$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (5), приходимъ къ тождествамъ

$$\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}},\quad \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h}=-\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}},\tag{7}$$

*) Подъ общимъ интеграломъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ разумѣемъ рѣшеніе ихъ, представляющее значенія зависимыхъ перемѣнныхъ въ функціяхъ независимыхъ и произвольныхъ постоянныхъ, число которыхъ равно числу зависимыхъ перемѣнныхъ и которыя изъ этихъ интегральныхъ уравненій не исключаются.

показывающимъ, что значенія x_{m+i}, p_{m+i}, опредѣляемыя уравненіями (6), утождествляютъ уравненія (3) и представляютъ, стало быть, ихъ общій интегралъ.

Лемма. *Если уравненія*

$$x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots x_m, a_1, a_2, \ldots a_{n-m}, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}), \quad (8)$$

$$p_{m+i} = F_i(x_1, x_2, \ldots x_m, a_1, a_2, \ldots a_{n-m}, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}), \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \ldots n - m,$$

гдѣ a_i, b_i — произвольныя постоянныя, представляютъ общій интегралъ уравненій (3), то выраженіе

$$\sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) dx_h, \quad (10)$$

гдѣ коэффиціенты при dx_h — функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ и постоянныхъ a_i, b_i, въ силу уравненій (8) и (9), есть точный дифференціалъ.

Положимъ

$$\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h = U_h.$$

Въ силу тождествъ (7) имѣемъ

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}},$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_k \partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}.$$

По условію равенства (2) имѣютъ мѣсто тождественно, слѣдовательно, они остаются таковыми и для (8), (9) значеній перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_h}$$

для всѣхъ одновременно различныхъ значеній h и k отъ 1 до m, т. е. выраженіе (10) представляетъ точный дифференціалъ. Назовемъ его черезъ dU

$$dU = \sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) dx_h.$$

Теорема вторая. *Пусть въ уравненіяхъ (8), (9) произвольныя постоянныя a_i, b_i представляютъ соотвѣтственно начальныя значенія перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Выполнивъ квадратуру точнаго дифференціала dU, составляемъ выраженіе*

$$V=\int_{U_0}^{U} dU+\sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i+b\,,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная. Если исключить изъ послѣдняго, въ силу уравненій (8), величины a_i, то полученное выраженіе V есть полный интегралъ уравненій (1).

Въ самомъ дѣлѣ, условившись, согласно установившемуся обычаю, называть черезъ d дифференціалы, соотвѣтствующіе приращеніямъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, черезъ δ дифференціалы, соотвѣтствующіе измѣненіямъ постоянныхъ a_i, b_i и, наконецъ, черезъ Δ —, соотвѣтствующіе приращеніямъ обѣихъ системъ перемѣнныхъ, получаемъ *)

$$\Delta V=dU+\int_{U_0}^{U} d\delta U+\sum_{i=1}^{n-m}(b_i\delta a_i+a_i\delta b_i)\,,$$

гдѣ

$$d\delta U=\sum_{h=1}^{m}\delta U_h dx_h.$$

Такъ какъ уравненія (3) и (7) имѣютъ мѣсто тождественно, то по приведеніи находимъ

$$dU=\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}dx_{m+i}-\sum_{h=1}^{m} H_h dx_h\,,$$

$$\delta U_h=\sum_{i=1}^{n-m}\left(p_{m+i}\delta\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}}-\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}\delta x_{m+i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-m}\left(p_{m+i}\delta\frac{dx_{m+i}}{dx_h}+\frac{dp_{m+i}}{dx_h}\delta x_{m+i}\right)=$$

$$=\frac{d}{dx_h}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\delta x_{m+i}\right),$$

*) Прибавочная постоянная b остается безъ измѣненія.

$$d\delta U = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \delta x_{m+i} \right) dx_h =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \delta x_{m+i} \right),$$

$$\int_{U_0}^{U} d\delta U = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i} \delta x_{m+i} - b_i \delta a_i).$$

Итакъ,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i} \Delta x_{m+i} + a_i \delta b_i) - \sum_{h=1}^{m} H_h dx_h.$$

Какъ уже раньше можно было замѣтить, уравненія (4) всегда разрѣшаются относительно a_i, ибо функціональный опредѣлитель функцій x_{m+i} относительно a_i, для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, принимаетъ отличное отъ нуля значеніе, равное 1. Поэтому, разсматривая V какъ функцію всѣхъ x и b, получаемъ иначе

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} \Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i} \delta b_i \right) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_h} dx_h.$$

Изъ сопоставленія обоихъ выраженій ΔV заключаемъ о существованіи слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ i = 1, 2, \ldots n-m. \end{gathered} \right\} \tag{11}$$

$$\left. \begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial x_h} + H_h = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m. \end{gathered} \right\} \tag{12}$$

Уравненія (11) представляютъ $2n-2m$ различныхъ зависимостей между перемѣнными x, p_{m+i} и произвольными постоянными a_i, b_i, ибо каждое изъ этихъ уравненій заключаетъ одну изъ величинъ, или p, или a такихъ, которыя не входятъ во всѣ остальныя; они являются интегральными уравненіями системы (3), отличными по виду отъ (8) и (9). Равенства (12), въ силу значеній (11) p_{m+i}, представляютъ результатъ подстановки въ уравненія (1) разсматриваемаго значенія V и тѣмъ доказываютъ, что послѣднее — ихъ интегралъ. Легко видѣть, что это —

полный интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, онъ зависитъ отъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ $b, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$, и функціональный опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, \quad b_2, \ldots b_{n-m}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, такъ какъ для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ функціи $\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}}$ обращаются въ b_i и разсматриваемый опредѣлитель становится равнымъ 1.

Такимъ образомъ, при помощи функціи V, мы получаемъ какъ полный интегралъ уравненій (1), такъ и интегральныя уравненія для системы (3). Эта функція въ предлагаемой теоріи представляетъ полную аналогію съ упомянутой якобіевской, и мы можемъ, по справедливости назвать ее *главной функціей* разсматриваемыхъ уравненій.

Въ заключеніе изложенной теоріи легко вывести изъ нея нѣсколько слѣдствій, касающихся интегрированія уравненій (3), или, какъ разсматриваетъ С. Ли, соотвѣтствующей имъ системы линейныхъ уравненій съ частными производными *). Замѣтимъ прежде всего, что система (3) представляетъ обобщеніе *канонической* системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, получаемой изъ нея при $m=1$. Поэтому можно предложить называть эти уравненія *канонической системой въ полныхъ дифференціалахъ*, а перемѣнныя x_{m+i}, p_{m+i} каноническими перемѣнными соотвѣтственно положительнаго и отрицательнаго классовъ.

Слѣдствіе первое. *Если уравненія*

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = b_i, \\ i = 1, 2, \ldots n-m, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

*гдѣ b_i — произвольныя постоянныя, — независимые между собой интегралы системы (3), находящіеся въ инволюціи **) и разрѣшающіеся относительно всѣхъ p, то остальные ея $n-m$ интеграловъ находятся при помощи квадратуръ.*

---

*) Math. An., Bd. 11, S. 464. Система линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ, соотвѣтствующая уравненіямъ (3), представляется въ видѣ

$$(p_h + H_h, \varphi) = 0, \; h = 1, 2, \ldots m,$$

гдѣ φ — неизвѣстная функція.

**) Т. е. удовлетворяющіе тождественно условіямъ

$$(\psi_k, \psi_h) = \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial\psi_k}{\partial p_{m+\nu}} - \frac{\partial\psi_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial\psi_h}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до $n-m$.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тождества

$$(p_h + H_h,\ \psi_k) = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots m;\quad k = 1, 2, \ldots n - m.$$

Поэтому, въ силу условій (2) и инволюціи интеграловъ (13), уравненія (1) и (13) представляютъ систему въ инволюціи n дифференціальныхъ уравненій, разрѣшающихся относительно всѣхъ частныхъ производныхъ p. Слѣдовательно, полный интегралъ уравненій (1), удовлетворяющій требованіямъ *теоремы первой*, получается квадратурой точнаго дифференціала

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s.$$

Если интегралъ послѣдняго есть $z = V + b$, гдѣ b—новая произвольная постоянная, то искомые интегралы опредѣляются по формуламъ

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i,\ i = 1,\ 2, \ldots n - m,$$

гдѣ a_i — новыя произвольныя постоянныя.

Доказанное предложеніе есть очевидное обобщеніе извѣстной *теоремы Ліувилля* *) относительно интегрированія канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Высказано и доказано оно было впервые С. Ли **) въ нѣсколько иной формѣ, и представляетъ, несомнѣнно, одно изъ важнѣйшихъ его открытій въ теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Предлагаемыя здѣсь формулировка получаемаго результата и самое его доказательство отличаются простотой и краткостью сравнительно съ первыми.

Слѣдствіе второе. *Если уравненія*

$$\left.\begin{aligned} &\psi_i(x_1,\ x_2, \ldots x_n,\ p_{m+1},\ p_{m+2}, \ldots p_n) = b_i, \\ &i = 1, 2, \ldots k;\quad k < n - m, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

гдѣ b_i — произвольныя постоянныя,—независимые между собой интегралы системы (3), находящіеся въ инволюціи и разрѣшающіеся относительно k изъ перемѣнныхъ p, то разысканіе остальныхъ ея интеграловъ приводится къ интегрированію канонической системы $2n - 2m - 2k$ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Пусть уравненія (14) разрѣшаются относительно $p_{m+1}, p_{m+2}, \cdot\cdot p_{m+k}$. Уравненія (1), (14), а потому и получаемыя изъ нихъ слѣдующія

---

*) Journal de Lionville, 1-re série, t. XX. p. 137.

**) Math. An., Bd. 11, S. 469, Theorem I и Satz 4, или ср. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 329, n⁰ 138.

$$\left.\begin{array}{c} p_h + H'_h(b_1, b_2, \ldots b_k, x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+k+1}, p_{m+k+2}, \ldots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m+k, \end{array}\right\} \quad (15)$$

находятся въ инволюціи. Очевидно, если значеніе

$$z = V(x_1, x_2, \ldots x_n, b_1, b_2, \ldots b_k, b_{k+1}, \ldots b_{n-m}) + b,$$

гдѣ b, b_{k+1}, b_{k+2}, ... b_{n-m} — новыя произвольныя постоянныя,—полный интегралъ послѣдней системы, при чемъ опредѣлитель

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+k+1}}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+k+2}}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_{k+1}, \quad b_{k+2}, \ldots b_{n-m}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, то это же значеніе z есть полный интегралъ системы (1), удовлетворяющій условіямъ *теоремы первой*. Такимъ образомъ задача приводится къ разысканію указанной функціи V, или къ интегрированію канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{array}{c} dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{h=1}^{m+k} \frac{\partial H'_h}{\partial p_{m+i}} dx_h, \\ \\ dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{h=1}^{m+k} \frac{\partial H'_h}{\partial x_{m+i}} dx_h, \\ \\ i = k+1, k+2, \ldots n-m. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Итакъ, если извѣстны k интеграловъ (14), то порядокъ (т. е. число уравненій) разсматриваемой канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ понижается на $2k$ единицъ.

Слѣдствіе третье. *Задача интегрированія канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ (3) состоитъ въ выполненіи ряда $n-m$ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ* *) $2n-2m$, $2n-2m-2$, ... 4, 2 *и одной квадратуры.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = b_1, \quad (17)$$

гдѣ b_1 — произвольная постоянная, — интегралъ системы (3). Функція ψ_1 есть интегралъ системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи ψ

---

*) Согласно установившемуся обычаю, называемъ *операціей интегрированія μ-аго порядка* операцію вычисленія одного интеграла системы μ-аго порядка уравненій въ полныхъ дифференціалахъ $\mu+\nu$ перемѣнныхъ, гдѣ ν — произвольное цѣлое число.

$$(p_h + H_h\,,\ \psi) = 0\,,$$

$$h = 1\,,\ 2\,,\ldots m.$$

Послѣдняя, извѣстно *), имѣетъ $2n - 2m$ различныхъ интеграловъ, независимыхъ между собой относительно $x_{m+i}\,,\ p_{m+i}$. Предположимъ, что интегралъ (17) разрѣшается относительно p_{m+1}. Въ силу предыдущаго предложенія, порядокъ разсматриваемой системы (3) понижается на двѣ единицы. Съ полученной системой въ полныхъ дифференціалахъ вида (16), при $k = 1$, поступаемъ какъ съ (3). Продолжая эти вычисленія далѣе, мы придемъ, очевидно, къ задачѣ разысканія полнаго интеграла n уравненій съ частными производными въ инволюціи, какъ въ *слѣдствіи первомъ*, и, стало быть, разрѣшимъ, при помощи указанныхъ операцій, задачу интегрированія системы (3).

Примѣчаніе. По предположенію интегралы (13), (14) и (17) заключаютъ перемѣнныя p. Если эти интегралы не содержатъ ихъ вовсе, то послѣдній случай приводится, какъ показалъ Майеръ **), къ первому переводомъ всѣхъ или части каноническихъ перемѣнныхъ положительнаго класса въ отрицательный и наоборотъ.

Слѣдствіе четвертое. *Если функціи H_h не зависятъ отъ k какихъ-нибудь перемѣнныхъ изъ ряда $x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n$, то число и порядокъ всѣхъ операцій, необходимыхъ для интегрированія уравненій (3), понижаются соотвѣтственно на k единицъ.*

Пусть перемѣнныя $x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_k$ не входятъ въ выраженія функцій H_h. Слѣдуя Якоби ***), принимаемъ за новую неизвѣстную функцію выраженіе

$$y = z - \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

и вмѣсто независимыхъ перемѣнныхъ $x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_k$ — за новыя независимыя перемѣнныя $p_1\,,\ p_2\,,\ldots p_k$. Задача интегрированія m уравненій (1), находящихъ въ инволюціи, приводится такимъ образомъ къ интегрированію системы m уравненій, также въ инволюціи, но гдѣ число независимыхъ перемѣнныхъ есть $n - k$.

По условію функція z не входитъ явно въ уравненія (1). Легко распространить изложенную теорію съ соотвѣтствующими измѣненіями и на тотъ случай, когда разсматриваемыя уравненія зависятъ явно отъ неизвѣстной функціи.

---

*) Jordan, Cours d'Analyse, t. III, p. 74–5.

**) Math. An., Bd. VIII, S. 313.

***) Vorlesungen über Dynamik, zweite Ausgabe 1884, S. 164.

Теорія капиллярности и гидростатика.

А. П. Грузинцева.

I.

Задача о равновѣсіи жидкостей встрѣчается въ механикѣ и физикѣ. Въ первой — она составляетъ предметъ гидростатики, — во второй-же разсматривается какъ съ точки зрѣнія гидростатики, такъ и съ точки зрѣнія такъ называемой теоріи капиллярности.

Такимъ образомъ задача о равновѣсіи жидкостей въ обычномъ изложеніи разбивается на двѣ, независимыя одна отъ другой. Въ гидростатикѣ теорія строится на понятіи о гидростатическомъ давленіи или, другими словами, на *опредѣленіи* жидкости, какъ деформирующагося тѣла, характеризующагося способностью передавать давленіе равномѣрно ко всѣмъ направленіямъ нормально къ элементу поверхности. Въ ученіи же о капиллярности вводятся внутреннія молекюлярныя силы и молекюлярное давленіе, на *опредѣленіи* которыхъ и основывается вся теорія.

Эти внутреннія молекюлярныя силы разсматриваются или сами по себѣ,—это молекюлярная теорія капиллярности (Ляпляса, Пуассона и Гаусса) или со стороны того поверхностнаго натяженія, которое онѣ вызываютъ.

И результаты гидростатики и теоріи капиллярности совершенно различны: въ то время, какъ первая, основанная на понятіи о гидростатическомъ давленіи, только и даетъ рядъ заключеній объ этомъ давленіи въ извѣстныхъ простѣйшихъ случаяхъ,—вторая даетъ полную теорію явленій въ жидкостяхъ при ихъ равновѣсіи. Можно сказать болѣе: гидростатика даетъ условія равновѣсія жидкости только для особаго частнаго случая, давая въ остальныхъ случаяхъ невѣрныя слѣдствія, между тѣмъ какъ теорія капиллярныхъ явленій, дополняя результаты гидростатики, тѣмъ самымъ даетъ условія равновѣсія для общаго случая.

Но мнѣ кажется, что должна существовать такая *общая теорія равновѣсія жидкостей,* которая обнимала бы всѣ случаи, т. е. должна быть построена на самомъ общемъ опредѣленіи того аггрегатнаго состоянія, которое мы называемъ жидкимъ.

Въ этой статьѣ мы и попытаемся дать такую теорію жидкостей.

Какое же опредѣленіе жидкости положить въ основаніе новой теоріи? Опредѣленіе, принимаемое въ гидростатикѣ, представляетъ въ сущности законъ Паскаля, но понятно, что въ раціональной теоріи равновѣсія жидкостей, этотъ законъ долженъ быть полученъ, какъ слѣдствіе теоріи вмѣстѣ съ другими законами, управляющими явленіями равновѣсія жидкостей,—слѣдовательно, этимъ закономъ не должно пользоваться, какъ основаніемъ теоріи. Тѣмъ болѣе имъ нельзя пользоваться, что онъ имѣетъ мѣсто лишь *внутри* свободной массы жидкостей.

Мы положимъ въ основаніе новой теоріи слѣдующее опредѣленіе жидкости, вытекающее изъ простѣйшихъ явленій. *Жидкость мы будемъ разсматривать, какъ систему матеріальныхъ точекъ, сплошнымъ образомъ наполняющихъ данный объемъ и между которыми дѣйствуютъ внутреннія силы, работа которыхъ зависитъ отъ плотности жидкости и радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.*

Первая часть этой зависимости вытекаетъ изъ того опытнаго факта, что давленіе въ жидкости не зависитъ отъ формы или вида сосуда, въ которомъ она находится, а лишь отъ ея плотности, а вторая—изъ факта существованія поверхностнаго натяженія въ жидкостяхъ.

Что же касается вообще внутреннихъ силъ, то мы принимаемъ, что эти силы, хотя *не сами по себѣ,* а лишь вслѣдствіе *связей,* существующихъ между частицами тѣлъ во всякомъ аггрегатномъ состояніи, суть силы, имѣющія потенціалъ. Для твердаго упругаго тѣла, напримѣръ, эти силы или, лучше, этотъ потенціалъ есть функція шести деформацій, т. е. трехъ коэффиціентовъ измѣненія длины и трехъ коэффиціентовъ скашиванія. Для жидкостей же—это функція плотности и радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.

II.

Облечемъ теперь сказанное въ математическую форму и сдѣлаемъ общіе выводы.

