Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ.

Дмитрія Граве.

I.

Настоящая статья представляетъ опытъ установленія основаній общей теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ, независимой отъ какого либо аналитическаго ихъ представленія.

Будемъ разсматривать функцію $f(x, y)$ двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ независимыхъ x и y, которая обращается въ нуль для всѣхъ точекъ нѣкотораго замкнутаго контура C. Внутри контура функція однозначна, конечна и непрерывна вмѣстѣ съ ея частными производными перваго порядка. Относительно производныхъ порядка выше перваго мы не дѣлаемъ никакихъ предположеній. Эти производныя могутъ переставать быть конечными и непрерывными и даже могутъ не существовать.

И такъ, мы имѣемъ, очевидно, право предполагать, что функція $f(x, y)$ имѣетъ внутри контура положительныя значенія, ибо если бы функція была отрицательна или нуль для всѣхъ точекъ внутри контура, то мы перемѣнили бы ея знакъ, разсматривая $-f(x, y)$.

Будемъ разсматривать касательную къ контуру C, опредѣляя этимъ терминомъ такую прямую, которая имѣетъ одну или нѣсколько общихъ съ контуромъ точекъ, и относительно которой весь контуръ лежитъ по одну сторону. Такое опредѣленіе будетъ годиться для всевозможныхъ контуровъ: когда контуръ имѣетъ точки перегиба, особенныя точки или прямолинейныя части.

Очевидно, что каждому направленію, проведенному на плоскости, соотвѣтствуютъ двѣ касательныя, параллельныя этому направленію, между которыми лежитъ разсматриваемый контуръ. Сопоставимъ различныя касательныя къ контуру значеніямъ нѣкотораго угла.

Возьмемъ начало прямоугольныхъ координатъ гдѣ нибудь внутри контура. Обозначимъ черезъ ω уголъ, образуемый положительнымъ направленіемъ оси x-овъ съ направленіемъ перпендикуляра, опущеннаго на касательную изъ начала координатъ, причемъ это направленіе будемъ считать идущимъ отъ касательной къ началу координатъ.

Кромѣ того, обозначимъ черезъ p разстояніе этой касательной отъ начала координатъ.

Обозначая черезъ α линейную функцію

$$p + x\cos\omega + y\sin\omega\,,$$

получимъ уравненіе касательной въ видѣ

$$\alpha = 0\,,$$

причемъ $\alpha > 0$ съ той стороны, гдѣ находится контуръ.

Разсмотримъ теперь функцію

$$F = f - \lambda\alpha\,,$$

гдѣ λ произвольный параметръ.

Относительно новой функціи F легко замѣтить, что ея первыя производныя выражаются такъ:

$$F'_x = f'_x - \lambda\cos\omega$$

$$F'_y = f'_y - \lambda\sin\omega\,.$$

Будемъ давать параметру λ возрастающія положительныя значенія, начиная отъ нуля.

При $\lambda = 0$ функція F совпадаетъ съ f и по предположенію имѣетъ внутри контура положительныя значенія.

При положительныхъ значеніяхъ λ для всѣхъ точекъ внутри контура $\lambda\alpha > 0$.

При достаточно малыхъ положительныхъ значеніяхъ λ будутъ оставаться внутри контура положительныя значенія функціи F.

Очевидно, что всякому значенію угла ω будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное предѣльное значеніе λ, для котораго F перестаетъ имѣть положительныя значенія внутри контура.

Обозначимъ предѣльное значеніе λ, соотвѣтствующее углу ω, черезъ λ_ω. Это предѣльное значеніе можетъ быть, конечно, безконечностью. Давая углу ω всевозможныя значенія отъ 0 до 2π, мы будемъ разсматривать соотвѣтственныя значенія λ_ω. Нетрудно видѣть, что λ_ω имѣетъ отличную отъ нуля нижнюю границу λ_0.

Послѣднее обстоятельство слѣдуетъ изъ неравенства

$$\lambda_\omega > \frac{f(x_1, y_1)}{\varDelta}$$

гдѣ $f(x_1, y_1)$ одно изъ положительныхъ значеній функціи внутри контура, а $\varDelta$ наибольшее изъ разстояній между параллельными касательными къ контуру.

Будемъ разсматривать на вспомогательной плоскости Π величины ω и λ, какъ полярныя координаты: ω полярный уголъ и λ радіусъ-векторъ.

Проведемъ въ плоскости Π кругъ Q радіуса λ_0 изъ полюса, какъ центра. Тогда каждой точкѣ внутри круга Q соотвѣтствуетъ своя функція F. Эта функція F обращается въ нуль на нѣкоторомъ контурѣ C_1, лежащемъ внутри контура C, и имѣетъ положительныя значенія внутри этого контура; на самомъ контурѣ C значенія F отрицательны и равны нулю въ точкахъ общихъ контуру и касательной.

Разсмотримъ функцію F, соотвѣтствующую нѣкоторой точкѣ G внутри круга Q.

Мы видимъ, что внутри даннаго контура C функція F имѣетъ положительныя значенія, но такъ какъ она конечна и непрерывна внутри этого контура, то она достигаетъ гдѣ нибудь внутри контура своего наибольшаго положительнаго значенія. Это значеніе можетъ достигаться функціею въ одной точкѣ или въ нѣсколькихъ.

Доказательство то-же, что и данное Вейерштрассомъ для случая функціи отъ одной перемѣнной независимой.

Будемъ называть совокупность точекъ внутри контура C, соотвѣтствующихъ maximum'у функціи F *фигурою maximi функціи* F.

И такъ, мы видимъ, что каждой точкѣ G внутри круга Q соотвѣтствуетъ нѣкоторая фигура maximi внутри контура C.

Прежде чѣмъ мы перейдемъ къ изученію различныхъ фигуръ maximi, соотвѣтствующихъ разнымъ точкамъ G плоскости Π, и къ изученію перемѣщенія ихъ въ зависимости отъ перемѣщенія точки G, укажемъ на извѣстное обобщеніе теоремы Ролля, состоящее въ томъ, что для каждой точки фигуры maximi, обѣ частныя производныя F'_x, F'_y должны равняться нулю т. е. должно быть:

$$F'_x = f'_x - \lambda\cos\omega = 0, \qquad F'_y = f'_y - \lambda\sin\omega = 0.$$

И такъ, мы видимъ, что прямоугольныя координаты точки G

$$p = \lambda \cos\omega\,, \qquad q = \lambda \sin\omega$$

опредѣляютъ значенія производныхъ f'_x, f'_y заданной функціи въ точкахъ фигуры maximi функціи F, соотвѣтствующей точкѣ G.

Обратимся къ изученію главнѣйшихъ свойствъ фигуръ maximi. Прежде всего надо сказать о видѣ фигуры maximi.

Можетъ произойти нѣсколько случаевъ.

Во первыхъ maximum функціи можетъ соотвѣтствовать конечному числу отдѣльныхъ точекъ внутри контура. Будемъ говорить, что имѣетъ мѣсто случай *обыкновеннаго пунктирнаго maximum'a.*

Словомъ обыкновенный мы будемъ отличать этотъ случай отъ случая *особеннаго пунктирнаго maximum'a*, когда число точекъ, соотвѣтствующихъ наибольшему значенію функціи безконечно велико. Очевидно, что въ особенномъ пунктирномъ maximum'ѣ точки должны асимптотически группироваться или около отдѣльныхъ точекъ, или около цѣлыхъ линій, ибо иначе не можетъ въ конечномъ пространствѣ заданнаго контура помѣститься безчисленное множество отдѣльныхъ точекъ, разстоянія между которыми конечныя.

Можетъ случиться, что maximum функціи соотвѣтствуетъ точкамъ, заполняющимъ конечное число отдѣльныхъ замкнутыхъ линій, или же не замкнутыхъ частей прямыхъ или кривыхъ линій какого либо вида и взаимнаго расположенія. Такой maximum мы будемъ называть *обыкновеннымъ линейнымъ maximum'омъ. Особеннымъ линейнымъ maximum'омъ* будемъ называть случай безчисленнаго множества линій.

Наконецъ мы будемъ называть maximum *обыкновеннымъ поверхностнымъ*, если соотвѣтствующія ему точки, заполняютъ конечное число площадокъ ограниченныхъ нѣкоторыми контурами. *Особеннымъ поверхностнымъ maximum'омъ* мы будемъ называть maximum въ случаѣ безчисленнаго множества отдѣльныхъ площадокъ. При счетѣ числа отдѣльныхъ площадокъ могутъ встрѣтиться площадки не сплошь занятыя точками, такъ что внутри площадки могутъ быть пустыя мѣста не занятыя точками фигуры.

Мыслимы самые разнообразные случаи, представляющіе комбинаціи указанныхъ трехъ основныхъ видовъ расположенія фигуры maximi, причемъ въ случаѣ линейныхъ maximum'овъ линіи могутъ обладать самыми разнообразными особенностями вида и особенными точками самыхъ разнообразныхъ свойствъ. Подобнымъ же образомъ контуры, ограничивающіе отдѣльныя части поверхностнаго maximum'a могутъ быть самаго разнообразнаго вида.

Введемъ теперь новое понятіе, которое позволитъ наши разсужденія значительно упростить, а именно понятіе о касательной прямой къ фигурѣ maximi.

Мы будемъ называть прямую L касательною къ фигурѣ maximi, если по одну сторону прямой L нѣтъ точекъ фигуры и кромѣ того существуютъ точки фигуры, разстояніе которыхъ до прямой меньше произвольно выбраннаго положительнаго числа.

Нетрудно видѣть, что каждому направленію на плоскости соотвѣтствуютъ двѣ касательныя, параллельныя этому направленію, между которыми лежитъ разсматриваемая фигура maximi.

Доказательство существованія этихъ двухъ касательныхъ то-же, что и данное Вейерштрассомъ для существованія верхней и нижней границы конечной перемѣнной.

Будемъ теперь непрерывно измѣнять направленіе пары касательныхъ. При такомъ измѣненіи касательныя будутъ огибать часть плоскости, ограниченную нѣкоторымъ контуромъ, неимѣющимъ выпуклости во внутрь.

Будемъ называть полученный такимъ образомъ контуръ *внѣшнимъ контуромъ фигуры maximi*.

