# Новое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ.

Дмитрія Граве.

Въ статьѣ „Zur Lehre von den unentwickelten Functionen" (Sitzungsberichte der Berliner Academie 1897, S. 948) проф. Шварцъ далъ строгое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ. Это прекрасное доказательство основано на представленіи функцій безконечными рядами. Въ настоящей статьѣ я даю новое доказательство той же теоремы, которое, будучи вполнѣ строгимъ, не требуетъ введенія въ разсмотрѣніе рядовъ и основано на соображеніяхъ совершенно элементарныхъ.

1. Начнемъ со случая одной функціи $y$, отъ $n$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$, опредѣляемой однимъ уравненіемъ

$$f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{1}$$

Сдѣлаемъ слѣдующія предположенія:

I. Уравненіе (1) удовлетворяется нѣкоторою системой вещественныхъ численныхъ значеній аргументовъ $y, x_1, x_2, \cdots, x_n$. Для простоты можно предполагать, что эта система

$$y = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0. \tag{2}$$

II. При значеніяхъ $n+1$ аргументовъ $y, x_1, x_2, \cdots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ $|y| < \delta', |x_1| < \delta', |x_2| < \delta', \ldots, |x_n| < \delta'$, гдѣ $\delta'$ приличнымъ образомъ указанное число, функція $f$ вещественна, однозначна и непрерывна и имѣетъ непрерывную первую производную $f'_y(y, x_1, x_2, \cdots, x_n)$, значеніе которой при системѣ значеній (2) $n+1$ аргументовъ отлично отъ нуля.

Нужно доказать, что для значенiй $n$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лежащихъ въ области, опредѣляемой неравенствами

$$|x_1| < \delta\,,\ |x_2| < \delta\,,\ \ldots\,,\ |x_n| < \delta\,,$$

гдѣ $\delta$ нѣкоторое опредѣленное положительное число, существуетъ однозначная, непрерывная, вещественная функцiя $Y$, которая, будучи подставлена вмѣсто $y$ въ уравненiе (1), обращаетъ его въ тождество и которая безконечно мала для безконечно малыхъ значенiй $n$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Разсмотримъ функцiю отъ одной перемѣнной $y$

$$\varphi(y) = f(y\,,\ 0\,,\ 0\,,\ldots,0)\,,$$

которая получается изъ первой части уравненiя (1), если мы вмѣсто аргументовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставимъ равныя нулю численныя значенiя. Разсмотримъ производную

$$\varphi'(y)\,,$$

взятую по $y$. По предположенiю, значенiе этой производной при $y = 0$, которое можно обозначить $\varphi'(0)$, не равно нулю. Имѣемъ право предположить $\varphi'(0) > 0$, ибо въ обратномъ случаѣ можно перемѣнить знакъ у функцiи $f$. По заданiю, $\varphi(0) = 0$; слѣдовательно, можно дать аргументу $y$ два значенiя $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, гдѣ $\varepsilon$ достаточно малое положительное число, такiя, что будетъ

$$\varphi(+\varepsilon) > 0, \qquad \varphi(-\varepsilon) < 0$$

или, что одно и тоже,

$$f(+\varepsilon\,,\ 0\,,\ 0\,,\ldots,0) > 0\,, \qquad f(-\varepsilon\,,\ 0\,,\ 0\,,\ldots,0) < 0.$$

Имѣя въ виду, что функцiя $f$ непрерывна относительно всѣхъ аргументовъ, мы видимъ, что можно всегда указать такое положительное число $\delta$, что при

$$|x_1| < \delta, \qquad |x_2| < \delta, \ \ \ldots, \ \ |x_n| < \delta$$

будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$f(+\varepsilon,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n) > 0\,, \qquad f(-\varepsilon\,,\ x_1,\ x_2,\ldots,x_n) < 0.$$

Область чиселъ $G$, опредѣляемая неравенствами

$$|y| \leqq \varepsilon\,, \qquad |x_1| < \delta\,, \qquad |x_2| < \delta\,, \ \ \ldots\,, \qquad |x_n| < \delta\,,$$

выборомъ чиселъ $\varepsilon$ и $\delta$ можетъ быть сдѣлана такою, для которой $f'_y$ остается числомъ положительнымъ.

