Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити.

Н. Н. Салтыкова.

1. Вопросъ о разысканіи интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, рѣшается въ этомъ изслѣдованіи по способу А. Н. Коркина, основанному, какъ извѣстно, на его же теоріи интегрированія системъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи *).

2. Назовемъ черезъ X_1, X_2, X_3 проекціи силы на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3, отнесенной къ единицѣ массы гибкой, нерастяжимой нити, плотность которой есть k, натяженіе — T, дуга, отсчитываемая отъ нѣкоторой ея данной точки, — x_0. Полагая

$$T\frac{dx_i}{dx_0}=x_{3+i}, \qquad i=1,\ 2,\ 3,$$

представимъ дифференціальныя уравненія равновѣсія нити въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{dx_0}{T}=\frac{dx_1}{x_4}=\frac{dx_2}{x_5}=\frac{dx_3}{x_6}=\frac{dx_4}{-kTX_1}=\frac{dx_5}{-kTX_2}=\frac{dx_6}{-kTX_3},$$

гдѣ

$$T=\sqrt{x_4^2+x_5^2+x_5^2}.$$

---

*) А. Коркинъ. О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка и нѣкоторыхъ вопросахъ механики. С.-Пб. 1867.

Изслѣдуемый вопросъ состоитъ въ разысканіи интеграловъ послѣдней системы дифференціальныхъ уравненій, общихъ со всякой другой системой, отличной отъ нея значеніями функцій k, X_1, X_2, X_3. Назовемъ соотвѣтствующія послѣднимъ значенія функцій для всякой другой подобной системы уравненій черезъ k_1, Y_1, Y_2, Y_3. Если уравненіе

$$z(x_0, x_1, \ldots x_6) = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная, представляетъ интегралъ, общій обѣимъ указаннымъ системамъ уравненій, то, очевидно, функція z есть частный интегралъ системы двухъ линейныхъ, однородныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными p_0, p_1, $\ldots p_6$ функціи z по независимымъ перемѣннымъ x_0, x_1, $\ldots x_6$

$$Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_{3+i}\, p_i - kTX_i\, p_{3+i}) = 0,$$

$$Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} (x_{3+i}\, p_i - k_1 TY_i\, p_{3+i}) = 0.$$

Вмѣсто второго уравненія возьмемъ разность обоихъ уравненій

$$S_1 p_4 + S_2 p_5 + S_3 p_6 = 0,$$

гдѣ введены обозначенія

$$S_i = kX_i - k_1 Y_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Мы предполагаемъ, что силы, приложенныя къ единицѣ длины нити, въ сравниваемыхъ задачахъ различны. Поэтому одна, по крайней мѣрѣ, изъ функцій S_i отлична отъ нуля. Очевидно, не нарушая общности рѣшенія, мы можемъ положить, что

$$S_1 \lessgtr 0.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія, опредѣляющія искомые интегралы, представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} Tp_0 + \sum_{i=1}^{3} x_{3+i}\, p_i + T(U_1 p_5 + U_2 p_6) = 0, \\ p_4 + V_1 p_5 + V_2 p_6 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ мы положили

$$\frac{S_2}{S_1} = V_1, \qquad \frac{S_3}{S_1} = V_2,$$

$$k(X_1 V_1 - X_2) = U_1, \qquad k(X_1 V_2 - X_3) = U_2. \tag{2}$$

Всякая задача интегрированія дифференціальныхъ уравненій равновѣсія гибкой, нерастяжимой нити разрѣшается вполнѣ шестью интегралами. Поэтому задачи эти не мотутъ имѣть болѣе пяти общихъ интеграловъ. Система уравненій (1), въ зависимости отъ значеній своихъ коэффиціентовъ, можетъ имѣть отъ пяти до одного частныхъ интеграловъ. Соотвѣтственно этому задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити имѣютъ столько же общихъ интеграловъ. Условія существованія опредѣленнаго числа частныхъ интеграловъ системы (1) даютъ уравненія для опредѣленія функцій V и U. Присоединивъ къ послѣднимъ равенства (2), получимъ условія, при которыхъ эти интегралы имѣютъ мѣсто. Дальнѣйшее изложеніе состоитъ въ изслѣдованіи всѣхъ указанныхъ возможныхъ случаевъ. При этомъ мы будемъ предполагать, *что k есть функція дуги x_0, а силы X_1, X_2, X_3 зависятъ отъ дуги и координатъ, такъ что функціи V и U зависятъ только отъ перемѣнныхъ* x_0, x_1, x_2, x_3.

3. Частные интегралы y_4, y_5 второго уравненія (1), гдѣ

$$y_4 = x_5 - V_1 x_4, \qquad y_5 = x_6 - V_2 x_4, \tag{3}$$

принимаемъ независимыми перемѣнными вмѣсто x_4, x_5, x_6. Обозначимъ въ этомъ предположеніи черезъ q_i, V_{1i}, ... частныя производныя функцій z, V_1, ... по перемѣннымъ значка i. Второе уравненіе (1) утождествляется, а первое принимаетъ видъ

$$\sqrt{ax_4^2 + 2bx_4 + d}\,(A + Bx_4) + C + Dx_4 + Ex_4^2 = 0, \tag{4}$$

гдѣ

$$a = 1 + V_1^2 + V_2^2,$$

$$b = y_4 V_1 + y_5 V_2,$$

$$d = y_4^2 + y_5^2,$$

$$A = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5,$$

$$B = -(V_{10} q_4 + V_{20} q_5),$$

$$C = y_4 q_2 + y_5 q_3,$$

$$D = q_1 + V_1 q_2 + V_2 q_3 - (V_{12} y_4 + V_{13} y_5)\, q_4 - (V_{22} y_4 + V_{23} y_5) q_5,$$

$$E = -\,[(V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}) q_4 + (V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}) q_5].$$

