Обобщеніе перваго способа Якоби интегрированія дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

Въ предлагаемой статьѣ преслѣдуется мысль распространить первый способъ Якоби интегрированія одного уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи на случай системы нѣсколькихъ уравненій.

Назовемъ черезъ $p_1, p_2, \dots p_n$ частныя производныя перваго порядка неизвѣстной функціи z по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2, \dots x_n$. Возьмемъ систему m уравненій, не заключающихъ явно перемѣнной z,

$$\left.\begin{aligned} p_h + H_h(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \dots m;\ m < n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Предполагаемъ, что эти уравненія находятся въ *инволюціи*, т. е. равенства

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} + \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} - \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0 \qquad (2)$$

имѣютъ мѣсто тождественно для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до m. Составляемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} dx_{m+i} &= \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} dx_h , \\ dp_{m+i} &= -\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}} dx_h , \\ i &= 1 , 2 , \ldots n - m . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Послѣднія представляютъ, какъ извѣстно, въ силу равенствъ (2), систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи имѣется въ виду установить зависимость между задачами интегрированія дифференціальныхъ уравненій (1) и (3), вводя въ теорію разсматриваемыхъ уравненій понятіе о *главной функціи*. При этомъ въ излагаемомъ обобщеніи принимается за исходное то выраженіе *главной функціи* Якоби для одного уравненія, которое указано Майеромъ *). Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что съ равнымъ успѣхомъ можно пользоваться и соображеніями Бертрана и Дарбу **) отросительно вида послѣдней. Рѣшеніе вопроса о связи между задачами интегрированія уравненій (1) и (3) вытекаетъ изъ справедливости слѣдующихъ предложеній.

Теорема первая. *Если значеніе*

$$z = V(x_1 , x_2 , \ldots x_n , b_1 , b_2 , \ldots b_{n-m}) + b , \tag{4}$$

гдѣ $b , b_1 , b_2 , \ldots b_{n-m}$ — *произвольныя постоянныя, представляетъ полный интегралъ уравненій (1), при чемъ функціональный опредѣлитель*

$$D\left(\begin{matrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}} , & \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}} , \ldots & \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \\ b_1 , & b_2 , & \ldots b_{n-m} \end{matrix}\right) \tag{5}$$

отличенъ отъ нуля, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i} , \quad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \\ i = 1 , 2 , \ldots n - m , \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

*) Math. An., Bd. 3, S. 433.

**) Comptes R., t. LXXIX, p. 1488, t. LXXX, p. 160, t. LXXXII, p. 641. Bullet. des sciences math. et astron., t. 8. p. 249.

*гдѣ $a_1, a_2, \ldots a_{n-m}$ — новыя произвольныя постоянныя, опредѣляютъ значенія x_{m+i}, p_{m+i}, представляющія общій интегралъ *) уравненій (3).*

Въ силу послѣднихъ значеній x_{m+i}, p_{m+i}, уравненія (6) становятся тождествами. Дифференцируя ихъ по перемѣннымъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, получаемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_{m+k}}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_h}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_{m+k}}\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=0.$$

Дифференцируя по x_{m+i}, b_i тождества, получаемыя подстановкой въ уравненія (1) ихъ рѣшенія (4), и принимая во вниманіе выраженія (6) функцій p_{m+i}, получаемъ новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_h\partial x_{m+i}}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}+\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}=0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_h\partial b_i}+\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial b_i}=0.$$

Изъ двухъ послѣднихъ системъ тождествъ легко получаются слѣдующія

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}\left(\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\right)=\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h}+\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}},$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\partial x_{m+k}}\left(\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}-\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}}\right)=0,$$

$$i=1,2,\ldots n-m.$$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (5), приходимъ къ тождествамъ

$$\frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_h}=\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+k}},\quad \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_h}=-\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}},\tag{7}$$

*) Подъ общимъ интеграломъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ разумѣемъ рѣшеніе ихъ, представляющее значенія зависимыхъ перемѣнныхъ въ функціяхъ независимыхъ и произвольныхъ постоянныхъ, число которыхъ равно числу зависимыхъ перемѣнныхъ и которыя изъ этихъ интегральныхъ уравненій не исключаются.

показывающимъ, что значенія x_{m+i}, p_{m+i}, опредѣляемыя уравненіями (6), утождествляютъ уравненія (3) и представляютъ, стало быть, ихъ общій интегралъ.