Возьмемъ нѣкоторую по произволу выбранную систему численныхъ значеній $n$ аргументовъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изъ разсматриваемой области. Пусть эти значенія будутъ

$$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0.$$

Разсмотримъ тогда функцію отъ одной перемѣнной $y$

$$f(y, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \varphi_1(y).$$

Очевидно, что эта функція удовлетворяетъ неравенствамъ

$$\varphi_1(+\varepsilon) > 0, \qquad \varphi_1(-\varepsilon) < 0;$$

кромѣ того, при $|y| \leqq \varepsilon$, $\varphi_1'(y) > 0$. Слѣдовательно, при возрастаніи аргумента $y$ отъ значенія $-\varepsilon$ до значенія $+\varepsilon$ функція $\varphi_1$ возрастаетъ и измѣняется отъ отрицательнаго значенія $\varphi_1(-\varepsilon)$ до положительнаго значенія $\varphi_1(+\varepsilon)$. На основаніи непрерывности функціи $f$ мы заключаемъ, что существуетъ одно опредѣленное значеніе $Y^0$ перемѣннаго $y$, заключающееся между $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, при которомъ $\varphi_1(Y^0) = 0$. Совокупность значеній $Y^0$, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніемъ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разсматриваемой области $G$, составляетъ однозначную вещественную функцію $Y$ отъ $n$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющую уравненію (1) и безконечно малую при безконечно малыхъ значеніяхъ аргументовъ. Послѣднее обстоятельство слѣдуетъ изъ неравенствъ

$$|Y| < \varepsilon, \quad |x_1| < \delta, \quad |x_2| < \delta, \quad \ldots, \quad |x_n| < \delta.$$

2. Обращаемся теперь къ общему случаю.

Пусть будутъ заданы $m$ уравненій

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{array} \right.$$

Сдѣлаемъ предположенія:

I. Уравненія (1) удовлетворяются слѣдующей системой численныхъ значеній $m+n$ аргументовъ

$$y_1 = 0, \ y_2 = 0, \ldots, y_m = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$$

II. При значеніяхъ $m+n$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$|y_1| < \delta', \ |y_2| < \delta', \ldots, \ |x_n| < \delta',$$

гдѣ $\delta'$ опредѣленное положительное число, функціи $f_\lambda$, гдѣ $\lambda$ одно изъ чиселъ 1, 2, 3, ... $m$, однозначны, вещественны и непрерывны и имѣютъ опредѣленныя первыя производныя

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_\mu} = f_{\lambda,\mu}(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

которыя въ разсматриваемой области суть непрерывныя функціи $n+m$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

III. Опредѣлитель $m$-го порядка, составленный изъ значеній $f_{\lambda,\mu}(0, 0, \ldots, 0) = a_{\lambda,\mu}$, которыя принимаютъ частныя производныя $f_{\lambda,\mu}$ при равныхъ нулю значеніяхъ аргументовъ, имѣетъ отличное отъ нуля численное значеніе $D$.

Надо доказать, что для извѣстной области вблизи значеній $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ перемѣнныхъ независимыхъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существуютъ $m$ однозначныхъ, непрерывныхъ, вещественныхъ функцій $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, которыя, будучи подставлены вмѣсто $y_1, y_2, \ldots, y_m$ въ уравненія (1), обращаютъ ихъ въ тождества и безконечно малы при безконечно малыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ независимыхъ.

Предположимъ, что теорема доказана для числа функцій на единицу меньшаго, $m-1$, и покажемъ ея справедливость для числа $m$.

Къ системѣ $m^2$ величинъ $a_{\lambda,\mu}$ составляемъ имъ сопряженныя $\alpha_{\lambda,\mu}$.

Возьмемъ первыхъ $m-1$ уравненій

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ldots, f_{m-1} = 0. \tag{2}$$

Выберемъ такіе $m-1$ изъ числа $m$ аргументовъ $y_1, y_2, \ldots, y_m$, чтобы соотвѣтственный опредѣлитель, составленный изъ $a_{\lambda,\mu}$, не обращался въ нуль. Пусть эти аргументы будутъ $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Тогда этотъ неравный нулю опредѣлитель будетъ $\alpha_{m,m}$. По предположенію будутъ существовать $m-1$ функцій $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ отъ $n+1$ аргументовъ $y_m, x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, обращающихся въ нуль при $y_m = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ и безконечно малыхъ при безконечно малыхъ значеніяхъ этихъ аргументовъ.

Разсмотримъ послѣднее уравненіе $f_m(y_1, y_2, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Всегда можно распорядиться системой такъ, чтобы $a_{m,1}$ не равнялось нулю.

Возьмемъ уравненіе

$$(3) \qquad f_m(Y,\, y_2,\, \cdots, y_{m-1},\, y_m,\, x_1,\, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

получаемое изъ послѣдняго уравненія системы замѣною обозначенія $y_1$ на $Y$.

