Теорія капиллярности и гидростатика.

А. П. Грузинцева.

I.

Задача о равновѣсіи жидкостей встрѣчается въ механикѣ и физикѣ. Въ первой — она составляетъ предметъ гидростатики, — во второй-же разсматривается какъ съ точки зрѣнія гидростатики, такъ и съ точки зрѣнія такъ называемой теоріи капиллярности.

Такимъ образомъ задача о равновѣсіи жидкостей въ обычномъ изложеніи разбивается на двѣ, независимыя одна отъ другой. Въ гидростатикѣ теорія строится на понятіи о гидростатическомъ давленіи или, другими словами, на *опредѣленіи* жидкости, какъ деформирующагося тѣла, характеризующагося способностью передавать давленіе равномѣрно ко всѣмъ направленіямъ нормально къ элементу поверхности. Въ ученіи же о капиллярности вводятся внутреннія молекюлярныя силы и молекюлярное давленіе, на *опредѣленіи* которыхъ и основывается вся теорія.

Эти внутреннія молекюлярныя силы разсматриваются или сами по себѣ,—это молекюлярная теорія капиллярности (Ляпляса, Пуассона и Гаусса) или со стороны того поверхностнаго натяженія, которое онѣ вызываютъ.

И результаты гидростатики и теоріи капиллярности совершенно различны: въ то время, какъ первая, основанная на понятіи о гидростатическомъ давленіи, только и даетъ рядъ заключеній объ этомъ давленіи въ извѣстныхъ простѣйшихъ случаяхъ,—вторая даетъ полную теорію явленій въ жидкостяхъ при ихъ равновѣсіи. Можно сказать болѣе: гидростатика даетъ условія равновѣсія жидкости только для особаго частнаго случая, давая въ остальныхъ случаяхъ невѣрныя слѣдствія, между тѣмъ какъ теорія капиллярныхъ явленій, дополняя результаты гидростатики, тѣмъ самымъ даетъ условія равновѣсія для общаго случая.

Но мнѣ кажется, что должна существовать такая *общая теорія равновѣсія жидкостей,* которая обнимала бы всѣ случаи, т. е. должна быть построена на самомъ общемъ опредѣленіи того аггрегатнаго состоянія, которое мы называемъ жидкимъ.

Въ этой статьѣ мы и попытаемся дать такую теорію жидкостей.

Какое же опредѣленіе жидкости положить въ основаніе новой теоріи? Опредѣленіе, принимаемое въ гидростатикѣ, представляетъ въ сущности законъ Паскаля, но понятно, что въ раціональной теоріи равновѣсія жидкостей, этотъ законъ долженъ быть полученъ, какъ слѣдствіе теоріи вмѣстѣ съ другими законами, управляющими явленіями равновѣсія жидкостей,—слѣдовательно, этимъ закономъ не должно пользоваться, какъ основаніемъ теоріи. Тѣмъ болѣе имъ нельзя пользоваться, что онъ имѣетъ мѣсто лишь *внутри* свободной массы жидкостей.

Мы положимъ въ основаніе новой теоріи слѣдующее опредѣленіе жидкости, вытекающее изъ простѣйшихъ явленій. *Жидкость мы будемъ разсматривать, какъ систему матеріальныхъ точекъ, сплошнымъ образомъ наполняющихъ данный объемъ и между которыми дѣйствуютъ внутреннія силы, работа которыхъ зависитъ отъ плотности жидкости и радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.*

Первая часть этой зависимости вытекаетъ изъ того опытнаго факта, что давленіе въ жидкости не зависитъ отъ формы или вида сосуда, въ которомъ она находится, а лишь отъ ея плотности, а вторая—изъ факта существованія поверхностнаго натяженія въ жидкостяхъ.