Внѣшній контуръ обращается въ точку, если мы имѣемъ дѣло съ пунктирнымъ maximum'омъ, состоящимъ изъ одной точки. Внѣшній контуръ обращается въ отрѣзокъ прямой, если имѣемъ дѣло съ прямолинейнымъ maximum'омъ, или же съ пунктирнымъ maximum'омъ, состоящимъ изъ точекъ, расположенныхъ вдоль по прямой или же наконецъ только изъ двухъ точекъ.

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ внѣшній контуръ, представляетъ фигуру выпуклую со всѣхъ сторонъ, состоящую изъ ряда прямолинейныхъ или криволинейныхъ частей.

Такъ для фигуры, состоящей изъ трехъ точекъ, не лежащихъ на одной прямой, внѣшній контуръ обращается въ треугольникъ, вершинами котораго служатъ три точки.

Дуга круга даетъ черезъ прибавленіе хорды сегментъ какъ внѣшній контуръ.

Итакъ, назвавъ касательною къ внѣшнему контуру прямую, имѣющую одну или нѣсколько съ нимъ общихъ точекъ, относительно которой весь контуръ лежитъ по одну сторону, мы замѣтимъ, что касательная къ внѣшнему контуру касается его или въ одной точкѣ, или вдоль по прямой сторонѣ. Будемъ въ первомъ случаѣ называть точку касанія *выходящею* точкою внѣшняго контура.

Очевидно, что касательная къ внѣшнему контуру есть въ тоже время касательная къ соотвѣтственной фигурѣ maximi.

Нетрудно убѣдиться, что если функція f непрерывна, то всѣ выходящія точки должны быть въ то же время точками соотвѣтственной фигуры maximi. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, одну изъ выходящихъ точекъ. Къ ней можно провести одну или нѣсколько касательныхъ. Пусть будетъ указана какая нибудь касательная L выходящей точки $M_0(x_0, y_0)$ внѣшняго контура. По предыдущему должны существовать точки фигуры maximi безконечно близкія къ касательной L. Эти точки должны быть безконечно близки къ точкѣ M_0, ибо всѣ остальныя точки прямой L находятся внѣ контура и, слѣдовательно, на конечномъ разстояніи отъ всѣхъ точекъ фигуры maximi. Можетъ произойти, слѣдовательно, одно изъ двухъ: или точка M_0 есть точка фигуры maximi, и тогда теорема доказана, или же точка M_0 такова, что къ ней асимптотически приближаются точки $M_i(x_i, y_i)$ фигуры maximi. Нетрудно убѣдиться, что во второмъ случаѣ мы приходимъ къ противорѣчію.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ рядъ точекъ фигуры maximi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3), \ldots$, неопредѣленно приближающихся къ точкѣ $M_0(x_0, y_0)$, при чемъ, очевидно, будетъ:

$$\lim \{x_i\}_{i=\infty} = x_0, \qquad \lim \{y_i\}_{i=\infty} = y_0.$$

Разсмотримъ функцію $F(x, y)$, соотвѣтствующую данному внѣшнему контуру. Если функція f непрерывна, то, очевидно, должна быть непрерывна и функція F.

Далѣе

$$F(x_1, y_1) = F(x_2, y_2) = \ldots = F(x_i, y_i) = A,$$

гдѣ A наибольшее значеніе F внутри контура, ибо точки (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$ и т. д. принадлежатъ фигурѣ maximi.

На основаніи непрерывности функціи $F(x, y)$ значеніе $F(x_0, y_0)$ будетъ предѣльнымъ для значеній $F(x_i, y_i)$, которыя всѣ равны A; слѣдовательно, это предѣльное значеніе будетъ A, и точка M_0 принадлежитъ фигурѣ maximi, что противорѣчитъ предположенію.

Точки внутри внѣшняго контура и на самомъ контурѣ, неоотвѣтствующія фигурѣ maximi, будемъ называть *свободными* точками.

Докажемъ нѣсколько весьма важныхъ предложеній относительно фигуръ maximi и внѣшнихъ контуровъ.

Для удобства дальнѣйшихъ разсужденій вмѣсто функціи $F(x, y)$, достигающей наибольшаго значенія A въ нѣкоторой точкѣ $M_0(x_0, y_0)$, соотвѣтственной фигурѣ maximi Ξ, будемъ разсматривать функцію

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0).$$

Новая функція $\Phi(x, y)$ имѣетъ ту же фигуру maximi что и функція $F(x, y)$; только она равна нулю для всѣхъ точекъ фигуры maximi и удовлетворяетъ неравенству

$$\Phi(x, y) < 0$$

для всѣхъ остальныхъ точекъ внутри контура C.

Нетрудно видѣть, что функція Φ выражается слѣдующимъ образомъ

$$\Phi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - \lambda[(x - x_0)\cos\omega + (y - y_0)\sin\omega] =$$
$$= f(x, y) - f(x_0, y_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0),$$

гдѣ p_0 и q_0 значенія частныхъ производныхъ f'_x, f'_y для точекъ фигуры maximi Ξ.

Лемма I. Двѣ фигуры maximi, соотвѣтствующія двумъ различнымъ точкамъ G_1, G_2 плоскости Π не могутъ имѣть общихъ точекъ.

Доказательство очень просто. Предположимъ обратное; пусть будетъ существовать общая точка $M_1(x_1, y_1)$ у двухъ фигуръ maximi. Обозначая прямоугольныя координаты точекъ G_1, G_2 черезъ (p_1, q_1), (p_2, q_2), получимъ равенства

$$f'_x(x_1, y_1) = p_1, \qquad f'_y(x_1, y_1) = q_1,$$
$$f'_x(x_1, y_1) = p_2, \qquad f'_y(x_1, y_1) = q_2,$$

которыя противорѣчатъ существованію для точки M_1 опредѣленныхъ частныхъ производныхъ перваго порядка, ибо точки G_1 и G_2 по предположенію различны между собою и, слѣдовательно, не могутъ удовлетворяться заразъ неравенства $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

Изъ этой леммы, какъ слѣдствіе, вытекаетъ, что двѣ фигуры maximi, соотвѣтствующія различнымъ точкамъ плоскости Π, должны лежать одна внѣ другой. При этомъ линейныя или площадныя части одной фигуры не могутъ касаться подобныхъ же частей другой, ибо при переходѣ черезъ точку касанія съ одной фигуры на другую частныя производныя перваго порядка переставали бы быть непрерывными.

Лемма II. Пусть будутъ даны двѣ фигуры maximi Ξ_1 и Ξ_2, соотвѣтствующія двумъ точкамъ $G_1(p_1, q_1)$ $G_2(p_2, q_2)$ плоскости Π. Возьмемъ любую точку фигуры Ξ_1 и обозначимъ ея координаты черезъ x_1, y_1; подобнымъ же образомъ, пусть будутъ координаты произвольной точки фигуры Ξ_2 обозначены черезъ x_2, y_2.

Будетъ всегда имѣть мѣсто неравенство

$$(x_1 - x_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(q_1 - q_2) < 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи того, что точка (x_1, y_1) принадлежитъ фигурѣ maximi, соотвѣтственной точкѣ G_1, имѣетъ мѣсто неравенство

$$f(x, y) - f(x_1, y_1) - p_1(x - x_1) - q_1(y - y_1) \leqq 0,$$

гдѣ знакъ равенства относится къ точкамъ фигуры maximi Ξ_1. Взявъ точку (x_2, y_2) второй фигуры maximi, получаемъ неравенство

$$(1) \qquad f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) - p_1(x_2 - x_1) - q_1(y_2 - y_1) < 0.$$

Подобнымъ же образомъ для фигуры maximi Ξ_2 имѣетъ мѣсто неравенство

$$f(x, y) - f(x_2, y_2) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2) \leqq 0.$$

Примѣненное къ точкѣ (x_1, y_1) первой фигуры, оно даетъ

$$(2) \qquad f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) - p_2(x_1 - x_2) - q_2(y_1 - y_2) < 0.$$

Складывая неравенства (1) и (2), получимъ

$$(p_2 - p_1)(x_2 - x_1) + (q_2 - q_1)(y_2 - y_1) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Итакъ, мы видимъ, что имѣетъ мѣсто всегда неравенство

$$\Delta x \Delta p + \Delta y \Delta q < 0,$$

гдѣ Δx и Δy суть приращенія координатъ, соотвѣтствующія переходу отъ точки одной фигуры maximi Ξ_1 къ точкѣ другой фигуры Ξ_2, а Δp и Δq суть соотвѣтственныя приращенія первыхъ частныхъ производныхъ.

Обращаемся теперь къ закону перемѣщенія внѣшнихъ контуровъ при перемѣщеніи точки G внутри круга Q.

Лемма III. Два внѣшнихъ контура Ξ_1, Ξ_2, соотвѣтствующіе двумъ точкамъ $G_1(p_1, q_1)$, $G_2(p_2, q_2)$ плоскости Π, не пересѣкаются между собою, а лежатъ одинъ внѣ другого.

Разсмотримъ на плоскости даннаго контура прямую L, опредѣляемую уравненіемъ

$$p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2) +$$
$$+ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = 0,$$

гдѣ x_1, y_1 координаты какой нибудь точки фигуры maximi Ξ_1; x_2, y_2 координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_2. Покажемъ теперь, что всѣ точки фигуры Ξ_1 лежатъ по одну сторону прямой L на конечномъ разстояніи; подобнымъ же образомъ, всѣ точки фигуры Ξ_2 лежатъ по другую сторону этой прямой.

Обозначимъ черезъ x_1', y_1' координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_1, отличной отъ точки (x_1, y_1); если фигура Ξ_1 будетъ состоять изъ одной точки, то будетъ $x_1' = x_1$, $y_1' = y_1$.

Обозначая первую часть уравненія прямой L черезъ $\omega(x, y)$, получимъ

$$\omega(x_1', y_1') = p_1(x_1' - x_1) + q_1(y_1' - y_1) - p_2(x_1' - x_2) - q_2(y_1' - y_2) +$$
$$+ f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2).$$

Разсмотримъ функцію $\Phi(x, y)$, соотвѣтствующую фигурѣ maximi Ξ_1 и ея точкѣ (x_1, y_1), и обозначимъ ее черезъ

$$\Phi_{x_1, y_1}(x, y).$$

Получаемъ

$$\Phi_{x_1 y_1}(x, y) = f(x, y) - f(x_1, y_1) - p_1(x - x_1) - q_1(y - y_1),$$
$$\Phi_{x_2 y_2}(x, y) = f(x, y) - f(x_2, y_2) - p_2(x - x_2) - q_2(y - y_2).$$

Но $\Phi_{x_1 y_1}(x_1', y_1') = 0$ и слѣдовательно,

$$f(x_1, y_1) + p_1(x_1' - x_1) + q_1(y_1' - y_1) = f(x_1', y_1').$$

Слѣдовательно

$$\omega(x_1', y_1') = \Phi_{x_2 y_2}(x_1', y_1') \leqq -\delta_1,$$

гдѣ δ_1 есть разность между $F_{x_2 y_2}(x_2, y_2)$ и наибольшимъ значеніемъ $F_{x_2 y_2}(x, y)$ для различныхъ точекъ фигуры Ξ_1.