По теоріи Коркина уравненіе (4) не должно зависѣть отъ x_4. Выраженіе

$$b^2 - ad = -[y_4^2 + y_5^2 + (y_4 V_2 - y_5 V_1)^2]$$

равняется нулю только при условіяхъ

$$y_4 = 0\,, \qquad y_5 = 0.$$

Исключая послѣдній случай, какъ невозможный, заключаемъ, что выраженіе

$$ax_4^2 + 2bx_4 + d$$

не можетъ быть точнымъ квадратомъ. Поэтому, для того чтобы равенство (4) не зависѣло отъ x_4, необходимо должны имѣть мѣсто равенства

$$A = 0\,, \qquad B = 0\,, \qquad C = 0\,, \qquad D = 0\,, \qquad E = 0\,,$$

которыя и представляютъ уравненія, опредѣляющія искомые интегралы. Изъ второго и пятаго уравненій послѣдней системы заключаемъ, или

$$q_4 = 0\,, \qquad q_5 = 0\,,$$

или

$$\frac{V_{10}}{V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}} = \frac{V_{20}}{V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}}. \tag{5}$$

Первое предположеніе не имѣетъ мѣста, ибо ведетъ къ интегралу

$$z = \text{пост.},$$

каковой мы исключаемъ изъ разсмотрѣнія. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ изъ перваго уравненія слѣдуетъ $q_0 = 0$, изъ третьяго, такъ какъ z не зависитъ отъ y_4, y_5, слѣдуетъ $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ и, наконецъ, изъ четвертаго получаемъ $q_1 = 0$.

Итакъ, искомые интегралы опредѣляются системой уравненій

$$\left.\begin{aligned}
&q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0\,,\\
&q_1 + V_1 q_2 + V_2 q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13})\, q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23})\, q_5 = 0\,,\\
&y_4 q_2 + y_5 q_3 = 0\,,\\
&V_{10} q_4 + V_{20} q_5 = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при чемъ функціи V удовлетворяютъ уравненію (5).

Выполненное преобразованіе всегда имѣетъ мѣсто, когда функціи V конечны, опредѣленны и дифференцируемы, что мы разумѣемъ при всѣхъ нашихъ вычисленіяхъ. Это преобразованіе справедливо въ частности и для значеній $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, такъ какъ при этихъ условіяхъ выраженія (3) принимаютъ видъ x_5, x_6 и представляютъ частные интегралы уравненія $p_4 = 0$, къ которому приводится въ этомъ случаѣ второе уравненіе системы (1). Такимъ образомъ уравненія (6) опредѣляютъ всѣвозможные интегралы, общіе задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, и мы приходимъ къ изслѣдованію всѣхъ возможныхъ случаевъ, когда система (6) имѣетъ отъ пяти до одного частныхъ интеграловъ.

4. Если система (6) имѣетъ пять частныхъ интеграловъ, то три изъ ея уравненій должны уничтожаться, или въ силу остальныхъ уравненій, или тождественно, при чемъ всѣ q_i сохраняютъ значенія, отличныя отъ нуля. Если число частныхъ интеграловъ системы (6) должно быть четыре, то, или два изъ ея уравненій должны уничтожаться, при чемъ всѣ $q_i \lesseqgtr 0$, или уничтожаются три изъ ея уравненій и одна изъ производныхъ q_i. Очевидно, ни одинъ изъ указанныхъ случаевъ не можетъ имѣть мѣста. Поэтому заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити, не могутъ имѣть пяти и четырехъ общихъ интеграловъ.

5. Если система уравненій (6) имѣетъ три частныхъ интеграла, то одно изъ ея уравненій должно быть слѣдствіемъ остальныхъ. Составляя функціональные опредѣлители четвертаго порядка изъ первыхъ частей уравненій (6) по перемѣннымъ $q_0, q_1, \dots q_5$, заключаемъ, что единственное условіе, при которомъ система (6) приводится къ тремъ уравненіямъ, выражается равенствами

$$V_{10} = 0, \qquad V_{20} = 0. \tag{7}$$

По той же самой причинѣ и принимая во вниманіе разсужденія, изъ которыхъ мы пришли къ условіямъ (5), получаемъ

$$V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13} = 0, \qquad V_{21} + V_1 V_{22} + V_{23} = 0. \tag{8}$$

Уравненія, опредѣляющія искомые интегралы, принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} &F_0 = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0, \\ &F_1 = q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0, \\ &F_2 = q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Эти уравненія должны представлять якобіевскую систему, т. е. равенства

$$\left.\begin{aligned}(F_0,\,F_2)&=\frac{1}{y_4}\left(\frac{y_5}{y_4}U_1-U_2\right)q_3+\left(U_{12}+\frac{y_5}{y_4}U_{13}\right)q_4+\\&\qquad+\left(U_{22}+\frac{y_5}{y_4}U_{23}\right)q_5=0\,,\\(F_0,\,F_1)&=0\,,\qquad (F_1,\,F_2)=0\,,\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

должны удовлетворяться тождественно. Такъ какъ функціи V, U не зависятъ отъ y_4, y_5, то изъ перваго равенства заключаемъ

$$U_1=0\,,\qquad U_2=0\,.$$

Такимъ же образомъ изъ остальныхъ двухъ равенствъ находимъ

$$V_{13}=0\,,\qquad V_{12}=V_{23}\,,\qquad V_{22}=0\,,\qquad V_{122}=0\,.$$

Послѣднія уравненія совмѣстно съ (7) и (8) приводятъ опредѣленіе функцій V къ интегрированію точныхъ дифференціаловъ

$$dV_1=-\frac{V_1dx_1}{x_1+a_1}+\frac{dx_2}{x_1+a_1}\,,$$

$$dV_2=-\frac{V_2dx_1}{x_1+a_1}+\frac{dx_3}{x_1+a_1}\,,$$

гдѣ a_1 — произвольная постоянная. Отсюда

$$V_1=\frac{x_2+a_2}{x_1+a_1}\,,\qquad V_2=\frac{x_3+a_3}{x_1+a_1}\,,$$

гдѣ a_2, a_3 — произвольныя постоянныя.