Что же касается вообще внутреннихъ силъ, то мы принимаемъ, что эти силы, хотя *не сами по себѣ,* а лишь вслѣдствіе *связей,* существующихъ между частицами тѣлъ во всякомъ аггрегатномъ состояніи, суть силы, имѣющія потенціалъ. Для твердаго упругаго тѣла, напримѣръ, эти силы или, лучше, этотъ потенціалъ есть функція шести деформацій, т. е. трехъ коэффиціентовъ измѣненія длины и трехъ коэффиціентовъ скашиванія. Для жидкостей же—это функція плотности и радіуса сферы молекулярнаго дѣйствія.

II.

Облечемъ теперь сказанное въ математическую форму и сдѣлаемъ общіе выводы.

Пусть имѣемъ жидкость въ сосудѣ и пусть въ эту жидкость погружена какая-нибудь система твердыхъ тѣлъ; для краткости рѣчи въ послѣдующемъ мы будемъ говорить просто „твердое тѣло“ вмѣсто сосуда (стѣнки его) и система твердыхъ тѣлъ. Сосудъ и твердые тѣла будемъ предполагать для простоты разсужденій уравновѣшенными самостоятельной системой силъ. Сверхъ того, мы предположимъ, что на свободной поверхности разсматриваемая жидкость соприкасается съ другой,—скажемъ, съ воздухомъ.

Разсмотримъ какую-нибудь точку жидкости M съ координатами

$$x, \quad y, \quad z$$

и пусть

$$X_e, \quad Y_e, \quad Z_e$$

будутъ составляющія внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ этой точкѣ жидкости, а

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i$$

составляющія внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ той же точкѣ.

При этомъ подъ первыми силами мы будемъ подразумѣвать силы, источникъ происхожденія которыхъ лежитъ *внѣ* нашей системы (напримѣръ, это силы тяжести) и мы будемъ считать ихъ *заданными* напередъ. Подъ вторыми силами мы будемъ подразумѣвать силы, происходящія отъ взаимодѣйствій между точками системы; это, слѣдовательно, силы, источникъ происхожденіе которыхъ лежитъ *внутри* системы. Аггрегатное состояніе системы и обусловлено характеромъ этихъ послѣднихъ силъ.

Теперь основная теорема статики даетъ для равновѣсія точки M слѣдующія условія:

$$\left.\begin{aligned} X_e + X_i &= 0 \\ Y_e + Y_i &= 0 \\ Z_e + Z_i &= 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

О внутреннихъ силахъ *отдѣльно* мы ничего не знаемъ, а можемъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія лишь объ *ихъ работѣ*, такъ какъ на опытѣ мы наблюдаемъ обыкновенно не самыя силы, а ихъ дѣйствіе, т. е. работу. Поэтому вообразимъ, что точка M получила нѣкоторое *возможное безконечно-малое перемѣщеніе*, проекціи котораго на координатныя оси пусть будутъ:

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z.$$

Напишемъ далѣе уравненія (a) *во 1-хъ*, для всякой точки *внутри массы* жидкости, *во 2-хъ*, для всѣхъ точекъ *свободной поверхности* жидкости, т. е. для точекъ соприкосновенія разсматриваемой жидкости съ другой жидкостью (обыкновенно съ воздухомъ) и наконецъ *въ 3-хъ*, для точекъ, лежащихъ на *поверхности соприкосновенія жидкости съ „твердымъ тѣломъ“* (т. е. со стѣнками сосуда и погруженныхъ въ жидкость твердыхъ тѣлъ); затѣмъ умножимъ полученныя уравненія на соотвѣтственныя перемѣщенія:

$$\delta x\,,\quad \delta y\,,\quad \delta z$$

каждой точки этихъ трехъ областей и результаты сложимъ; получимъ:

$$\left.\begin{aligned}&\sum(X_e\delta x+Y_e\delta y+Z_e\delta z)+\sum\nolimits_M(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)+\\&+\sum\nolimits_S(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)+\sum\nolimits_{S'}(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