Пусть имѣемъ жидкость въ сосудѣ и пусть въ эту жидкость погружена какая-нибудь система твердыхъ тѣлъ; для краткости рѣчи въ послѣдующемъ мы будемъ говорить просто „твердое тѣло“ вмѣсто сосуда (стѣнки его) и система твердыхъ тѣлъ. Сосудъ и твердые тѣла будемъ предполагать для простоты разсужденій уравновѣшенными самостоятельной системой силъ. Сверхъ того, мы предположимъ, что на свободной поверхности разсматриваемая жидкость соприкасается съ другой,—скажемъ, съ воздухомъ.

Разсмотримъ какую-нибудь точку жидкости M съ координатами

$$x,\ y,\ z$$

и пусть

$$X_e,\ Y_e,\ Z_e$$

будутъ составляющія внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ жидкости, а

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i$$

составляющія внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ той же точкѣ.

При этомъ подъ первыми силами мы будемъ подразумѣвать силы, источникъ происхожденія которыхъ лежитъ *внѣ* нашей системы (напримѣръ, это силы тяжести) и мы будемъ считать ихъ *заданными* напередъ. Подъ вторыми силами мы будемъ подразумѣвать силы, происходящія отъ взаимодѣйствій между точками системы; это, слѣдовательно, силы, источникъ происхожденіе которыхъ лежитъ *внутри* системы. Аггрегатное состояніе системы и обусловлено характеромъ этихъ послѣднихъ силъ.

Теперь основная теорема статики даетъ для равновѣсія точки M слѣдующія условія:

$$\left.\begin{aligned} X_e + X_i &= 0 \\ Y_e + Y_i &= 0 \\ Z_e + Z_i &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

О внутреннихъ силахъ *отдѣльно* мы ничего не знаемъ, а можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія лишь объ *ихъ работѣ*, такъ какъ на опытѣ мы наблюдаемъ обыкновенно не самыя силы, а ихъ дѣйствіе, т. е. работу. Поэтому вообразимъ, что точка M получила нѣкоторое *возможное безконечно-малое перемѣщеніе*, проекціи котораго на координатныя оси пусть будутъ:

$$\delta x,\ \ \delta y,\ \ \delta z.$$

Напишемъ далѣе уравненія (a) *во 1-хъ,* для всякой точки *внутри массы* жидкости, *во 2-хъ,* для всѣхъ точекъ *свободной поверхности* жидкости, т. е. для точекъ соприкосновенія разсматриваемой жидкости съ другой жидкостью (обыкновенно съ воздухомъ) и наконецъ *въ 3-хъ*, для точекъ, лежащихъ на *поверхности соприкосновенія жидкости съ „твердымъ тѣломъ“* (т. е. со стѣнками сосуда и погруженныхъ въ жидкость твердыхъ тѣлъ); затѣмъ умножимъ полученныя уравненія на соотвѣтственныя перемѣщенія:

$$\delta x\,,\quad \delta y\,,\quad \delta z$$

каждой точки этихъ трехъ областей и результаты сложимъ; получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\sum (X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z) + \sum\nolimits_M (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) + \\ &+ \sum\nolimits_S (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) + \sum\nolimits_{S'} (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

при чемъ для *внѣшнихъ силъ* всѣ три суммы обозначены пока однимъ символомъ,—это *заданныя силы* и ими нечего заниматься. Что же касается *внутреннихъ силъ*, то руководствуясь *принципомъ сохраненія энергіи*, прилагаемомъ и къ случаю *возможныхъ перемѣщеній* системы и *опредѣленіемъ* жидкости, какъ такого аггрегатнаго сотоянія, при которомъ работа внутреннихъ силъ выражается измѣненіемъ нѣкоторой опредѣленной функціи, называемой внутреннимъ термодинамическимъ потенціаломъ, можемъ написать, что

$$\sum\nolimits_M (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = -\,\delta U_M\,,$$

$$\sum\nolimits_S (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = -\,\delta U_S\,,$$

$$\sum\nolimits_{S'} (X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = -\,\delta U_{S'}\,.$$

Количества:

$$U_S\,,\quad U_{S'}$$

могутъ быть выражены при помощи плотности и толщины того поверхностнаго слоя на свободной поверхности жидкости и на поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“, въ которомъ проявляется *поверхностное натяженіе.* Понятно, что эта толщина зависитъ отъ радіуса сферы молекюлярнаго притяженія.

Что же касается количества

$$U_M\,,$$

то его мы должны считать функціей лишь плотности жидкости внутрь ея массы.

Пусть

$$U, \quad U_n, \quad U_{n'}$$

будутъ *удѣльныя* значенія функцій

$$U_M, \quad U_S, \quad U_{S'},$$

т. е. значенія этихъ функцій, разсчитанныхъ на единицу объема жидкости и единицу ея свободной поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“; вслѣдствіе сплошности жидкости получаемъ:

$$U_M = \int U d\tau, \quad U_S = \int U_n dS, \quad U_{S'} = \int U_{n'} dS' \tag{2}$$

при чемъ $d\tau$ есть элементъ объема внутри жидкости, dS — элементъ свободной поверхности жидкости, а dS' — элементъ поверхности соприкосновенія ея съ „твердымъ тѣломъ“. Кромѣ того, если плотность жидкости внутри ея массы будетъ ϱ, плотности въ поверхностныхъ слояхъ ϱ_1 и ϱ', а толщина ихъ ε_1 и ε', то будемъ имѣть:

$$U = F(\varrho), \quad U_n = G(\varrho_1, \varepsilon_1), \quad U_{n'} = H(\varrho', \varepsilon'). \tag{3}$$

Положимъ еще для краткости письма:

$$\sum (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z) = R_e. \tag{4}$$

Подставляя теперь все это въ равенство (1), получимъ *основное уравненіе* нашей теоріи въ слѣдующемъ видѣ:

$$R_e - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0. \tag{5}$$

Здѣсь первый интегралъ долженъ быть распространенъ на всѣ точки объема жидкости, а второй на всѣ точки поверхности, ограничивающей жидкость.

Необходимо замѣтить, что слои перемѣнной толщины ε_1 и ε' должны при всѣхъ перемѣщеніяхъ состоять изъ однихъ и тѣхъ же точекъ. Этимъ замѣчаніемъ мы ниже воспользуемся при опредѣленіи $\delta\varepsilon_1$ и $\delta\varepsilon'$.

Преобразуемъ теперь R_e. Мы приняли, что къ свободной поверхности изслѣдуемой жидкости прилегаетъ другая жидкость, напримѣръ воздухъ; но мы можемъ отвлечься отъ этой жидкости, — стоитъ только вообразить себѣ приличнымъ образомъ выбранную систему силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ свободной поверхности жидкости; эта система силъ должна быть, слѣдовательно, подобрана такъ, что равновѣсіе жидкости не нарушится, если воздухъ надъ жидкостью будетъ устраненъ.

На основаніи сказаннаго можно положить:

$$R_e = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z) dS \quad (6)$$

при чемъ первый интегралъ распространенъ на всѣ точки объема жидкости, а второй на всѣ точки свободной поверхности ея, а силы X_n, Y_n, Z_n и представляютъ ту систему поверхностныхъ силъ, которая замѣняетъ дѣйствіе жидкости, прилегающей къ изслѣдуемой.

Соединяя теперь все сказанное вмѣстѣ, мы напишемъ основное уравненіе нашей теоріи жидкостей въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned} &\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z)\, dS - \\ &\qquad - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Это уравненіе должно дать *полную теорію равновѣсія жидкостей*, т. е. оно должно дать какъ уравненія гидростатики въ обычномъ смыслѣ этого слова, такъ и основныя уравненія теоріи каппиллярности. И оно даетъ все это.

Если разсматриваемая жидкость несжимаемая, то къ уравненію (A) надо присоединить условіе несжимаемости, — условіе, представляющее разницу между капельно-жидкимъ и газообразнымъ состояніями тѣлъ.

Это условіе можно написать, какъ извѣстно, въ формѣ слѣдующаго равенства:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

или, лучше, въ видѣ интеграла, распространеннаго на всѣ точки объема жидкости:

$$\int P \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) d\tau = 0\,, \quad (8)$$

при чемъ P будетъ нѣкоторая, неизвѣстная пока, функція координатъ.

Условіе (8) при помощи извѣстнаго пріема Грина „интегрированія по частямъ“ можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int P\{[\cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z]\, dS + \\ &\quad + [\cos(n'x)\,\delta x + \cos(n'y)\,\delta y + \cos(n'z)\,\delta z]\, dS'\} + \\ &\qquad + \int \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial P}{\partial z}\,\delta z \right) d\tau = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

гдѣ n и n' суть направленія нормаловъ къ dS и dS', проведенныхъ внутрь жидкости.

III.

Теперь намъ надо преобразовать уравненіе (A), т. е. составить варіаціи входящихъ въ него интеграловъ.

Мы подробно остановимся на опредѣленіи варіаціи интеграла:

$$\int U_n dS = \int G(\varrho_1\,,\ \varepsilon_1)\, dS$$

и по ней уже легко составимъ варіацію интеграла:

$$\int U_{n'} dS' = \int H(\varrho'\,,\ \varepsilon')\, dS'.$$

Мы имѣемъ:

$$\delta \int U_n dS = \int \left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\delta\varrho_1 + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_1}\delta\varepsilon_1\right) dS + \int G(\varrho_1\,,\ \varepsilon_1)\,\delta . dS. \tag{9}$$

Составимъ сначала варіацію элемента dS свободной поверхности S жидкости. Эта поверхность S ограничена нѣкоторымъ контуромъ, а именно линіей пересѣченія свободной поверхности жидкости со стѣнками сосуда и съ поверхностями, ограничивающими погруженныя въ нее твердыя тѣла; поэтому $\delta . dS$ будетъ состоять изъ двухъ частей: одной, происходящей отъ возможныхъ перемѣщеній точекъ свободной поверхности жидкости и другой—отъ перемѣщеній точекъ, лежащихъ на контурѣ, ограничивающемъ свободную поверхность жидкости.

Обозначимъ эти варіаціи знаками (1) и (2); тогда

$$\delta . dS = \delta_1 . dS + \delta_2 dS.$$

Первую изъ этихъ варіацій найдемъ по геометрическому способу, данному еще въ 1832 году Бертраномъ *).

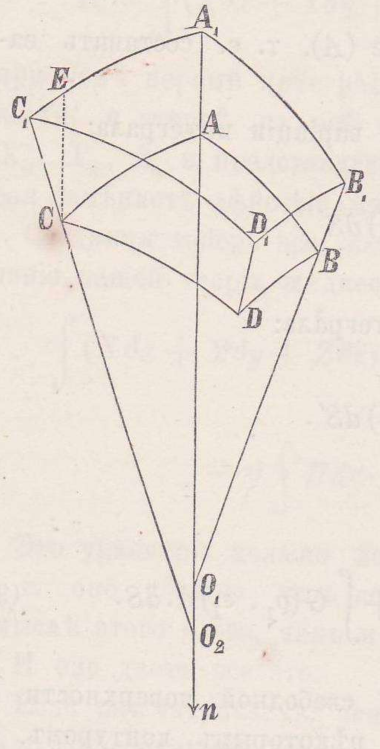
Пусть $ABCD = dS$ будетъ элементъ свободной поверхности жидкости до перемѣщенія (т. е. до деформаціи жидкости), ограниченный линіями кривизны; $A_1B_1C_1D_1 = dS_1$ тотъ-же элементъ послѣ деформаціи и пусть $AA_1 = \delta n$ будетъ нормальное перемѣщеніе точки A; тогда:

$$\delta_1 . dS = dS_1 - dS.$$

---

*) Journal de Liouville, t. XIII; p. 117. Можно опредѣлить эти варіаціи и аналитически.

Такъ какъ здѣсь AB и AC будутъ элементы двухъ ортогональныхъ линій кривизны, проведенныхъ на поверхности черезъ подошву A нормала An, направленнаго внутрь жидкости, то:


Черт. 1-й.

$$dS = AB.AC; \quad dS_1 = A_1B_1.A_1C_1;$$

но очевидно, что:

$$A_1B_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_1}\right) AB,$$

$$A_1C_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_2}\right) AC,$$

при чемъ AO_1 и AO_2 будутъ радіусами кривизны нормальныхъ сѣченій AB и AC.

Подставляя это въ выраженіе $\delta_1.dS$, находимъ:

$$\delta_1.dS = \left(\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2}\right) dS.\delta n;$$

но, если обозначимъ R_1 и R_2 главные радіусы кривизны поверхности въ точкѣ $A(x, y, z)$, то по теоремѣ Эйлера имѣемъ:

$$\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

а потому

$$\delta_1.dS = \pm\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS\delta n. \tag{10}$$

Мы написали въ кривой части два знака $\pm$, такъ какъ на чертежѣ взятъ случай *выпуклой* поверхности (знакъ $+$), т. е. такой, для которой радіусы кривизны совпадаютъ по направленію съ нормаломъ n къ поверхности; для *вогнутой-же* поверхности эти направленія прямо противоположны и придется взять знакъ $-$.

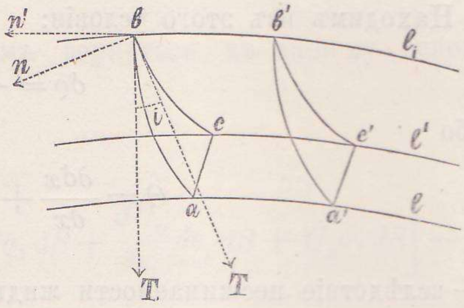
Опредѣлимъ теперь $\delta_2 dS$.

Пусть l будетъ кривая пересѣченія свободной поверхности жидкости съ твердымъ тѣломъ или стѣнкой сосуда до перемѣщенія, а l_1 послѣ перемѣщенія, и l' безконечно-близкое положеніе l на свободной поверхности жидкости тоже послѣ деформаціи, но получаемое изъ l вслѣдствіе нормальныхъ перемѣщеній ея точекъ.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$aa' = dl, \qquad ab = \delta\lambda,$$

при чемъ $\delta\lambda$ будетъ возможное перемѣщеніе точки a на поверхности соприкосновенія жидкости съ твердымъ тѣломъ или стѣнкой сосуда.



Черт. 2-й.

Пусть, далѣе, bn и bn' будутъ направленія нормаловъ къ свободной поверхности жидкости и поверхности, „твердаго тѣла" и i будетъ уголъ между нами, — это такъ называемый *краевой уголъ* или *уголъ принаровленія*; тогда получимъ:

$$aa'bb' = \delta\lambda\, dl, \qquad bccb' = \delta\lambda\, dl \cos i$$

и слѣдовательно:

$$\delta_2 . dS = \cos i . dl\delta\lambda. \tag{11}$$

Замѣтимъ кстати, что между δn и $\delta\lambda$ существуетъ простое соотношеніе; треугольникъ abc, прямоугольный при точкѣ c, даетъ:

$$ac = ab \sin i,$$

т. е.

$$\delta\lambda = \frac{\delta n}{\sin i},$$

ибо

$$ac = \delta n, \qquad ab = \delta\lambda.$$

И такъ получаемъ для полной варіаціи элемента поверхности слѣдующее выраженіе:

$$\delta . dS = \pm\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS\delta n + \cos i\, dl . \delta\lambda. \tag{12}$$

Отсюда-же мы найдемъ варіацію элемента поверхности соприкосновенія жидкости съ твердымъ тѣломъ или со стѣнками сосуда;—это будетъ на черт. 2 площадь $aa'bb'$,—слѣдовательно, получимъ:

$$\delta . dS' = \delta\lambda . dl. \tag{13}$$

Опредѣлимъ теперь варіаціи $\delta\varrho$, $\delta\varrho_1$ и $\delta\varrho'$.

Вслѣдстіе неразрывности массы имѣемъ условіе:

$$\delta . (\varrho d\tau) = 0 ,$$

гдѣ $d\tau$ элементъ объема жидкости.

Находимъ изъ этого условія:

$$\delta\varrho = -\varrho\Theta = 0 \tag{14}$$

ибо

$$\Theta = \frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z} = 0$$

— вслѣдствіе несжимаемости жидкости.

Далѣе для поверхностнаго слоя имѣемъ аналогичное равенство:

$$\delta . (\varrho_1 dn . dS) = 0 ,$$

откуда при помощи (12) находимъ:

$$\delta\varrho_1 . dS = \mp \varrho_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta n . dS - \varrho_1 \cos i \, \delta\lambda dl \tag{15}$$

и точно также для поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“:

$$\delta\varrho' . dS' = -\varrho' \delta\lambda dl \tag{16}$$

такъ какъ для поверхности твердаго тѣла или стѣнокъ сосуда частицы жидкости могутъ перемѣщаться лишь въ касательныхъ плоскостяхъ, то

$$\delta n = 0 , \qquad i = 0 .$$

Теперь надо выразить δn и $\delta\lambda$ въ функціи δx, δy, δz.

Очевидно имѣемъ:

$$\delta n = \cos(nx)\, \delta x + \cos(ny)\, \delta y + \cos(nz)\, \delta z . \tag{17}$$

Величину $\delta\lambda$ найдемъ изъ равенства:

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \delta z . \tag{18}$$

Точно также очевидно, что:

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z} \delta z , \tag{19}$$

$$\delta\varepsilon' = \frac{\partial\varepsilon'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial z} \delta z . \tag{20}$$

IV.

Теперь, подготовивъ все, мы можемъ вернуться къ нашему основному уравненію (A).

Развивая его, получаемъ:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau - \int \left[\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\delta\varrho_1\,dS + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\delta\varepsilon_1\,dS + U_n\delta.dS\right] -$$

$$-\int \left[\frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'}\delta\varrho'\,dS' + \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\delta\varepsilon'\,dS' + U_{n'}\delta.dS'\right] +$$

$$+\int (X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\,dS = 0\,,$$

если воспользуемся равенствомъ (14) и условіемъ несжимаемости жидкости.

Пользуясь далѣе равенствами (12), (13), (15), (16), (17), (18), (19) и (20), получаемъ послѣ очевидныхъ приведеній слѣдующее равенство:

$$\left.\begin{aligned}
&\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau - \\
&-\int\Big\{\Big[\pm\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\Big)\cos(nx) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}\Big]\delta x + \\
&+\Big[\pm\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\Big)\cos(ny) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y}\Big]\delta y + \\
&+\Big[\pm\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\Big)\cos(nz) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z}\Big]\delta z\Big\}dS - \\
&-\int\Big(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z}\delta z\Big]\frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon'}.dS' - \\
&-\int\Big\{\Big[\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\Big)\cos i + \Big(U_{n'} - \varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'}\Big)\Big]\Big[\frac{\partial \lambda}{\partial x}\delta x + \\
&+\frac{\partial \lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\delta z\Big]\Big\}dl + \int (X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\,dS = 0.
\end{aligned}\right\}\quad (A\ \text{bis})$$

Входящія сюда варіаціи должны удовлетворять еще условію (B).