Нетрудно видѣть, съ другой стороны, что $\omega(x_2', y_2')$, гдѣ x_2', y_2 суть координаты какой нибудь точки фигуры Ξ_2, можетъ быть выражена черезъ значеніе функціи $\Phi_{x_1, y_1}(x, y)$, а именно

$$\omega(x_2', y_2') = -\Phi_{x_1 y_1}(x_2', y_2') \geqq +\delta_2,$$

гдѣ δ_2 есть разность между $F_{x_1 y_1}(x_1, y_1)$ и наибольшимъ значеніемъ функціи $F_{x_1 y_1}(x, y)$ для различныхъ точекъ фигуры Ξ_2. Отсюда мы видимъ, что $\omega(x_1', y_1')$ и $\omega(x_2', y_2')$ разныхъ знаковъ и по абсолютной величинѣ не меньше меньшаго изъ чиселъ δ_1, δ_2. Слѣдовательно, двѣ фигуры maximi Ξ_1, Ξ_2, а слѣдовательно, и ихъ внѣшніе контуры лежатъ по разныя стороны прямой L. Кромѣ того, если мы проведемъ прямыя параллельныя прямой L: одну со стороны контура Ξ_1 на разстояніи

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2}},$$

другую со стороны контура Ξ_2 на разстоянiи

$$\frac{\delta_2}{\sqrt{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2}},$$

то въ пространствѣ между этими прямыми не будетъ точекъ принадлежащихъ контурамъ Ξ_1 и Ξ_2, что и требовалось доказать.

Введемъ теперь въ разсмотрѣнiе *разстоянiе* между двумя внѣшними контурами, разумѣя подъ нимъ кратчайшее разстоянiе между точками этихъ двухъ контуровъ.

Будемъ теперь двѣ точки плоскости Π сближать; покажемъ, что разстоянiе между соотвѣтственными контурами можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ при достаточномъ сближенiи точекъ. Докажемъ для этой цѣли слѣдующую лемму.

Лемма IV. При безпредѣльномъ приближенiи точки G_2 къ точкѣ G_1 соотвѣтственный контуръ Ξ_2 безпредѣльно приближается къ контуру Ξ_1.

Эта лемма можетъ быть точнѣе формулирована такъ: при достаточномъ сближенiи точекъ G_1 и G_2 можно сдѣлать разстоянiе между двумя соотвѣтственными контурами меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа. Допустимъ обратное, а именно, что вокругъ контура Ξ_1 можно описать контуръ C, всѣ точки котораго на конечномъ разстоянiи отъ точекъ контура Ξ_1, и внутрь котораго не могутъ попадать точки контура Ξ_2, какъ бы мы близко отъ точки G_1 ни выбирали точку G_2.

Возьмемъ неравенство

$$\Delta x\,\Delta p+\Delta y\,\Delta q<\Phi_{x_1y_1}(x_2,\,y_2).$$

Тогда, принимая во вниманiе, что

$$\Phi_{x_1y_1}(x_2,\,y_2)=F_{x_1y_1}(x_2,\,y_2)-F_{x_1y_1}(x_1,\,y_1),$$

гдѣ $F_{x_1y_1}(x_1,\,y_1)=A$ есть maximum функцiи $F_{x_1y_1}(x,\,y)$, получимъ

$$\Phi_{x_1y_1}(x_2,\,y_2)<B-A,\quad \text{гдѣ } B<A.$$

Въ самомъ дѣлѣ, точка $(x_2,\,y_2)$ по предположенiю остается всегда внѣ контура C; слѣдовательно, $F_{x_1y_1}(x_2\;y_2)$ не превосходитъ нѣкотораго положительнаго числа B меньшаго A.

И такъ, мы видимъ, что

$$|\Phi_{x_1y_1}(x_2,\,y_2)|>A-B,$$

откуда

$$|\Delta x\,\Delta p+\Delta y\,\Delta q|>A-B.$$

Мы приходимъ къ очевидному противорѣчію, ибо при достаточномъ сближеніи точекъ G_1 и G_2 приращенія Δp и Δq могутъ быть сколь угодно малы.

Лемма V. При приближеніи точки $G_i (i = 1, 2, 3 \ldots)$ къ точкѣ G_0 соотвѣтственный внѣшній контуръ Ξ_2 приближается къ внѣшнему контуру Ξ_0 такимъ образомъ, что точка фигуры maximi Ξ_i не можетъ приближаться къ точкамъ свободной стороны контура Ξ_0.

Допустимъ обратное. Предположимъ, что точка $(x_i\ y_i)$ фигуры maximi Ξ_i приближается къ точкѣ (x_0', y_0') свободной стороны контура Ξ_0. Будемъ обозначать черезъ x_0, y_0 координаты какой нибудь изъ точекъ фигуры maximi Ξ_0, не указывая которой именно.

Разсмотримъ тождество

$$\Phi_{x_i y_i}(x_0', y_0') - \Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) = \Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0') +$$
$$+ (p_0 - p_i)(x_0' - x_0) + (q_0 - q_i)(y_0' - y_0).$$

Точку (x_0, y_0) можно всегда выбрать такимъ образомъ, чтобы было

$$(p_0 - p_i)(x_0' - x_0) + (q_0 - q_i)(y_0' - y_0) \leqq 0;$$

для этой цѣли достаточно указать касательную къ контуру Ξ_0 параллельную прямой

$$(p_0 - p_i)\xi + (q_0 - q_i)\eta + K = 0,$$

такую, чтобы точки $(x_i\ y_i)$ и контуръ Ξ_0 лежали по разныя стороны этой касательной.

Получаемъ неравенство

$$\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0') - \Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) \leqq \Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0').$$

Такъ какъ точка (x_0', y_0') не принадлежитъ фигурѣ maximi Ξ_0, то существуетъ такое положительное число δ, что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_0'\ y_0') < -\delta.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что $\Phi_{x_i y_i}(x_0, y_0) < 0$, получимъ

$$|\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0')| > \delta.$$

И такъ, мы пришли къ очевидному противорѣчію, ибо послѣднее неравенство должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ i. Но при увеличеніи значка i имѣемъ, что $\lim(x_i) = x_0'$, $\lim(y_i) = y_0'$. Отсюда на основаніи непрерывности функціи $f(x, y)$ и конечности величинъ p_i и q_i получимъ, что при достаточно большихъ значеніяхъ i будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$|\Phi_{x_i y_i}(x_0'\ y_0')| = |f(x_0'\ y_0') - f(x_i\ y_i) - p_i(x_0' - x_i) - q_i(y_0' - y_i)| < \varepsilon,$$

гдѣ ε произвольно малое положительное число, что противорѣчитъ неравенству, написанному раньше.

Лемма VI. При безпредѣльномъ приближеніи внѣшняго контура Ξ_2 къ контуру Ξ_1 точка G_2 приближается къ точкѣ G_1.

Эта лемма есть предложеніе обратное леммѣ IV и слѣдуетъ непосредственно изъ леммы V и непрерывности первыхъ производныхъ $f_x'(x_i\ y)$, $f_y'(x, y)$.

Возьмемъ на плоскости Π двѣ опредѣленныя точки G_1 и G_2. Пусть будутъ соотвѣтственные внѣшніе контуры Ξ_1, Ξ_2. Нетрудно убѣдиться, что перемѣщенію точки по прямой G_1G_2 будетъ соотвѣтствовать непрерывная полоса внѣшнихъ контуровъ, идущая отъ контура Ξ_1 къ контуру Ξ_2. Въ сказанномъ мы убѣдимся слѣдующимъ образомъ. Проведемъ произвольное поперечное сѣченіе P заданаго контура, дѣлящее внутренность контура на двѣ области A, B, въ которыхъ лежатъ: въ одной контуръ Ξ_1, въ другой контуръ Ξ_2. Покажемъ теперь, что, какъ бы ни было проведено поперечное сѣченіе P, будетъ существовать на прямой $G_1\, G_2$ между точками G_1 и G_2 такая точка G_0, соотвѣтственный контуръ которой Ξ_0 имѣетъ общія точки съ линіею P.

Раздѣлимъ отрѣзокъ $G_1\, G_2$ пополамъ точкою G_3. Координаты этой послѣдней будутъ

$$\left(\frac{p_1 + p_2}{2},\ \frac{q_1 + q_2}{2}\right).$$

Разсмотримъ контуръ Ξ_3, соотвѣтствующій точкѣ G_3.

Можетъ случиться одно изъ двухъ: или этотъ контуръ Ξ_3 будетъ имѣть точки общія съ линіею P, и тогда теорема справедлива, или же нѣтъ. Тогда контуръ Ξ_3, не касаясь линіи P, долженъ лежать въ одной изъ областей A, B. Пусть Ξ_3 лежитъ въ области A; тогда возьмемъ за новыя точки $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ точку G_3 и точку G_2, при чемъ первой соотвѣтствуетъ контуръ Ξ_3, лежащій въ области A, а второй контуръ Ξ_2, лежащій въ области B. Если контуръ Ξ_3 попадаетъ въ область B, то принимаемъ за точки $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ точки G_1, G_3. Дѣлимъ теперь далѣе отрѣзокъ $G_1^{(1)}\, G_2^{(1)}$ точкою $G_3^{(1)}$ пополамъ и принимаемъ за новыя точки $G_1^{(2)}$, $G_2^{(2)}$ или точки $G_1^{(1)}$, $G_3^{(1)}$, или точки $G_3^{(1)}$, $G_2^{(1)}$

такимъ образомъ, чтобы контуръ точки $G_1^{(2)}$ лежалъ въ области A, а контуръ точки $G_2^{(2)}$ въ области B. Мы предполагаемъ конечно, что контуръ точки $G_3^{(1)}$ не имѣетъ общихъ точекъ съ линіею P, ибо иначе справедливость теоремы слѣдуетъ непосредственно.

