Къ геометріи распространенія и поглощенія электромагнитной энергіи.

А. Грузинцева.

Хотя вопросъ, рѣшеніемъ котораго мы будемъ здѣсь заниматься, разрѣшенъ, но при помощи различныхъ частныхъ соображеній, безъ указанія на общія источники этихъ соображеній; по этому при сопоставленіи съ дѣйствительностью трудно и иногда невозможно сказать: на счетъ какого частнаго предположенія должно отнести то или другое отступленіе отъ фактовъ опыта. Кромѣ того, большинство ученыхъ, занимавшихся рѣшеніемъ поставленнаго вопроса, главнымъ образомъ имѣли въ виду получить окончательныя рѣшенія по возможности проще и скорѣе, незаботясь особенно объ отдѣленіи требованій болѣе строгой теоріи отъ необходимости прибѣгать къ предположеніямъ, оправдываемымъ лишь окончательнымъ результатомъ. Наконецъ, и это мнѣ кажется не маловажнымъ, трудно сравнивать выводы различныхъ ученыхъ, не имѣя общаго источника ихъ полученія. И сравнительныя достоинства тѣхъ или другихъ пріемовъ яснѣе выступаютъ на фонѣ общихъ соображеній.

Разумѣется, такіе первокласные физики, какъ напримѣръ Кирхгоффъ, рѣшали задачу съ общей точки зрѣнія, но, къ сожалѣнію, ихъ рѣшеніе составлено во время господства механическихъ теорій свѣта и проникнуто духомъ этихъ теорій, а потому въ настоящее время кажется уже недостаточнымъ. Послѣдователи Кирхгоффа, каковы Фойгтъ, Друде и др., придерживались его метода, но ихъ работы имѣютъ цѣну и въ настоящее время, особенно изслѣдованія Фойгта. Французская школа физиковъ въ этомъ отношеніи далеко отстала отъ нѣмецкой, хотя въ силу историческихъ традицій и даетъ рѣшеніе занимающаго насъ вопроса по возможности въ простой и изящной формѣ.

Въ настоящей статьѣ мы постараемся по возможности соединить простоту формы съ полной общностью основаній.

§ 1. Задача, которую мы ставимъ себѣ, слѣдующая:

Даны двѣ поглощающія средины, т. е. двѣ проводящія электромагнитную энергію средины. Найти общіе законы ея распространенія въ одной изъ нихъ, зная ее въ другой.

Средины отдѣлены одна отъ другой плоскостью и обѣ изотропны.

Законы распространенія энергіи *двухъ родовъ*: первые касаются *направленія*, вдоль котораго распространяется энергія; вторые *напряженности* тѣхъ векторовъ, которыми мы представляемъ энергію.

Явленія, отвѣчающія этимъ законамъ, носятъ общее названіе явленій *оптической поляризаціи* или *поляризаціи свѣта*.

По самому смыслу задачи ясно, что оба рода этихъ законовъ органически связаны между собой и должны вытекать *изъ однихъ и тѣхъ-же источниковъ*. Однако, не смотря на очевидность такого соображенія, существуютъ рѣшенія нашего вопроса (въ механическихъ теоріяхъ), раздѣляющія задачу на двѣ части, независимыя одна отъ другой *).

Дадимъ нашей задачѣ точную математическую формулировку.

Пусть электромагнитная энергія распространяется въ поглощающей срединѣ, т. е., напр., въ проводникѣ, и доходитъ до другой средины, отдѣленной отъ первой плоскостью:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Дойдя до этой плоскости, она раздѣляется на двѣ части: одну—распространяющуюся въ той-же срединѣ.—это *отраженная энергія* и другую—во второй срединѣ—это *преломленная энергія*.

Условимся обозначать количества, относящіяся къ *падающей энергіи* буквами безъ значковъ,—къ отраженной тѣми-же буквами со значкомъ (′) вверху, а къ преломленной—со значкомъ ($_1$) внизу.