Искомые интегралы опредѣляются интегрированіемъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_3-\frac{x_3+a_3-\dfrac{y_5}{y_4}(x_2+a_2)}{x_1+a_1}dx_1-\frac{y_5}{y_4}dx_2=0\,,$$

$$dy_4+\frac{y_4}{x_1+a_1}dx_1=0\,,$$

$$dy_4+\frac{y_5}{x_1+a_1}dx_1=0\,.$$

Интегралы послѣднихъ двухъ уравненій очевидны. Первое же уравненіе въ силу послѣднихъ двухъ интеграловъ становится точнымъ дифференціаламъ. Такимъ образомъ искомые интегралы принимаютъ видъ

$$y_4(x_1+a_1)=C_1\,,$$

$$y_5(x_1+a_1)=C_2\,,$$

$$\frac{x_3+a_3}{x_1+a_1}-\frac{y_5}{y_4}\frac{x_2+a_2}{x_1+a_1}=C_3\,,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 — произвольныя постоянныя. Возвращаясь къ исходной системѣ перемѣнныхъ, заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой X_1, X_2, X_3 *на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ* x_1, x_2, x_3 *выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити* x_0, *удовлетворяющими условіямъ*

$$\frac{X_1}{x_1+a_1}=\frac{X_2}{x_2+a_2}=\frac{X_3}{x_3+a_3}\,,$$

имѣютъ три общихъ интеграла

$$T\left[(x_2+a_2)\frac{dx_1}{dx_0}-(x_1+a_1)\frac{dx_2}{dx_0}\right]=C_1\,,$$

$$T\left[(x_3+a_3)\frac{dx_1}{dx_0}-(x_1+a_1)\frac{dx_3}{dx_0}\right]=C_2\,,$$

$$\frac{(x_2+a_2)\dfrac{dx_3}{dx_0}-(x_3+a_3)\dfrac{dx_2}{dx_0}}{(x_2+a_2)\dfrac{dx_1}{dx_0}-(x_1+a_1)\dfrac{dx_2}{dx_0}}=C_3\,,$$

гдѣ T — *натяженіе нити,* C_1, C_2, C_3 — *произвольныя постоянныя.*

Очевидно, послѣдній результатъ остается безъ измѣненія и въ томъ случаѣ, когда нить однородна, т. е. k — постоянная величина, а силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги.

6. Если изслѣдуемыя задачи имѣютъ два общихъ интеграла, то уравненія (6) должны представлять замкнутую систему. Составляя скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей ея уравненій третьяго и четвертаго, заключаемъ, такъ какъ эти скобки должны уничтожаться въ силу тѣхъ же уравненій третьяго и четвертаго, что и въ разсматриваемомъ случаѣ должны имѣть мѣсто уравненія (7) и (8). Такимъ образомъ искомые интегралы опредѣляются уравненіями (9), которые въ этомъ случаѣ приводятся къ замкнутой системѣ прибавленіемъ одного изъ равенствъ (10), положимъ перваго.

Излѣдуемая система уравненій становится

$$\left.\begin{aligned}
&F_0 = q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0\,,\\
&F_1 = q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0\,,\\
&F_2 = q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0\,,\\
&F_3 = \frac{1}{y_4}\left(\frac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) q_3 + \left(U_{12} + \frac{y_5}{y_4} U_{13}\right) q_4 +\\
&\qquad + \left(U_{22} + \frac{y_5}{y_4} U_{23}\right) q_5 = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Условія замкнутости послѣдней системы

$$(F_0\,,\,F_3) = 0\,,\qquad (F_1\,,\,F_2) = 0\,,$$

$$(F_0\,,\,F_1) = 0\,,\qquad (F_1\,,\,F_3) = 0\,,\qquad (F_2\,,\,F_3) = 0$$

должны быть слѣдствіями уравненія $F_3 = 0$. Такъ первое изъ этихъ условій даетъ

$$\frac{\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2}{U_{20} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{10} + \dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U - U_2\right) U_1} =$$

$$= \frac{U_{12} + \dfrac{y_5}{y_4} U_{13}}{\dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) U_{13} - U_{120} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{130}} =$$

$$= \frac{U_{22} + \dfrac{y_5}{y_4} U_{23}}{\dfrac{2}{y_4}\left(\dfrac{y_5}{y_4} U_1 - U_2\right) U_{23} - U_{220} - \dfrac{y_5}{y_4} U_{230}}.$$

Функціи U_1, U_2 независятъ отъ перемѣнныхъ y_4, y_5. Поэтому изъ послѣднихъ равенствъ слѣдуютъ новыя

$$
\begin{aligned}
&U_2U_{13}+U_1U_{12}=0,\\
&U_2U_{120}-U_{20}U_{12}=0,\\
&U_2U_{130}-U_1U_{120}+U_{10}U_{12}-U_{20}U_{13}=0,\\
&U_{10}U_{13}-U_1U_{130}=0,\\
&U_2U_{23}+U_1U_{22}=0,\\
&U_2U_{220}-U_{20}U_{22}=0,\\
&U_2U_{230}-U_1U_{220}+U_{10}U_{22}-U_{20}U_{23}=0,\\
&U_{10}U_{23}-U_1U_{230}=0.
\end{aligned}
$$

Изъ условія $(F_2, F_3)=0$ подобнымъ же образомъ получаемъ уравненія

$$
\begin{aligned}
&U_2U_{122}-2U_{22}U_{12}=0,\\
-&U_1U_{122}+2U_2U_{132}+2(U_{12}-U_{23})U_{12}-2U_{22}U_{13}=0,\\
&U_2U_{133}-2U_1U_{132}+2U_{13}U_{12}+2(U_{12}-U_{23})U_{13}=0,\\
-&U_1U_{133}+2U_{13}^2=0,\\
&U_2U_{222}-2U_{22}^2=0,\\
-&U_1U_{222}+2U_2U_{232}+2(U_{12}-U_{23})U_{22}-2U_{22}U_{23}=0,\\
&U_2U_{233}-2U_1U_{232}+2U_{13}U_{22}+2(U_{12}-U_{23})U_{23}=0,\\
-&U_1U_{233}+2U_{13}U_{23}=0.
\end{aligned}
$$