Вычитая равенство (B) изъ $(A$ bis), получимъ уравненіе, въ которомъ варіаціи δx, δy, δz, какъ въ объемномъ интегралѣ, такъ и въ поверхностныхъ и въ интегралѣ по контуру будутъ *совершенно произвольны*, а потому коэффиціенты при нихъ будутъ отдѣльно равны нулю.

Отсюда находимъ: *во первыхъ, внутри* жидкой массы должны существовать уравненія:

$$X-\frac{\partial P}{\partial x}=0, \quad Y-\frac{\partial P}{\partial y}=0, \quad Z-\frac{\partial P}{\partial z}=0. \tag{C}$$

Во вторыхъ, на свободной поверхности жидкости должны удовлетворяться уравненія:

$$P\cos(nx)\pm\left(U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}\right)\cos(nx)+\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}-X_n=0 \tag{D}$$

и подобныя же уравненія для осей y и z.

Въ третьихъ, на поверхности твердаго тѣла и стѣнкахъ сосуда:

$$P\cos(n'x)+\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}=0 \tag{E}$$

и подобныя уравненія для осей y и z.

И наконецъ *въ четвертыхъ, на контурѣ свободной поверхности жидкости* должны быть соблюдены условія:

$$\left[\left(U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos i+\left(U_{n'}-\varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}\right)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0 \tag{F}$$

и подобныя же для осей y и z.

Положимъ теперь:

$$U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}=P_1, \qquad U_{n'}-\varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}=P'. \tag{21}$$

Замѣтимъ еще, что ε_1 и ε', какъ толщины слоевъ жидкости, измѣряются по нормаламъ къ ихъ поверхностямъ, а потому всегда можно опредѣлить такихъ два вектора K и K', чтобы:

$$\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}=K\cos(nx), \quad \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}=K\cos(ny), \quad \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}=K\cos(nz) \tag{22}$$

и

$$\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}=K'\cos(n'x), \quad \frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}=K'\cos(n'y), \quad \frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}=K'\cos(n'z). \tag{23}$$

При такихъ положеніяхъ уравненія (D), (E) и (F) обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nx) \\ Y_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(ny) \\ Z_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nz) \end{aligned}\right\} \qquad (D \text{ bis})$$

на *свободной поверхности* жидкости.

$$P + K' = 0 \qquad (E \text{ bis})$$

на *поверхности прикосновенія* жидкости съ „твердымъ тѣломъ".

На контурѣ:

$$\cos i = -\frac{P'}{P_1}. \qquad (F \text{ bis})$$

V.

И такъ уравненія равновѣсія жидкости будутъ:

Внутри жидкой массы:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z. \qquad (\mathrm{I})$$

Функція P есть такъ называемое *гидростатическое давленіе*. Изъ этихъ уравненій вытекаетъ *законъ Паскаля*.

На свободной поверхности жидкости изъ $(D$ bis$)$ находимъ для давленія $P_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}$

$$P_n = P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (\mathrm{II})$$

Это давленіе состоитъ изъ двухъ главныхъ частей:

$$P,$$

не зависящаго отъ формы свободной поверхности и давленія:

$$K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

зависящаго отъ формы свободной поверхности жидкости; это такъ называемое *капиллярное давленіе въ жидкости.*

Давленіе K есть такъ называемое *поверхностное натяженіе* жидкости.

По равенству (II) полное *капиллярное давленіе,*—назовемъ его P_k, будетъ:

$$P_k = K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Очевидно, что K будетъ капиллярнымъ давленіемъ на *плоской свободной поверхности* т. е., когда имѣемъ:

$$R_1 = R_2 = \infty.$$

Давленіе K происходитъ отъ поверхностнаго натяженія въ поверхностномъ слоѣ жидкости.

На контурѣ поверхности существуетъ условіе для краеваго угла:

$$\cos i = -\frac{P'}{P_1}. \qquad \text{(III)}$$

Этотъ уголъ i зависитъ отъ поверхностныхъ плотностей жидкости ϱ_1 и ϱ' и толщинъ поверхностныхъ слоевъ, ε_1 и ε', т. е.

$$\cos i = \Phi(\varrho_1, \varrho'; \varepsilon_1, \varepsilon'). \qquad \text{(III bis)}$$

Значитъ уголъ i постояненъ по стольку, по скольку постоянны ϱ_1, ϱ', ε_1 и ε'. Здѣсь, намъ кажется и лежитъ разгадка того факта, что краевой уголъ жидкости, напр. ртути, измѣняется со временемъ; понятно, что окисленіе ртути, запыленіе и т. п. измѣняютъ и поверхностную плотность и сцѣпленіе частицъ поверхностнаго слоя, т. е. его толщину.

Точно также, замѣчая, что плотности ϱ и толщины ε суть функціи температуры, мы всегда можемъ допустить такое значеніе для температуры, при которомъ функція Φ обращается въ нуль, т. е. тогда получимъ:

$$i = \frac{\pi}{2},$$

другими словами жидкость не будетъ смачивать твердаго тѣла.

У насъ еще осталось уравненіе (E'), но его смыслъ очевиденъ: оно даетъ давленіе жидкости на поверхности „твердаго тѣла“.

VI.

Въ предыдущемъ мы принимали, что наша жидкость несжимаема; но наши общія выводы получатся и для случая сжимаемой жидкости. Разница анализа будетъ *во 1-хъ*, въ томъ, что равенство (B) надо отбросить и *во 2-хъ*, что членъ:

$$\delta \int U d\tau$$

не изчезаетъ, а потому къ лѣвой части равенства (A bis) надо приложить

$$-\delta \int U d\tau.$$

Но:

$$\delta . \int U d\tau = \int \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} \delta\varrho + U\Theta \right) d\tau = \int \Theta \left(U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right) d\tau,$$

ибо

$$\delta . d\tau = \Theta d\tau, \quad \delta\varrho = -\varrho\Theta.$$

Положимъ:

$$U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} = -P. \tag{24}$$

Подставляя значеніе Θ и примѣняя пріемъ преобразованія Грина, находимъ:

$$-\delta . \int U d\tau = -\int P \{ [\cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z]\, dS -$$

$$-[\cos(n'x)\,\delta x + \cos(n'y)\,\delta y + \cos(n'z)\,\delta z]\, dS' \} -$$

$$-\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) d\tau.$$

Вводя это выраженіе въ лѣвую часть равенства (A bis) и приравнивая нулю коэффиціенты при δx, δy, δz во всѣхъ интегралахъ, получимъ тѣже уравненія (C), (D), (E) и (F) съ той лишь разницей, что функція P опредѣляется равенствомъ (24). Это равенство можно написать въ видѣ:

$$P = f(\varrho). \tag{25}$$

Это есть равенство характеризующее газы.

VII.

Изложенная теорія помимо того, что она сводитъ къ одному источнику и теорію гидростатики, и теорію капиллярности, обладаетъ въ сравненіи съ старыми теоріями Ляпляса и Гаусса тѣмъ преимуществомъ, что сразу вводитъ поверхностное натяженіе, чего нѣтъ въ теоріи Гаусса и даетъ очень просто условіе (III) для краеваго угла, чего непосредственно теорія Ляпляса не даетъ. Наша теорія имѣетъ пунктъ соприкосновенія съ теоріей капиллярности Пуассона въ томъ обстоятельствѣ, что у насъ поверхностная плотность не равна плотности внутри жидкости.

Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ.

Дмитрія Граве.

I.

Настоящая статья представляетъ опытъ установленія основаній общей теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ, независимой отъ какого либо аналитическаго ихъ представленія.

Будемъ разсматривать функцію $f(x, y)$ двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y, которая обращается въ нуль для всѣхъ точекъ нѣкотораго замкнутаго контура C. Внутри контура функція однозначна, конечна и непрерывна вмѣстѣ съ ея частными производными перваго порядка. Относительно производныхъ порядка выше перваго мы не дѣлаемъ никакихъ предположеній. Эти производныя могутъ переставать быть конечными и непрерывными и даже могутъ не существовать.

И такъ, мы имѣемъ, очевидно, право предполагать, что функція $f(x, y)$ имѣетъ внутри контура положительныя значенія, ибо если бы функція была отрицательна или нуль для всѣхъ точекъ внутри контура, то мы перемѣнили бы ея знакъ, разсматривая $-f(x, y)$.

Будемъ разсматривать касательную къ контуру C, опредѣляя этимъ терминомъ такую прямую, которая имѣетъ одну или нѣсколько общихъ съ контуромъ точекъ, и относительно которой весь контуръ лежитъ по одну сторону. Такое опредѣленіе будетъ годиться для всевозможныхъ контуровъ: когда контуръ имѣетъ точки перегиба, особенныя точки или прямолинейныя части.

Очевидно, что каждому направленію, проведенному на плоскости, соотвѣтствуютъ двѣ касательныя, параллельныя этому направленію, между которыми лежитъ разсматриваемый контуръ. Сопоставимъ различныя касательныя къ контуру значеніямъ нѣкотораго угла.

Возьмемъ начало прямоугольныхъ координатъ гдѣ нибудь внутри контура. Обозначимъ черезъ ω уголъ, образуемый положительнымъ направленіемъ оси x-овъ съ направленіемъ перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ начала координатъ, причемъ это направленіе будемъ считать идущимъ отъ касательной къ началу координатъ.

Кромѣ того, обозначимъ черезъ p разстояніе этой касательной отъ начала координатъ.

Обозначая черезъ α линейную функцію

$$p + x\cos\omega + y\sin\omega\,,$$

получимъ уравненіе касательной въ видѣ

$$\alpha = 0\,,$$

причемъ $\alpha > 0$ съ той стороны, гдѣ находится контуръ.

Разсмотримъ теперь функцію

$$F = f - \lambda\alpha\,,$$

гдѣ λ произвольный параметръ.

Относительно новой функціи F легко замѣтить, что ея первыя производныя выражаются такъ:

$$F'_x = f'_x - \lambda\cos\omega$$

$$F'_y = f'_y - \lambda\sin\omega\,.$$

Будемъ давать параметру λ возрастающія положительныя значенія, начиная отъ нуля.

При $\lambda = 0$ функція F совпадаетъ съ f и по предположенію имѣетъ внутри контура положительныя значенія.

При положительныхъ значеніяхъ λ для всѣхъ точекъ внутри контура $\lambda\alpha > 0$.

При достаточно малыхъ положительныхъ значеніяхъ λ будутъ оставаться внутри контура положительныя значенія функціи F.

Очевидно, что всякому значенію угла ω будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное предѣльное значеніе λ, для котораго F перестаетъ имѣть положительныя значенія внутри контура.

Обозначимъ предѣльное значеніе λ, соотвѣтствующее углу ω, черезъ λ_ω. Это предѣльное значеніе можетъ быть, конечно, безконечностью. Давая углу ω всевозможныя значенія отъ 0 до 2π, мы будемъ разсматривать соотвѣтственныя значенія λ_ω. Нетрудно видѣть, что λ_ω имѣетъ отличную отъ нуля нижнюю границу λ_0.

Послѣднее обстоятельство слѣдуетъ изъ неравенства

$$\lambda_\omega > \frac{f(x_1, y_1)}{\Delta}$$

гдѣ $f(x_1, y_1)$ одно изъ положительныхъ значеній функціи внутри контура, а Δ наибольшее изъ разстояній между параллельными касательными къ контуру.

Будемъ разсматривать на вспомогательной плоскости Π величины ω и λ, какъ полярныя координаты: ω полярный уголъ и λ радіусъ-векторъ.

Проведемъ въ плоскости Π кругъ Q радіуса λ_0 изъ полюса, какъ центра. Тогда каждой точкѣ внутри круга Q соотвѣтствуетъ своя функція F. Эта функція F обращается въ нуль на нѣкоторомъ контурѣ C_1, лежащемъ внутри контура C, и имѣетъ положительныя значенія внутри этого контура; на самомъ контурѣ C значенія F отрицательны и равны нулю въ точкахъ общихъ контуру и касательной.

Разсмотримъ функцію F, соотвѣтствующую нѣкоторой точкѣ G внутри круга Q.

Мы видимъ, что внутри даннаго контура C функція F имѣетъ положительныя значенія, но такъ какъ она конечна и непрерывна внутри этого контура, то она достигаетъ гдѣ нибудь внутри контура своего наибольшаго положительнаго значенія. Это значеніе можетъ достигаться функціею въ одной точкѣ или въ нѣсколькихъ.

Доказательство то-же, что и данное Вейерштрассомъ для случая функціи отъ одной перемѣнной независимой.

Будемъ называть совокупность точекъ внутри контура C, соотвѣтствующихъ maximum'у функціи F *фигурою maximi функціи* F.

И такъ, мы видимъ, что каждой точкѣ G внутри круга Q соотвѣтствуетъ нѣкоторая фигура maximi внутри контура C.

Прежде чѣмъ мы перейдемъ къ изученію различныхъ фигуръ maximi, соотвѣтствующихъ разнымъ точкамъ G плоскости Π, и къ изученію перемѣщенія ихъ въ зависимости отъ перемѣщенія точки G, укажемъ на извѣстное обобщеніе теоремы Ролля, состоящее въ томъ, что для каждой точки фигуры maximi, обѣ частныя производныя F'_x, F'_y должны равняться нулю т. е. должно быть:

$$F'_x = f'_x - \lambda\cos\omega = 0, \qquad F'_y = f'_y - \lambda\sin\omega = 0.$$

И такъ, мы видимъ, что прямоугольныя координаты точки G

$$p = \lambda \cos\omega, \qquad q = \lambda \sin\omega$$

опредѣляютъ значенія производныхъ f'_x, f'_y заданной функціи въ точкахъ фигуры maximi функціи F, соотвѣтствующей точкѣ G.

Обратимся къ изученію главнѣйшихъ свойствъ фигуръ maximi. Прежде всего надо сказать о видѣ фигуры maximi.

Можетъ произойти нѣсколько случаевъ.

Во первыхъ maximum функціи можетъ соотвѣтствовать конечному числу отдѣльныхъ точекъ внутри контура. Будемъ говорить, что имѣетъ мѣсто случай *обыкновеннаго пунктирнаго maximum'а*.

Словомъ обыкновенный мы будемъ отличать этотъ случай отъ случая *особеннаго пунктирнаго maximum'а*, когда число точекъ, соотвѣтствующихъ наибольшему значенію функціи безконечно велико. Очевидно, что въ особенномъ пунктирномъ maximum'ѣ точки должны асимптотически группироваться или около отдѣльныхъ точекъ, или около цѣлыхъ линій, ибо иначе не можетъ въ конечномъ пространствѣ заданнаго контура помѣститься безчисленное множество отдѣльныхъ точекъ, разстоянія между которыми конечныя.

Можетъ случиться, что maximum функціи соотвѣтствуетъ точкамъ, заполняющимъ конечное число отдѣльныхъ замкнутыхъ линій, или же не замкнутыхъ частей прямыхъ или кривыхъ линій какого либо вида и взаимнаго расположенія. Такой maximum мы будемъ называть *обыкновеннымъ линейнымъ maximum'омъ. Особеннымъ линейнымъ maximum'омъ* будемъ называть случай безчисленнаго множества линій.

Наконецъ мы будемъ называть maximum *обыкновеннымъ поверхностнымъ*, если соотвѣтствующія ему точки, заполняютъ конечное число площадокъ ограниченныхъ нѣкоторыми контурами. *Особеннымъ поверхностнымъ maximum'омъ* мы будемъ называть maximum въ случаѣ безчисленнаго множества отдѣльныхъ площадокъ. При счетѣ числа отдѣльныхъ площадокъ могутъ встрѣтиться площадки не сплошь занятыя точками, такъ что внутри площадки могутъ быть пустыя мѣста не занятыя точками фигуры.

Мыслимы самые разнообразные случаи, представляющіе комбинаціи указанныхъ трехъ основныхъ видовъ расположенія фигуры maximi, причемъ въ случаѣ линейныхъ maximum'овъ линіи могутъ обладать самыми разнообразными особенностями вида и особенными точками самыхъ разнообразныхъ свойствъ. Подобнымъ же образомъ контуры, ограничивающіе отдѣльныя части поверхностнаго maximum'а могутъ быть самаго разнообразнаго вида.

Введемъ теперь новое понятіе, которое позволитъ наши разсужденія значительно упростить, а именно понятіе о касательной прямой къ фигурѣ maximi.

Мы будемъ называть прямую L касательною къ фигурѣ maximi, если по одну сторону прямой L нѣтъ точекъ фигуры и кромѣ того существуютъ точки фигуры, разстояніе которыхъ до прямой меньше произвольно выбраннаго положительнаго числа.

Нетрудно видѣть, что каждому направленію на плоскости соотвѣтствуютъ двѣ касательныя, параллельныя этому направленію, между которыми лежитъ разсматриваемая фигура maximi.

Доказательство существованія этихъ двухъ касательныхъ то-же, что и данное Вейерштрассомъ для существованія верхней и нижней границы конечной перемѣнной.

Будемъ теперь непрерывно измѣнять направленіе пары касательныхъ. При такомъ измѣненіи касательныя будутъ огибать часть плоскости, ограниченную нѣкоторымъ контуромъ, неимѣющимъ выпуклости во внутрь.

Будемъ называть полученный такимъ образомъ контуръ *внѣшнимъ контуромъ фигуры maximi*.

Внѣшній контуръ обращается въ точку, если мы имѣемъ дѣло съ пунктирнымъ maximum'омъ, состоящимъ изъ одной точки. Внѣшній контуръ обращается въ отрѣзокъ прямой, если имѣемъ дѣло съ прямолинейнымъ maximum'омъ, или же съ пунктирнымъ maximum'омъ, состоящимъ изъ точекъ, расположенныхъ вдоль по прямой или же наконецъ только изъ двухъ точекъ.

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ внѣшній контуръ, представляетъ фигуру выпуклую со всѣхъ сторонъ, состоящую изъ ряда прямолинейныхъ или криволинейныхъ частей.

Такъ для фигуры, состоящей изъ трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, внѣшній контуръ обращается въ треугольникъ, вершинами котораго служатъ три точки.

Дуга круга даетъ черезъ прибавленіе хорды сегментъ какъ внѣшній контуръ.

Итакъ, назвавъ касательною къ внѣшнему контуру прямую, имѣющую одну или нѣсколько съ нимъ общихъ точекъ, относительно которой весь контуръ лежитъ по одну сторону, мы замѣтимъ, что касательная къ внѣшнему контуру касается его или въ одной точкѣ, или вдоль по прямой сторонѣ. Будемъ въ первомъ случаѣ называть точку касанія *выходящею* точкою внѣшняго контура.

Очевидно, что касательная къ внѣшнему контуру есть въ тоже время касательная къ соотвѣтственной фигурѣ maximi.