при чемъ для *внѣшнихъ силъ* всѣ три суммы обозначены пока однимъ символомъ,—это *заданныя силы* и ими нечего заниматься. Что же касается *внутреннихъ силъ*, то руководствуясь *принципомъ сохраненія энергіи*, прилагаемомъ и къ случаю *возможныхъ перемѣщеній* системы и *опредѣленіемъ* жидкости, какъ такого аггрегатнаго сотоянія, при которомъ работа внутреннихъ силъ выражается измѣненіемъ нѣкоторой опредѣленной функціи, называемой внутреннимъ термодинамическимъ потенціаломъ, можемъ написать, что

$$\sum\nolimits_M(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=-\,\delta U_M\,,$$

$$\sum\nolimits_S(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=-\,\delta U_S\,,$$

$$\sum\nolimits_{S'}(X_i\delta x+Y_i\delta y+Z_i\delta z)=-\,\delta U_{S'}\,.$$

Количества:

$$U_S\,,\quad U_{S'}$$

могутъ быть выражены при помощи плотности и толщины того поверхностнаго слоя на свободной поверхности жидкости и на поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“, въ которомъ проявляется *поверхностное натяженіе.* Понятно, что эта толщина зависитъ отъ радіуса сферы молекулярнаго притяженія.

Что же касается количества

$$U_M\,,$$

то его мы должны считать функціей лишь плотности жидкости внутрь ея массы.

Пусть

$$U,\quad U_n,\quad U_{n'}$$

будутъ *удѣльныя* значенія функцій

$$U_M,\quad U_S,\quad U_{S'},$$

т. е. значенія этихъ функцій, разсчитанныхъ на единицу объема жидкости и единицу ея свободной поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ"; вслѣдствіе сплошности жидкости получаемъ:

$$U_M = \int U d\tau,\quad U_S = \int U_n dS,\quad U_{S'} = \int U_{n'} dS' \tag{2}$$

при чемъ $d\tau$ есть элементъ объема внутри жидкости, dS — элементъ свободной поверхности жидкости, а dS' — элементъ поверхности соприкосновенія ея съ „твердымъ тѣломъ". Кромѣ того, если плотность жидкости внутри ея массы будетъ ϱ, плотности въ поверхностныхъ слояхъ ϱ_1 и ϱ', а толщина ихъ ε_1 и ε', то будемъ имѣть:

$$U = F(\varrho),\quad U_n = G(\varrho_1,\, \varepsilon_1),\quad U_{n'} = H(\varrho',\, \varepsilon'). \tag{3}$$

Положимъ еще для краткости письма:

$$\sum (X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z) = R_e. \tag{4}$$

Подставляя теперь все это въ равенство (1), получимъ *основное уравненіе* нашей теоріи въ слѣдующемъ видѣ:

$$R_e - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0. \tag{5}$$

Здѣсь первый интегралъ долженъ быть распространенъ на всѣ точки объема жидкости, а второй на всѣ точки поверхности, ограничивающей жидкость.

Необходимо замѣтить, что слои перемѣнной толщины ε_1 и ε' должны при всѣхъ перемѣщеніяхъ состоять изъ однихъ и тѣхъ же точекъ. Этимъ замѣчаніемъ мы ниже воспользуемся при опредѣленіи $\delta\varepsilon_1$ и $\delta\varepsilon'$.

Преобразуемъ теперь R_e. Мы приняли, что къ свободной поверхности изслѣдуемой жидкости прилегаетъ другая жидкость, напримѣръ воздухъ; но мы можемъ отвлечься отъ этой жидкости, — стоитъ только вообразить себѣ приличнымъ образомъ выбранную систему силъ, приложенныхъ ко всѣмъ точкамъ свободной поверхности жидкости; эта система силъ должна быть, слѣдовательно, подобрана такъ, что равновѣсіе жидкости не нарушится, если воздухъ надъ жидкостью будетъ устраненъ.

На основаніи сказаннаго можно положить:

$$R_e = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z) dS \qquad (6)$$

при чемъ первый интегралъ распространенъ на всѣ точки объема жидкости, а второй на всѣ точки свободной поверхности ея, а силы X_n, Y_n, Z_n и представляютъ ту систему поверхностныхъ силъ, которая замѣняетъ дѣйствіе жидкости, прилегающей къ изслѣдуемой.