Въ такомъ случаѣ составляющіе падающаго свѣтоваго вектора, за который мы принимаемъ здѣсь такъ-называемую электрическую пертурбацію, будутъ:

$$Me^Q, \quad Ne^Q, \quad Pe^Q,$$

отраженнаго:

$$M'e^{Q'}, \quad N'e^{Q'}, \quad P'e^{Q'}$$

и преломленнаго:

$$M_1 e^{Q_1}, \quad N_1 e^{Q_1}, \quad P_1 e^{Q_1},$$

---

*) См. напр. *Ketteler*, Optik, 447; положеніе 25. Къ величайшему нашему удовольствію мы встрѣтили въ недавно появившейся книгѣ проф. Фойгта (Compendium d. th. Ph., Bd. II, S. 607) тѣ-же взгляды, которыхъ придерживаемся и мы.

причемъ

$$Q = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t,$$

$$Q' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t,$$

$$Q_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 t,$$

и количества $\alpha, \dots \gamma_1$ вообще комплексны, а δ, δ' и δ_1 чисто-мнимыя числа.

Задача наша будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Найти $M', \dots M_1, \dots, \alpha', \dots \alpha_1, \dots, \delta'$ и δ_1, *зная* M, N, P, α, β, γ, δ *и физическія постоянныя, характеризующія средины, т. е. ихъ діэлектрическія постоянныя, коэффиціенты электропроводности, магнитныя проницаемости и періодъ измѣненія кинетическаго состоянія первой средины.*

Опредѣленіе упомянутыхъ сейчасъ количествъ и дастъ намъ *законы поляризаціи* свѣтового вектора.

§ 2. Сначала займемся опредѣленіемъ $\alpha', \dots, \alpha_1, \dots, \delta_1$.

Какова-бы ни была система поверхностныхъ условій, *всегда* будемъ имѣть равенства вида:

$$ae^{Q} + a'e^{Q'} = a_1 e^{Q_1},$$

въ которыхъ a, a' и a_1 будутъ количества, независящія отъ x, y, z и t. *Это равенство должно существовать для всѣхъ значеній времени* t *и для всѣхъ значеній координатъ* x, y, z, *удовлетворяющихъ уравненію* (1).

Отсюда мы *заключаемъ*, что это возможно лишь при условіи:

$$Q = Q' = Q_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{2}$$

такъ-какъ количества a, a', a_1 *не могутъ быть одновременно нулями.*

Равенства (2) и послужатъ намъ основаніемъ для опредѣленія $\alpha', \dots \delta_1$.

Мы подробно разсмотримъ только преломленную энергію, такъ-какъ отъ нея легко перейти къ отраженной.

Подставляя въ уравненіе

$$Q_1 = Q$$

значеніе этихъ Q и Q_1, получимъ равенство

$$(\alpha_1 - \alpha)\,x + (\beta_1 - \beta)\,y + (\gamma_1 - \gamma)\,z + (\delta_1 - \delta)\,t = 0.$$

Это равенство должно существовать при всѣхъ значеніяхъ координатъ x, y, z, удовлетворяющихъ уравненію разграничивающей плоскости (1), но чтобы избавиться отъ этого стѣсняющаго обстоятельства прибѣгнемъ къ методу, данному еще Лягранжемъ, а именно: помножимъ уравненіе (1) на неопредѣленный *пока* коэффиціентъ H и приложимъ результатъ къ предыдущему равенству; найдемъ:

$$\left.\begin{array}{c}(\alpha_1-\alpha+A_1H)\,x+(\beta_1-\beta+B_1H)\,y+(\gamma_1-\gamma+C_1H)\,z+\\+(\delta_1-\delta)\,t=0.\end{array}\right\}\ . \quad (3)$$

Здѣсь количество H тоже комплексное.