Нетрудно убѣдиться, что если функція f непрерывна, то всѣ выходящія точки должны быть въ то же время точками соотвѣтственной фигуры maximi. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, одну изъ выходящихъ точекъ. Къ ней можно провести одну или нѣсколько касательныхъ. Пусть будетъ указана какая нибудь касательная L выходящей точки $M_0(x_0, y_0)$ внѣшняго контура. По предыдущему должны существовать точки фигуры maximi безконечно близкія къ касательной L. Эти точки должны быть безконечно близки къ точкѣ M_0, ибо всѣ остальныя точки прямой L находятся внѣ контура и, слѣдовательно, на конечномъ разстояніи отъ всѣхъ точекъ фигуры maximi. Можетъ произойти, слѣдовательно, одно изъ двухъ: или точка M_0 есть точка фигуры maximi, и тогда теорема доказана, или же точка M_0 такова, что къ ней асимптотически приближаются точки $M_i(x_i, y_i)$ фигуры maximi. Нетрудно убѣдиться, что во второмъ случаѣ мы приходимъ къ противорѣчію.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ рядъ точекъ фигуры maximi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3), \ldots$, неопредѣленно приближающихся къ точкѣ $M_0(x_0, y_0)$, при чемъ, очевидно, будетъ:

$$\lim \{x_i\}_{i=\infty} = x_0, \qquad \lim \{y_i\}_{i=\infty} = y_0.$$

Разсмотримъ функцію $F(x, y)$, соотвѣтствующую данному внѣшнему контуру. Если функція f непрерывна, то, очевидно, должна быть непрерывна и функція F.

Далѣе

$$F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) = \ldots = F(x_i, y_i) = A,$$

гдѣ A наибольшее значеніе F внутри контура, ибо точки (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$ и т. д. принадлежатъ фигурѣ maximi.

На основаніи непрерывности функціи $F(x, y)$ значеніе $F(x_0, y_0)$ будетъ предѣльнымъ для значеній $F(x_i, y_i)$, которыя всѣ равны A; слѣдовательно, это предѣльное значеніе будетъ A, и точка M_0 принадлежитъ фигурѣ maximi, что противорѣчитъ предположенію.

Точки внутри внѣшняго контура и на самомъ контурѣ, неоотвѣтствующія фигурѣ maximi, будемъ называть *свободными* точками.

Докажемъ нѣсколько весьма важныхъ предложеній относительно фигуръ maximi и внѣшнихъ контуровъ.

Для удобства дальнѣйшихъ разсужденій вмѣсто функціи $F(x, y)$, достигающей наибольшаго значенія A въ нѣкоторой точкѣ $M_0(x_0, y_0)$, соотвѣтственной фигурѣ maximi Ξ, будемъ разсматривать функцію

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0).$$

Новая функція $\Phi(x, y)$ имѣетъ ту же фигуру maximi что и функція $F(x, y)$; только она равна нулю для всѣхъ точекъ фигуры maximi и удовлетворяетъ неравенству

$$\Phi(x, y) < 0$$

для всѣхъ остальныхъ точекъ внутри контура C.

Нетрудно видѣть, что функція Φ выражается слѣдующимъ образомъ

$$\Phi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \lambda[(x - x_0)\cos\omega + (y - y_0)\sin\omega] =$$
$$= f(x, y) - f(x_0, y_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0),$$

гдѣ p_0 и q_0 значенія частныхъ производныхъ f'_x, f'_y для точекъ фигуры maximi Ξ.

Лемма I. Двѣ фигуры maximi, соотвѣтствующія двумъ различнымъ точкамъ G_1, G_2 плоскости Π не могутъ имѣть общихъ точекъ.

Доказательство очень просто. Предположимъ обратное; пусть будетъ существовать общая точка $M_1(x_1, y_1)$ у двухъ фигуръ maximi. Обозначая прямоугольныя координаты точекъ G_1, G_2 черезъ (p_1, q_1), (p_2, q_2), получимъ равенства

$$f'_x(x_1, y_1) = p_1, \qquad f'_y(x_1, y_1) = q_1,$$
$$f'_x(x_1, y_1) = p_2, \qquad f'_y(x_1, y_1) = q_2,$$

которыя противорѣчатъ существованію для точки M_1 опредѣленныхъ частныхъ производныхъ перваго порядка, ибо точки G_1 и G_2 по предположенію различны между собою и, слѣдовательно, не могутъ удовлетворяться заразъ неравенства $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

Изъ этой леммы, какъ слѣдствіе, вытекаетъ, что двѣ фигуры maximi, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ плоскости Π, должны лежать одна внѣ другой. При этомъ линейныя или площадныя части одной фигуры не могутъ касаться подобныхъ же частей другой, ибо при переходѣ черезъ точку касанія съ одной фигуры на другую частныя производныя перваго порядка переставали бы быть непрерывными.

Лемма II. Пусть будутъ даны двѣ фигуры maximi Ξ_1 и Ξ_2, соотвѣтствующія двумъ точкамъ $G_1(p_1, q_1)$ $G_2(p_2, q_2)$ плоскости Π. Возьмемъ любую точку фигуры Ξ_1 и обозначимъ ея координаты черезъ x_1, y_1; подобнымъ же образомъ, пусть будутъ координаты произвольной точки фигуры Ξ_2 обозначены черезъ x_2, y_2.

Будетъ всегда имѣть мѣсто неравенство

$$(x_1 - x_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(q_1 - q_2) < 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи того, что точка (x_1, y_1) принадлежитъ фигурѣ maximi, соотвѣтственной точкѣ G_1, имѣетъ мѣсто неравенство

$$f(x, y) - f(x_1, y_1) - p_1(x - x_1) - q_1(y - y_1) \leqq 0,$$

гдѣ знакъ равенства относится къ точкамъ фигуры maximi Ξ_1. Взявъ точку (x_2, y_2) второй фигуры maximi, получаемъ неравенство

$$(1) \qquad f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - p_1(x_2 - x_1) - q_1(y_2 - y_1) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ для фигуры maximi Ξ_2 имѣетъ мѣсто неравенство

$$f(x, y) - f(x_2, y_2) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2) \leqq 0.$$

Примѣненное къ точкѣ (x_1, y_1) первой фигуры, оно даетъ

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) - p_2(x_1 - x_2) - q_2(y_1 - y_2) < 0.$$

Складывая неравенства (1) и (2), получимъ

$$(p_2 - p_1)(x_2 - x_1) + (q_2 - q_1)(y_2 - y_1) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, мы видимъ, что имѣетъ мѣсто всегда неравенство

$$\Delta x \Delta p + \Delta y \Delta q < 0,$$

гдѣ Δx и Δy суть приращенія координатъ, соотвѣтствующія переходу отъ точки одной фигуры maximi Ξ_1 къ точкѣ другой фигуры Ξ_2, а Δp и Δq суть соотвѣтственныя приращенія первыхъ частныхъ производныхъ.

Обращаемся теперь къ закону перемѣщенія внѣшнихъ контуровъ при перемѣщеніи точки G внутри круга Q.

Лемма III. Два внѣшнихъ контура Ξ_1, Ξ_2, соотвѣтствующіе двумъ точкамъ $G_1(p_1, q_1)$, $G_2(p_2, q_2)$ плоскости Π, не пересѣкаются между собою, а лежатъ одинъ внѣ другого.

Разсмотримъ на плоскости даннаго контура прямую L, опредѣляемую уравненіемъ

$$p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2) +$$
$$+ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = 0,$$

гдѣ x_1, y_1 координаты какой нибудь точки фигуры maximi Ξ_1; x_2, y_2 координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_2. Покажемъ теперь, что всѣ точки фигуры Ξ_1 лежатъ по одну сторону прямой L на конечномъ разстояніи; подобнымъ же образомъ, всѣ точки фигуры Ξ_2 лежатъ по другую сторону этой прямой.

Обозначимъ черезъ x_1', y_1' координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_1, отличной отъ точки (x_1, y_1); если фигура Ξ_1 будетъ состоять изъ одной точки, то будетъ $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$.

Обозначая первую часть уравненія прямой L черезъ $\omega(x, y)$, получимъ

$$\omega(x_1', y_1') = p_1(x_1' - x_1) + q_1(y_1' - y_1) - p_2(x_1' - x_2) - q_2(y_1' - y_2) +$$
$$+ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2).$$

Разсмотримъ функцію $\Phi(x, y)$, соотвѣтствующую фигурѣ maximi Ξ_1 и ея точкѣ (x_1, y_1), и обозначимъ ее черезъ

$$\Phi_{x_1, y_1}(x, y).$$

Получаемъ

$$\Phi_{x_1 y_1}(x, y) = f(x, y) - f(x_1, y_1) - p_1(x - x_1) - q_1(y - y_1),$$

$$\Phi_{x_2 y_2}(x, y) = f(x, y) - f(x_2, y_2) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2).$$

Но $\Phi_{x_1 y_1}(x_1', y_1') = 0$ и слѣдовательно,

$$f(x_1, y_1) + p_1(x_1' - x_1) + q_1(y_1' - y_1) = f(x_1', y_1').$$

Слѣдовательно

$$\omega(x_1', y_1') = \Phi_{x_2 y_2}(x_1', y_1') \leqq -\delta_1,$$

гдѣ δ_1 есть разность между $F_{x_2 y_2}(x_2, y_2)$ и наибольшимъ значеніемъ $F_{x_2 y_2}(x, y)$ для различныхъ точекъ фигуры Ξ_1.

Нетрудно видѣть, съ другой стороны, что $\omega(x_2', y_2')$, гдѣ x_2', y_2 суть координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_2, можетъ быть выражена черезъ значеніе функціи $\Phi_{x_1, y_1}(x, y)$, а именно

$$\omega(x_2', y_2') = -\Phi_{x_1 y_1}(x_2', y_2') \geqq +\delta_2,$$

гдѣ δ_2 есть разность между $F_{x_1 y_1}(x_1, y_1)$ и наибольшимъ значеніемъ функціи $F_{x_1 y_1}(x, y)$ для различныхъ точекъ фигуры Ξ_2. Отсюда мы видимъ, что $\omega(x_1', y_1')$ и $\omega(x_2', y_2')$ разныхъ знаковъ и по абсолютной величинѣ не меньше меньшаго изъ чиселъ δ_1, δ_2. Слѣдовательно, двѣ фигуры maximi Ξ_1, Ξ_2, а слѣдовательно, и ихъ внѣшніе контуры лежатъ по разныя стороны прямой L. Кромѣ того, если мы проведемъ прямыя параллельныя прямой L: одну со стороны контура Ξ_1 на разстояніи

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2}},$$

другую со стороны контура Ξ_2 на разстояніи

$$\frac{\delta_2}{\sqrt{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2}},$$

то въ пространствѣ между этими прямыми не будетъ точекъ принадлежащихъ контурамъ Ξ_1 и Ξ_2, что и требовалось доказать.

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе *разстояніе* между двумя внѣшними контурами, разумѣя подъ нимъ кратчайшее разстояніе между точками этихъ двухъ контуровъ.

Будемъ теперь двѣ точки плоскости Π сближать; покажемъ, что разстояніе между соотвѣтственными контурами можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ при достаточномъ сближеніи точекъ. Докажемъ для этой цѣли слѣдующую лемму.

Лемма IV. При безпредѣльномъ приближеніи точки G_2 къ точкѣ G_1 соотвѣтственный контуръ Ξ_2 безпредѣльно приближается къ контуру Ξ_1.

Эта лемма можетъ быть точнѣе формулирована такъ: при достаточномъ сближеніи точекъ G_1 и G_2 можно сдѣлать разстояніе между двумя соотвѣтственными контурами меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа. Допустимъ обратное, а именно, что вокругъ контура Ξ_1 можно описать контуръ C, всѣ точки котораго на конечномъ разстояніи отъ точекъ контура Ξ_1, и внутрь котораго не могутъ попадать точки контура Ξ_2, какъ бы мы близко отъ точки G_1 ни выбирали точку G_2.

Возьмемъ неравенство

$$\Delta x\,\Delta p+\Delta y\,\Delta q<\Phi_{x_1y_1}(x_2\,,\,y_2).$$

Тогда, принимая во вниманіе, что

$$\Phi_{x_1y_1}(x_2\,,\,y_2)=F_{x_1y_1}(x_2\,,\,y_2)-F_{x_1y_1}(x_1\,,\,y_1),$$

гдѣ $F_{x_1y_1}(x_1\,,\,y_1)=A$ есть maximum функціи $F_{x_1y_1}(x\,,\,y)$, получимъ

$$\Phi_{x_1y_1}(x_2\,,\,y_2)<B-A\,,\quad \text{гдѣ } B<A.$$

Въ самомъ дѣлѣ, точка $(x_2\,,\,y_2)$ по предположенію остается всегда внѣ контура C; слѣдовательно, $F_{x_1y_1}(x_2\;y_2)$ не превосходитъ нѣкотораго положительнаго числа B меньшаго A.

И такъ, мы видимъ, что

$$|\Phi_{x_1y_1}(x_2\,,\,y_2)|>A-B,$$

откуда

$$|\Delta x\,\Delta p+\Delta y\,\Delta q|>A-B.$$

Мы приходимъ къ очевидному противорѣчію, ибо при достаточномъ сближеніи точекъ G_1 и G_2 приращенія Δp и Δq могутъ быть сколь угодно малы.

Лемма V. При приближеніи точки $G_i (i=1, 2, 3 \ldots)$ къ точкѣ G_0 соотвѣтственный внѣшній контуръ Ξ_2 приближается къ внѣшнему контуру Ξ_0 такимъ образомъ, что точка фигуры maximi Ξ_i не можетъ приближаться къ точкамъ свободной стороны контура Ξ_0.

Допустимъ обратное. Предположимъ, что точка $(x_i\ y_i)$ фигуры maximi Ξ_i приближается къ точкѣ (x_0', y_0') свободной стороны контура Ξ_0. Будемъ обозначать черезъ x_0, y_0 координаты какой нибудь изъ точекъ фигуры maximi Ξ_0, не указывая которой именно.

Разсмотримъ тождество

$$\Phi_{x_i y_i}(x_0', y_0') - \Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) = \Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0') + \\ + (p_0 - p_i)(x_0' - x_0) + (q_0 - q_i)(y_0' - y_0).$$

Точку (x_0, y_0) можно всегда выбрать такимъ образомъ, чтобы было

$$(p_0 - p_i)(x_0' - x_0) + (q_0 - q_i)(y_0' - y_0) \leqq 0\,;$$

для этой цѣли достаточно указать касательную къ контуру Ξ_0 параллельную прямой

$$(p_0 - p_i)\xi + (q_0 - q_i)\eta + K = 0\,,$$

такую, чтобы точки $(x_i\ y_i)$ и контуръ Ξ_0 лежали по разныя стороны этой касательной.

Получаемъ неравенство

$$\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0') - \Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) \leqq \Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0').$$

Такъ какъ точка (x_0', y_0') не принадлежитъ фигурѣ maximi Ξ_0, то существуетъ такое положительное число δ, что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0') < -\delta.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что $\Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) < 0$, получимъ

$$|\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0')| > \delta.$$

И такъ, мы пришли къ очевидному противорѣчію, ибо послѣднее неравенство должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ i. Но при увеличеніи значка i имѣемъ, что $\lim(x_i)=x_0'$, $\lim(y_i)=y_0'$. Отсюда на основаніи непрерывности функціи $f(x, y)$ и конечности величинъ p_i и q_i получимъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ i будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0')|=|f(x_0'\ y_0')-f(x_i\ y_i)-p_i(x_0'-x_i)-q_i(y_0'-y_i)|<\varepsilon,$$

гдѣ ε произвольно малое положительное число, что противорѣчитъ неравенству, написанному раньше.

Лемма VI. При безпредѣльномъ приближеніи внѣшняго контура Ξ_2 къ контуру Ξ_1 точка G_2 приближается къ точкѣ G_1.

Эта лемма есть предложеніе обратное леммѣ IV и слѣдуетъ непосредственно изъ леммы V и непрерывности первыхъ производныхъ $f_x'(x_i\ y)$, $f_y'(x, y)$.

Возьмемъ на плоскости Π двѣ опредѣленныя точки G_1 и G_2. Пусть будутъ соотвѣтственные внѣшніе контуры Ξ_1, Ξ_2. Нетрудно убѣдиться, что перемѣщенію точки по прямой G_1G_2 будетъ соотвѣтствовать непрерывная полоса внѣшнихъ контуровъ, идущая отъ контура Ξ_1 къ контуру Ξ_2. Въ сказанномъ мы убѣдимся слѣдующимъ образомъ. Проведемъ произвольное поперечное сѣченіе P заданаго контура, дѣлящее внутренность контура на двѣ области A, B, въ которыхъ лежатъ: въ одной контуръ Ξ_1, въ другой контуръ Ξ_2. Покажемъ теперь, что, какъ бы ни было проведено поперечное сѣченіе P, будетъ существовать на прямой $G_1\,G_2$ между точками G_1 и G_2 такая точка G_0, соотвѣтственный контуръ которой Ξ_0 имѣетъ общія точки съ линіею P.

Раздѣлимъ отрѣзокъ $G_1\,G_2$ пополамъ точкою G_3. Координаты этой послѣдней будутъ

$$\left(\frac{p_1+p_2}{2},\ \frac{q_1+q_2}{2}\right).$$

Разсмотримъ контуръ Ξ_3, соотвѣтствующій точкѣ G_3.

Можетъ случиться одно изъ двухъ: или этотъ контуръ Ξ_3 будетъ имѣть точки общія съ линіею P, и тогда теорема справедлива, или же нѣтъ. Тогда контуръ Ξ_3, не касаясь линіи P, долженъ лежать въ одной изъ областей A, B. Пусть Ξ_3 лежитъ въ области A; тогда возьмемъ за новыя точки $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ точку G_3 и точку G_2, при чемъ первой соотвѣтствуетъ контуръ Ξ_3, лежащій въ области A, а второй контуръ Ξ_2, лежащій въ области B. Если контуръ Ξ_3 попадаетъ въ область B, то принимаемъ за точки $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ точки G_1, G_3. Дѣлимъ теперь далѣе отрѣзокъ $G_1^{(1)}\,G_2^{(1)}$ точкою $G_3^{(1)}$ пополамъ и принимаемъ за новыя точки $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ или точки $G_1^{(1)}$, $G_3^{(1)}$, или точки $G_3^{(1)}$, $G_2^{(1)}$

такимъ образомъ, чтобы контуръ точки $G_1^{(2)}$ лежалъ въ области A, а контуръ точки $G_2^{(2)}$ въ области B. Мы предполагаемъ конечно, что контуръ точки $G_3^{(1)}$ не имѣетъ общихъ точекъ съ линiею P, ибо иначе справедливость теоремы слѣдуетъ непосредственно.