Лемма. *Если уравненія*

$$x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_{n-m}, b_1, b_2, \dots b_{n-m}), \quad (8)$$

$$p_{m+i} = F_i(x_1, x_2, \dots x_m, a_1, a_2, \dots a_{n-m}, b_1, b_2, \dots b_{n-m}), \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots n-m,$$

гдѣ a_i, b_i *— произвольныя постоянныя, представляютъ общій интегралъ уравненій (3), то выраженіе*

$$\sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) dx_h, \quad (10)$$

гдѣ коэффиціенты при dx_h *— функціи перемѣнныхъ* $x_1, x_2, \dots x_m$ *и постоянныхъ* a_i, b_i, *въ силу уравненій (8) и (9), есть точный дифференціалъ.*

Положимъ

$$\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h = U_h.$$

Въ силу тождествъ (7) имѣемъ

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}},$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_k \partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \sum_{\nu=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+\nu}}.$$

По условію равенства (2) имѣютъ мѣсто тождественно, слѣдовательно, они остаются таковыми и для (8), (9) значеній перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_h}$$

для всѣхъ одновременно различныхъ значеній h и k отъ 1 до m, т. е. выраженіе (10) представляетъ точный дифференціалъ. Назовемъ его черезъ dU

$$dU = \sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right) dx_h.$$

Теорема вторая. *Пусть въ уравненіяхъ (8), (9) произвольныя постоянныя a_i, b_i представляютъ соотвѣтственно начальныя значенія перемѣнныхъ x_{m+i}, p_{m+i}. Выполнивъ квадратуру точнаго дифференціала dU, составляемъ выраженіе*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i + b\,,$$

гдѣ b — новая произвольная постоянная. Если исключить изъ послѣдняго, въ силу уравненій (8), величины a_i, то полученное выраженіе V есть полный интегралъ уравненій (1).

Въ самомъ дѣлѣ, условившись, согласно установившемуся обычаю, называть черезъ d дифференціалы, соотвѣтствующіе приращеніямъ перемѣнныхъ x_1, x_2, .. x_n, черезъ δ дифференціалы, соотвѣтствующіе измѣненіямъ постоянныхъ a_i, b_i и, наконецъ, черезъ Δ —, соотвѣтствующіе приращеніямъ обѣихъ системъ перемѣнныхъ, получаемъ *)

$$\Delta V = dU + \int_{U_0}^{U} d\delta U + \sum_{i=1}^{n-m} (b_i \delta a_i + a_i \delta b_i)\,,$$

гдѣ

$$d\delta U = \sum_{h=1}^{m} \delta U_h dx_h\,.$$

Такъ какъ уравненія (3) и (7) имѣютъ мѣсто тождественно, то по приведеніи находимъ

$$dU = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} dx_{m+i} - \sum_{h=1}^{m} H_h dx_h\,,$$

$$\delta U_h = \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i} \delta \frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}} \delta x_{m+i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i} \delta \frac{dx_{m+i}}{dx_h} + \frac{dp_{m+i}}{dx_h} \delta x_{m+i} \right) =$$

$$= \frac{d}{dx_h} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \delta x_{m+i} \right),$$

---

*) Прибавочная постоянная b остается безъ измѣненія.

$$d\delta U = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) dx_h =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right),$$

$$\int_{U_0}^{U} d\delta U = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\delta x_{m+i} - b_i\,\delta a_i).$$

Итакъ,

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\Delta x_{m+i} + a_i\,\delta b_i) - \sum_{h=1}^{m} H_h\,dx_h.$$

Какъ уже раньше можно было замѣтить, уравненія (4) всегда разрѣшаются относительно a_i, ибо функціональный опредѣлитель функцій x_{m+i} относительно a_i, для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$, принимаетъ отличное отъ нуля значеніе, равное 1. Поэтому, разсматривая V какъ функцію всѣхъ x и b, получаемъ иначе

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}\,\Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i}\,\delta b_i\right) + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_h}\,dx_h.$$

Изъ сопоставленія обоихъ выраженій ΔV заключаемъ о существованіи слѣдующихъ равенствъ

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ i = 1, 2, \ldots n-m. \end{array}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial V}{\partial x_h} + H_h = 0, \\ h = 1, 2, \ldots m. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Уравненія (11) представляютъ $2n-2m$ различныхъ зависимостей между перемѣнными x, p_{m+i} и произвольными постоянными a_i, b_i, ибо каждое изъ этихъ уравненій заключаетъ одну изъ величинъ, или p, или a такихъ, которыя не входятъ во всѣ остальныя; они являются интегральными уравненіями системы (3), отличными по виду отъ (8) и (9). Равенства (12), въ силу значеній (11) p_{m+i}, представляютъ результатъ подстановки въ уравненія (1) разсматриваемаго значенія V и тѣмъ доказываютъ, что послѣднее — ихъ интегралъ. Легко видѣть, что это —

полный интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, онъ зависитъ отъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ $b, b_1, b_2, \ldots b_{n-m}$, и функціональный опредѣлитель

$$D\left(\begin{array}{c}\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \\ b_1, \quad b_2, \ldots b_{n-m}\end{array}\right)$$

отличенъ отъ нуля, такъ какъ для начальныхъ значеній перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ функціи $\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}}$ обращаются въ b_i и разсматриваемый опредѣлитель становится равнымъ 1.