Теперь, такъ какъ равенство (3) должно существовать *уже для всѣхъ значеній* x, y и z и, какъ раньше, для всѣхъ значеній t, получаемъ слѣдующую систему уравненій:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha_1-\alpha+A_1H=0\\ \beta_1-\beta+B_1H=0\\ \gamma_1-\gamma+C_1H=0\end{array}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

и

$$\delta_1=\delta\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (b)$$

Послѣднее равенство даетъ

$$\frac{\omega_1}{\lambda_1}=\frac{\omega}{\lambda}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

ибо

$$\delta_1=-\frac{2\pi\omega_1}{\lambda_1}\sqrt{-1}\,,\quad \delta=-\frac{2\pi\omega}{\lambda}\sqrt{-1}\,.$$

Въ равенствѣ (4) ω_1 и λ_1 вообще комплексны, но такого вида, что отношенія между дѣйствительными частями и коэффиціентами при $\sqrt{-1}$ соотвѣтственно равны между собой, т. е. если

$$\omega_1=\omega_1'+\omega_1''\sqrt{-1}\,,\qquad \lambda_1=\lambda_1'+\lambda_1''\sqrt{-1}\,,$$

то

$$\frac{\omega_1'}{\lambda_1'}=\frac{\omega_1''}{\lambda_1''}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (5)$$

такъ что ихъ отношеніе $\dfrac{\omega_1}{\lambda_1}$ дѣйствительно, ибо $\dfrac{\omega}{\lambda}$ есть дѣйствительное число.

Теперь обратимся къ равенствамъ (a), но предварительно замѣтимъ, что, хотя выборомъ координатной системы мы можемъ упростить ихъ, но это упрощеніе будетъ эквивалентно частному предположенію, что такъ называемый „нормалъ поглощенія“ лежитъ въ плоскости паденія, противъ чего можно представить серьезныя возраженія; поэтому мы къ этому упрощенію не будемъ прибѣгать *).

Равенства (a) показываютъ, что α_1, β_1, γ_1 будутъ тотчасъ-же опредѣлены, коль скоро мы знаемъ H.

Съ этой цѣлью возьмемъ уравненія, которымъ должны удовлетворять принятыя нами выраженія для электрической пертурбаціи. Эти уравненія имѣютъ видъ *для періодическихъ измѣненій* въ срединѣ:

$$K\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 4\pi C\mu \frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f \quad \text{и такъ же для } g \text{ и } h,$$

если f, g, h будутъ составляющія падающей пертурбаціи въ первой срединѣ.

Подставляя сюда значенія f, g и h (стр. 2), найдемъ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

Точно также уравненія для преломленной пертурбаціи даютъ:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = K_1\mu_1\delta_1^2 + 4\pi C_1\mu_1\delta_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

Здѣсь K, K_1 діэлектрическія постоянныя срединъ; C, C_1 коэффиціенты электропроводности и μ, μ_1 коэффиціенты магнитной проницаемости ихъ.

Вмѣсто обычныхъ уравненій для f, g, h, которыми мы пользуемся здѣсь, возможно взять другія, болѣе общія, а именно:

$$K\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 4\pi C\mu \frac{\partial f}{\partial t} + \Gamma f = (1 + A)\,\Delta f + B\,\frac{\partial \Delta f}{\partial t} \quad \text{и т. п.}$$

Ихъ возможно получить, принимая *во первыхъ* въ разсчетъ воздѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфиръ и *во вторыхъ*, вводя долю участія магнитной энергіи въ происхожденіи пертурбаціонныхъ токовъ; но мы этотъ вопросъ оставляемъ до другой статьи; замѣтимъ лишь, что все послѣдующее остается въ силѣ, стоитъ только вмѣсто

$$K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta$$

---

*) Замѣтимъ еще, что, прибѣгая къ такому упрощенію, мы лишаемся практической выгоды: всѣ наши формулы настолько симметричны, что легко выводятся и повѣряются.