Эти 16 уравненій выведены въ предположеніи, что $U_1 \lesseqgtr 0$, $U_2 \lesseqgtr 0$. Въ противномъ предположеніи всѣ они удовлетворяются тождественно и послѣдній случай является частнымъ случаемъ разсматриваемаго. Будемъ называть эти уравненія соотвѣтственно ихъ порядку первымъ, вторымъ,... шестнадцатымъ. Легко видѣть, что уравненія второе и шестое, девятое и тринадцатое, двѣнадцатое и шестнадцатое и, наконецъ, первое и пятое даютъ два интегральныхъ уравненія

$$
\left.\begin{aligned}
U_{22}&=\psi U_{12}\\
U_{23}&=\psi U_{13},
\end{aligned}\right\} \qquad (12)
$$

гдѣ ψ — произвольная функція одной только перемѣнной x_1. Въ силу послѣднихъ уравненій, разсматриваемая система 16 уравненій приводится къ пяти независимымъ между собой уравненіямъ

$$\begin{aligned}
&U_2U_{13}+U_1U_{12}=0\,,\\
&U_2U_{120}-U_{20}U_{12}=0\,,\\
&U_1U_{130}-U_{10}U_{13}=0\,,\\
&U_2U_{122}-2U_{22}U_{12}=0\,,\\
&U_1U_{133}-2U_{13}^2=0.
\end{aligned}$$

Изъ первыхъ трехъ послѣдней системы уравненій и изъ (12) получаемъ

$$\left.\begin{aligned}
&U_{12}=fU_2\,, \qquad U_{13}=-fU_1\,,\\
&U_{22}=\psi fU_2\,, \qquad U_{23}=-\psi fU_1\,,
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

гдѣ f — произвольная функція перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3. Внося эти значенія въ четвертое и пятое уравненія послѣдней системы пяти уравненій и полагая $U_1 \lesseqgtr 0$, $U_2 \lesseqgtr 0$, получаемъ два уравненія, опредѣляющія функцію f,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}-\psi f^2=0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}+f^2=0. \tag{14}$$

Выраженіе $\dfrac{y_5}{y_4}U_1-U_2$ отлично отъ нуля, ибо функціи U неравны нулю. Поэтому уравненіе $F_3=0$, въ силу равенствъ (13), принимаетъ видъ

$$F_3'=q_3-y_4f(q_4+\psi q_5)=0.$$

Условіе $(F_1, F_2)=0$ должно удовлетворяться въ силу послѣдняго уравненія. Отсюда получаемъ шесть уравненій, опредѣляющихъ функціи V,

$$\left.\begin{aligned}
&V_{122}=2fV_{22}\,,\\
&V_{132}=f(V_{23}-V_{12})\,,\\
&V_{133}=-2fV_{13}\,,\\
&V_{222}=\psi V_{122}\,,\\
&V_{232}=\psi V_{132}\,,\\
&V_{233}=\psi V_{133}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Условіе $(F_0, F_1)=0$ приводитъ къ четыремъ уравненіямъ. Въ силу равенствъ (13), два изъ нихъ удовлетворяются тождественно, а два остальные принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} &U_{11}+(V_{12}-fV_2)U_1+(V_{13}+fV_1)U_2=0, \\ &U_{21}+(V_{22}-\psi fV_2)U_1+(V_{23}+\psi fV_1)U_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Наконецъ, условіе $(F_1, F_3')=0$ даетъ четыре уравненія. Въ силу равенствъ (14) и (15), два изъ нихъ удовлетворяются тождественно, остальныя же приводятся къ виду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+f(V_{12}+\psi V_{13})-f^2(V_2-\psi V_1)=0, \tag{17}$$

$$f[\psi'+\psi(V_{23}-\psi V_{13})+V_{22}-\psi V_{12}]=0, \tag{18}$$

гдѣ ψ' обозначаетъ производную по x_1 функціи ψ.

7. Мы приходимъ къ разсмотрѣнію двухъ случаевъ, соотвѣтствующихъ равенству нулю каждого изъ двухъ множителей лѣвой части уравненія (18). Вычисливъ значенія функцій V, U въ предположеніи, что первый изъ этихъ множителей равенъ нулю, легко заключить, что эти значенія представляютъ частный случай значеній, которыя мы получимъ приравнивая нулю второй множитель лѣвой части уравненія (18). Въ самомъ дѣлѣ, если

$$f=0,$$

то изъ уравненій (7) и (15) слѣдуетъ

$$V_{12}=v_1, \quad V_{13}=v_2, \quad V_{22}=v_3, \quad V_{23}=v_4,$$

гдѣ v_1, v_2, v_3, v_4 — произвольныя функціи одной только перемѣнной x_1. Обозначая по Лагранжу производныя по x_1 послѣднихъ функцій, мы получимъ для вычисленія ихъ, въ силу уравненій (8), слѣдующую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned} v_1' &= -(v_1^2+v_2v_3), \\ v_2' &= -v_2(v_1+v_4), \\ v_3' &= -v_3(v_1+v_4), \\ v_4' &= -(v_4^2+v_2v_3). \end{aligned}$$

Общій интегралъ послѣдней системы уравненій представляется слѣдующимъ образомъ

$$v_1 = \frac{x_1 + a_1}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_2 = \frac{a_2}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_3 = \frac{a_3}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$v_4 = \frac{x_1 + a_4}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