Соединяя теперь все сказанное вмѣстѣ, мы напишемъ основное уравненіе нашей теоріи жидкостей въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned} &\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z)\, dS - \\ &\qquad - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Это уравненіе должно дать *полную теорію равновѣсія жидкостей*, т. е. оно должно дать какъ уравненія гидростатики въ обычномъ смыслѣ этого слова, такъ и основныя уравненія теоріи каппиллярности. И оно даетъ все это.

Если разсматриваемая жидкость несжимаемая, то къ уравненію (A) надо присоединить условіе несжимаемости, — условіе, представляющее разницу между капельно-жидкимъ и газообразнымъ состояніями тѣлъ.

Это условіе можно написать, какъ извѣстно, въ формѣ слѣдующаго равенства:

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

или, лучше, въ видѣ интеграла, распространеннаго на всѣ точки объема жидкости:

$$\int P \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right) d\tau = 0\,, \qquad (8)$$

при чемъ P будетъ нѣкоторая, неизвѣстная пока, функція координатъ.

Условіе (8) при помощи извѣстнаго пріема Грина „интегрированія по частямъ“ можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\int P \{ [\cos(nx)\, \delta x + \cos(ny)\, \delta y + \cos(nz)\, \delta z]\, dS + \\ &\quad + [\cos(n'x)\, \delta x + \cos(n'y)\, \delta y + \cos(n'z)\, \delta z]\, dS' \} + \\ &\qquad + \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) d\tau = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

гдѣ n и n' суть направленія нормаловъ къ dS и dS', проведенныхъ внутрь жидкости.

III.

Теперь намъ надо преобразовать уравненіе (A), т. е. составить варіаціи входящихъ въ него интеграловъ.

Мы подробно остановимся на опредѣленіи варіаціи интеграла:

$$\int U_n dS = \int G(\varrho_1\,,\ \varepsilon_1)\, dS$$

и по ней уже легко составимъ варіацію интеграла:

$$\int U_{n'}\, dS' = \int H(\varrho'\,,\ \varepsilon')\, dS'.$$

Мы имѣемъ:

$$\delta \int U_n dS = \int \left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1} \delta\varrho_1 + \frac{\partial G}{\partial \varepsilon_1} \delta\varepsilon_1 \right) dS + \int G(\varrho_1\,,\ \varepsilon_1)\, \delta . dS. \tag{9}$$

Составимъ сначала варіацію элемента dS свободной поверхности S жидкости. Эта поверхность S ограничена нѣкоторымъ контуромъ, а именно линіей пересѣченія свободной поверхности жидкости со стѣнками сосуда и съ поверхностями, ограничивающими погруженныя въ нее твердыя тѣла; поэтому $\delta . dS$ будетъ состоять изъ двухъ частей: одной, происходящей отъ возможныхъ перемѣщеній точекъ свободной поверхности жидкости и другой—отъ перемѣщеній точекъ, лежащихъ на контурѣ, ограничивающемъ свободную поверхность жидкости.

Обозначимъ эти варіаціи знаками (1) и (2); тогда

$$\delta . dS = \delta_1 . dS + \delta_2 dS.$$

Первую изъ этихъ варіацій найдемъ по геометрическому способу, данному еще въ 1832 году Бертраномъ *).