Такимъ образомъ, при помощи функціи V, мы получаемъ какъ полный интегралъ уравненій (1), такъ и интегральныя уравненія для системы (3). Эта функція въ предлагаемой теоріи представляетъ полную аналогію съ упомянутой якобіевской, и мы можемъ, по справедливости назвать ее *главной функціей* разсматриваемыхъ уравненій.

Въ заключеніе изложенной теоріи легко вывести изъ нея нѣсколько слѣдствій, касающихся интегрированія уравненій (3), или, какъ разсматриваетъ С. Ли, соотвѣтствующей имъ системы линейныхъ уравненій съ частными производными *). Замѣтимъ прежде всего, что система (3) представляетъ обобщеніе *канонической* системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, получаемой изъ нея при $m=1$. Поэтому можно предложить называть эти уравненія *канонической системой въ полныхъ дифференціалахъ*, а перемѣнныя x_{m+i}, p_{m+i} каноническими перемѣнными соотвѣтственно положительнаго и отрицательнаго классовъ.

Слѣдствіе первое. *Если уравненія*

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n) = b_i, \\ i = 1, 2, \ldots n-m,\end{array}\right\} \tag{13}$$

*гдѣ b_i — произвольныя постоянныя,— независимые между собой интегралы системы (3), находящіеся въ инволюціи **) и разрѣшающіеся относительно всѣхъ p, то остальные ея $n-m$ интеграловъ находятся при помощи квадратуръ.*

---

*) Math. An., Bd. 11, S. 464. Система линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ, соотвѣтствующая уравненіямъ (3), представляется въ видѣ

$$(p_h + H_h, \varphi) = 0, \; h = 1, 2, \ldots m,$$

гдѣ φ — неизвѣстная функція.

**) Т. е. удовлетворяющіе тождественно условіямъ

$$(\psi_k, \psi_h) = \sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial\psi_h}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial\psi_k}{\partial p_{m+\nu}} - \frac{\partial\psi_k}{\partial x_{m+\nu}}\frac{\partial\psi_h}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и k отъ 1 до $n-m$.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тождества

$$(p_h + H_h\,,\ \psi_k) = 0\,,$$

$$h = 1, 2, \ldots m; \quad k = 1, 2, \ldots n - m.$$

Поэтому, въ силу условій (2) и инволюціи интеграловъ (13), уравненія (1) и (13) представляють систему въ инволюціи n дифференціальныхъ уравненій, разрѣшающихся относительно всѣхъ частныхъ производныхъ p. Слѣдовательно, полный интегралъ уравненій (1), удовлетворяющій требованіямъ *теоремы первой*, получается квадратурой точнаго дифференціала

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s\, dx_s\,.$$

Если интегралъ послѣдняго есть $z = V + b$, гдѣ b—новая произвольная постоянная, то искомые интегралы опредѣляются по формуламъ

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i\,,\ i = 1\,,\ 2, \ldots n - m\,,$$

гдѣ a_i — новыя произвольныя постоянныя.

Доказанное предложеніе есть очевидное обобщеніе извѣстной *теоремы Ліувилля* *) относительно интегрированія канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Высказано и доказано оно было впервые С. Ли **) въ нѣсколько иной формѣ, и представляетъ, несомнѣнно, одно изъ важнѣйшихъ его открытій въ теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Предлагаемыя здѣсь формулировка получаемаго результата и самое его доказательство отличаются простотой и краткостью сравнительно съ первыми.

Слѣдствіе второе. *Если уравненія*

$$\left.\begin{aligned} \psi_i(x_1\,, x_2\,, \ldots x_n\,, p_{m+1}\,, p_{m+2}\,, \cdots p_n) = b_i\,, \\ i = 1, 2, \ldots k; \quad k < n - m\,, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

гдѣ b_i — произвольныя постоянныя,—независимые между собой интегралы системы (3), находящіеся въ инволюціи и разрѣшающіеся относительно k изъ перемѣнныхъ p, то разысканіе остальныхъ ея интеграловъ приводится къ интегрированію канонической системы $2n - 2m - 2k$ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ.

Пусть уравненія (14) разрѣшаются относительно $p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots p_{m+k}$. Уравненія (1), (14), а потому и получаемыя изъ нихъ слѣдующія

*) Journal de Lionville, 1-re série, t. XX. p. 137.