Продолжая далѣе сказанное дѣленiе промежутковъ, мы или придемъ непосредственно къ точкѣ $G_3^{(i)}$, контуръ которой имѣетъ общiя точки съ линiею P, или же получимъ два безконечныхъ ряда точекъ

$$G_1, \; G_1^{(1)}, \; G_1^{(2)}, \; G_1^{(3)}, \ldots, G_1^{(i)}, \ldots,$$

$$G_2, \; G_2^{(1)}, \; G_2^{(2)}, \; G_2^{(3)}, \ldots, G_2^{(i)}, \ldots,$$

приближающихся къ нѣкоторой точкѣ G_0. Докажемъ, что эта предѣльная точка имѣетъ контуръ Ξ_0, имѣющiй общiя точки съ линiею P. Допустимъ обратное, а именно, что контуръ Ξ_0 не имѣетъ общихъ точекъ съ линiею P и что, слѣдовательно, онъ лежитъ въ одной изъ областей A, B. Предположимъ, что онъ лежитъ въ области A. Разсмотримъ контуры, соотвѣтствующiе ряду точекъ

$$G_2, \; G_2^{(1)}, \; G_2^{(2)}, \ldots, G_2^{(i)} \ldots$$

Всѣ эти контуры лежатъ въ области B и, слѣдовательно, на конечномъ разстоянiи отъ контура Ξ_0, что приводитъ къ противорѣчiю, ибо точки $G_2^{(i)}$ съ увеличенiемъ значка i приближаются сколь угодно близко къ точкѣ G_0. И такъ, мы видимъ, что предѣльный контуръ Ξ_0 долженъ имѣть общiя точки съ линiею P.

Высказанное предложенiе можетъ быть выражено еще такъ: при перемѣщенiи точки по прямой G_1G_2 соотвѣтственный контуръ описываетъ нѣкоторую непрерывную полосу. Будемъ называть подобную полосу *прямолинейною полосою*, связывающею два контура Ξ_1 и Ξ_2.

Очевидно, что всякiе два произвольныхъ контура могутъ быть связаны одною и только одною прямолинейною полосою.

Возьмемъ въ плоскости Π нѣкоторый сомкнутый криволинейный контуръ простого вида, т. е. такой, который пересѣкается всякою прямою въ двухъ точкахъ. Возьмемъ на этомъ контурѣ рядъ точекъ G_1, G_2, $G_3, \ldots, G_n$. Соединимъ эти точки прямыми линiями; тогда получимъ нѣкоторый многоугольникъ $G_1, G_2, \ldots, G_n, G_1$, вписанный въ разсматриваемый контуръ. Построивъ внѣшнiе контуры $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$, соотвѣтствующiе различнымъ вершинамъ нашего многоугольника, мы можемъ съ каждой изъ сторонъ многоугольника сопоставить прямолинейную полосу, связывающую каждые два послѣдовательные изъ ряда внѣшнихъ контуровъ $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$. Получимъ рядъ прямолинейныхъ полосъ, начинающiйся съ нѣкотораго контура Ξ_i, непрерывно проходящiй черезъ всѣ контуры $\Xi_{i+1}, \ldots, \Xi_n, \Xi_1, \ldots, \Xi_{i-1}$ и заканчивающiйся въ томъ же контурѣ Ξ_i. Такимъ образомъ мы приходимъ къ понятію о *многоугольномъ циклѣ* внѣшнихъ контуровъ.

Увеличивая до безконечности число сторонъ вписаннаго многоугольника такимъ образомъ, чтобы всѣ стороны безконечно уменьшались, мы приходимъ къ понятію о *криволинейномъ циклѣ*, какъ предѣльной фигурѣ по отношенію къ соотвѣтствующему многоугольному циклу.

Всякій криволинейный циклъ будетъ обладать свойствомъ, что изъ всякой его точки можно будетъ попасть въ другую, принадлежащую ему точку, непрерывнымъ передвиженіемъ по точкамъ цикла. Будемъ называть каждый изъ контуровъ, образующихъ циклъ, элементомъ цикла. Каждый криволинейный циклъ разбиваетъ всѣ контуры на двѣ категоріи: внутренніе относительно цикла и внѣшніе относительно него.

Мы будемъ называть контуръ внутреннимъ относительно цикла, если нельзя попасть изъ точекъ его на основной контуръ C непрерывнымъ движеніемъ, не пересѣкая цикла.

Нетрудно убѣдиться, что, если мы разсматриваемъ нѣкоторый циклъ L и соотвѣтственный контуръ Λ на плоскости Π, то контурамъ maximi, внутреннимъ относительно цикла L, будутъ соотвѣтствовать точки плоскости Π, лежащія внутри контура Λ, и обратно.

Мы докажемъ это предложеніе, проводя черезъ контуръ, лежащій внутри цикла L, всевозможныя прямолинейныя полосы и замѣчая, что каждая изъ этихъ полосъ должна пересѣкать циклъ по крайней мѣрѣ въ одномъ элементѣ.

Теперь обращаемся къ доказательству слѣдующаго весьма важнаго предложенія.

Теорема. Внѣшніе контуры заполняютъ непрерывнымъ образомъ внутренность цикла, соотвѣтствующаго кругу Q.

Можно было бы доказать предложеніе болѣе общее, что внѣшніе контуры заполняютъ непрерывнымъ образомъ внутренность заданнаго контура C. Въ виду того, что подобное доказательство должно, очевидно, основываться на свойствахъ даннаго контура, а также въ виду того, что это распространіе, не представляя особенной трудности, излишне для ближайшей цѣли, поставленной въ основаніе всего мемуара, мы здѣсь ограничимся доказательствомъ теоремы въ томъ видѣ, какъ она высказана.

Не трудно видѣть, что наша теорема можетъ быть иначе формулирована такъ: всякая точка плоскости внутри цикла K, соотвѣтствующаго кругу Q плоскости Π, должна принадлежать какому нибудь изъ внѣшнихъ контуровъ или лежать внутри его.

Возьмемъ произвольную точку W внутри цикла K. Разобьемъ фигуру Q плоскости Π сѣтью пересѣкающихся поперечныхъ сѣченій на меньшія части. Напримѣръ, для опредѣленности рѣчи можно будетъ разбить контуръ Q на квадраты сѣтью прямыхъ линій. Очевидно, что сѣти квадратовъ, проведенныхъ на плоскости Π, будетъ соотвѣтствовать на плоскости (x, y) сѣть, образованная двумя пересѣкающимися системами прямолинейныхъ полосъ, разбивающая внутренность цикла K на извѣстное число участковъ, ограниченныхъ циклами, соотвѣтствующими контурамъ квадратныхъ клѣтокъ нашей сѣти. Случится, очевидно, одно изъ двухъ: или точка W окажется принадлежащей какому либо контуру сѣти полосъ, или будетъ находиться внутри одного изъ этихъ участковъ N_1. Въ первомъ случаѣ точка W удовлетворяетъ высказанному предложенію, во второмъ же случаѣ беремъ соотвѣтственный квадратъ n_1 плоскости Π. Разобьемъ этотъ квадратъ на меньшіе; тогда внутренность цикла N_1 разобьется на систему новыхъ цикловъ, и опять возьмемъ тотъ изъ новыхъ цикловъ N_2, внутри котораго лежитъ разсматриваемая точка W, если только эта точка не попадаетъ на какой нибудь контуръ сѣти. Укажемъ квадратъ n_2, соотвѣтствующій циклу N_2, и будемъ его дѣлить на новые квадраты. Такимъ путемъ можетъ произойти одно изъ двухъ: или точка W попадетъ на одинъ изъ контуровъ одной изъ указанныхъ сѣтей, или же получимъ безконечный рядъ квадратовъ

$$n_1, n_2, n_3, \ldots,$$

обладающій слѣдующими свойствами:

1) каждый изъ этихъ квадратовъ заключаетъ внутри себя всѣ послѣдующіе,

2) этимъ квадратамъ соотвѣтствуютъ циклы $N_1, N_2, \ldots,$ обладающіе свойствомъ заключать внутри себя точку W.

Если стороны квадратовъ ряда $n_1, n_2, n_3, \ldots$ убываютъ такимъ образомъ, что отношеніе стороны каждаго слѣдующаго квадрата къ сторонѣ предыдущаго не превосходитъ нѣкотораго числа меньшаго единицы, то, очевидно, что такой рядъ квадратовъ опредѣляетъ нѣкоторую предѣльную точку n_0 плоскости Π или, другими словами, нѣкоторую пару чиселъ p и q.

Внѣшній контуръ, соотвѣтствующій точкѣ n_0 долженъ, очевидно, представлять изъ себя фигуру, къ которой приближается циклъ N_k по мѣрѣ увеличенія значка k и, слѣдовательно, предѣльный внѣшній контуръ долженъ представлять фигуру, заключающую внутри себя точку W. Въ частномъ случаѣ контуръ можетъ обратиться въ точку W.

Внѣшніе контуры, какъ мы уже видѣли, образуютъ всегда простую сомкнутую фигуру безъ входящихъ частей и, слѣдовательно, могутъ имѣть въ качествѣ предѣльныхъ фигуръ или точку, или отрѣзокъ прямой.

Будемъ называть случай внѣшняго контура, обращающагося въ точку, случаемъ *изолированнаго maximum'а.*

Прямолинейные внѣшніе контуры могутъ заполнять площадки конечныхъ размѣровъ, которыя будемъ называть *линейчатыми.*

Дадимъ теперь строгое доказательство существованія безчисленнаго множества изолированныхъ maxima.

Возьмемъ произвольный внѣшній контуръ A и на немъ выходящую точку M. Изъ точки M, какъ центра, опишемъ окружность B такого радіуса, чтобы она пересѣкала данный внѣшній контуръ. Я утверверждаю, что точкамъ круга B, лежащимъ внѣ контура A, долженъ соотвѣтствовать циклъ внѣшнихъ контуровъ, огибающій нѣкоторое пространство, заключенное внутри круга.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ касательную въ точкѣ M къ внѣшнему контуру A. Эта касательная пересѣкаетъ кругъ B въ двухъ точкахъ M_1 и M_2 діаметрально противоположныхъ. Точки встрѣчи N_1 и N_2 круга съ внѣшнимъ контуромъ A должны лежать по одну сторону касательной M_1M_2, ибо весь контуръ A лежитъ по одну сторону касательной. Точки N_1 и N_2 могутъ конечно совпадать, если данный контуръ прямолинейный. Возьмемъ на кругѣ B двѣ произвольныя точки, лежащія внѣ контура A, но съ той же стороны касательной, что и контуръ: одну P_1 между точками M_1 и N_1, другую P_2 между точками M_2 и N_2. Точки P_1 и P_2 не могутъ принадлежать одному и тому же внѣшнему контуру A_1, ибо въ обратномъ случаѣ прямая P_1P_2 пересѣкала бы контуръ A и, слѣдовательно, контуры A и A_1 имѣли бы общія точки. И такъ, двигаясь по кругу B въ обѣ стороны отъ контура A, мы получаемъ двѣ криволинейныя полосы контуровъ, которыя должны, очевидно, замкнуться въ циклъ. Нетрудно видѣть, что этому циклу G будетъ соотвѣтствовать замкнутый контуръ Z на плоскости Π. Возьмемъ внутри контура Z произвольную точку H. Этой точкѣ внутри цикла G соотвѣтствуетъ нѣкоторый внѣшній контуръ A'. Этотъ контуръ можетъ обращаться въ точку, и тогда существованіе изолированнаго maximum'а доказано. Если контуръ A' не обращается въ точку, то мы разсуждаемъ относительно его такъ же какъ относительно контура A. Беремъ на немъ выходящую точку M', проводимъ изъ точки M' какъ центра кругъ B' радіуса меньшаго половины радіуса круга B, пересѣкающій контуръ A' и не встрѣчающій цикла G, что всегда возможно, ибо контуры не касаются между собою. Кругу B' будетъ соотвѣтствовать новый циклъ G' и новый контуръ Z', лежащій внутри контура Z. Возьмемъ внутри контура Z' произвольную точку H'. Этой точкѣ будетъ соотвѣтствовать контуръ A''. Если контуръ A'' обращается въ точку, теорема доказана. Если же контуръ A'' не представляетъ точки, продолжаемъ разсужденіе далѣе. Беремъ на контурѣ

A'' выходящую точку M'', изъ этой точки какъ центра проводимъ кругъ B'' радіуса меньше половины радіуса круга B', не встрѣчающій цикла G'. Продолжая далѣе указанное построеніе, мы придемъ къ одному изъ двухъ случаевъ: или непосредственно укажемъ изолированный maximum, или рядъ круговъ B, B', B'', ... будетъ неопредѣлено продолжаться, и тогда эти круги приближаются къ нѣкоторой предѣльной точкѣ M_0. Докажемъ теперь, что предѣльная точка M_0 будетъ изолированнымъ maximum'омъ.

Докажемъ предварительно слѣдующую лемму.

Лемма VII. На всякомъ внѣшнемъ контурѣ, соотвѣтствующемъ точкѣ $G_1(p_1, q_1)$ плоскости Π, можно указать точку (x_1, y_1), принадлежащую фигурѣ maximi, такую, что для всякой свободной точки (x_1', y_1') этого контура имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1', y_1') < \Phi_{x_0, y_0}(x_1, y_1),$$

гдѣ

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1)$$

функція, соотвѣтствующая точкѣ G_0 плоскости Π. Пусть будутъ координаты точки G_0 p_0 и q_0.

Тогда имѣемъ, очевидно,

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1', y_1') - \Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1) = \Phi_{x_1 y_1}(x_1', y_1') + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta = (p_1 - p_0)(x_1' - x_1) + (q_1 - q_0)(y_1' - y_1).$$

Теперь мы видимъ, что

$$\Phi_{x_1 y_1}(y_1', y_1') < 0,$$

ибо точка (x_1', y_1') не принадлежитъ фигурѣ maximi.

Что же касается величины Δ, то мы всегда можемъ точкою (x_1, y_1) распорядиться такъ, чтобы было $\Delta \leqq 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ къ контуру, соотвѣтствующему точкѣ G_1, касательную, направленіе которой перпендикулярно къ прямой $G_0 G_1$, если оси координатъ плоскости Π считать совпадающими съ осями координатъ плоскости (x, y), заставляя, конечно, обѣ плоскости совпасть. Такихъ касательныхъ будетъ, очевидно, двѣ; возьмемъ ближайшую къ точкѣ (x_0, y_0). Точки касанія этой касательной съ соотвѣтственною фигурою maximi могутъ быть приняты за точку (x_1, y_1), ибо тогда для всѣхъ точекъ, принадлежащихъ контуру, имѣетъ мѣсто неравенство $\Delta \leqq 0$, что и требовалось доказать.

Продолжаемъ теперь прерванное доказательство. Возьмемъ произвольную точку внутри даннаго контура C; пусть координаты этой точки будутъ x_1, y_1. Эта точка M_1 будетъ находиться на площади нѣкотораго внѣшняго контура. Предположимъ, что точка M_1 принадлежитъ соотвѣтственной фигурѣ maximi; потомъ разсмотримъ случай, когда точка (x_1, y_1) будетъ свободная. Пусть точка M_1 принадлежитъ фигурѣ maximi, соотвѣтствующей точкѣ $G_1(p_1, q_1)$ плоскости Π. Обозначимъ координаты предѣльной точки M_0 черезъ x_0, y_0. Разсмотримъ рядъ круговъ B, B', B'', ... Соединимъ на плоскости Π прямою точку G_1 съ точкою G_0, имѣющей координаты p_0, q_0, съ которою стремятся совпасть (на основанiи леммы VI) контуры Z, Z', Z'', ... Этой прямой соотвѣтствуетъ прямолинейная полоса контуровъ на плоскости x, y. Разсмотримъ циклы, соотвѣтствующiе кругамъ B, B', B'', ... Эти циклы пересѣкаются съ прямолинейною полосою по ряду контуровъ

$$\Xi, \Xi', \Xi'', \ldots .$$

Будемъ обозначать черезъ x_i, y_i координаты точки, принадлежащей фигурѣ maximi $\Xi^{(i)}$.—Контурамъ $\Xi^{(i)}$ будутъ соотвѣтствовать на прямой $G_0 G_1$ точки $G_i(p_i, q_i)$, приближающiяся съ возрастанiемъ числа i къ предѣльной точкѣ G_0.

Докажемъ теперь, что точка M_0 будетъ представлять изолированный maximum.

Для этой цѣли достаточно показать, что функцiя

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0)$$

будетъ отрицательная для всякой точки (x_1, y_1) отличой отъ (x_0, y_0). Согласно условiю, мы предполагаемъ сначала, что (x_1, y_1) принадлежитъ нѣкоторой фигурѣ maximi Ξ_1. Покажемъ теперь, что, если

$$\Phi_{x_i y_i}(x, y) = f(x, y) - f(x_i, y_i) - p_i(x - x_i) - q_i(y - y_i),$$

гдѣ (x_i, y_i) одна изъ точекъ фигуры maximi $\Xi^{(i)}$, то будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < 0.$$

Послѣднее неравенство очевидно; что же касается перваго, то можно замѣтить, что будетъ имѣть мѣсто тождество

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) - \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) = \Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_i, y_i) + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta = (p_i - p_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) + (q_i - q_{i+1})(y_1 - y_{i+1}).$$

Нетрудно видѣть, что общая величина дробей

$$\frac{p_i - p_{i+1}}{p_1 - p_{i+1}}, \quad \frac{q_i - q_{i+1}}{q_1 - q_{i+1}}$$

есть число положительное α, представляющее отношеніе отрѣзковъ $G_i G_{i+1}$, $G_1 G_{i+1}$, вслѣдствіе чего получаемъ

$$\Delta = \alpha[(p_1 - p_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) + (q_1 - q_{i+1})(y_1 - y_{i+1})];$$

на основаніи же леммы II мы видимъ, что $\Delta < 0$; кромѣ того, очевидно,

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_i, y_i) < 0.$$

Слѣдовательно, неравенство доказано.

Будемъ безпредѣльно увеличивать число i. Тогда имѣемъ

$$\lim(x_i) = x_0, \qquad \lim(y_i) = y_0.$$

Съ другой стороны, на основаніи непрерывности функціи $f(x, y)$,

$$\lim f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0),$$

и наконецъ

$$\lim(p_i) = p_0, \qquad \lim(q_i) = q_0,$$

такъ что имѣемъ

$$\lim \Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) = \Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1).$$

На основаніи же неравенства, выведеннаго выше, получаемъ

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Остается теперь разобрать случай, когда точка (x_1, y_1) свободная. Въ этомъ случаѣ, на основаніи леммы VII, получимъ для одной изъ точекъ (x_1', y_1'), принадлежащихъ фигурѣ maximi контура Ξ_1, неравенства

$$\Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i x_i}(x_1' y_1') < 0$$

и доказывающія предложеніе.

Приведенное доказательство существованія изолированныхъ maxima показываетъ, что около каждой выходящей точки каждаго изъ внѣшнихъ контуровъ существуетъ безчисленное множество изолированныхъ maxima.