гдѣ a_1, a_2, a_3, a_4 — произвольныя постоянныя. Наконецъ, интегрируя систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dV_1 = V_{11} dx_1 + V_{12} dx_2 + V_{13} dx_3,$$

$$dV_2 = V_{21} dx_1 + V_{22} dx_2 + V_{23} dx_3,$$

которая рѣшеніемъ относительно выраженій $dx_2 - V_1 dx_1$, $dx_3 - V_2 dx_1$, приводится къ двумъ точнымъ дифференціаламъ, находимъ:

$$V_1 = \frac{(x_1 + a_1)(x_2 + a_5) + a_2(x_3 + a_6)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$V_2 = \frac{(x_1 + a_4)(x_3 + a_6) + a_3(x_2 + a_5)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3}.$$

Изъ уравненій (13) и (16) слѣдуетъ

$$U_{12} = 0, \quad U_{13} = 0, \quad U_{22} = 0, \quad U_{23} = 0,$$

$$U_{11} + v_1 U_1 + v_2 U_2 = 0,$$

$$U_{21} + v_3 U_1 + v_4 U_2 = 0.$$

Уравненія, представляющія результаты рѣшенія послѣднихъ двухъ уравненій относительно U_1, U_2, легко представляются въ видѣ точныхъ производныхъ по перемѣнной x_1. Отсюда получаемъ

$$U_1 = \frac{(x_1 + a_1)\Psi_1(x_0) + a_2 \Psi_2(x_0)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

$$U_2 = \frac{(x_1 + a_4)\Psi_2(x_0) + a_3 \Psi_1(x_0)}{(x_1 + a_1)(x_1 + a_4) - a_2 a_3},$$

гдѣ Ψ_1, Ψ_2 — произвольныя функціи перемѣнной x_0.

8. Если $f \lesseqgtr 0$, то изъ уравненія (18) слѣдуетъ

$$\psi' + \psi(V_{23} - \psi V_{13}) + V_{22} - \psi V_{12} = 0. \qquad (19)$$

Полагаемъ

$$V_2 - \psi V_1 = Z.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій (15) и уравненій (8) получаемъ

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_3^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} + Z \frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0.$$

Слѣдовательно

$$Z = \frac{c_2 x_2 + x_3 + c_3}{x_1 + c_1},$$

и потому изъ уравненія (19) находимъ

$$\psi = \frac{c_4 - c_2 x_1}{x_1 + c_1},$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольныя постоянныя.

Функція V_1 опредѣляется первымъ уравненіемъ (8) и тремя первыми (15), которыя легко приводятся къ слѣдующему виду

$$V_{11} + V_1 V_{12} + (Z + \psi V_1) V_{13} = 0,$$

$$V_{122} = 2f\left(\frac{c_2}{x_1 + c_1} + \psi V_{12}\right),$$

$$V_{132} = f\left(\frac{1}{x_1 + c_1} + \psi V_{13} - V_{12}\right),$$

$$V_{133} = -2f V_{13}.$$

Изъ послѣднихъ трехъ уравненій получаемъ, исключая V_{12}, V_{13},

$$V_{122} + 2\psi V_{123} + \psi^2 V_{133} = 2nf,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(V_{12} + \psi V_{13}) + \psi \frac{\partial}{\partial x_3}(V_{12} + \psi V_{13}) = 2nf,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$n = \frac{c_1 c_2 + c_4}{(x_1 + c_1)^2}.$$

Изъ уравненій (14) заключаемъ, что

$$f = \frac{1}{x_3 - \psi x_2 + \varphi},$$

гдѣ φ — произвольная функція перемѣнной x_1. Поэтому, интегрируя послѣднее уравненіе въ частныхъ производныхъ функціи $V_{12} + \psi V_{13}$, мы получимъ, въ силу уравненій (7),

$$V_{12} + \psi V_{13} = [2nx_2 + \Pi(x_1, \omega)]f,$$

гдѣ Π — произвольная функція перемѣнной x_1 и перемѣннаго аргумента $\omega = x_3 - \psi x_2$. Внося значенія функцій f, $V_{12} + \psi V_{13}$, Z, ψ въ уравненіе (17), получаемъ

$$\Pi(x_1, \omega) = \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + \varphi',$$

гдѣ φ' представляетъ производную функціи φ по перемѣнной x_1. Такимъ образомъ опредѣленіе функціи V_1 приводится къ интегрированію системы трехъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} &V_{12} + \psi V_{13} - Nf = 0, \\ &V_{11} + ZV_{13} + NfV_1 = 0, \\ &V_{133} + 2fV_{13} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

гдѣ мы положили

$$N = nx_2 + Z + \varphi'.$$

Если уравненіе $\Psi(V_1, x_1, x_2, x_3) = 0$ есть общій интегралъ первыхъ двухъ уравненій (20), то функція Ψ опредѣляется уравненіями

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_2} + \psi\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} + Nf\frac{\partial\Psi}{\partial V_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + Z\frac{\partial\Psi}{\partial x_3} - NfV_1\frac{\partial\Psi}{\partial V_1} = 0.$$

Частные интегралы ω, ω_1 перваго изъ этихъ уравненій, гдѣ

$$\omega = x_3 - \psi x_2, \qquad \omega_1 = V_1 - (Z + \psi')x_2 f,$$

принимаемъ независимыми перемѣнными вмѣсто перемѣнныхъ x_2, x_3, V; значеніе функціи Ψ въ новыхъ перемѣнныхъ назовемъ чрезъ Φ. Первое изъ нашихъ уравненій утождествляется, второе же принимаетъ видъ

$$C + Dx_2 = 0,$$

гдѣ

$$C=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\frac{\omega+c_3}{x_1+c_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}-\frac{\omega_1}{\omega+\varphi}\left(\frac{\omega+c_3}{x_1+c_1}+\varphi'\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_1},$$

$$D=2n\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}-\frac{\varphi''+2n\omega_1}{\omega+\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_1}.$$

По теоріи Коркина слѣдуетъ

$$C=0\,,\qquad D=0\,. \tag{21}$$

Такъ какъ выраженіе $(C,\,D)$ зависитъ только отъ $\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial\omega_1}$, линейно и однородно по нимъ, то равенство $(C,\,D)=0$ не можетъ давать новаго уравненія, но должно уничтожаться въ силу уравненія $D=0$.