**) Math. An., Bd. 11, S. 469, Theorem I и Satz 4, или cp. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 329, n° 138.

$$\left.\begin{array}{c} p_h + H_h'(b_1, b_2, \dots b_k, x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+k+1}, p_{m+k+2}, \dots p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \dots m + k, \end{array}\right\} \quad (15)$$

находятся въ инволюціи. Очевидно, если значеніе

$$z = V(x_1, x_2, \dots x_n, b_1, b_2, \dots b_k, b_{k+1}, \dots b_{n-m}) + b,$$

гдѣ $b, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots b_{n-m}$ — новыя произвольныя постоянныя,—полный интегралъ послѣдней системы, при чемъ опредѣлитель

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+k+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+k+2}}, \dots \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_{k+1}, b_{k+2}, \dots b_{n-m}}\right)$$

отличенъ отъ нуля, то это же значеніе z есть полный интегралъ системы (1), удовлетворяющій условіямъ *теоремы первой*. Такимъ образомъ задача приводится къ разысканію указанной функціи V, или къ интегрированію канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left.\begin{array}{l} dx_{m+i} = \sum\limits_{h=1}^{m+k} \frac{\partial H_h'}{\partial p_{m+i}} dx_h, \\ \\ dp_{m+i} = -\sum\limits_{h=1}^{m+k} \frac{\partial H_h'}{\partial x_{m+i}} dx_h, \\ \\ i = k+1, k+2, \dots n - m. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Итакъ, если извѣстны k интеграловъ (14), то порядокъ (т. е. число уравненій) разсматриваемой канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ понижается на $2k$ единицъ.

Слѣдствіе третье. *Задача интегрированія канонической системы въ полныхъ дифференціалахъ (3) состоитъ въ выполненіи ряда $n - m$ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ* *) $2n - 2m$, $2n - 2m - 2, \dots 4, 2$ *и одной квадратуры.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть уравненіе

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots p_n) = b_1, \quad (17)$$

гдѣ b_1 — произвольная постоянная, — интегралъ системы (3). Функція ψ_1 есть интегралъ системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи ψ

*) Согласно установившемуся обычаю, называемъ *операціей интегрированія μ-аго порядка* операцію вычисленія одного интеграла системы μ-аго порядка уравненій въ полныхъ дифференціалахъ $\mu + \nu$ перемѣнныхъ, гдѣ ν — произвольное цѣлое число.

$$(p_h + H_h, \psi) = 0,$$

$$h = 1, 2, \ldots m.$$

Послѣдняя, извѣстно *), имѣетъ $2n - 2m$ различныхъ интеграловъ, независимыхъ между собой относительно x_{m+i}, p_{m+i}. Предположимъ, что интегралъ (17) разрѣшается относительно p_{m+1}. Въ силу предыдущаго предложенія, порядокъ разсматриваемой системы (3) понижается на двѣ единицы. Съ полученной системой въ полныхъ дифференціалахъ вида (16), при $k = 1$, поступаемъ какъ съ (3). Продолжая эти вычисленія далѣе, мы придемъ, очевидно, къ задачѣ разысканія полнаго интеграла n уравненій съ частными производными въ инволюціи, какъ въ *слѣдствіи первомъ*, и, стало быть, разрѣшимъ, при помощи указанныхъ операцій, задачу интегрированія системы (3).

Примѣчаніе. По предположенію интегралы (13), (14) и (17) заключаютъ перемѣнныя p. Если эти интегралы не содержатъ ихъ вовсе, то послѣдній случай приводится, какъ показалъ Майеръ **), къ первому переводомъ всѣхъ или части каноническихъ перемѣнныхъ положительнаго класса въ отрицательный и наоборотъ.

Слѣдствіе четвертое. *Если функціи H_h не зависятъ отъ k какихъ-нибудь перемѣнныхъ изъ ряда $x_1, x_2, \ldots x_n$, то число и порядокъ всѣхъ операцій, необходимыхъ для интегрированія уравненій (3), понижаются соотвѣтственно на k единицъ.*

Пусть перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots x_k$ не входятъ въ выраженія функцій H_h. Слѣдуя Якоби ***), принимаемъ за новую неизвѣстную функцію выраженіе

$$y = z - \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

и вмѣсто независимыхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_k$ — за новыя независимыя перемѣнныя $p_1, p_2, \ldots p_k$. Задача интегрированія m уравненій (1), находящихъ въ инволюціи, приводится такимъ образомъ къ интегрированію системы m уравненій, также въ инволюціи, но гдѣ число независимыхъ перемѣнныхъ есть $n - k$.

По условію функція z не входитъ явно въ уравненія (1). Легко распространить изложенную теорію съ соотвѣтствующими измѣненіями и на тотъ случай, когда разсматриваемыя уравненія зависятъ явно отъ неизвѣстной функціи.

---

*) Jordan, Cours d'Analyse, t. III, p. 74–5.

**) Math. An., Bd. VIII, S. 313.

***) Vorlesungen über Dynamik, zweite Ausgabe 1884, S. 164.