II.

Обратимся теперь къ геометрическому толкованію приведенныхъ общихъ изслѣдованій, а также сдѣлаемъ нѣкоторые выводы, относящіеся къ теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка.

Если для всѣхъ точекъ внутри контура C задана однозначная непрерывная функція $f(x, y)$, обращающаяся въ нуль для точекъ контура и имѣющая опредѣленныя и непрерывныя внутри контура C частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, то тѣмъ самымъ задана часть поверхности, ограниченная плоскимъ контуромъ C. Подобная часть поверхности можетъ быть названа сегментомъ.

Независимыя перемѣнныя x и y можно разсматривать, какъ это мы и дѣлали въ первой главѣ, какъ прямоугольныя координаты на плоскости контура C. Если мы возставимъ въ началѣ координатъ перпендикуляръ къ плоскости x, y и примемъ его за ось z-овъ, то уравненіе поверхности будетъ

$$z = f(x, y),$$

при чемъ, по опредѣленію функціи, это уравненіе имѣетъ мѣсто лишь для точекъ лежащихъ внутри контура.

Возьмемъ какую нибудь точку $G_0(p_0, q_0)$ плоскости Π. Ей будетъ соотвѣтствовать нѣкоторый внѣшній контуръ Ξ_0. Пусть будетъ одна изъ точекъ фигуры maximi этого контура $M_0(x_0, y_0)$.

Уравненіе

$$z = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

представляетъ уравненіе плоскости P, касательной къ поверхности въ ея точкѣ

$$[x_0, y_0, f(x_0, y_0)].$$

Эта касательная плоскость имѣетъ общими съ поверхностью всѣ точки, проекціи которыхъ на плоскость x, y принадлежатъ фигурѣ maximi Ξ_0. Будемъ называть фигуру на касательной плоскости, проекціею которой на плоскости x, y является внѣшній контуръ Ξ_0, *элементомъ касанія*.

Элементомъ касанія будетъ точка, если соотвѣтственный maximum будетъ изолированный. Въ послѣднемъ случаѣ мы будемъ называть точку касанія *выходящею* точкой поверхности.

Примѣры простѣйшихъ поверхностей: шара, эллипсоида и другихъ показываютъ, что выходящія точки могутъ заполнять собою всю поверхность.

Мы доказали въ первой главѣ необходимость существованія безчисленнаго множества выходящихъ точекъ поверхности. Является теперь важнымъ узнать, будутъ ли онѣ непрерывнымъ образомъ заполнять нѣкоторую часть конечныхъ размѣровъ.

Послѣ безуспѣшныхъ попытокъ доказать это свойство, не предполагая существованія вторыхъ производныхъ, я пришелъ къ убѣжденію, что оно, вообще говоря, не имѣетъ мѣста, т. е., что могутъ существовать поверхности, выходящія точки которыхъ не заполняютъ сплошнымъ образомъ никакой площади конечныхъ размѣровъ.

Покажемъ достойный вниманія примѣръ поверхностей такого рода. Эти поверхности, которымъ я далъ названіе *поліэдральныхъ* *), обладаютъ слѣдующими свойствами.

Онѣ представляютъ нѣчто среднее между многогранниками съ одной стороны и кривыми поверхностями съ другой. Эти поверхности суть дѣйствительно кривыя, ибо при непрерывномъ перемѣщеніи точки касанія касательная плоскость всегда существуетъ и мѣняетъ свое направленіе непрерывно. Съ другой стороны эти поверхности заполнены сплошь плоскими частями, число которыхъ безконечно велико. По послѣднему свойству эти поверхности близки къ многогранникамъ.

Подъ сплошнымъ заполненіемъ плоскими гранями мы разумѣемъ слѣдующее свойство поліэдральныхъ поверхностей. Какую бы часть поверхности конечной площади мы ни взяли, въ нее попадаютъ плоскія грани. Это свойство можетъ быть формулировано еще точнѣе.

Какъ бы мала ни была площадь разсматриваемой части поліэдральной поверхности, эта часть или принадлежитъ вся плоской грани, или въ нее попадаетъ безчисленное множество плоскихъ граней или ихъ частей.

Пояснимъ теперь теоретическія соображенія первой части на примѣрѣ поліэдральныхъ поверхностей.

Возьмемъ функцію $\vartheta(x)$ опредѣляемую слѣдующимъ образомъ.

Опредѣлимъ ее для положительныхъ значеній x.

Всякое положительное число x можетъ быть представлено однимъ только образомъ при помощи ряда

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i},$$

*) *Gravé.* Sur les lignes composées de parties réctilignes. Comptes Rendus de l'Acad. de Paris (1898. n⁰ II).

гдѣ n нечетное число, а $a_0, a_1, a_2, \ldots$ цѣлыя положительныя числа или нули, при чемъ $a_i < n$, если $i > 0$, и эти числа, начиная съ нѣкотораго, не равны всѣ $n-1$.

Нетрудно видѣть, что сказанное совпадаетъ съ представленіемъ числа x по системѣ счисленія, основаніе которой равно n.

Можетъ произойти одно изъ двухъ:

a) въ ряду чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

всѣ четныя, будетъ ли отличныхъ отъ нуля число конечное или нѣтъ, ибо мы причисляемъ нуль къ числамъ четнымъ;

b) существуютъ числа нечетныя, изъ которыхъ первое a_k.

Пусть будетъ $n = 2m - 1$, гдѣ m произвольное натуральное число.

Опредѣлимъ функцію $\vartheta(x)$ особенно для каждаго изъ двухъ случаевъ *a*), *b*).

Въ случаѣ *a*) положимъ

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_i}{2} = b_i, \ldots,$$

и пусть значеніе функціи $\vartheta(x)$ будетъ

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{b_i}{m^i}.$$

Въ случаѣ *b*) положимъ

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2} = b_{k-1}, \quad \frac{a_k + 1}{2} = b_k,$$

и пусть значеніе функціи $\vartheta(x)$ будетъ

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}.$$

Мы исключили случай, когда всѣ числа a_i, начиная съ нѣкотораго, равны $n-1$, но нетрудно видѣть, что опредѣленіе функціи $\vartheta(x)$ годится и для этого случая.

Разсмотримъ это обстоятельство.

Если въ рядѣ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число отличныхъ отъ нуля конечно, при чемъ послѣднее a_l, тогда число x можетъ быть представлено въ двухъ видахъ

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_l}{n^l},$$

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_l - 1}{n^l} + \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{n-1}{n^i}.$$

Если изъ чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_l$ нечетное только послѣднее a_l, то число x по первому виду представленія принадлежитъ къ случаю b), а по второму—къ случаю a).

Нетрудно видѣть, что оба вида представленія числа x даютъ одно и тоже значеніе функціи $\vartheta(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_{l-1}}{2} = b_{l-1}, \quad \frac{a_l + 1}{2} = b_l$$

и замѣчая, что

$$\frac{a_l - 1}{2} = b_l - 1, \quad \frac{n-1}{2} = m - 1,$$

получимъ для $\vartheta(x)$ два равныхъ между собою значенія

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_l}{m^l},$$

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_l - 1}{m^l} + \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{m-1}{m^i}.$$

Подобнымъ же образомъ не приводятъ къ противорѣчію и случаи, когда въ ряду чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_l$ или нѣтъ нечетныхъ, или нечетныя числа появляются раньше послѣдняго a_l.

Итакъ видимъ, что функція $\vartheta(x)$ опредѣлена вполнѣ.

По этому опредѣленію получаемъ

$$\vartheta(0) = 0, \qquad \vartheta(1) = 1, \qquad \vartheta(2) = 2 \qquad \text{и т. д.},$$

и, вообще говоря, для всякаго натуральнаго числа p получаемъ

$$\vartheta(p) = p.$$

Кромѣ того, справедливы слѣдующія неравенства: если $p < x < p+1$, то $p < \vartheta(x) < p+1$, а если

$$x = p + \alpha,$$

гдѣ

$$0 < \alpha < 1,$$

то

$$\vartheta(x) = p + \vartheta(\alpha).$$

Отсюда мы видимъ, что достаточно разсматривать значенія функціи при $x < 1$, т. е. предполагать $a_0 = 0$.

Покажемъ, что функція $\vartheta(x)$ неубывающая.

Возьмемъ два значенія x

$$x_1 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i'}{n^i}.$$

Если $x_2 > x_1$, то, очевидно, должно быть

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2, \ldots, a_{l-1}' = a_{l-1}, \quad a_l' > a_l,$$

гдѣ число l можетъ быть равнымъ единицѣ.

Если первое нечетное число въ этихъ двухъ разложеніяхъ будетъ $a_k' = a_k$, гдѣ $k < l$, то, очевидно, будетъ

$$\vartheta(x_2) = \vartheta(x_1).$$

Пусть теперь первое нечетное число въ рядѣ чиселъ $a_1, a_2, \ldots$ будетъ a_k, а въ рядѣ $a_1', a_2', a_3', \ldots$ будетъ a_s.

Придется разсмотрѣть четыре случая

I) $k > l, \quad s > l,$

II) $k = l, \quad s > l,$

III) $k > l, \quad s = l,$

IV) $k = s = l.$

I) $$\vartheta(x_1) = \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_k}{m^k},$$

$$\vartheta(x_2) = \sum_{i=1}^{i=s-1} \frac{b'_i}{m^i} + \frac{b'_s}{m^s},$$

гдѣ

$$b_i = \frac{a_i}{2} \text{ при } i < k \quad \text{и} \quad b_k = \frac{a_k + 1}{2},$$

$$b'_j = \frac{a'_j}{2} \text{ при } j < s \quad \text{и} \quad b'_s = \frac{a'_s + 1}{2}.$$

Мы видимъ, что

$$b_j = b'_j \text{ при } j < l \quad \text{и} \quad b'_l > b_l;$$

слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

Доказательство не нарушается, если одно изъ чиселъ k, s или оба безконечно велики.

II) $$a_l + 1 = 2b_l, \qquad a'_l = 2b'_l.$$

Тогда имѣемъ

$$2b'_l > 2b_l - 1,$$

$$b'_l \geqq b_l,$$

и, слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) \geqq \vartheta(x_1).$$

III) $$a_l = 2b_l, \qquad a'_l + 1 = 2b'_l.$$

Тогда имѣемъ

$$b'_l > b_l,$$

и, слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

IV) $$a_l + 1 = 2b_l, \qquad a'_l + 1 = 2b'_l, \qquad b'_l > b_l,$$

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

Итакъ доказано, что функція $\vartheta(x)$ неубывающая.

Легко теперь доказать непрерывность функціи $\vartheta(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться въ справедливости неравенства

$$0 \leqq \vartheta\left(x+\frac{1}{n^k}\right)-\vartheta(x) \leqq \frac{1}{m^k},$$

гдѣ k произвольное цѣлое число.

Функція $\vartheta(x)$, какъ непрерывная, должна проходить черезъ всякое значеніе между 0 и 1 при измѣненіи x отъ 0 до 1.

Нетрудно найти значенія x, при которыхъ функція эта имѣетъ данное значеніе y.

Представимъ это значеніе y въ видѣ ряда

$$y=\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{b_i}{m^i},$$

гдѣ b_i цѣлыя числа меньшія m или нули.

Если въ рядѣ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ безчисленное множество отличныхъ отъ нуля, то это значеніе y функція принимаетъ при значеніи x равномъ

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2b_i}{n^i}.$$

Если въ рядѣ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ конечное число отличныхъ отъ нуля чиселъ, пусть послѣднее отличное отъ нуля число будетъ b_k; тогда это значеніе

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}$$

функція принимаетъ для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ

$$\left(\sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{2b_i}{n^i}+\frac{2b_k-1}{n^k}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} \frac{2b_i}{n^i}\right).$$

Этотъ промежутокъ будетъ представлять изъ себя такъ называемый промежутокъ неизмѣняемости (Jnvariabilitätszug) функціи $\vartheta(x)$.

Такъ какъ числа вида

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2b_i}{n^i},$$

гдѣ въ ряду чиселъ $b_1, b_2, \dots$ безчисленное множество отличныхъ отъ нуля, не заполняютъ сплошнымъ образомъ никакого промежутка между 0 и 1, то, слѣдовательно, какія бы два числа α и β мы ни взяли между 0 и 1, между ними будутъ существовать промежутки неизмѣняемости функціи.

Обращаемся къ разсмотрѣнію производной функціи $\vartheta(x)$.

Нетрудно видѣть, что, если въ ряду

$$x_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}$$

существуетъ по крайней мѣрѣ одно нечетное число a_k, при чемъ рядъ не обрывается на первомъ изъ этихъ чиселъ, то x_0 попадаетъ внутрь промежутка неизмѣняемости функціи $\vartheta(x)$, и производная равна нулю

$$\vartheta'(x_0) = 0.$$

Очевидно, что для начала каждаго промежутка неизмѣняемости существуетъ равная нулю правая производная, а для конца промежутка равная нулю лѣвая производная.

Покажемъ теперь, что для концовъ промежутка не существуетъ опредѣленной производной. Тогда не будетъ опредѣленной производной и для значеній x, для которыхъ всѣ числа $a_1, a_2, a_3, \dots$ четныя.

Достаточно разсмотрѣть начало промежутка неизмѣняемости

$$x_0 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i},$$

гдѣ

$$a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2, \dots, a_{k-1} = 2b_{k-1}, \quad a_k = 2b_k - 1.$$

Возьмемъ два значенія

$$x_2 = x_0 + \xi,$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{n^l},$$

гдѣ l цѣлое и безпредѣльно возрастающее число, при чемъ $l > k$, а ξ выражается такъ

$$\xi = \frac{1}{am^l} - \frac{1}{n^l}, \qquad a > 0.$$

Нетрудно видѣть, что можно число l подобрать настолько большимъ, что ξ будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$0 < \xi < \frac{1}{n^k}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\xi > 0$, когда $am^l < n^l$, слѣдовательно, когда удовлетворяется неравенство

$$\left(\frac{n}{m}\right)^l > a,$$

а для этого достаточно положить

$$l > \frac{m(a-1)}{m-1}.$$

Съ другой стороны, всегда можно указать столь большое число l, что ξ будетъ меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа ε. Слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго l, неравенства $0 < \xi < \frac{1}{n^k}$ будутъ удовлетворяться и должно быть

$$\vartheta(x_1) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i} - \frac{1}{m^l},$$

$$\vartheta(x_2) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Но при безпредѣльномъ возрастаніи числа l имѣемъ

$$\lim x_1 = x_0, \quad \lim x_2 = x_0,$$

$$\lim \frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Вслѣдствіе совершенной произвольности числа a мы заключаемъ объ отсутствіи производной для значенія x_0.

Итакъ, опредѣленная нами функція $\vartheta(x)$, будучи непрерывною, имѣетъ производную равную нулю въ однихъ точкахъ, въ другихъ же точкахъ производная отсутствуетъ.

Разсмотримъ теперь опредѣленный интегралъ отъ нашей функціи, взятый въ границахъ отъ 0 до x:

$$\omega(x) = \int_0^x \vartheta(x)\, dx.$$

Нетрудно видѣть, что этотъ интегралъ вычисляется безъ особаго затрудненія.

Пусть верхній предѣлъ интеграла будетъ равенъ

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}.$$

Если въ ряду чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ существуютъ нечетныя, то первое изъ нихъ пусть будетъ a_k; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \omega(x) = \frac{a_0^2}{2} + a_0 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i(a_i+1)}{n^i m^i} + \\ + \sum_{l=1}^{l=k} \frac{b_l}{m^l} \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

гдѣ по прежнему

$$a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2, \ldots, a_{k-1} = 2b_{k-1}, \quad a_k + 1 = 2b_k.$$

Для случая, когда всѣ числа ряда $a_1, a_2, \ldots$ четныя, получается формула аналогичная и отличающаяся отъ приведенной только тѣмъ, что $k = \infty$.

Приведенные ряды очень удобны для вычисленія значеній функціи $\omega(x)$. Необходимо замѣтить, что въ случаѣ раціональнаго значенія верхняго предѣла рядъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ или конечный или періодическій; слѣдовательно, всѣ ряды въ (1) суммируются, и получается раціональное значеніе дли $\omega(x)$. Итакъ мы видимъ, что функція $\omega(x)$ имѣетъ раціональныя значенія при раціональныхъ значеніяхъ x.

Распространимъ функцію $\omega(x)$ на отрицательныя значенія x, предполагая ее четною т. е. удовлетворяющею равенству

$$\omega(-x) = \omega(x).$$

Нетрудно видѣть, что линія въ плоскости прямоугольныхъ координатъ x, y, опредѣляемая уравненіемъ

$$y = \omega(x),$$

обладаетъ слѣдующими замѣчательными свойствами.

Въ каждой ея точкѣ существуетъ опредѣленная касательная, которая имѣетъ съ кривою общими или одну точку касанія, или безчисленное число точекъ касанія, сплошнымъ образомъ заполняющихъ нѣкоторую прямолинейную часть кривой. Касательная измѣняетъ свое направленіе непрерывно при непрерывномъ перемѣщеніи точки касанія по линіи. Линія вся состоитъ изъ прямолинейныхъ частей, соотвѣтствующихъ промежуткамъ неизмѣняемости производной

$$\omega'(x) = \vartheta(x).$$

Такимъ линіямъ можно дать названіе *полигональныхъ кривыхъ.*

Такъ какъ для полигональной кривой вторая производная функціи, ее опредѣляющей, отсутствуетъ въ безчисленномъ числѣ точекъ, то въ этихъ точкахъ отсутствуетъ само понятіе о кривизнѣ въ томъ смыслѣ, какъ оно дается въ геометрическихъ приложеніяхъ дифференціальнаго исчисленія. Понятіе о выпуклости и вогнутости можетъ быть установлено, при чемъ придется судить, понятно, не по второй производной, а по приращенію первой производной.

Сдѣлаемъ еще нѣсколько весьма важныхъ замѣчаній относительно функціи $\omega(x)$.

Нетрудно видѣть, что имѣютъ мѣсто неравенства

$$x - \frac{1}{2n} \leqq \vartheta(x) \leqq x + \frac{1}{2n}, \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Отсюда, интегрируемъ, получаемъ

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2n} < \omega(x) < \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2n}.$$

Отсюда

$$\lim[\omega(x)]_{n=\infty} = \frac{x^2}{2}.$$

Покажемъ теперь, какъ рѣшить уравненіе

$$\omega(x) = a,$$

гдѣ a данное положительное число; другими словами, покажемъ, какъ вычислять функцію обратную.

Вслѣдствіе четности функціи $\omega(x)$ получаются два корня одинаковые по абсолютной величинѣ и разные по знаку.

Разсмотримъ $\sqrt{2\alpha}$ и обозначимъ цѣлую часть корня черезъ a_0, такъ что

$$\sqrt{2\alpha}=a_0+k. \qquad \text{гдѣ} \qquad k<1.$$

Будемъ вычислять положительный корень.