Отсюда получаемъ уравненіе

$$3\varphi''+(x_1+c_1)\,\varphi'''=0\,,$$

которое даетъ значеніе функціи φ

$$\varphi=\frac{c_5'}{x_1+c_1}+c_6x_1+c_7'\,,$$

гдѣ c_5', c_6, c_7' — произвольныя постоянныя. Система уравненій (21) имѣетъ одинъ только частный интегралъ, который находится интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\omega_1+\frac{1}{\omega+\varphi}\left[\frac{c_5(\omega+c_3)}{(x_1+c_1)^2}+\omega_1\varphi'\right]dx_1+$$

$$+\frac{1}{\omega+\varphi}\left(\omega_1-\frac{c_5}{x_1+c_1}\right)d\omega=0,$$

гдѣ введено обозначеніе

$$c_5=-\frac{c_5'}{c_1c_2+c_4}.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія есть

$$\omega_1(\omega+\varphi)-c_5\frac{\omega+c_3}{x_1+c_1}=h\,,$$

гдѣ h — произвольная постоянная. Поэтому для функціи V_1 получаемъ слѣдующее значеніе

$$V_1 = [(Z + \varphi')\,x_2 + c_5 \frac{\omega + c_3}{x_1 + c_1} + a_8]\,f\,,$$

гдѣ a_8 — произвольная постоянная. Легко убѣдиться непосредственной подстановкой, что послѣднее значеніе V_1 утождествляетъ также и третье уравненіе (20). Вводя обозначеніе

$$c_7 = c_7' - c_2 c_5$$

и пользуясь уравненіемъ $V_2 - \psi V_1 = Z$, получаемъ значенія функцій V въ слѣдующемъ видѣ

$$V_1 = \frac{(x_3 + c_2 x_2 + c_3)\,(x_2 + c_5) + (c_6 x_2 + c_8)\,(x_1 + c_1)}{(x_3 + c_6 x_1 + c_7)\,(x_1 + c_1) + (c_2 x_1 - c_4)\,(x_2 + c_5)}\,,$$

$$V_2 = \frac{(x_3 + c_2 x_2 + c_3)\,(x_3 + c_6 x_1 + c_7) + (c_6 x_2 + c_8)\,(c_4 - c_2 x_1)}{(x_3 + c_6 x_1 + c_7)\,(x_1 + c_1) + (c_2 x_1 - c_4)\,(x_2 + c_5)}\,.$$

Значенія функцій U вычисляются изъ уравненій (13) и (16). Вводя новую функцію W, опредѣляемую уравненіемъ

$$U_2 - \psi U_1 = W\,,$$

получаемъ изъ указанныхъ уравненій

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{W}{x_1 + c_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_3} = 0\,.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$W = \frac{\Psi_1(x_0)}{x_1 + c_1}\,,$$

гдѣ Ψ_1 — произвольная функція перемѣнной x_0. Функція U_1 опредѣляется уравненіями

$$U_{11} = -\left[\frac{(c_1 c_2 + c_4)\,(x_2 + c_5)}{x_1 + c_1} + c_6(x_1 + c_1)\right]\frac{U_1}{S} - \frac{\Psi_1(x_0)(x_2 + c_5)}{(x_1 + c_1)\,S}\,,$$

$$U_{12} = \frac{(c_4 - c_2 x_1)\,U_1 + \Psi_1(x_0)}{S}\,,$$

$$U_{13} = -\frac{(x_1 + c_1)\,U_1}{S}\,,$$

гдѣ

$$S=(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5).$$

Поэтому легко получить

$$U_1=\frac{(x_2+c_5)\Psi_1(x_0)+(x_1+c_1)\Psi_2(x_0)}{(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5)},$$

$$U_2=\frac{(x_3+c_6x_1+c_7)\Psi_1(x_0)+(c_4-c_2x_1)\Psi_2(x_0)}{(x_3+c_6x_1+c_7)(x_1+c_1)+(c_2x_1-c_4)(x_2+c_5)},$$

гдѣ Ψ_2 — вторая произвольная функція x_0.

Теперь легко убѣдиться, что выраженія функцій V, U, полученныя въ n^0 7 настоящаго изслѣдованія, представляютъ частный случай послѣднихъ значеній. Въ самомъ дѣлѣ, они получаются какъ предѣлы послѣднихъ выраженій, когда $c_2=0$, а постоянныя c_5', c_6, c_7, c_8 и функція $\Psi_2(x_0)$, независимо отъ значеній перемѣнной x_0, которая измѣняется между нѣкоторыми двумя конечными предѣлами, стремятся къ ∞, при томъ такъ, что отношенія величинъ c_5, c_7, c_8 къ c_6 стремятся къ конечнымъ предѣламъ, а отношеніе функціи $\Psi_2(x_0)$ къ c_6 стремится къ конечной, но вполнѣ произвольной функціи перемѣнной x_0.