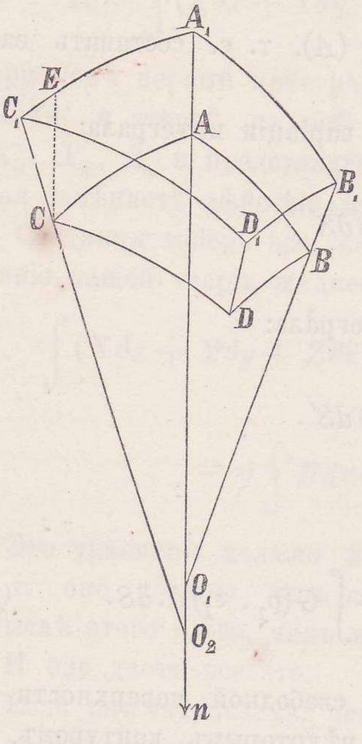
Пусть $ABCD = dS$ будетъ элементъ свободной поверхности жидкости до перемѣщенія (т. е. до деформаціи жидкости), ограниченный линіями кривизны; $A_1B_1C_1D_1 = dS_1$ тотъ-же элементъ послѣ деформаціи и пусть $AA_1 = \delta n$ будетъ нормальное перемѣщеніе точки A; тогда:

$$\delta_1 . dS = dS_1 - dS.$$

---

*) Journal de Liouville, t. XIII; p. 117. Можно опредѣлить эти варіаціи и аналитически.

Такъ какъ здѣсь AB и AC будутъ элементы двухъ ортогональныхъ линій кривизны, проведенныхъ на поверхности черезъ подошву A нормала An, направленнаго внутрь жидкости, то:



Черт. 1-й.

$$dS = AB . AC ; \quad dS_1 = A_1 B_1 . A_1 C_1 ;$$

но очевидно, что:

$$A_1 B_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_1}\right) AB ,$$

$$A_1 C_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_2}\right) AC ,$$

при чемъ AO_1 и AO_2 будутъ радіусами кривизны нормальныхъ сѣченій AB и AC.

Подставляя это въ выраженіе $\delta_1 . dS$, паходимъ:

$$\delta_1 . dS = \left(\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2}\right) dS . \delta n ;$$

но, если обозначимъ R_1 и R_2 главные радіусы кривизны поверхности въ точкѣ $A(x , y , z)$, то по теоремѣ Эйлера имѣемъ:

$$\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} ,$$

а потому

$$\delta_1 . dS = \pm \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS \delta n . \qquad (10)$$

Мы написали въ кривой части два знака $\pm$, такъ какъ на чертежѣ взятъ случай *выпуклой* поверхности (знакъ $+$), т. е. такой, для которой радіусы кривизны совпадаютъ по направленію съ нормаломъ n къ поверхности; для *вогнутой-же* поверхности эти направленія прямо противоположны и придется взять знакъ $-$.

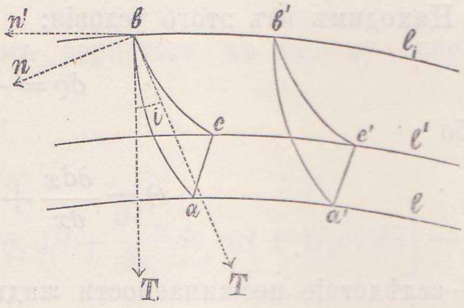
Опредѣлимъ теперь $\delta_2 dS$.

Пусть l будетъ кривая пересѣченія свободной поверхности жидкости съ твердымъ тѣломъ или стѣнкой сосуда до перемѣщенія, а l_1 послѣ перемѣщенія, и l' безконечно-близкое положеніе l на свободной поверхности жидкости тоже послѣ деформаціи, но получаемое изъ l вслѣдствіе нормальныхъ перемѣщеній ея точекъ.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$aa' = dl\,, \qquad ab = \delta\lambda\,,$$

при чемъ $\delta\lambda$ будетъ возможное перемѣщеніе точки a на поверхности соприкосновенія жидкости съ твердымъ тѣломъ или стѣнкой сосуда.



Черт. 2-й.