Нетрудно видѣть, что имѣютъ мѣсто неравенства

$$\omega(a_0)<\alpha<\omega(a_0+1).$$

Будемъ разсматривать рядъ чиселъ

$$a_0, \quad a_0+\frac{1}{n}, \quad a_0+\frac{2}{n}, \quad a_0+\frac{3}{n}, \ldots, a_0+\frac{n-1}{n}. \qquad (2)$$

Можетъ случиться одно изъ двухъ: 1) при нѣкоторомъ изъ этихъ чиселъ $a_0+\frac{a_1}{n}$ функція $\omega(x)$ точно равна α; тогда уравненіе рѣшено; 2) ни при какомъ числѣ изъ ряда (2) уравненіе не удовлетворяется; тогда на основаніи возрастанія функціи $\omega(x)$ можно будетъ найти такое число a_1 меньшее n, при которомъ будетъ

$$\omega\left(a_0+\frac{a_1}{n}\right)<\alpha<\omega\left(a_0+\frac{a_1+1}{n}\right),$$

а тогда искомый корень уравненія x будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$a_0+\frac{a_1}{n}<x<a_0+\frac{a_1+1}{n}.$$

Продолжая далѣе разсужденіе, мы придемъ или къ величинѣ корня x, равной

$$a_0+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{a_i}{n^i},$$

или придемъ къ неравенствамъ

$$\omega\left(a_0+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{a_i}{n^i}\right)<\alpha<\omega\left(a_0+\sum_{i=1}^{i=k-1}\frac{a_i}{n^i}+\frac{a_k+1}{n^k}\right).$$

Если эти неравенства будутъ имѣть мѣсто при всякихъ значеніяхъ k, то искомый корень x будетъ равенъ

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}.$$

Полученное рѣшеніе имѣетъ много общаго съ извлеченіемъ корня квадратнаго. Нетрудно видѣть, что при вычисленіи послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ a_1, a_2, a_3, ..., входящихъ въ составъ корня, произойдетъ значительное упрощеніе, если появится нечетное число.

Пусть первое нечетное число будетъ a_k, и пусть

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i} + \xi.$$

Для нахожденія ξ получаемъ прямо равенство

$$\alpha = \omega(x_0) + \vartheta(x_0)\,\xi,$$

гдѣ

$$x_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}.$$

Пояснимъ сказанное примѣромъ.

Требуется рѣшить уравненіе

$$\omega(x) = 3$$

въ случаѣ $m = 2$, $n = 3$.

Такъ какъ

$$\sqrt{6} = 2 + k, \qquad \text{то} \qquad x = 2 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots$$

Для чиселъ a_i возможны значенія 0, 1, 2.

Ищемъ число a_1 изъ неравенствъ

$$\omega\left(2 + \frac{a_1}{3}\right) < 3 < \omega\left(2 + \frac{a_1+1}{3}\right).$$

Итакъ, надо найти наибольшое цѣлое число, удовлетворяющее неравенству

$$2 + 2\frac{a_1}{3} + \frac{a_1(a_1+1)}{24} < 3.$$

Получаемъ $a_1 = 1$. Въ самомъ дѣлѣ

$$\omega\left(2+\frac{1}{3}\right)=2\,\frac{3}{4}<3,\quad \omega\left(2+\frac{2}{3}\right)=3\,\frac{7}{12}>3.$$

Итакъ мы замѣчаемъ, что

$$\vartheta\left(2+\frac{1}{3}\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Слѣдовательно, получимъ

$$2\,\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\,\xi=3,$$

откуда

$$\xi=\frac{1}{10},\quad x=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=2\,\frac{13}{30}.$$

Будемъ обозначать черезъ $\omega_{-1}(x)$ функцію обратную $\omega(x)$. Тогда въ данномъ примѣрѣ

$$\omega_{-1}(3)=\pm\,2\,\frac{13}{30}.$$

Итакъ мы видимъ, что функціи $\omega(x)$, $\omega_{-1}(x)$ представляютъ новые аналитическіе элементы, весьма просто вычисляемые и имѣющіе большую аналогію съ функціями x^2, $\sqrt{x}$.

Разсмотримъ теперь поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$z=\omega(r)-\omega(x)-\omega(y),$$

гдѣ r заданное число.

Функція $\omega(r)-\omega(x)-\omega(y)$ положительная внутри контура C, опредѣляемаго уравненіемъ

$$\omega(x)+\omega(y)=\omega(r).$$

Нетрудно видѣть, что этотъ контуръ есть сомкнутая линія, по виду близкая къ кругу и обращающаяся при $m=\infty$ въ кругъ

$$x^2+y^2=r^2.$$

Покажемъ, что кривая C полигональная.

Найдемъ производную y по x

$$\vartheta(x)\,dx+\vartheta(y)\,dy=0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(y)}.$$

Нетрудно видѣть, что для всякаго промежутка неизмѣняемости знаменателя $\vartheta(y)$ числитель $\vartheta(x)$ долженъ имѣть промежутки неизмѣняемости, ибо въ противномъ случаѣ функція $\vartheta(x)$ внутри нѣкотораго промежутка конечныхъ размѣровъ не имѣла бы промежутковъ неизмѣняемости, что противорѣчитъ опредѣленію функціи $\vartheta(x)$. Итакъ, кривая C полигональная; будемъ ее называть *полигональнымъ кругомъ*.

Нетрудно видѣть, что всякое плоское сѣченіе поверхности $z = \omega(r) - \omega(x) - \omega(y)$ будетъ полигональною кривою.

Итакъ, функція z положительная внутри полигональнаго круга C и обращается въ нуль для точекъ его. Возьмемъ пару значеній x_0, y_0 перемѣнныхъ независимыхъ и обозначимъ соотвѣтственныя значенія частныхъ производныхъ черезъ p_0 и q_0; тогда получимъ

$$p_0 = -\vartheta(x_0), \quad q_0 = -\vartheta(y_0).$$

Разсмотримъ функцію $\Phi_{x_0 y_0}(x, y)$.

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = \omega(r) - \omega(x) - \omega(y) - [\omega(r) - \omega(x_0) - \omega(y_0)] +$$
$$+ \vartheta(x_0)(x - x_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0) =$$
$$= \omega(x_0) - \omega(x) + \vartheta(x_0)(x - x_0) + \omega(y_0) - \omega(y) + \vartheta(y_0)(y - y_0).$$

Пусть разложенія чиселъ x_0 и y_0 въ ряды вида

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}$$

оканчиваются первымъ нечетнымъ числомъ. Пусть, кромѣ того, это послѣднее число для x_0 будетъ имѣть значекъ k, а для y_0 значекъ l; тогда, какія бы ни были числа x и y, удовлетворяющія неравенствамъ

$$0 < x - x_0 \leqq \frac{1}{n^k}, \qquad 0 < y - y_0 \leqq \frac{1}{n^l},$$

будемъ имѣть

$$\omega(x) = \omega(x_0) + \vartheta(x_0)(x - x_0),$$

$$\omega(y) = \omega(y_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0),$$

и, слѣдоватольно, для всѣхъ точекъ внутри прямоугольника Δ, образованнаго четырьмя прямыми

$$x = x_0 + \frac{1}{n^k}, \quad y = y_0 + \frac{1}{n^l}$$

$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0,$$

будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = 0.$$

Далѣе, мы замѣчаемъ, что, если будемъ разсматривать функцію

$$\psi(x) = \omega(x) - \omega(x_0) - \vartheta(x_0)(x - x_0),$$

производная которой будетъ,

$$\psi'(x) = \vartheta(x) - \vartheta(x_0),$$

то

$$\psi'(x) < 0, \quad \text{если} \quad x < x_0,$$

$$\psi'(x) = 0, \quad \text{если} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{n^k},$$

$$\psi'(x) > 0, \quad \text{если} \quad x > x_0 + \frac{1}{n^k}.$$

Слѣдовательно,

$$\psi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{n^k}$$

и

$$\psi(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0, \quad \text{или} \quad x > x_0 + \frac{1}{n^k}.$$

Итакъ мы видимъ, что для точекъ внѣ прямоугольника $\varDelta$

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) < 0.$$

Слѣдовательно, прямоугольникъ $\varDelta$ будетъ внѣшнимъ контуромъ maximi функціи $\Phi_{x_0 y_0}$, сама же фигура будетъ представлять обыкновенный поверхностный maximum, точки котораго заполняютъ сплошь внутренность даннаго прямоугольника $\varDelta$.

Прямоугольникъ $\varDelta$ обращается въ прямую линію, если одна изъ перемѣнныхъ независимыхъ x_0, y_0 имѣетъ безчисленное число четныхъ чиселъ въ ряду $a_1, a_2, a_3 \ldots$. Если обѣ перемѣнныя x_0 и y_0 имѣютъ безчисленное число четныхъ чиселъ, то мы получимъ точку, представляющую изолированный maximum.

Поверхность наша, конечно, поліэдральная, при чемъ грани ея суть параллелограммы, лежащіе въ касательныхъ плоскостяхъ

$$z - \omega(r) + \omega(x_0) + \omega(y_0) + \vartheta(x_0)(x - x_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0) = 0$$

и проэкціи которыхъ на плоскости xy суть прямоугольники $\triangle$. Когда прямоугольникъ $\triangle$ обращается въ прямую, то элементъ касанія будетъ отрѣзокъ прямой, и наконецъ получаемъ выходящую точку поверхности, когда прямоугольникъ $\triangle$ обращается въ точку.

Нетрудно убѣдиться, что поліэдральныя поверхности могутъ быть рѣшеніями самыхъ простыхъ уравненій перваго порядка съ частными производными.

Возьмемъ уравненіе поверхностей цилиндрическихъ

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1. \tag{*}$$

Мы видимъ, что поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$y-bz=\omega(x-az),$$

будетъ удовлетворять уравненію (*) и представитъ цилиндрическую поверхность, проходящую черезъ полигональную кривую $y=\omega(x)$, $z=0$. Эта цилиндрическая поверхность, очевидно, поліэдральная.

Такое рѣшеніе уравненія (*) наводитъ на нѣкоторыя соображенія относительно существующихъ опредѣленій общаго интеграла. Амперовское опредѣленіе оставляетъ по видимому въ сторонѣ поліэдральныя рѣшенія, ибо предполагаетъ дифференцируемость въ неограниченномъ числѣ разъ. Въ данномъ же случаѣ функція ω можетъ быть дифференцируема только одинъ разъ, чего и достаточно для уравненія перваго порядка.

Съ другой стороны, и измѣненное опредѣленіе Дарбу не обнимаетъ, повидимому, поліэдральныхъ рѣшеній, ибо оно имѣетъ въ виду интегралы Коши, требующіе для своего существованія разложимость въ ряды.

Для уравненія коническихъ поверхностей

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c$$

получаемъ рѣшеніе

$$\frac{y-b}{z-c}=\omega\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

представляющее поліэдральный конусъ, имѣющій вершиною точку (a, b, c).

Если мы будемъ вращать нашу полигональную кривую

$$y=\omega(x)$$

вокругъ оси y-овъ, то получимъ нѣкоторую поверхность вращенія, которая будетъ опредѣляться уравненіемъ

$$z = \omega(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

которое будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Эта поверхность состоитъ вся изъ полосъ коническихъ поверхностей, образованныхъ вращеніемъ прямолинейныхъ частей. Элементы касанія суть точки и прямыя.

Нетрудно видѣть, что поліэдральныя цилиндрическія и коническія поверхности суть развертывающіяся, хотя онѣ и не удовлетворяютъ уравненію

$$rt - s^2 = 0,$$

ибо для безчисленнаго числа точекъ на нихъ вторыя производныя не существуютъ.

Новое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ.

Дмитрія Граве.

Въ статьѣ „Zur Lehre von den unentwickelten Functionen“ (Sitzungsberichte der Berliner Academie 1897, S. 948) проф. Шварцъ далъ строгое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ. Это прекрасное доказательство основано на представленіи функцій безконечными рядами. Въ настоящей статьѣ я даю новое доказательство той же теоремы, которое, будучи вполнѣ строгимъ, не требуетъ введенія въ разсмотрѣніе рядовъ и основано на соображеніяхъ совершенно элементарныхъ.

1. Начнемъ со случая одной функціи y, отъ n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, опредѣляемой однимъ уравненіемъ

$$(1) \qquad f(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Сдѣлаемъ слѣдующія предположенія:

I. Уравненіе (1) удовлетворяется нѣкоторою системой вещественныхъ численныхъ значеній аргументовъ $y, x_1, x_2, \dots, x_n$. Для простоты можно предполагать, что эта система

$$(2) \qquad y = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0.$$

II. При значеніяхъ $n+1$ аргументовъ $y, x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ $|y| < \delta', |x_1| < \delta', |x_2| < \delta', \dots, |x_n| < \delta'$, гдѣ δ' приличнымъ образомъ указанное число, функція f вещественна, однозначна и непрерывна и имѣетъ непрерывную первую производную $f'_y(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$, значеніе которой при системѣ значеній (2) $n+1$ аргументовъ отлично отъ нуля.

Нужно доказать, что для значенiй n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лежащихъ въ области, опредѣляемой неравенствами

$$|x_1| < \delta, \ |x_2| < \delta, \ \ldots, \ |x_n| < \delta,$$

гдѣ δ нѣкоторое опредѣленное положительное число, существуетъ однозначная, непрерывная, вещественная функцiя Y, которая, будучи подставлена вмѣсто y въ уравненiе (1), обращаетъ его въ тождество и которая безконечно мала для безконечно малыхъ значенiй n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разсмотримъ функцiю отъ одной перемѣнной y

$$\varphi(y) = f(y, 0, 0, \ldots, 0),$$

которая получается изъ первой части уравненiя (1), если мы вмѣсто аргументовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставимъ равныя нулю численныя значенiя. Разсмотримъ производную

$$\varphi'(y),$$

взятую по y. По предположенiю, значенiе этой производной при $y = 0$, которое можно обозначить $\varphi'(0)$, не равно нулю. Имѣемъ право предположить $\varphi'(0) > 0$, ибо въ обратномъ случаѣ можно перемѣнить знакъ у функцiи f. По заданiю, $\varphi(0) = 0$; слѣдовательно, можно дать аргументу y два значенiя $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малое положительное число, такiя, что будетъ

$$\varphi(+\varepsilon) > 0, \quad \varphi(-\varepsilon) < 0$$

или, что одно и тоже,

$$f(+\varepsilon, 0, 0, \ldots, 0) > 0, \quad f(-\varepsilon, 0, 0, \ldots, 0) < 0.$$

Имѣя въ виду, что функцiя f непрерывна относительно всѣхъ аргументовъ, мы видимъ, что можно всегда указать такое положительное число δ, что при

$$|x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \ \ldots, \ |x_n| < \delta$$

будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$f(+\varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \quad f(-\varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0.$$

Область чиселъ G, опредѣляемая неравенствами

$$|y| \leqq \varepsilon, \quad |x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \ \ldots, \ |x_n| < \delta,$$

выборомъ чиселъ ε и δ можетъ быть сдѣлана такою, для которой f'_y остается числомъ положительнымъ.

Возьмемъ нѣкоторую по произволу выбранную систему численныхъ значеній n аргументовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изъ разсматриваемой области. Пусть эти значенія будутъ

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0.$$

Разсмотримъ тогда функцію отъ одной перемѣнной y

$$f(y, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \varphi_1(y).$$

Очевидно, что эта функція удовлетворяетъ неравенствамъ

$$\varphi_1(+\varepsilon) > 0, \qquad \varphi_1(-\varepsilon) < 0;$$

кромѣ того, при $|y| \leqq \varepsilon$, $\varphi_1'(y) > 0$. Слѣдовательно, при возрастаніи аргумента y отъ значенія $-\varepsilon$ до значенія $+\varepsilon$ функція φ_1 возрастаетъ и измѣняется отъ отрицательнаго значенія $\varphi_1(-\varepsilon)$ до положительнаго значенія $\varphi_1(+\varepsilon)$. На основаніи непрерывности функціи f мы заключаемъ, что существуетъ одно опредѣленное значеніе Y^0 перемѣннаго y, заключающееся между $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, при которомъ $\varphi_1(Y^0) = 0$. Совокупность значеній Y^0, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніемъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разсматриваемой области G, составляетъ однозначную вещественную функцію Y отъ n перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющую уравненію (1) и безконечно малую при безконечно малыхъ значеніяхъ аргументовъ. Послѣднее обстоятельство слѣдуетъ изъ неравенствъ

$$|Y| < \varepsilon, \quad |x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \quad \ldots, \quad |x_n| < \delta.$$

2. Обращаемся теперь къ общему случаю.

Пусть будутъ заданы m уравненій

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right.$$

Сдѣлаемъ предположенія:

I. Уравненія (1) удовлетворяются слѣдующей системой численныхъ значеній $m+n$ аргументовъ

$$y_1 = 0, \; y_2 = 0, \ldots, y_m = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

II. При значеніяхъ $m+n$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$|y_1| < \delta', \; |y_2| < \delta', \ldots, \; |x_n| < \delta',$$

гдѣ δ' опредѣленное положительное число, функціи f_λ, гдѣ λ одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... m, однозначны, вещественны и непрерывны и имѣютъ опредѣленныя первыя производныя

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\mu} = f_{\lambda,\mu}(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которыя въ разсматриваемой области суть непрерывныя функціи $n+m$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

III. Опредѣлитель m-го порядка, составленный изъ значеній $f_{\lambda,\mu}(0, 0, \ldots, 0) = a_{\lambda,\mu}$, которыя принимаютъ частныя производныя $f_{\lambda,\mu}$ при равныхъ нулю значеніяхъ аргументовъ, имѣетъ отличное отъ нуля численное значеніе D.

Надо доказать, что для извѣстной области вблизи значеній $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существуютъ m однозначныхъ, непрерывныхъ, вещественныхъ функцій $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, которыя, будучи подставлены вмѣсто $y_1, y_2, \ldots, y_m$ въ уравненія (1), обращаютъ ихъ въ тождества и безконечно малы при безконечно малыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Предположимъ, что теорема доказана для числа функцій на единицу меньшаго, $m-1$, и покажемъ ея справедливость для числа m.

Къ системѣ m^2 величинъ $a_{\lambda,\mu}$ составляемъ имъ сопряженныя $\alpha_{\lambda,\mu}$.

Возьмемъ первыхъ $m-1$ уравненій

$$(2) \qquad f_1 = 0, \; f_2 = 0, \ldots, f_{m-1} = 0.$$

Выберемъ такіе $m-1$ изъ числа m аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m$, чтобы соотвѣтственный опредѣлитель, составленный изъ $a_{\lambda,\mu}$, не обращался въ нуль. Пусть эти аргументы будутъ $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Тогда этотъ неравный нулю опредѣлитель будетъ $\alpha_{m,m}$. По предположенію будутъ существовать $m-1$ функцій $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ отъ $n+1$ аргументовъ y_m, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, обращающихся въ нуль при $y_m = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ и безконечно малыхъ при безконечно малыхъ значеніяхъ этихъ аргументовъ.