Это уравненіе даетъ $Y$ какъ функцію отъ $n+m-1$ аргументовъ $y_2, y_3, \cdots, y_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающуюся въ нуль при значеніи равномъ нулю всѣхъ аргументовъ. Положимъ $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$; тогда функціи $y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ обратятся въ функціи $y_1', y_2', \ldots, y_{m-1}'$ отъ одной перемѣнной независимой $y_m$ безконечно малыя при безконечно маломъ $y_m$.

Если мы будемъ въ послѣднемъ уравненіи (3) считать $y_2, y_3, \cdots, y_{m-1}$ функціями одного $y_m$, опредѣляемыми изъ системы (2), то $Y$ обратится въ функцію $Y'$ отъ одного аргумента $y_m$.

Нетрудно видѣть, что функція $Y'-y_1'$ имѣетъ *) опредѣленную производную по $y_m$ значеніе которой при $y_m = 0$ вычисляется при помощи уравненій

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{1,1}\, dy_1' + a_{1,2}\, dy_2' + \cdots + a_{1,m}\, dy_m &= 0, \\ a_{2,1}\, dy_1' + a_{2,2}\, dy_2' + \quad + a_{2,m}\, dy_m &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{m,1}\, d(Y'-y_1') + a_{m,1}\, dy_1' + a_{m,2}\, dy_2' + \cdots + a_{m,m}\, dy_m &= 0. \end{aligned} \right.$$

Умножая эти уравненія на $\alpha_{1,m}, \alpha_{2,m}, \ldots, \alpha_{m,m}$ и складывая, получимъ

$$a_{m,1}\, \alpha_{m,m}\, d(Y'-y_1') + D\, dy_m = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d(Y'-y_1')}{dy_m} = \frac{D}{a_{m,1}\, \alpha_{m,m}}.$$

И такъ мы видимъ, что эта производная отлична отъ нуля.

Можно сдѣлать эту производную равною $+1$ вводя новыхъ $m$ функцій $F_\mu$ отъ $m+n$ аргументовъ $y_1, \ldots, y_m,\ x_1, \ldots, x_n$, опредѣляемыхъ уравненіями **)

---

*) Доказательство извѣстное, состоящее въ предварительномъ разсмотрѣніи конечныхъ приращеній и затѣмъ переходѣ къ предѣлу.

**) Смотри статью Шварца.

$$DF_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda,\mu} f_\lambda\,,$$

$$f_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda,\mu}\, F_\mu$$

и разсматривая систему уравненій

$$F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,,\ \ldots,\quad F_{m-1} = 0\,,\ -F_1 + F_m = 0\,.$$

Далимъ $y_m$ два значенія $+\varepsilon$ и $-\varepsilon$, гдѣ $\varepsilon$ достаточно малое положительное число; тогда будетъ

$$Y' - y_1' > 0 \text{ при } y_m = +\varepsilon\,,$$

$$Y' - y_1' < 0 \text{ при } y_m = -\varepsilon\,.$$

Мы знаемъ, что $Y' - y_1'$ есть значеніе разности $Y - y_1$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Такъ какъ эта разность непрерывная функція отъ $n+1$ аргументовъ $y_m$, $x_1$, $x_2, \cdots, x_n$, то можно указать столь малое положительно число $\delta$, что при всякихъ значеніяхъ $n$ аргументовъ $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ

(5) $$|x_1| < \delta\,,\ |x_1| < \delta\,,\ \ldots,\quad |x_n| < \delta\,,$$

будетъ

$$Y - y_1 > 0 \text{ при } y_m = +\varepsilon\,,$$

$$Y - y_1 < 0 \text{ при } y_m = -\varepsilon\,,$$

а $\delta$ и $\varepsilon$ можно предполагать настолько малыми, что вслѣдствіе непрерывности частныхъ производныхъ производная $\dfrac{d(Y - y_1)}{dy_m}$ будетъ сохранять положительное значеніе и, слѣдовательно, всякому выбору произвольной системы значеній аргументовъ $x_1^0$, $x_2^0, \cdots, x_m^0$, удовлетворяющей неравенствамъ (5), будетъ соотвѣтствовать одно значеніе $y_m^0$, лежащее между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$, для котораго $Y - y_1 = 0$. Слѣдовательно, для этого значенія $y_m^0$ существуютъ опредѣленныя численныя значенія $y_1^0$, $y_2^0, \cdots, y_{m-1}^0$, удовлетворяющія всѣмъ $m$ уравненіямъ.

Совокупность различныхъ системъ значеній $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$, соотвѣтствующихъ различныхъ системамъ значеній $x_1$, $x_2, \cdots, x_n$, удовлетворяющихъ неравенствамъ (5) будетъ представлять собою $m$ функцій

$$Y_1,\ Y_2, \ldots,\ Y_m\,,$$

удовлетворяющихъ системѣ (1) и всѣмъ требованіямъ теоремы.