Продолжая далѣе сказанное дѣленіе промежутковъ, мы или придемъ непосредственно къ точкѣ $G_3^{(i)}$, контуръ которой имѣетъ общія точки съ линіею P, или же получимъ два безконечныхъ ряда точекъ

$$G_1\,,\ G_1^{(1)}\,,\ G_1^{(2)}\,,\ G_1^{(3)}\,,\ \ldots\,,\ G_1^{(i)}\,,\ \ldots\,,$$

$$G_2\,,\ G_2^{(1)}\,,\ G_2^{(2)}\,,\ G_2^{(3)}\,,\ \ldots\,,\ G_2^{(i)}\,,\ \ldots\,,$$

приближающихся къ нѣкоторой точкѣ G_0. Докажемъ, что эта предѣльная точка имѣетъ контуръ Ξ_0, имѣющій общія точки съ линіею P. Допустимъ обратное, а именно, что контуръ Ξ_0 не имѣетъ общихъ точекъ съ линіею P и что, слѣдовательно, онъ лежитъ въ одной изъ областей A, B. Предположимъ, что онъ лежитъ въ области A. Разсмотримъ контуры, соотвѣтствующіе ряду точекъ

$$G_2\,,\ G_2^{(1)}\,,\ G_2^{(2)}\,,\ \ldots\ G_2^{(i)}\ \ldots$$

Всѣ эти контуры лежатъ въ области B и, слѣдовательно, на конечномъ разстояніи отъ контура Ξ_0, что приводитъ къ противорѣчію, ибо точки $G_2^{(i)}$ съ увеличеніемъ значка i приближаются сколь угодно близко къ точкѣ G_0. И такъ, мы видимъ, что предѣльный контуръ Ξ_0 долженъ имѣть общія точки съ линіею P.

Высказанное предложеніе можетъ быть выражено еще такъ: при перемѣщеніи точки по прямой G_1G_2 соотвѣтственный контуръ описываетъ нѣкоторую непрерывную полосу. Будемъ называть подобную полосу *прямолинейною полосою*, связывающею два контура Ξ_1 и Ξ_2. Очевидно, что всякіе два произвольныхъ контура могутъ быть связаны одною и только одною прямолинейною полосою.

Возьмемъ въ плоскости Π нѣкоторый сомкнутый криволинейный контуръ простого вида, т. е. такой, который пересѣкается всякою прямою въ двухъ точкахъ. Возьмемъ на этомъ контурѣ рядъ точекъ G_1, G_2, $G_3, \ldots, G_n$. Соединимъ эти точки прямыми линіями; тогда получимъ нѣкоторый многоугольникъ $G_1, G_2, \ldots, G_n, G_1$, вписанный въ разсматриваемый контуръ. Построивъ внѣшніе контуры Ξ_1, $\Xi_2, \ldots, \Xi_n$, соотвѣтствующіе различнымъ вершинамъ нашего многоугольника, мы можемъ съ каждой изъ сторонъ многоугольника сопоставить прямолинейную полосу, связывающую каждые два послѣдовательные изъ ряда внѣшнихъ контуровъ Ξ_1, $\Xi_2, \ldots, \Xi_n$. Получимъ рядъ прямолинейныхъ полосъ, начинающійся съ нѣкотораго контура Ξ_i, непрерывно проходящій черезъ всѣ контуры $\Xi_{i+1}, \ldots, \Xi_n$, $\Xi_1, \ldots, \Xi_{i-1}$ и заканчивающійся въ томъ же контурѣ Ξ_i. Такимъ образомъ мы приходимъ къ понятію о *многоугольномъ циклѣ* внѣшнихъ контуровъ.

Увеличивая до безконечности число сторонъ вписаннаго многоугольника такимъ образомъ, чтобы всѣ стороны безконечно уменьшались, мы приходимъ къ понятію о *криволинейномъ циклѣ*, какъ предѣльной фигурѣ по отношенію къ соотвѣтствующему многоугольному циклу.

Всякій криволинейный циклъ будетъ обладать свойствомъ, что изъ всякой его точки можно будетъ попасть въ другую, принадлежащую ему точку, непрерывнымъ передвиженіемъ по точкамъ цикла. Будемъ называть каждый изъ контуровъ, образующихъ циклъ, элементомъ цикла. Каждый криволинейный циклъ разбиваетъ всѣ контуры на двѣ категоріи: внутренніе относительно цикла и внѣшніе относительно него.

Мы будемъ называть контуръ внутреннимъ относительно цикла, если нельзя попасть изъ точекъ его на основной контуръ C непрерывнымъ движеніемъ, не пересѣкая цикла.

Нетрудно убѣдиться, что, если мы разсматриваемъ нѣкоторый циклъ L и соотвѣтственный контуръ Λ на плоскости Π, то контурамъ maximi, внутреннимъ относительно цикла L, будутъ соотвѣтствовать точки плоскости Π, лежащія внутри контура Λ, и обратно.

Мы докажемъ это предложеніе, проводя черезъ контуръ, лежащій внутри цикла L, всевозможныя прямолинейныя полосы и замѣчая, что каждая изъ этихъ полосъ должна пересѣкать циклъ по крайней мѣрѣ въ одномъ элементѣ.

Теперь обращаемся къ доказательству слѣдующаго весьма важнаго предложенія.

Теорема. Внѣшніе контуры заполняютъ непрерывнымъ образомъ внутренность цикла, соотвѣтствующаго кругу Q.

Можно было бы доказать предложеніе болѣе общее, что внѣшніе контуры заполняютъ непрерывнымъ образомъ внутренность заданнаго контура C. Въ виду того, что подобное доказательство должно, очевидно, основываться на свойствахъ даннаго контура, а также въ виду того, что это распространіе, не представляя особенной трудности, излишне для ближайшей цѣли, поставленной въ основаніе всего мемуара, мы здѣсь ограничимся доказательствомъ теоремы въ томъ видѣ, какъ она высказана.

Не трудно видѣть, что наша теорема можетъ быть иначе формулирована такъ: всякая точка плоскости внутри цикла K, соотвѣтствующаго кругу Q плоскости Π, должна принадлежать какому нибудь изъ внѣшнихъ контуровъ или лежать внутри его.

Возьмемъ произвольную точку W внутри цикла K. Разобьемъ фигуру Q плоскости Π сѣтью пересѣкающихся поперечныхъ сѣченій на меньшія части. Напримѣръ, для опредѣленности рѣчи можно будетъ разбить контуръ Q на квадраты сѣтью прямыхъ линій. Очевидно, что сѣти квадратовъ, проведенныхъ на плоскости Π, будетъ соотвѣтствовать на плоскости (x, y) сѣть, образованная двумя пересѣкающимися системами прямолинейныхъ полосъ, разбивающая внутренность цикла K на извѣстное число участковъ, ограниченныхъ циклами, соотвѣтствующими контурамъ квадратныхъ клѣтокъ нашей сѣти. Случится, очевидно, одно изъ двухъ: или точка W окажется принадлежащей какому либо контуру сѣти полосъ, или будетъ находиться внутри одного изъ этихъ участковъ N_1. Въ первомъ случаѣ точка W удовлетворяетъ высказанному предложенію, во второмъ же случаѣ беремъ соотвѣтственный квадратъ n_1 плоскости Π. Разобьемъ этотъ квадратъ на меньшіе; тогда внутренность цикла N_1 разобьется на систему новыхъ цикловъ, и опять возьмемъ тотъ изъ новыхъ цикловъ N_2, внутри котораго лежитъ разсматриваемая точка W, если только эта точка не попадаетъ на какой нибудь контуръ сѣти. Укажемъ квадратъ n_2, соотвѣтствующій циклу N_2, и будемъ его дѣлить на новые квадраты. Такимъ путемъ можетъ произойти одно изъ двухъ: или точка W попадетъ на одинъ изъ контуровъ одной изъ указанныхъ сѣтей, или же получимъ безконечный рядъ квадратовъ

$$n_1, n_2, n_3, \ldots,$$

обладающій слѣдующими свойствами:

1) каждый изъ этихъ квадратовъ заключаетъ внутри себя всѣ послѣдующіе,

2) этимъ квадратамъ соотвѣтствуютъ циклы $N_1, N_2, \ldots$, обладающіе свойствомъ заключать внутри себя точку W.

Если стороны квадратовъ ряда $n_1, n_2, n_3, \ldots$ убываютъ такимъ образомъ, что отношеніе стороны каждаго слѣдующаго квадрата къ сторонѣ предыдущаго не превосходитъ нѣкотораго числа меньшаго единицы, то, очевидно, что такой рядъ квадратовъ опредѣляетъ нѣкоторую предѣльную точку n_0 плоскости Π или, другими словами, нѣкоторую пару чиселъ p и q.

Внѣшній контуръ, соотвѣтствующій точкѣ n_0 долженъ, очевидно, представлять изъ себя фигуру, къ которой приближается циклъ N_k по мѣрѣ увеличенія значка k и, слѣдовательно, предѣльный внѣшній контуръ долженъ представлять фигуру, заключающую внутри себя точку W. Въ частномъ случаѣ контуръ можетъ обратиться въ точку W.

Внѣшніе контуры, какъ мы уже видѣли, образуютъ всегда простую сомкнутую фигуру безъ входящихъ частей и, слѣдовательно, могутъ имѣть въ качествѣ предѣльныхъ фигуръ или точку, или отрѣзокъ прямой.

Будемъ называть случай внѣшняго контура, обращающагося въ точку, случаемъ *изолированнаго maximum'a*.

Прямолинейные внѣшніе контуры могутъ заполнять площадки конечныхъ размѣровъ, которыя будемъ называть *линейчатыми*.

Дадимъ теперь строгое доказательство существованія безчисленнаго множества изолированныхъ maxima.