9. Возвращаемся къ уравненіямъ (11), и внесемъ въ нихъ найденныя значенія функцій V, U. Искомые интегралы опредѣляются интегрированіемъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dy_4+U_1dx_0+(Ay_4+By_5)dx_1-y_5fdx_2+y_4fdx_3=0,$$

$$dy_5+U_2dx_0+(Cy_4+Dy_5)dx_1-y_5\varphi fdx_2+y_4\varphi fdx_3=0,$$

гдѣ введены обозначенія

$$A=\frac{c_2(x_2+c_5)+c_6(x_1+c_1)}{S},$$

$$B=\frac{x_2+c_5}{S},$$

$$C=\frac{c_2(x_3+c_7)+c_4c_6}{S},$$

$$D=\frac{x_3+c_6x_1+c_7}{S},$$

а выраженіе S имѣетъ прежнее значеніе. Интегралы послѣдней системы уравненій суть

$$(c_2x_1 - c_4)y_4 + (x_1 + c_1)y_5 + \int \Psi_1(x_0)dx_0 = \alpha,$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)y_4 - (x_2 + c_5)y_5 + \int \Psi_2(x_0)dx_0 = \beta,$$

гдѣ α, β — произвольныя постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ тождества

$$(c_2x_1 - c_4)U_1 + (x_1 + c_1)U_2 = \Psi_1(x_0),$$

$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)U_1 - (x_2 + c_5)U_2 = \Psi_2(x_0).$$

Поэтому сумма произведеній перваго изъ нашихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ на $c_2x_1 - c_4$ и второго на $x_1 + c_1$ представляетъ точный дифференціалъ. Сумма произведеній перваго уравненія на $x_3 + c_6x_1 + c_7$ и второго на $-(x_2 + c_5)$ тоже — точный дифференціалъ.

Принимаемъ во вниманіе тождества

$$(c_2x_1 - c_4)V_1 + (x_1 + c_1)V_2 = x_3 + c_2x_2 + c_3,$$
$$(x_3 + c_6x_1 + c_7)V_1 - (x_2 + c_5)V_2 = c_6x_2 + c_8,$$

и возвращаемся къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ; вводя новыя обозначенія

$$c_3 = \frac{a_1}{a_4}, \quad c_4 = \frac{a_2}{a_4}, \quad c_1 = -\frac{a_3}{a_4}, \quad c_2 = -\frac{a_5}{a_4},$$

$$c_8 = \frac{a_6}{a_9}, \quad c_7 = -\frac{a_7}{a_9}, \quad c_5 = \frac{a_8}{a_9}, \quad c_6 = -\frac{a_{10}}{a_9},$$

$$a_4\Psi_1(x_0) = F_1(x_0), \qquad a_9\Psi_2(x_0) = F_2(x_0),$$

$$\alpha a_4 = C_1, \qquad \beta a_9 = C_2,$$

приходимъ къ заключенію:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити плотности k, находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ массы нити, проекціи которой X_1, X_2, X_3 на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ x_1, x_2, x_3 выражаются функціями послѣднихъ и дуги нити x_0, удовлетворяющими условіямъ

$$k[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4(x_3 X_1 - x_1 X_3) + a_5(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = F_1(x_0),$$
$$k[a_6 X_1 + a_7 X_2 + a_8 X_3 + a_9(x_2 X_3 - x_3 X_2) + a_{10}(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = F_2(x_0),$$

имѣютъ два общихъ интеграла

$$T\left[a_1 \frac{dx_1}{dx_0} + a_2 \frac{dx_2}{dx_0} + a_3 \frac{dx_3}{dx_0} + a_4\left(x_3 \frac{dx_1}{dx_0} - x_1 \frac{dx_3}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_5\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int F_1(x_0)\, dx_0 = C_1,$$
$$T\left[a_6 \frac{dx_1}{dx_0} + a_7 \frac{dx_2}{dx_0} + a_8 \frac{dx_3}{dx_0} + a_9\left(x_2 \frac{dx_3}{dx_0} - x_3 \frac{dx_2}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{10}\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int F_2(x_0)\, dx_0 = C_2,$$

гдѣ T — натяженіе нити, C_1, C_2 — произвольныя постоянныя.

10. Предположимъ, что нить однородна, т. е. k — величина постоянная, а силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги. Легко видѣть, что для этого случая въ предыдущихъ формулахъ $n^0 n^0$ 7, 8 произвольныя функціи $\Psi_1(x_0)$, $\Psi_2(x_0)$ должны быть замѣнены произвольными постоянными.

11. Переходимъ, наконецъ, къ разсмотрѣнію случая, когда изслѣдуемыя задачи имѣютъ одинъ общій интегралъ. Система уравненій (6) въ этомъ предположеніи должна имѣть одинъ частный интегралъ и, слѣдовательно, приводится къ якобіевской прибавленіемъ одного уравненія. За послѣднее мы возьмемъ уравненіе, лѣвая часть котораго представляетъ скобки Пуассона, составленная изъ лѣвыхъ частей третьяго и четвертаго уравненій (6). Въ предыдущихъ вычисленіяхъ это уравненіе удовлетворялось тождественно въ силу уравненій (6) и приводило, такимъ образомъ, къ условіямъ (7). Въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе является независимымъ отъ уравненій (6) и, слѣдовательно, вообще функціи V_{10}, V_{20} отличны отъ нуля. Воспользовавшись этимъ замѣчаніемъ, положимъ

$$\frac{V_{20}}{V_{10}} = W_1 \tag{22}$$

и замѣтимъ, что въ изслѣдуемомъ случаѣ функція W_1 сохраняетъ конечное и опредѣленное значеніе. Искомый интегралъ мы будемъ вычислять по способу Коркина, исходя изъ системы уравненій (6). Частный интегралъ ω_4 послѣдняго изъ этихъ уравненій, гдѣ

$$\omega_4 = y_4 W_1 - y_5,$$

принимаемъ независимой перемѣнной вмѣсто двухъ перемѣнныхъ y_4, y_5. Обозначимъ въ этомъ предположеніи черезъ s_i, W_{1i}, ... частныя производныя функцій z, W_1, ... по перемѣннымъ значка i. Система уравненій (6) преобразовывается въ слѣдующую:

$$A + By_4 = 0\,,$$

$$C + Dy_4 = 0\,,$$

$$E + Fy_4 + Gy_4^2 = 0\,,$$

гдѣ легко составить выраженія значеній A, B, ... G. По теоріи Коркина необходимо

$$A = 0, \qquad B = 0\,, \ldots \qquad G = 0. \tag{23}$$

Если введемъ новыя функціи W_2, W_3, опредѣляемыя уравненіями

$$U_1 W_1 - U_2 = W_2\,, \qquad V_1 W_1 - V_2 = W_3\,,$$

то изъ уравненій (23) получаются слѣдующія уравненія, опредѣляющія искомый интегралъ

$$\left.\begin{aligned} &s_0 - W_2 s_4 = 0\,,\\ &s_1 - \omega_4 W_{33} s_4 = 0\,,\\ &s_2 - \omega_4 W_{13} s_4 = 0\,,\\ &s_3 = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