Пусть, далѣе, bn и bn' будутъ направленія нормаловъ къ свободной поверхности жидкости и поверхности, „твердаго тѣла" и i будетъ уголъ между нами, — это такъ называемый *краевой уголъ* или *уголъ принаровленія*; тогда получимъ:

$$aa'bb' = \delta\lambda\, dl\,, \qquad bccb' = \delta\lambda\, dl \cos i$$

и слѣдовательно:

$$\delta_2 . dS = \cos i . dl\delta\lambda. \tag{11}$$

Замѣтимъ кстати, что между δn и $\delta\lambda$ существуетъ простое соотношеніе; треугольникъ abc, прямоугольный при точкѣ c, даетъ:

$$ac = ab \sin i\,,$$

т. е.

$$\delta\lambda = \frac{\delta n}{\sin i}\,,$$

ибо

$$ac = \delta n\,, \qquad ab = \delta\lambda.$$

И такъ получаемъ для полной варіаціи элемента поверхности слѣдующее выраженіе:

$$\delta . dS = \pm\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS\delta n + \cos i\, dl . \delta\lambda. \tag{12}$$

Отсюда-же мы найдемъ варіацію элемента поверхности соприкосновенія жидкости съ твердымъ тѣломъ или со стѣнками сосуда;—это будетъ на черт. 2 площадь $aa'bb'$,—слѣдовательно, получимъ:

$$\delta . dS' = \delta\lambda . dl. \tag{13}$$

Опредѣлимъ теперь варіаціи $\delta\varrho$, $\delta\varrho_1$ и $\delta\varrho'$.

Вслѣдстіе неразрывности массы имѣемъ условіе:

$$\delta.(\varrho d\tau)=0\,,$$

гдѣ $d\tau$ элементъ объема жидкости.

Находимъ изъ этого условія:

$$\delta\varrho=-\varrho\Theta=0 \tag{14}$$

ибо

$$\Theta=\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}=0$$

— вслѣдствіе несжимаемости жидкости.

Далѣе для поверхностнаго слоя имѣемъ аналогичное равенство:

$$\delta.(\varrho_1 dn.dS)=0\,,$$

откуда при помощи (12) находимъ:

$$\delta\varrho_1.dS=\mp\varrho_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\delta n.dS-\varrho_1\cos i\,\delta\lambda dl \tag{15}$$

и точно также для поверхности соприкосновенія съ „твердымъ тѣломъ“:

$$\delta\varrho'.dS'=-\varrho'\delta\lambda dl \tag{16}$$

такъ какъ для поверхности твердаго тѣла или стѣнокъ сосуда частицы жидкости могутъ перемѣщаться лишь въ касательныхъ плоскостяхъ, то

$$\delta n=0\,,\qquad i=0\,.$$

Теперь надо выразить δn и $\delta\lambda$ въ функціи δx, δy, δz.

Очевидно имѣемъ:

$$\delta n=\cos(nx)\,\delta x+\cos(ny)\,\delta y+\cos(nz)\,\delta z\,. \tag{17}$$

Величину $\delta\lambda$ найдемъ изъ равенства:

$$\delta\lambda=\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\,. \tag{18}$$

Точно также очевидно, что:

$$\delta\varepsilon_1=\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\delta z\,, \tag{19}$$

$$\delta\varepsilon'=\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}\delta z\,. \tag{20}$$

IV.

Теперь, подготовивъ все, мы можемъ вернуться къ нашему основному уравненію (A).

Развивая его, получаемъ:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau - \int \left[\frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\delta\varrho_1\, dS + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\delta\varepsilon_1\, dS + U_n \delta . dS\right] -$$

$$-\int \left[\frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'}\delta\varrho'\, dS' + \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\delta\varepsilon'\, dS' + U_{n'}\delta . dS'\right] +$$

$$+\int (X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\, dS = 0\,,$$

если воспользуемся равенствомъ (14) и условіемъ несжимаемости жидкости.

Пользуясь далѣе равенствами (12), (13), (15), (16), (17), (18), (19) и (20), получаемъ послѣ очевидныхъ приведеній слѣдующее равенство:

$$\left.\begin{aligned}
&\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau - \\
&-\iint\Bigg\{\left[\pm\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos(nx) + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\right]\delta x + \\
&+\left[\pm\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos(ny) + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}\right]\delta y + \\
&+\left[\pm\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos(nz) + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\right]\delta z\Bigg\} dS - \\
&-\int\left(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}\delta z\right]\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon'} . dS' - \\
&-\iint\Bigg\{\left[\left(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos i + \left(U_{n'} - \varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}\right)\right]\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x + \right. \\
&\left.+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\right]\Bigg\} dl + \int (X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\, dS = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (A\ \text{bis})$$

Входящія сюда варіаціи должны удовлетворять еще условію (B).