Возьмемъ произвольный внѣшній контуръ A и на немъ выходящую точку M. Изъ точки M, какъ центра, опишемъ окружность B такого радіуса, чтобы она пересѣкала данный внѣшній контуръ. Я утверверждаю, что точкамъ круга B, лежащимъ внѣ контура A, долженъ соотвѣтствовать циклъ внѣшнихъ контуровъ, огибающій нѣкоторое пространство, заключенное внутри круга.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ касательную въ точкѣ M къ внѣшнему контуру A. Эта касательная пересѣкаетъ кругъ B въ двухъ точкахъ M_1 и M_2 діаметрально противоположныхъ. Точки встрѣчи N_1 и N_2 круга съ внѣшнимъ контуромъ A должны лежать по одну сторону касательной M_1M_2, ибо весь контуръ A лежитъ по одну сторону касательной. Точки N_1 и N_2 могутъ конечно совпадать, если данный контуръ прямолинейный. Возьмемъ на кругѣ B двѣ произвольныя точки, лежащія внѣ контура A, но съ той же стороны касательной, что и контуръ: одну P_1 между точками M_1 и N_1, другую P_2 между точками M_2 и N_2. Точки P_1 и P_2 не могутъ принадлежать одному и тому же внѣшнему контуру A_1, ибо въ обратномъ случаѣ прямая P_1P_2 пересѣкала бы контуръ A и, слѣдовательно, контуры A и A_1 имѣли бы общія точки. И такъ, двигаясь по кругу B въ обѣ стороны отъ контура A, мы получаемъ двѣ криволинейныя полосы контуровъ, которыя должны, очевидно, замкнуться въ циклъ. Нетрудно видѣть, что этому циклу G будетъ соотвѣтствовать замкнутый контуръ Z на плоскости Π. Возьмемъ внутри контура Z произвольную точку H. Этой точкѣ внутри цикла G соотвѣтствуетъ нѣкоторый внѣшній контуръ A'. Этотъ контуръ можетъ обращаться въ точку, и тогда существованіе изолированнаго maximum'a доказано. Если контуръ A' не обращается въ точку, то мы разсуждаемъ относительно его такъ же какъ относительно контура A. Беремъ на немъ выходящую точку M', проводимъ изъ точки M' какъ центра кругъ B' радіуса меньшаго половины радіуса круга B, пересѣкающій контуръ A' и не встрѣчающій цикла G, что всегда возможно, ибо контуры не касаются между собою. Кругу B' будетъ соотвѣтствовать новый циклъ G' и новый контуръ Z', лежащій внутри контура Z. Возьмемъ внутри контура Z' произвольную точку H'. Этой точкѣ будетъ соотвѣтствовать контуръ A''. Если контуръ A'' обращается въ точку, теорема доказана. Если же контуръ A'' не представляетъ точки, продолжаемъ разсужденіе далѣе. Беремъ на контурѣ

A'' выходящую точку M'', изъ этой точки какъ центра проводимъ кругъ B'' радіуса меньше половины радіуса круга B', не встрѣчающій цикла G'. Продолжая далѣе указанное построеніе, мы придемъ къ одному изъ двухъ случаевъ: или непосредственно укажемъ изолированный maximum, или рядъ круговъ B, B', B'', ... будетъ неопредѣлено продолжаться, и тогда эти круги приближаются къ нѣкоторой предѣльной точкѣ M_0. Докажемъ теперь, что предѣльная точка M_0 будетъ изолированнымъ maximum'омъ.

Докажемъ предварительно слѣдующую лемму.

Лемма VII. На всякомъ внѣшнемъ контурѣ, соотвѣтствующемъ точкѣ $G_1(p_1, q_1)$ плоскости Π, можно указать точку (x_1, y_1), принадлежащую фигурѣ maximi, такую, что для всякой свободной точки (x_1', y_1') этого контура имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1', y_1') < \Phi_{x_0, y_0}(x_1, y_1),$$

гдѣ

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1)$$

функція, соотвѣтствующая точкѣ G_0 плоскости Π. Пусть будутъ координаты точки G_0 p_0 и q_0.

Тогда имѣемъ, очевидно,

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1', y_1') - \Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1) = \Phi_{x_1 y_1}(x_1', y_1') + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta = (p_1 - p_0)(x_1' - x_1) + (q_1 - q_0)(y_1' - y_1).$$

Теперь мы видимъ, что

$$\Phi_{x_1 y_1}(y_1', y_1') < 0,$$

ибо точка (x_1', y_1') не принадлежитъ фигурѣ maximi.

Что же касается величины Δ, то мы всегда можемъ точкою (x_1, y_1) распорядиться такъ, чтобы было $\Delta \leqq 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, проведемъ къ контуру, соотвѣтствующему точкѣ G_1, касательную, направленіе которой перпендикулярно къ прямой $G_0 G_1$, если оси координатъ плоскости Π считать совпадающими съ осями координатъ плоскости (x, y), заставляя, конечно, обѣ плоскости совпасть. Такихъ касательныхъ будетъ, очевидно, двѣ; возьмемъ ближайшую къ точкѣ (x_0, y_0). Точки касанія этой касательной съ соотвѣтственною фигурою maximi могутъ быть приняты за точку (x_1, y_1), ибо тогда для всѣхъ точекъ, принадлежащихъ контуру, имѣетъ мѣсто неравенство $\Delta \leqq 0$, что и требовалось доказать.

Продолжаемъ теперь прерванное доказательство. Возьмемъ произвольную точку внутри даннаго контура C; пусть координаты этой точки будутъ x_1, y_1. Эта точка M_1 будетъ находиться на площади нѣкотораго внѣшняго контура. Предположимъ, что точка M_1 принадлежитъ соотвѣтственной фигурѣ maximi; потомъ разсмотримъ случай, когда точка (x_1, y_1) будетъ свободная. Пусть точка M_1 принадлежитъ фигурѣ maximi, соотвѣтствующей точкѣ $G_1(p_1, q_1)$ плоскости Π. Обозначимъ координаты предѣльной точки M_0 черезъ x_0, y_0. Разсмотримъ рядъ круговъ B, B', B'', ... Соединимъ на плоскости Π прямою точку G_1 съ точкою G_0, имѣющей координаты p_0, q_0, съ которою стремятся совпасть (на основанiи леммы VI) контуры Z, Z', Z'', ... Этой прямой соотвѣтствуетъ прямолинейная полоса контуровъ на плоскости x, y. Разсмотримъ циклы, соотвѣтствующiе кругамъ B, B', B'', ... Эти циклы пересѣкаются съ прямолинейною полосою по ряду контуровъ

$$\Xi, \Xi', \Xi'', \ldots .$$

Будемъ обозначать черезъ x_i, y_i координаты точки, принадлежащей фигурѣ maximi $\Xi^{(i)}$.—Контурамъ $\Xi^{(i)}$ будутъ соотвѣтствовать на прямой $G_0 G_1$ точки $G_i(p_i, q_i)$, приближающiяся съ возрастанiемъ числа i къ предѣльной точкѣ G_0.

Докажемъ теперь, что точка M_0 будетъ представлять изолированный maximum.

Для этой цѣли достаточно показать, что функцiя

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - p_0(x - x_0) - q_0(y - y_0)$$

будетъ отрицательная для всякой точки (x_1, y_1) отличой отъ (x_0, y_0). Согласно условiю, мы предполагаемъ сначала, что (x_1, y_1) принадлежитъ нѣкоторой фигурѣ maximi Ξ_1. Покажемъ теперь, что, если

$$\Phi_{x_i y_i}(x, y) = f(x, y) - f(x_i, y_i) - p_i(x - x_i) - q_i(y - y_i),$$

гдѣ (x_i, y_i) одна изъ точекъ фигуры maximi $\Xi^{(i)}$, то будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < 0.$$

Послѣднее неравенство очевидно; что же касается перваго, то можно замѣтить, что будетъ имѣть мѣсто тождество

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) - \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) = \Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_i, y_i) + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta = (p_i - p_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) + (q_i - q_{i+1})(y_1 - y_{i+1}).$$

Нетрудно видѣть, что общая величина дробей

$$\frac{p_i - p_{i+1}}{p_1 - p_{i+1}}, \quad \frac{q_i - q_{i+1}}{q_1 - q_{i+1}}$$

есть число положительное α, представляющее отношеніе отрѣзковъ $G_i G_{i+1}$, $G_1 G_{i+1}$, вслѣдствіе чего получаемъ

$$\Delta = \alpha[(p_1 - p_{i+1})(x_1 - x_{i+1}) + (q_1 - q_{i+1})(y_1 - y_{i+1})];$$

на основаніи же леммы II мы видимъ, что $\Delta < 0$; кромѣ того, очевидно,

$$\Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_i, y_i) < 0.$$

Слѣдовательно, неравенство доказано.

Будемъ безпредѣльно увеличивать число i. Тогда имѣемъ

$$\lim(x_i) = x_0, \qquad \lim(y_i) = y_0.$$

Съ другой стороны, на основаніи непрерывности функціи $f(x, y)$,

$$\lim f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0),$$

и наконецъ

$$\lim(p_i) = p_0, \qquad \lim(q_i) = q_0,$$

такъ что имѣемъ

$$\lim \Phi_{x_{i+1} y_{i+1}}(x_1, y_1) = \Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1).$$

На основаніи же неравенства, выведеннаго выше, получаемъ

$$\Phi_{x_0 y_0}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < 0,$$

что и требовалось доказать.

Остается теперь разобрать случай, когда точка (x_1, y_1) свободная. Въ этомъ случаѣ, на основаніи леммы VII, получимъ для одной изъ точекъ (x_1', y_1'), принадлежащихъ фигурѣ maximi контура Ξ_1, неравенства

$$\Phi_{x_i y_i}(x_1, y_1) < \Phi_{x_i x_i}(x_1' \, y_1') < 0$$

и доказывающія предложеніе.

Приведенное доказательство существованія изолированныхъ maxima показываетъ, что около каждой выходящей точки каждаго изъ внѣшнихъ контуровъ существуетъ безчисленное множество изолированныхъ maxima.

II.

Обратимся теперь къ геометрическому толкованію приведенныхъ общихъ изслѣдованій, а также сдѣлаемъ нѣкоторые выводы, относящіеся къ теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка.

Если для всѣхъ точекъ внутри контура C задана однозначная непрерывная функція $f(x, y)$, обращающаяся въ нуль для точекъ контура и имѣющая опредѣленныя и непрерывныя внутри контура C частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, то тѣмъ самымъ задана часть поверхности, ограниченная плоскимъ контуромъ C. Подобная часть поверхности можетъ быть названа сегментомъ.

Независимыя перемѣнныя x и y можно разсматривать, какъ это мы и дѣлали въ первой главѣ, какъ прямоугольныя координаты на плоскости контура C. Если мы возставимъ въ началѣ координатъ перпендикуляръ къ плоскости x, y и примемъ его за ось z-овъ, то уравненіе поверхности будетъ

$$z = f(x, y),$$

при чемъ, по опредѣленію функціи, это уравненіе имѣетъ мѣсто лишь для точекъ лежащихъ внутри контура.