Разсмотримъ послѣднее уравненіе $f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Всегда можно распорядиться системой такъ, чтобы $a_{m,1}$ не равнялось нулю.

Возьмемъ уравненіе

(3) $$f_m(Y, y_2, \cdots, y_{m-1}, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

получаемое изъ послѣдняго уравненія системы замѣною обозначенія y_1 на Y.

Это уравненіе даетъ Y какъ функцію отъ $n+m-1$ аргументовъ $y_2, y_3, \cdots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающуюся въ нуль при значеніи равномъ нулю всѣхъ аргументовъ. Положимъ $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$; тогда функціи $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ обратятся въ функціи $y_1', y_2', \ldots, y_{m-1}'$ отъ одной перемѣнной независимой y_m безконечно малыя при безконечно маломъ y_m.

Если мы будемъ въ послѣднемъ уравненіи (3) считать $y_2, y_3, \cdots, y_{m-1}$ функціями одного y_m, опредѣляемыми изъ системы (2), то Y обратится въ функцію Y' отъ одного аргумента y_m.

Нетрудно видѣть, что функція $Y' - y_1'$ имѣетъ *) опредѣленную производную по y_m значеніе которой при $y_m = 0$ вычисляется при помощи уравненій

(4) $$\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}\, dy_1' + a_{1,2}\, dy_2' + \ldots + a_{1,m}\, dy_m = 0, \\ a_{2,1}\, dy_1' + a_{2,2}\, dy_2' + \quad + a_{2,m}\, dy_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}\, d(Y' - y_1') + a_{m,1}\, dy_1' + a_{m,2}\, dy_2' + \ldots + a_{m,m}\, dy_m = 0. \end{array}\right.$$

Умножая эти уравненія на $\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}, \ldots, \alpha_{m,m}$ и складывая, получимъ

$$a_{m,1}\, \alpha_{m,m}\, d(Y' - y_1') + D\, dy_m = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d(Y' - y_1')}{dy_m} = \frac{D}{a_{m,1}\, \alpha_{m,m}}.$$

И такъ мы видимъ, что эта производная отлична отъ нуля.

Можно сдѣлать эту производную равною $+1$ вводя новыхъ m функцій F_μ отъ $m+n$ аргументовъ $y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$, опредѣляемыхъ уравненіями **)

---

*) Доказательство извѣстное, состоящее въ предварительномъ разсмотрѣніи конечныхъ приращеній и затѣмъ переходѣ къ предѣлу.

**) Смотри статью Шварца.

$$DF_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda,\mu} f_\lambda\,,$$

$$f_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda,\mu}\, F_\mu$$

и разсматривая систему уравненій

$$F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,,\ \ldots,\quad F_{m-1} = 0\,,\ -F_1 + F_m = 0\,.$$

Дадимъ y_m два значенія $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, гдѣ ε достаточно малое положительное число; тогда будетъ

$$Y' - y_1' > 0 \text{ при } y_m = +\varepsilon\,,$$

$$Y' - y_1' < 0 \text{ при } y_m = -\varepsilon\,.$$

Мы знаемъ, что $Y' - y_1'$ есть значеніе разности $Y - y_1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Такъ какъ эта разность непрерывная функція отъ $n+1$ аргументовъ y_m, x_1, $x_2, \cdots, x_n$, то можно указать столь малое положительно число δ, что при всякихъ значеніяхъ n аргументовъ x_1, $x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

(5) $$|x_1| < \delta\,,\ |x_1| < \delta\,,\ \ldots,\quad |x_n| < \delta\,,$$

будетъ

$$Y - y_1 > 0 \text{ при } y_m = +\varepsilon\,,$$

$$Y - y_1 < 0 \text{ при } y_m = -\varepsilon\,,$$

а δ и ε можно предполагать настолько малыми, что вслѣдствіе непрерывности частныхъ производныхъ производная $\dfrac{d(Y - y_1)}{dy_m}$ будетъ сохранять положительное значеніе и, слѣдовательно, всякому выбору произвольной системы значеній аргументовъ x_1^0, $x_2^0, \cdots, x_m^0$, удовлетворяющей неравенствамъ (5), будетъ соотвѣтствовать одно значеніе y_m^0, лежащее между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, для котораго $Y - y_1 = 0$. Слѣдовательно, для этого значенія y_m^0 существуютъ опредѣленныя численныя значенія y_1^0, $y_2^0, \cdots, y_{m-1}^0$, удовлетворяющія всѣмъ m уравненіямъ.

Совокупность различныхъ системъ значеній y_1^0, $y_2^0, \ldots, y_m^0$, соотвѣтствующихъ различныхъ системамъ значеній x_1, $x_2, \cdots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ (5) будетъ представлять собою m функцій

$$Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_m\,,$$

удовлетворяющихъ системѣ (1) и всѣмъ требованіямъ теоремы.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 24-го Января 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о вновь полученныхъ книгахъ и журналахъ.

2. Избраны единогласно въ почетные члены Общества: проф. Московскаго университета Н. Е. Жуковскій и профф. С.-Петербургскаго университета А. Н. Коркинъ и Д. К. Бобылевъ.

3. І. І. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О діаметрахъ солнца въ различныхъ направленіяхъ 28-го Іюля 1896 года“.

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Дополненіе къ сообщенію предыдущаго засѣданія“.

5. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ задачѣ о равновѣсіи упругихъ изотропныхъ цилиндровъ“.

Засѣданіе 28-го Февраля 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о выходѣ въ свѣтъ 5-го и 6-го №№ 5-го тома „Сообщеній“.

2. Предсѣдатель доложилъ письма съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ почетные члены Общества отъ профессоровъ А. Н. Коркина, Н. Е. Жуковскаго и Д. К. Бобылева.

3. Предсѣдатель доложилъ о полученіи письма отъ проф. L. Gascó изъ Валенціи съ предложеніемъ объ обмѣнѣ трудовъ Общества на экземпляры издаваемаго Gascó журнала: „Archivo de Matemáticas“.

Постановлено выслать 5-ый томъ „Сообщеній“ и продолжать обмѣнъ изданіями въ будущемъ.

4. Предсѣдатель доложилъ полученное отъ комитета по сооруженію памятника Гауссу и Веберу извѣщеніе о настоящемъ положеніи дѣла съ предложеніемъ распространить подписку, такъ какъ собранныхъ средствъ оказывается недостаточно для надлежащаго выполненія выработаннаго проэкта.

5. Предсѣдатель доложилъ о полученномъ Обществомъ отъ комитета международнаго съѣзда математиковъ въ Цюрихѣ приглашеніи принять участіе въ съѣздѣ.

6. Предсѣдатель напомнилъ Обществу о недавней кончинѣ извѣстнаго ученаго академ. Вейерштрасса.

По предложенію Предсѣдателя Общество почтило память покойнаго вставаніемъ.

7. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе о жизни и ученой дѣятельности акад. Вейерштрасса.

8. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „Опредѣленіе производной какъ понятія, выводимаго изъ теоріи преобразованій".

Засѣданіе 2-го Мая 1897 года.

1. Доложено о полученіи отвѣтныхъ писемъ отъ Эдинбургскаго Математ. Общества, отъ Академіи Физическихъ и Естественныхъ Наукъ въ Болоньѣ и отъ Американскаго Математич. Общества въ Ньюйоркѣ съ выраженіемъ согласія на предложенный Харьк. Мат. Общ. обмѣнъ изданіями.

Постановлено: выслать V томъ „Сообщеній" и въ будущемъ продолжать обмѣнъ изданіями.

2. Доложено письмо отъ Королевской Баварской Академіи Наукъ въ Мюнхенѣ, въ которомъ Академія проситъ прислать ей нѣсколько экземпляровъ „Сообщеній" для того, чтобы Академія могла ознакомиться съ этимъ журналомъ и въ зависимости отъ этого сдѣлать соотвѣтствующее постановленіе объ обмѣнѣ изданіями.

Постановлено выслать 1-й № VI-ого тома.

3. П. А. Некрасовъ сдѣлалъ сообщеніе: „Методъ комплексныхъ преобразованій и его примѣненіе къ интегрированію уравненій Динамики".

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ формулахъ, относящихся къ теоріи сферическихъ функцій".

Засѣданіе 16-го Мая 1897 года.

1. Доложено о полученіи отвѣтныхъ писемъ отъ Академіи въ Туринѣ, Академіи dei Lincei, Королевской Академіи въ Геттингенѣ, Академіи Наукъ въ Неаполѣ и Матем. Общ. въ Эдинбургѣ съ выраженіемъ согласія на обмѣнъ изданій этихъ учрежденій на „Сообщенія Мат. Общества".

Постановлено: высылать въ вышеозначенныя учрежденія „Сообщенія" Общества, начиная съ VI тома.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ".

3. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣсколько словъ объ Эваристѣ Галуа".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

21-го Сентября 1897 года.

1. Доложенъ и утвержденъ годичный отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за истекшій 1896—1897 акад. годъ.

2. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на текущій 1897—1898 акад. годъ.

Избраны: Предсѣдателемъ проф. К. А. Андреевъ; товарищами предсѣдателя: профессоры А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій; секретаремъ проф. В. А. Стекловъ.

Засѣданіе 3-го Октября 1897 года.

1. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи нѣкоторыхъ системъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными отъ нѣсколькихъ функцій".

2. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О мѣрѣ въ неэвклидовой Геометріи".

3. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О потенціалѣ двойного слоя и о методѣ К. Неймана".

Засѣданіе 31-го Октября 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ полученное отъ Акад. Ѳ. А. Бредихина письмо съ выраженіемъ благодарности за посланную ему отъ Общества привѣтственную телеграмму по случаю 40-лѣтняго юбилея его ученой дѣятельности.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О сходимости нѣкоторыхъ рядовъ".

Засѣданіе 12-го Декабря 1897 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о письмѣ, полученномъ отъ Королевскаго Общества Наукъ въ Льежѣ съ предложеніемъ объ обмѣнѣ изданіями.

Постановлено вступить въ обмѣнъ и выслать всѣ томы „Сообщеній", начиная со 2-ой серіи.

2. А. П. Грузинцевъ предложилъ обратиться въ редакцію журнала Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles въ Гарлемѣ съ предложеніемъ объ обмѣнѣ изданіями.

3. Предсѣдатель доложилъ о полученной отъ ректора университета бумагѣ съ предложеніемъ высылать изданія Общества въ Кишиневскую публичную библіотеку.

Постановлено не высылать впредь до опредѣленнаго затребованія именно изданій Харьк. Матем. Общества.

4. Предсѣдатель доложилъ о вновь полученныхъ книгахъ и журналахъ.

5. Избранъ въ члены Общества Н. Н. Салтыковъ.

6. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Задача о распредѣленіи электричества".

7. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О методѣ Неймана для рѣшенія одной задачи, относящейся къ уравненію Лапласа".

8. І. І. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „О наблюденіи короны и протуберанцевъ внѣ затмѣній".

Засѣданіе 20-го Февраля 1898 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученной черезъ ректора университета бумагѣ, содержащей просьбу болгарскаго министерства народнаго просвѣщенія объ обмѣнѣ изданіями.

Постановлено высылать, начиная съ VI-ого тома.

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Теорема Пойнтинга и ея значеніе въ электромагнитной теоріи.

3. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О сложномъ отношеніи прямой по отношенію къ тетраэдру".

Засѣданіе 27-го Марта 1898 года.

1. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „По поводу одной задачи аналитической теоріи теплоты".

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Электромагнитная теорія проводниковъ".

Засѣданіе 15-го Мая 1898 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о бумагѣ, полученной черезъ ректора университета, съ предложеніемъ принять участіе въ педагогическомъ отдѣлѣ всемірной Парижской выставки 1900 года. Постановлено принять къ свѣдѣнію и увѣдомить Правленіе, что Математическое Общество не находитъ надлежащихъ матеріаловъ для отсылки на выставку.

2. К. А. Андреевъ доложилъ письмо П. С. Флорова, въ которомъ онъ проситъ сообщить Обществу одну задачу, выражающую нѣкоторое условіе положительности корней уравненія пятой степени.

3. Н. В. Бугаевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ числовомъ тождествѣ".

4. А. М. Ляпуновъ доложилъ статью Г. В. Колосова: „Объ одномъ случаѣ движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

11-го Октября 1898 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1897—1898 акад. годъ.

2. Принятъ въ члены Общества преподаватель Харьковскаго Технолог. Института А. П. Пшеборскій (безъ избранія).

3. Предсѣдатель доложилъ о полученномъ отъ подсекціи Математики X-го съѣзда естествоиспытателей и врачей въ Кіевѣ предложеніи содѣйствовать выработкѣ библіографическаго указателя русскихъ сочиненій по Математикѣ.

Постановлено: составить указатель статей второй серіи „Сообщеній Х. М. Общ." (на двухъ языкахъ, въ хронологическомъ порядкѣ). Просить К. А. Андреева составить и препроводить В. В. Бобынину списокъ математическихъ сочиненій, вышедшихъ въ Харьковѣ съ 1804 года независимо отъ изданій Общества. Просить М. А. Тихомандрицкаго оказать содѣйствіе въ составленіи указателя по „Répertoire bibliographique".

4. Доложена бумага отъ библіотеки Туркестанскаго генералъ-губернаторства съ просьбой высылать въ эту библіотеку изданія университета и состоящихъ при немъ ученыхъ Обществъ.

Постановлено выслать „Сообщенія Х. М. Общ.", начиная со второй серіи.

5. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ для библіотеки Общества соч. М. А. Тихомандрицкаго: „Курсъ Теоріи Вѣроятностей“ и статьи Н. Я. Сонина: „Рядъ Ив. Бернулли“.

6. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 1898—1899 акад. годъ.

Избраны: Предсѣдателемъ Общества проф. К. А. Андреевъ, товарищами предсѣдателя проф. А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій, секретаремъ Общества проф. В. А. Стекловъ.

Засѣданіе 23-го Октября 1898 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о письмѣ, полученномъ отъ Казанскаго университета, съ предложеніемъ вступить въ обмѣнъ изданіями.

Постановлено: принять предложеніе, выслать всѣ томы „Сообщеній“, начиная со 2-ой серіи, и просить о присылкѣ въ обмѣнъ всѣхъ нумеровъ изданій Казанскаго университета, начиная съ 1892 года.

2. Избранъ въ члены-корреспонденты Общества профессоръ Варшавскаго университета Г. Ѳ. Вороной.

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Гидростатика и теорія капиллярности“.

4. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе способа Якоби интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка“.

Засѣданіе 4-го Декабря 1898 года.

1. Доложено письмо проф. Варш. университета Г. Ѳ. Вороного съ выраженіемъ благодарности за избраніе его въ члены-корресподенты Общества.

2. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка“.

3. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О второй теоремѣ о среднихъ величинахъ“.

4. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „О раціональныхъ преобразованіяхъ алгебраическихъ кривыхъ“.

Засѣданіе 29-го Января 1899 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письмо отъ проф. Lazzeri съ предложеніемъ вступить въ обмѣнъ изданіями Х. М. Общ. на издаваемый имъ журналъ „Periodico Matematico“. Постановлено: принять предложеніе и высылать г. Lazzeri „Сообщенія“ Общества, начиная съ VI-го тома.

2. Предсѣдатель доложилъ о просьбѣ Полтавскаго Кружка Любителей Физики и Математики высылать имъ „Сообщенія" Общества.

Постановлено: высылать, начиная съ VI-ого тома.

3. Предсѣдатель доложилъ о предложеніи Американскаго Математическаго Общества принять участіе въ библіографическомъ отдѣлѣ издаваемаго имъ журнала.

Постановлено принять къ свѣдѣнію.

4. По предложенію Н. П. Салтыкова, постановлено предложить обмѣнъ изданіями редакціи журнала: Berichte der mathematisch-physikalischen Classe der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig".

5. Произведенъ выборъ въ почетные члены Общества проф. Московскаго университета К. А. Андреева. Избранъ единогласно (per acclamationem). Постановлено увѣдомить о состоявшемся избраніи проф. К. А. Андреева черезъ распорядительный комитетъ.

6. В. П. Алексѣевскій доложилъ статью Д. А. Граве: „Общая теорія функцій двухъ независимыхъ перемѣнныхъ".

7. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка".

ОБЪЯВЛЕНІЯ

ОБЪ ИЗДАНІИ

УНИВЕРСИТЕТСКИХЪ ИЗВѢСТІЙ

(Императорскаго Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ)

въ 1899 году.

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностію Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ Университетскихъ Извѣстіяхъ печатаются:

1. Протоколы засѣданій университетскаго Совѣта.
2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.
3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.
4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.
5. Программы, конспекты, и библіографическіе указатели для учащихся.
6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студенческій ея отдѣлъ.
7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.
8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.
9. Годичные отчеты по Университету.
10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.
11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степ ней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также и самыя диссертаціи.
12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.
13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.
14. Ученые труды преподавателей и учащихся.
15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются на двѣ части — 1) оффиціальную (протоколы, отчеты и т. п. и 2)—неоффиціальную (статьи научнаго содержанія), съ отдѣлами—*критико-библіографическимъ*, посвященнымъ критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной), и *научной хроники*, заключающимъ въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при Университетѣ, и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы, указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

Университетскія Извѣстія въ 1899 году будутъ выходить въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 20 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **Извѣстій** безъ пересылки **шесть рублей пятьдесятъ копѣекъ**, а съ пересылкой **семь рублей**. Въ случаѣ выхода приложеній (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **Извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Студенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ Извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ Университетовъ 4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. иногородные могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглоблину въ С.-Петербургѣ, на Малую Садовую, № 4-й и въ Кіевъ, на Крещатикъ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Редакторъ *В. Иконниковъ.*

„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ“.

„Извѣстія“, издаваемыя подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

„Извѣстія“ раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

a. Лѣтопись Физико-Математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

b. Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

c. Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ“ могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-Математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія безплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ“ въ годъ 3 р. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-Математическаго Общества проф. **А. В. Васильевымъ**, секретаремъ Общества **В. Л. Некрасовымъ** (Университетъ) и казначеемъ Общества **А. П. Котельниковымъ** (Поперечно-Лядская, соб. домъ), въ Казани книжными магазинами **А. А. Дубровина** (Гостинный дворъ № 1) и **Н. Я. Башмакова** (Воскресенская, городской пассажъ), а также всѣми извѣстными книжными магазинами.

Первую серію „Извѣстій“ составляютъ восемь томовъ собранія протоколовъ засѣданій секціи Физико-Математическихъ Наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.