и уравненія, опредѣляющія функціи W_1, W_3,

$$W_{10} = 0\,,$$

$$W_{12} + W_1 W_{13} = 0\,,$$

$$W_{11} - W_3 W_{13} - W_1 W_{33} - W_{32} = 0.$$

Изъ уравненій (5) и (22) въ силу послѣднихъ уравненій, получаемъ

$$W_{31} - W_3 W_{33} = 0\,,$$

$$W_{30} = 0.$$

Наконецъ, система уравненій (24) должна быть якобіевской. Составляя равенства, выражающія послѣднее условіе, получимъ уравненія, опредѣляющія функціи W,

$$W_{23}=0, \quad W_{333}=0, \quad W_{133}=0,$$

$$W_{21}-W_2 W_{33}=0,$$

$$W_{22}+W_2 W_{13}=0,$$

$$W_{332}+W_{131}=0.$$

Интегрируя послѣднюю систему одиннадцати уравненій въ частныхъ производныхъ трехъ функцій W, легко получимъ ихъ значенія

$$W_1=\frac{x_3+c_3x_1+c_4}{x_2+c_1x_1+c_2},$$

$$W_3=\frac{c_3x_2-c_1x_3+c_5}{x_2+c_1x_1+c_2},$$

$$W_2=\frac{F(x_0)}{x_2+c_1x_1+c_2},$$

гдѣ c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольныя постоянныя, F — произвольныя функція x_0.

Искомый интегралъ опредѣляется интегрированіемъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ

$$d\omega_4+\frac{1}{x_2+c_1x_1+c_2}[\omega_4 dx_2+\omega_4 c_1 dx_1+F(x_0)dx_0]=0$$

и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\omega_4(x_2+c_1x_1+c_2)+\int F(x_0)dx_0=\alpha,$$

гдѣ α — произвольная постоянная. Вводимъ новыя обозначенія

$$c_1=-\frac{a_5}{a_4}, \quad c_2=\frac{a_3}{a_4}, \quad c_3=-\frac{a_6}{a_4}, \quad c_4=-\frac{a_2}{a_4},$$

$$c_5=\frac{a_1}{a_4}, \quad a_4F(x_0)=\Psi(x_0), \quad \alpha=\frac{C}{a_4};$$

возвращаясь къ первоначальной системѣ перемѣнныхъ, заключаемъ:

Задачи о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити плотности k, *находящейся подъ дѣйствіемъ силы, отнесенной къ единицѣ ея массы, проекціи которой* X_1, X_2, X_3 *на прямолинейныя, прямоугольныя оси координатъ* x_1, x_2, x_3 *выражаются функціями послѣднихъ и дуги* x_0, *удовлетворяющими условію*

$$k[a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4(x_2 X_3 - x_3 X_2) + a_5(x_3 X_1 - x_1 X_3) + \\ + a_6(x_1 X_2 - x_2 X_1)] = \Psi(x_0),$$

имѣютъ одинъ общій интегралъ

$$T\left[a_1 \frac{dx_1}{dx_0} + a_2 \frac{dx_2}{dx_0} + a_3 \frac{dx_3}{dx_0} + a_4\left(x_2 \frac{dx_3}{dx_0} - x_3 \frac{dx_2}{dx_0}\right) + \right.$$
$$\left. + a_5\left(x_3 \frac{dx_1}{dx_0} - x_1 \frac{dx_3}{dx_0}\right) + a_6\left(x_1 \frac{dx_2}{dx_0} - x_2 \frac{dx_1}{dx_0}\right)\right] + \int \Psi(x_0) dx_0 = C,$$

гдѣ T — натяженіе нити, C — произвольная постоянная.

12. Преобразованія предыдущаго n^0 11 возможны только въ предположеніи, что V_{10}, V_{20} отличны отъ нуля. Если же функціи V_1, V_2 не зависятъ отъ x_0, какъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда нить однородна и силы X_1, X_2, X_3 не зависятъ отъ дуги x_0, то для разысканія одного интеграла въ этомъ случаѣ возвращаемся къ системѣ пяти уравненій n^0 3

$$A = 0, \qquad B = 0, \ldots \qquad E = 0.$$

При нашемъ условіи второе изъ этихъ урявненій уничтожается тождественно, остальные же принимаютъ видъ:

$$q_0 + U_1 q_4 + U_2 q_5 = 0,$$

$$q_1 + \left(V_2 - \frac{y_5}{y_4} V_1\right) q_3 - (y_4 V_{12} + y_5 V_{13}) q_4 - (y_4 V_{22} + y_5 V_{23}) q_5 = 0,$$

$$q_2 + \frac{y_5}{y_4} q_3 = 0,$$

$$q_4 + W_1 q_5 = 0,$$

гдѣ

$$W_1 = \frac{V_{21} + V_1 V_{22} + V_2 V_{23}}{V_{11} + V_1 V_{12} + V_2 V_{13}},$$

при чемъ функція W_1 зависитъ только отъ перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3. Принимаемъ частный интегралъ послѣдняго изъ уравненій разсматриваемой системы за независимую перемѣнную вмѣсто y_4, y_5. Очевидно дальнѣйшія вычисленія будутъ тѣ же, что и въ n^0 11, лишь только произвольная функція $F(x_0)$ должна быть замѣнена въ разсматриваемомъ случаѣ произвольной постоянной.