Вычитая равенство (B) изъ (A bis), получимъ уравненіе, въ которомъ варіаціи δx, δy, δz, какъ въ объемномъ интегралѣ, такъ и въ поверхностныхъ и въ интегралѣ по контуру будутъ *совершенно произвольны*, а потому коэффиціенты при нихъ будутъ отдѣльно равны нулю.

Отсюда находимъ: *во первыхъ, внутри* жидкой массы должны существовать уравненія:

$$X-\frac{\partial P}{\partial x}=0\,,\qquad Y-\frac{\partial P}{\partial y}=0\,,\qquad Z-\frac{\partial P}{\partial z}=0. \tag{C}$$

Во вторыхъ, на свободной поверхности жидкости должны удовлетворяться уравненія:

$$P\cos(nx)\pm\left(U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}\right)\cos(nx)+\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}-X_n=0 \tag{D}$$

и подобныя же уравненія для осей y и z.

Въ третьихъ, на поверхности твердаго тѣла и стѣнкахъ сосуда:

$$P\cos(n'x)+\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}=0 \tag{E}$$

и подобныя уравненія для осей y и z.

И наконецъ *въ четвертыхъ, на контурѣ свободной поверхности жидкости* должны быть соблюдены условія:

$$\left[\left(U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right)\cos i+\left(U_{n'}-\varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}\right)\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0 \tag{F}$$

и подобныя же для осей y и z.

Положимъ теперь:

$$U_n-\varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}=P_1\,,\qquad U_{n'}-\varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}=P'. \tag{21}$$

Замѣтимъ еще, что ε_1 и ε', какъ толщины слоевъ жидкости, измѣряются по нормаламъ къ ихъ поверхностямъ, а потому всегда можно опредѣлить такихъ два вектора K и K', чтобы:

$$\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}=K\cos(nx)\,,\qquad\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}=K\cos(ny)\,,\qquad\frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}=K\cos(nz) \tag{22}$$

и

$$\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}=K'\cos(n'x),\qquad\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}=K'\cos(n'y),\qquad\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}=K'\cos(n'z). \tag{23}$$

При такихъ положеніяхъ уравненія (D), (E) и (F) обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nx) \\ Y_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(ny) \\ Z_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nz) \end{aligned}\right\} \qquad (D \text{ bis})$$

на *свободной поверхности* жидкости.

$$P + K' = 0 \qquad (E \text{ bis})$$

на *поверхности прикосновенія* жидкости съ „твердымъ тѣломъ".

На контурѣ:

$$\cos i = -\frac{P'}{P_1}. \qquad (F \text{ bis})$$

V.

И такъ уравненія равновѣсія жидкости будутъ:

Внутри жидкой массы:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z. \qquad (\text{I})$$

Функція P есть такъ называемое *гидростатическое давленіе.* Изъ этихъ уравненій вытекаетъ *законъ Паскаля.*

На свободной поверхности жидкости изъ (D bis) находимъ для давленія $P_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}$

$$P_n = P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (\text{II})$$

Это давленіе состоитъ изъ двухъ главныхъ частей:

$$P,$$

не зависящаго отъ формы свободной поверхности и давленія:

$$K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

зависящаго отъ формы свободной поверхности жидкости; это такъ называемое *капиллярное давленіе въ жидкости.*

Давленіе K есть такъ называемое *поверхностное натяженіе* жидкости.

По равенству (II) полное *капиллярное давленіе,*—назовемъ его P_k, будетъ:

$$P_k = K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Очевидно, что K будетъ капиллярнымъ давленіемъ на *плоской свободной поверхности* т. е., когда имѣемъ:

$$R_1 = R_2 = \infty.$$

Давленіе K происходитъ отъ поверхностнаго натяженія въ поверхностномъ слоѣ жидкости.