Возьмемъ какую нибудь точку $G_0(p_0, q_0)$ плоскости Π. Ей будетъ соотвѣтствовать нѣкоторый внѣшній контуръ Ξ_0. Пусть будетъ одна изъ точекъ фигуры maximi этого контура $M_0(x_0, y_0)$.

Уравненіе

$$z = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

представляетъ уравненіе плоскости P, касательной къ поверхности въ ея точкѣ

$$[x_0, y_0, f(x_0, y_0)].$$

Эта касательная плоскость имѣетъ общими съ поверхностью всѣ точки, проекціи которыхъ на плоскость x, y принадлежатъ фигурѣ maximi Ξ_0. Будемъ называть фигуру на касательной плоскости, проекціею которой на плоскости x, y является внѣшній контуръ Ξ_0, *элементомъ касанія.*

Элементомъ касанія будетъ точка, если соотвѣтственный maximum будетъ изолированный. Въ послѣднемъ случаѣ мы будемъ называть точку касанія *выходящею* точкой поверхности.

Примѣры простѣйшихъ поверхностей: шара, эллипсоида и другихъ показываютъ, что выходящія точки могутъ заполнять собою всю поверхность.

Мы доказали въ первой главѣ необходимость существованія безчисленнаго множества выходящихъ точекъ поверхности. Является теперь важнымъ узнать, будутъ ли онѣ непрерывнымъ образомъ заполнять нѣкоторую часть конечныхъ размѣровъ.

Послѣ безуспѣшныхъ попытокъ доказать это свойство, не предполагая существованія вторыхъ производныхъ, я пришелъ къ убѣжденію, что оно, вообще говоря, не имѣетъ мѣста, т. е., что могутъ существовать поверхности, выходящія точки которыхъ не заполняютъ сплошнымъ образомъ никакой площади конечныхъ размѣровъ.

Покажемъ достойный вниманія примѣръ поверхностей такого рода. Эти поверхности, которымъ я далъ названіе *полиэдральныхъ* *), обладаютъ слѣдующими свойствами.

Онѣ представляютъ нѣчто среднее между многогранниками съ одной стороны и кривыми поверхностями съ другой. Эти поверхности суть дѣйствительно кривыя, ибо при непрерывномъ перемѣщеніи точки касанія касательная плоскость всегда существуетъ и мѣняетъ свое направленіе непрерывно. Съ другой стороны эти поверхности заполнены сплошь плоскими частями, число которыхъ безконечно велико. По послѣднему свойству эти поверхности близки къ многогранникамъ.

Подъ сплошнымъ заполненіемъ плоскими гранями мы разумѣемъ слѣдующее свойство поліэдральныхъ поверхностей. Какую бы часть поверхности конечной площади мы ни взяли, въ нее попадаютъ плоскія грани. Это свойство можетъ быть формулировано еще точнѣе.

Какъ бы мала ни была площадь разсматриваемой части поліэдральной поверхности, эта часть или принадлежитъ вся плоской грани, или въ нее попадаетъ безчисленное множество плоскихъ граней или ихъ частей.

Пояснимъ теперь теоретическія соображенія первой части на примѣрѣ поліэдральныхъ поверхностей.

Возьмемъ функцію $\vartheta(x)$ опредѣляемую слѣдующимъ образомъ.

Опредѣлимъ ее для положительныхъ значеній x.

Всякое положительное число x можетъ быть представлено однимъ только образомъ при помощи ряда

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i},$$

*) *Gravé*. Sur les lignes composées de parties réctilignes. Comptes Rendus de l'Acad. de Paris (1898. n⁰ II).

гдѣ n нечетное число, а $a_0, a_1, a_2, \ldots$ цѣлыя положительныя числа или нули, при чемъ $a_i < n$, если $i > 0$, и эти числа, начиная съ нѣкотораго, не равны всѣ $n-1$.

Нетрудно видѣть, что сказанное совпадаетъ съ представленіемъ числа x по системѣ счисленія, основаніе которой равно n.

Можетъ произойти одно изъ двухъ:

a) въ ряду чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$$

всѣ четныя, будетъ ли отличныхъ отъ нуля число конечное или нѣтъ, ибо мы причисляемъ нуль къ числамъ четнымъ;

b) существуютъ числа нечетныя, изъ которыхъ первое a_k.

Пусть будетъ $n = 2m - 1$, гдѣ m произвольное натуральное число.

Опредѣлимъ функцію $\vartheta(x)$ особенно для каждаго изъ двухъ случаевъ *a*), *b*).

Въ случаѣ *a*) положимъ

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_i}{2} = b_i, \ldots,$$

и пусть значеніе функціи $\vartheta(x)$ будетъ

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{b_i}{m^i}.$$

Въ случаѣ *b*) положимъ

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_{k-1}}{2} = b_{k-1}, \quad \frac{a_k + 1}{2} = b_k,$$

и пусть значеніе функціи $\vartheta(x)$ будетъ

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}.$$

Мы исключили случай, когда всѣ числа a_i, начиная съ нѣкотораго, равны $n-1$, но нетрудно видѣть, что опредѣленіе функціи $\vartheta(x)$ годится и для этого случая.

Разсмотримъ это обстоятельство.

Если въ рядѣ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число отличныхъ отъ нуля конечно, при чемъ послѣднее a_l, тогда число x можетъ быть представлено въ двухъ видахъ

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_l}{n^l},$$

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_l - 1}{n^l} + \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{n-1}{n^i}.$$

Если изъ чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_l$ нечетное только послѣднее a_l, то число x по первому виду представленія принадлежитъ къ случаю b), а по второму—къ случаю a).

Нетрудно видѣть, что оба вида представленія числа x даютъ одно и тоже значеніе функціи $\vartheta(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая

$$\frac{a_1}{2} = b_1, \quad \frac{a_2}{2} = b_2, \ldots, \frac{a_{l-1}}{2} = b_{l-1}, \quad \frac{a_l + 1}{2} = b_l$$

и замѣчая, что

$$\frac{a_l - 1}{2} = b_l - 1, \quad \frac{n-1}{2} = m - 1,$$

получимъ для $\vartheta(x)$ два равныхъ между собою значенія

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_l}{m^l},$$

$$\vartheta(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{i=l-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_l - 1}{m^l} + \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{m-1}{m^i}.$$

Подобнымъ же образомъ не приводятъ къ противорѣчію и случаи, когда въ ряду чиселъ $a_1, a_2, \cdots, a_l$ или нѣтъ нечетныхъ, или нечетныя числа появляются раньше послѣдняго a_l.

Итакъ видимъ, что функція $\vartheta(x)$ опредѣлена вполнѣ.

По этому опредѣленію получаемъ

$$\vartheta(0) = 0, \qquad \vartheta(1) = 1, \qquad \vartheta(2) = 2 \qquad \text{и т. д.},$$

и, вообще говоря, для всякаго натуральнаго числа p получаемъ

$$\vartheta(p) = p.$$

Кромѣ того, справедливы слѣдующія неравенства: если $p < x < p+1$, то $p < \vartheta(x) < p+1$, а если

$$x = p + \alpha,$$

гдѣ

$$0 < \alpha < 1,$$

то

$$\vartheta(x) = p + \vartheta(\alpha).$$

Отсюда мы видимъ, что достаточно разсматривать значенія функціи при $x < 1$, т. е. предполагать $a_0 = 0$.

Покажемъ, что функція $\vartheta(x)$ неубывающая.

Возьмемъ два значенія x

$$x_1 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i'}{n^i}.$$

Если $x_2 > x_1$, то, очевидно, должно быть

$$a_1' = a_1, \quad a_2' = a_2, \ldots, a_{l-1}' = a_{l-1}, \quad a_l' > a_l,$$

гдѣ число l можетъ быть равнымъ единицѣ.

Если первое нечетное число въ этихъ двухъ разложеніяхъ будетъ $a_k' = a_k$, гдѣ $k < l$, то, очевидно, будетъ

$$\vartheta(x_2) = \vartheta(x_1).$$

Пусть теперь первое нечетное число въ рядѣ чиселъ $a_1, a_2, \ldots$ будетъ a_k, а въ рядѣ $a_1', a_2', a_3', \ldots$ будетъ a_s.

Придется разсмотрѣть четыре случая

I) $\quad k > l, \quad s > l,$

II) $\quad k = l, \quad s > l,$

III) $\quad k > l, \quad s = l,$

IV) $\quad k = s = l.$

I) $$\vartheta(x_1) = \sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{b_i}{m^i} + \frac{b_k}{m^k},$$

$$\vartheta(x_2) = \sum_{i=1}^{i=s-1} \frac{b'_i}{m^i} + \frac{b'_s}{m^s},$$

гдѣ

$$b_i = \frac{a_i}{2} \text{ при } i < k \quad \text{и} \quad b_k = \frac{a_k + 1}{2},$$

$$b'_j = \frac{a'_j}{2} \text{ при } j < s \quad \text{и} \quad b'_s = \frac{a'_s + 1}{2}.$$

Мы видимъ, что

$$b_j = b'_j \text{ при } j < l \quad \text{и} \quad b'_l > b_l;$$

слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

Доказательство не нарушается, если одно изъ чиселъ k, s или оба безконечно велики.

II) $$a_l + 1 = 2b_l, \qquad a'_l = 2b'_l.$$

Тогда имѣемъ

$$2b'_l > 2b_l - 1,$$

$$b'_l \geqq b_l,$$

и, слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) \geqq \vartheta(x_1).$$

III) $$a_l = 2b_l, \qquad a'_l + 1 = 2b'_l.$$

Тогда имѣемъ

$$b'_l > b_l,$$

и, слѣдовательно,

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

IV) $$a_l + 1 = 2b_l, \qquad a'_l + 1 = 2b'_l, \qquad b'_l > b_l,$$

$$\vartheta(x_2) > \vartheta(x_1).$$

Итакъ доказано, что функція $\vartheta(x)$ неубывающая.

Легко теперь доказать непрерывность функціи $\vartheta(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ, не трудно убѣдиться въ справедливости неравенства

$$0 \leqq \vartheta\left(x + \frac{1}{n^k}\right) - \vartheta(x) \leqq \frac{1}{m^k},$$

гдѣ k произвольное цѣлое число.