На контурѣ поверхности существуетъ условіе для краеваго угла:

$$\cos i = -\frac{P'}{P_1}. \tag{III}$$

Этотъ уголъ i зависитъ отъ поверхностныхъ плотностей жидкости ϱ_1 и ϱ' и толщинъ поверхностныхъ слоевъ, ε_1 и ε', т. е.

$$\cos i = \Phi(\varrho_1, \varrho'; \varepsilon_1, \varepsilon'). \tag{III bis}$$

Значитъ уголъ i постояненъ по стольку, по скольку постоянны ϱ_1, ϱ', ε_1 и ε'. Здѣсь, намъ кажется и лежитъ разгадка того факта, что краевой уголъ жидкости, напр. ртути, измѣняется со временемъ; понятно, что окисленіе ртути, запыленіе и т. п. измѣняютъ и поверхностную плотность и сцѣпленіе частицъ поверхностнаго слоя, т. е. его толщину.

Точно также, замѣчая, что плотности ϱ и толщины ε суть функціи температуры, мы всегда можемъ допустить такое значеніе для температуры, при которомъ функція Φ обращается въ нуль, т. е. тогда получимъ:

$$i = \frac{\pi}{2},$$

другими словами жидкость не будетъ смачивать твердаго тѣла.

У насъ еще осталось уравненіе (E'), но его смыслъ очевиденъ: оно даетъ давленіе жидкости на поверхности „твердаго тѣла“.

VI.

Въ предыдущемъ мы принимали, что наша жидкость несжимаема; но наши общія выводы получатся и для случая сжимаемой жидкости. Разница анализа будетъ *во 1-хъ*, въ томъ, что равенство (B) надо отбросить и *во 2-хъ*, что членъ:

$$\delta \int U d\tau$$

не изчезаетъ, а потому къ лѣвой части равенства (A bis) надо приложить

$$-\delta \int U d\tau .$$

Но:

$$\delta . \int U d\tau = \int \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} \delta \varrho + U \Theta \right) d\tau = \int \Theta \left(U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right) d\tau ,$$

ибо

$$\delta . d\tau = \Theta d\tau , \quad \delta \varrho = - \varrho \Theta .$$

Положимъ:

$$U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} = - P . \tag{24}$$

Подставляя значеніе Θ и примѣняя пріемъ преобразованія Грина, находимъ:

$$-\delta . \int U d\tau = - \int P \{ [\cos(nx)\, \delta x + \cos(ny)\, \delta y + \cos(nz)\, \delta z]\, dS -$$

$$- [\cos(n'x)\, \delta x + \cos(n'y)\, \delta y + \cos(n'z)\, \delta z]\, dS' \} -$$

$$- \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) d\tau .$$

Вводя это выраженіе въ лѣвую часть равенства (A bis) и приравнивая нулю коэффиціенты при δx, δy, δz во всѣхъ интегралахъ, получимъ тѣже уравненія (C), (D), (E) и (F) съ той лишь разницей, что функція P опредѣляется равенствомъ (24). Это равенство можно написать въ видѣ:

$$P = f(\varrho) . \tag{25}$$

Это есть равенство характеризующее газы.

VII.

Изложенная теорія помимо того, что она сводитъ къ одному источнику и теорію гидростатики, и теорію капиллярности, обладаетъ въ сравненіи съ старыми теоріями Ляпляса и Гаусса тѣмъ преимуществомъ, что сразу вводитъ поверхностное натяженіе, чего нѣтъ въ теоріи Гаусса и даетъ очень просто условіе (III) для краеваго угла, чего непосредственно теорія Ляпляса не даетъ. Наша теорія имѣетъ пунктъ соприкосновенія съ теоріей капиллярности Пуассона въ томъ обстоятельствѣ, что у насъ поверхностная плотность не равна плотности внутри жидкости.