Функція $\vartheta(x)$, какъ непрерывная, должна проходить черезъ всякое значеніе между 0 и 1 при измѣненіи x отъ 0 до 1.

Нетрудно найти значенія x, при которыхъ функція эта имѣетъ данное значеніе y.

Представимъ это значеніе y въ видѣ ряда

$$y = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{b_i}{m^i},$$

гдѣ b_i цѣлыя числа меньшія m или нули.

Если въ рядѣ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ безчисленное множество отличныхъ отъ нуля, то это значеніе y функція принимаетъ при значеніи x равномъ

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2b_i}{n^i}.$$

Если въ рядѣ чиселъ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ конечное число отличныхъ отъ нуля чиселъ, пусть послѣднее отличное отъ нуля число будетъ b_k; тогда это значеніе

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}$$

функція принимаетъ для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ

$$\left(\sum_{i=1}^{i=k-1} \frac{2b_i}{n^i} + \frac{2b_k - 1}{n^k}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} \frac{2b_i}{n^i}\right).$$

Этотъ промежутокъ будетъ представлять изъ себя такъ называемый промежутокъ неизмѣняемости (Jnvariabilitätszug) функціи $\vartheta(x)$.

Такъ какъ числа вида

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2b_i}{n^i},$$

гдѣ въ ряду чиселъ b_1, b_2, ... безчисленное множество отличныхъ отъ нуля, не заполняютъ сплошнымъ образомъ никакого промежутка между 0 и 1, то, слѣдовательно, какія бы два числа α и β мы ни взяли между 0 и 1, между ними будутъ существовать промежутки неизмѣняемости функціи.

Обращаемся къ разсмотрѣнію производной функціи $\vartheta(x)$.

Нетрудно видѣть, что, если въ ряду

$$x_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}$$

существуетъ по крайней мѣрѣ одно нечетное число a_k, при чемъ рядъ не обрывается на первомъ изъ этихъ чиселъ, то x_0 попадаетъ внутрь промежутка неизмѣняемости функціи $\vartheta(x)$, и производная равна нулю

$$\vartheta'(x_0) = 0.$$

Очевидно, что для начала каждаго промежутка неизмѣняемости существуетъ равная нулю правая производная, а для конца промежутка равная нулю лѣвая производная.

Покажемъ теперь, что для концовъ промежутка не существуетъ опредѣленной производной. Тогда не будетъ опредѣленной производной и для значеній x, для которыхъ всѣ числа a_1, a_2, a_3, ... четныя.

Достаточно разсмотрѣть начало промежутка неизмѣняемости

$$x_0 = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i},$$

гдѣ

$$a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2, \ldots, \; a_{k-1} = 2b_{k-1}, \quad a_k = 2b_k - 1.$$

Возьмемъ два значенія

$$x_2 = x_0 + \xi,$$

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{n^l},$$

гдѣ l цѣлое и безпредѣльно возрастающее число, при чемъ $l > k$, а ξ выражается такъ

$$\xi = \frac{1}{am^l} - \frac{1}{n^l}, \qquad a > 0.$$

Нетрудно видѣть, что можно число l подобрать настолько большимъ, что ξ будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$0 < \xi < \frac{1}{n^k}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $\xi > 0$, когда $am^l < n^l$, слѣдовательно, когда удовлетворяется неравенство

$$\left(\frac{n}{m}\right)^l > a,$$

а для этого достаточно положить

$$l > \frac{m(a-1)}{m-1}.$$

Съ другой стороны, всегда можно указать столь большое число l, что ξ будетъ меньше всякаго напередъ заданнаго положительнаго числа ε. Слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго l, неравенства $0 < \xi < \frac{1}{n^k}$ будутъ удовлетворяться и должно быть

$$\vartheta(x_1) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i} - \frac{1}{m^l},$$

$$\vartheta(x_2) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{b_i}{m^i}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Но при безпредѣльномъ возрастаніи числа l имѣемъ

$$\lim x_1 = x_0, \quad \lim x_2 = x_0,$$

$$\lim \frac{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Вслѣдствіе совершенной произвольности числа a мы заключаемъ объ отсутствіи производной для значенія x_0.

Итакъ, опредѣленная нами функція $\vartheta(x)$, будучи непрерывною, имѣетъ производную равную нулю въ однихъ точкахъ, въ другихъ же точкахъ производная отсутствуетъ.

Разсмотримъ теперь опредѣленный интегралъ отъ нашей функціи, взятый въ границахъ отъ 0 до x:

$$\omega(x) = \int_0^x \vartheta(x)\,dx.$$

Нетрудно видѣть, что этотъ интегралъ вычисляется безъ особаго затрудненія.

Пусть верхній предѣлъ интеграла будетъ равенъ

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}.$$

Если въ ряду чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ существуютъ нечетныя, то первое изъ нихъ пусть будетъ a_k; тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \omega(x) = \frac{a_0^2}{2} + a_0 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i(a_i+1)}{n^i m^i} + \\ + \sum_{l=1}^{l=k} \frac{b_l}{m^l} \sum_{i=l+1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

гдѣ по прежнему

$$a_1 = 2b_1, \quad a_2 = 2b_2, \ldots, a_{k-1} = 2b_{k-1}, \quad a_k + 1 = 2b_k.$$

Для случая, когда всѣ числа ряда $a_1, a_2, \ldots$ четныя, получается формула аналогичная и отличающаяся отъ приведенной только тѣмъ, что $k = \infty$.

Приведенные ряды очень удобны для вычисленія значеній функціи $\omega(x)$. Необходимо замѣтить, что въ случаѣ раціональнаго значенія верхняго предѣла рядъ чиселъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ или конечный или періодическій; слѣдовательно, всѣ ряды въ (1) суммируются, и получается раціональное значеніе дли $\omega(x)$. Итакъ мы видимъ, что функція $\omega(x)$ имѣетъ раціональныя значенія при раціональныхъ значеніяхъ x.

Распространимъ функцію $\omega(x)$ на отрицательныя значенія x, предполагая ее четною т. е. удовлетворяющею равенству

$$\omega(-x) = \omega(x).$$

Нетрудно видѣть, что линія въ плоскости прямоугольныхъ координатъ x, y, опредѣляемая уравненіемъ

$$y = \omega(x),$$

обладаетъ слѣдующими замѣчательными свойствами.

Въ каждой ея точкѣ существуетъ опредѣленная касательная, которая имѣетъ съ кривою общими или одну точку касанія, или безчисленное число точекъ касанія, сплошнымъ образомъ заполняющихъ нѣкоторую прямолинейную часть кривой. Касательная измѣняетъ свое направленіе непрерывно при непрерывномъ перемѣщеніи точки касанія по линіи. Линія вся состоитъ изъ прямолинейныхъ частей, соотвѣтствующихъ промежуткамъ неизмѣняемости производной

$$\omega'(x) = \vartheta(x).$$

Такимъ линіямъ можно дать названіе *полигональныхъ кривыхъ*.

Такъ какъ для полигональной кривой вторая производная функціи, ее опредѣляющей, отсутствуетъ въ безчисленномъ числѣ точекъ, то въ этихъ точкахъ отсутствуетъ само понятіе о кривизнѣ въ томъ смыслѣ, какъ оно дается въ геометрическихъ приложеніяхъ дифференціальнаго исчисленія. Понятіе о выпуклости и вогнутости можетъ быть установлено, при чемъ придется судить, понятно, не по второй производной, а по приращенію первой производной.

Сдѣлаемъ еще нѣсколько весьма важныхъ замѣчаній относительно функціи $\omega(x)$.

Нетрудно видѣть, что имѣютъ мѣсто неравенства

$$x - \frac{1}{2n} \leqq \vartheta(x) \leqq x + \frac{1}{2n}, \quad \text{при} \quad x > 0.$$

Отсюда, интегрируемъ, получаемъ

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2n} < \omega(x) < \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2n}.$$

Отсюда

$$\lim [\omega(x)]_{n=\infty} = \frac{x^2}{2}.$$

Покажемъ теперь, какъ рѣшить уравненіе

$$\omega(x) = \alpha,$$

гдѣ α данное положительное число; другими словами, покажемъ, какъ вычислять функцію обратную.

Вслѣдствіе четности функціи $\omega(x)$ получаются два корня одинаковые по абсолютной величинѣ и разные по знаку.

Разсмотримъ $\sqrt{2\alpha}$ и обозначимъ цѣлую часть корня черезъ a_0, такъ что

$$\sqrt{2\alpha}=a_0+k. \quad \text{гдѣ} \quad k<1.$$

Будемъ вычислять положительный корень.

Нетрудно видѣть, что имѣютъ мѣсто неравенства

$$\omega(a_0)<\alpha<\omega(a_0+1).$$

Будемъ разсматривать рядъ чиселъ

$$a_0, \quad a_0+\frac{1}{n}, \quad a_0+\frac{2}{n}, \quad a_0+\frac{3}{n}, \ldots, a_0+\frac{n-1}{n}. \qquad (2)$$

Можетъ случиться одно изъ двухъ: 1) при нѣкоторомъ изъ этихъ чиселъ $a_0+\frac{a_1}{n}$ функція $\omega(x)$ точно равна α; тогда уравненіе рѣшено; 2) ни при какомъ числѣ изъ ряда (2) уравненіе не удовлетворяется; тогда на основаніи возрастанія функціи $\omega(x)$ можно будетъ найти такое число a_1 меньшее n, при которомъ будетъ

$$\omega\left(a_0+\frac{a_1}{n}\right)<\alpha<\omega\left(a_0+\frac{a_1+1}{n}\right),$$

а тогда искомый корень уравненія x будетъ удовлетворять неравенствамъ

$$a_0+\frac{a_1}{n}<x<a_0+\frac{a_1+1}{n}.$$

Продолжая далѣе разсужденіе, мы придемъ или къ величинѣ корня x, равной

$$a_0+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{a_i}{n^i},$$

или придемъ къ неравенствамъ

$$\omega\left(a_0+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{a_i}{n^i}\right)<\alpha<\omega\left(a_0+\sum_{i=1}^{i=k-1}\frac{a_i}{n^i}+\frac{a_k+1}{n^k}\right).$$

Если эти неравенства будутъ имѣть мѣсто при всякихъ значеніяхъ k, то искомый корень x будетъ равенъ

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a_i}{n^i}.$$

Полученное рѣшеніе имѣетъ много общаго съ извлеченіемъ корня квадратнаго. Нетрудно видѣть, что при вычисленіи послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ a_1, a_2, a_3, ..., входящихъ въ составъ корня, произойдетъ значительное упрощеніе, если появится нечетное число.

Пусть первое нечетное число будетъ a_k, и пусть

$$x = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i} + \xi.$$

Для нахожденія ξ получаемъ прямо равенство

$$\alpha = \omega(x_0) + \vartheta(x_0)\,\xi,$$

гдѣ

$$x_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}.$$

Пояснимъ сказанное примѣромъ.

Требуется рѣшить уравненіе

$$\omega(x) = 3$$

въ случаѣ $m = 2$, $n = 3$.

Такъ какъ

$$\sqrt{6} = 2 + k, \qquad \text{то} \qquad x = 2 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \dots$$

Для чиселъ a_i возможны значенія 0, 1, 2.

Ищемъ число a_1 изъ неравенствъ

$$\omega\left(2 + \frac{a_1}{3}\right) < 3 < \omega\left(2 + \frac{a_1 + 1}{3}\right).$$

Итакъ, надо найти наибольшое цѣлое число, удовлетворяющее неравенству

$$2 + 2\frac{a_1}{3} + \frac{a_1(a_1+1)}{24} < 3.$$

Получаемъ $a_1 = 1$. Въ самомъ дѣлѣ

$$\omega\left(2+\frac{1}{3}\right)=2\,\frac{3}{4}<3\,,\quad \omega\left(2+\frac{2}{3}\right)=3\,\frac{7}{12}>3\,.$$

Итакъ мы замѣчаемъ, что

$$\vartheta\left(2+\frac{1}{3}\right)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Слѣдовательно, получимъ

$$2\,\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\,\xi=3\,,$$

откуда

$$\xi=\frac{1}{10}\,,\qquad x=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=2\,\frac{13}{30}.$$

Будемъ обозначать черезъ $\omega_{-1}(x)$ функцію обратную $\omega(x)$. Тогда въ данномъ примѣрѣ

$$\omega_{-1}(3)=\pm\,2\,\frac{13}{30}.$$

Итакъ мы видимъ, что функціи $\omega(x)$, $\omega_{-1}(x)$ представляютъ новые аналитическіе элементы, весьма просто вычисляемые и имѣющіе большую аналогію съ функціями x^2, $\sqrt{x}$.

Разсмотримъ теперь поверхность, опредѣляемую уравненіемъ

$$z=\omega(r)-\omega(x)-\omega(y)\,,$$

гдѣ r заданное число.

Функція $\omega(r)-\omega(x)-\omega(y)$ положительная внутри контура C, опредѣляемаго уравненіемъ

$$\omega(x)+\omega(y)=\omega(r).$$

Нетрудно видѣть, что этотъ контуръ есть сомкнутая линія, по виду близкая къ кругу и обращающаяся при $m=\infty$ въ кругъ

$$x^2+y^2=r^2.$$

Покажемъ, что кривая C полигональная.

Найдемъ производную y по x

$$\vartheta(x)\,dx+\vartheta(y)\,dy=0\,,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(y)}.$$

Нетрудно видѣть, что для всякаго промежутка неизмѣняемости знаменателя $\vartheta(y)$ числитель $\vartheta(x)$ долженъ имѣть промежутки неизмѣняемости, ибо въ противномъ случаѣ функція $\vartheta(x)$ внутри нѣкотораго промежутка конечныхъ размѣровъ не имѣла бы промежутковъ неизмѣняемости, что противорѣчитъ опредѣленію функціи $\vartheta(x)$. Итакъ, кривая C полигональная; будемъ ее называть *полигональнымъ кругомъ*.

Нетрудно видѣть, что всякое плоское сѣченіе поверхности $z = \omega(r) - \omega(x) - \omega(y)$ будетъ полигональною кривою.

Итакъ, функція z положительная внутри полигональнаго круга C и обращается въ нуль для точекъ его. Возьмемъ пару значеній x_0, y_0 перемѣнныхъ независимыхъ и обозначимъ соотвѣтственныя значенія частныхъ производныхъ черезъ p_0 и q_0; тогда получимъ

$$p_0 = -\vartheta(x_0), \quad q_0 = -\vartheta(y_0).$$

Разсмотримъ функцію $\Phi_{x_0 y_0}(x, y)$.

$$\begin{aligned}\Phi_{x_0 y_0}(x, y) &= \omega(r) - \omega(x) - \omega(y) - [\omega(r) - \omega(x_0) - \omega(y_0)] + \\ &+ \vartheta(x_0)(x - x_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0) = \\ &= \omega(x_0) - \omega(x) + \vartheta(x_0)(x - x_0) + \omega(y_0) - \omega(y) + \vartheta(y_0)(y - y_0).\end{aligned}$$

Пусть разложенія чиселъ x_0 и y_0 въ ряды вида

$$a_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{a_i}{n^i}$$

оканчиваются первымъ нечетнымъ числомъ. Пусть, кромѣ того, это послѣднее число для x_0 будетъ имѣть значекъ k, а для y_0 значекъ l; тогда, какія бы ни были числа x и y, удовлетворяющія неравенствамъ

$$0 < x - x_0 \leqq \frac{1}{n^k}, \quad 0 < y - y_0 \leqq \frac{1}{n^l},$$

будемъ имѣть

$$\omega(x) = \omega(x_0) + \vartheta(x_0)(x - x_0),$$

$$\omega(y) = \omega(y_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0),$$

и, слѣдоватольно, для всѣхъ точекъ внутри прямоугольника $\varDelta$, образованнаго четырьмя прямыми

$$x = x_0 + \frac{1}{n^k}, \quad y = y_0 + \frac{1}{n^l},$$

$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0,$$

будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) = 0.$$

Далѣе, мы замѣчаемъ, что, если будемъ разсматривать функцію

$$\psi(x) = \omega(x) - \omega(x_0) - \vartheta(x_0)(x - x_0),$$

производная которой будетъ,

$$\psi'(x) = \vartheta(x) - \vartheta(x_0),$$

то

$$\psi'(x) < 0, \quad \text{если} \quad x < x_0,$$

$$\psi'(x) = 0, \quad \text{если} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{n^k},$$

$$\psi'(x) > 0, \quad \text{если} \quad x > x_0 + \frac{1}{n^k}.$$

Слѣдовательно,

$$\psi(x) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \frac{1}{n^k}$$

и

$$\psi(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0, \quad \text{или} \quad x > x_0 + \frac{1}{n^k}.$$

Итакъ мы видимъ, что для точекъ внѣ прямоугольника Δ

$$\Phi_{x_0 y_0}(x, y) < 0.$$

Слѣдовательно, прямоугольникъ Δ будетъ внѣшнимъ контуромъ maximi функціи $\Phi_{x_0 y_0}$, сама же фигура будетъ представлять обыкновенный поверхностный maximum, точки котораго заполняютъ сплошь внутренность даннаго прямоугольника Δ.

Прямоугольникъ Δ обращается въ прямую линію, если одна изъ перемѣнныхъ независимыхъ x_0, y_0 имѣетъ безчисленное число четныхъ чиселъ въ ряду $a_1, a_2, a_3 \cdots$. Если обѣ перемѣнныя x_0 и y_0 имѣютъ безчисленное число четныхъ чиселъ, то мы получимъ точку, представляющую изолированный maximum.

Поверхность наша, конечно, поліэдральная, при чемъ грани ея суть параллелограммы, лежащіе въ касательныхъ плоскостяхъ

$$z - \omega(r) + \omega(x_0) + \omega(y_0) + \vartheta(x_0)(x - x_0) + \vartheta(y_0)(y - y_0) = 0$$

и проэкціи которыхъ на плоскости xy суть прямоугольники $\triangle$. Когда прямоугольникъ $\triangle$ обращается въ прямую, то элементъ касанія будетъ отрѣзокъ прямой, и наконецъ получаемъ выходящую точку поверхности, когда прямоугольникъ $\triangle$ обращается въ точку.

Нетрудно убѣдиться, что поліэдральныя поверхности могутъ быть рѣшеніями самыхъ простыхъ уравненій перваго порядка съ частными производными.

Возьмемъ уравненіе поверхностей цилиндрическихъ

$$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1. \tag{*}$$

Мы видимъ, что поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$y-bz=\omega(x-az),$$

будетъ удовлетворять уравненію (*) и представитъ цилиндрическую поверхность, проходящую черезъ полигональную кривую $y=\omega(x)$, $z=0$. Эта цилиндрическая поверхность, очевидно, поліэдральная.

Такое рѣшеніе уравненія (*) наводитъ на нѣкоторыя соображенія относительно существующихъ опредѣленій общаго интеграла. Амперовское опредѣленіе оставляетъ по видимому въ сторонѣ поліэдральныя рѣшенія, ибо предполагаетъ дифференцируемость въ неограниченномъ числѣ разъ. Въ данномъ же случаѣ функція ω можетъ быть дифференцируема только одинъ разъ, чего и достаточно для уравненія перваго порядка.

Съ другой стороны, и измѣненное опредѣленіе Дарбу не обнимаетъ, повидимому, поліэдральныхъ рѣшеній, ибо оно имѣетъ въ виду интегралы Коши, требующіе для своего существованія разложимость въ ряды.

Для уравненія коническихъ поверхностей

$$(x-a)\frac{dz}{dx}+(y-b)\frac{dz}{dy}=z-c$$

получаемъ рѣшеніе

$$\frac{y-b}{z-c}=\omega\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

представляющее поліэдральный конусъ, имѣющій вершиною точку (a, b, c).

Если мы будемъ вращать нашу полигональную кривую

$$y=\omega(x)$$

вокругъ оси y-овъ, то получимъ нѣкоторую поверхность вращенія, которая будетъ опредѣляться уравненіемъ

$$z=\omega(\sqrt{x^2+y^2}),$$

которое будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Эта поверхность состоитъ вся изъ полосъ коническихъ поверхностей, образованныхъ вращеніемъ прямолинейныхъ частей. Элементы касанія суть точки и прямыя.

Нетрудно видѣть, что поліэдральныя цилиндрическія и коническія поверхности суть развертывающіяся, хотя онѣ и не удовлетворяютъ уравненію

$$rt-s^2=0,$$

ибо для безчисленнаго числа точекъ на нихъ вторыя производныя не существуютъ.