въ равенствахъ (c) и (d) ввести:

$$\frac{K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta + \Gamma}{(1+A)+B\delta}$$

для каждой средины.

Равенства (a) намъ дадутъ значенія α_1, β_1, γ_1 въ функціи α, β, γ и H, именно:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - A_1 H \\ \beta_1 &= \beta - B_1 H \\ \gamma_1 &= \gamma - C_1 H. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Сложивъ квадраты этихъ равенствъ и принявъ въ разсчетъ равенства (c) и (d), получимъ:

$$K_1\mu_1\delta_1^2 + 4\pi C_1\mu_1\delta_1 = K\mu\delta^2 + 4\pi C\mu\delta + H^2 - 2H(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma).$$

Опредѣляя отсюда H, найдемъ при помощи (b):

$$H = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma \pm$$
$$\pm\sqrt{(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 - (K\mu - K_1\mu_1)\,\delta^2 - 4\pi(C\mu - C_1\mu_1)\delta}.$$

Изъ двухъ знаковъ мы возьмемъ для преломленныхъ волнъ знакъ —, другой-же знакъ дастъ значеніе H, соотвѣтствующее отраженному вектору.

Итакъ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} H = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma - \\ -\sqrt{(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma)^2 + (K_1\mu_1 - K\mu)\delta^2 + 4\pi(C_1\mu_1 - C\mu)\delta} \end{aligned}\right\} (II)$$

Чтобы получить рѣшеніе для отраженнаго вектора стоитъ только указатель $(_1)$ при количествахъ, относящихся къ второй срединѣ, замѣнить указателемъ $(')$, относящимся къ отраженному вектору; кромѣ того, такъ какъ первая средина изотропна, то ясно, что:

$$K' = K, \qquad \mu' = \mu, \qquad C' = C;$$

поэтому получимъ:

$$H' = 2(A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma) \ldots\ldots\ldots (III)$$

и по равенствамъ (I) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - A_1 H' \\ \beta' &= \beta - B_1 H' \\ \gamma' &= \gamma - C_1 H' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (IV)$$

Такимъ образомъ наша задача относительно α', β', γ' и α_1, β_1, γ_1 разрѣшена: всѣ эти количества найдены при помощи данныхъ.

§ 3. Извлечемъ теперь общія соотношенія между этими количествами, т. е., говоря другими словами, найдемъ законы, относящіеся до *направленія* передачи электромагнитной энергіи, т. е. законы ея отраженія и преломленія.

Обозначимъ комплексные углы паденія и преломленія буквами i_1 и σ_1; для ихъ опредѣленія можно написать слѣдующія равенства:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\cos i_1 &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma\\ \varrho_1\cos\sigma_1 &= A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (e)$$

причемъ ϱ и ϱ_1 опредѣляются изъ равенствъ (c) и (d), такъ какъ:

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \qquad \varrho_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2.$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ:

$$\varrho^2\sin^2 i_1 = (B_1\gamma - C_1\beta)^2 + (C_1\alpha - A_1\gamma)^2 + (A_1\beta - B_1\alpha)^2,$$

$$\varrho_1^2\sin^2\sigma_1 = (B_1\gamma_1 - C_1\beta_1)^2 + (C_1\alpha_1 - A_1\gamma_1)^2 + (A_1\beta_1 - B_1\alpha_1)^2.$$

Подставивъ во второе изъ этихъ равенствъ значенія α_1, β_1, γ_1 изъ системы (I), найдемъ, сопоставляя съ первымъ:

$$\varrho^2\sin^2 i_1 = \varrho_1^2\sin^2\sigma_1$$

или:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho}\ldots\ldots\ldots (V)$$

Но изъ равенствъ (c) и (d) находимъ:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{\sqrt{K_1\mu_1 + \dfrac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}{\sqrt{K\mu + \dfrac{4\pi C\mu}{\delta}}},$$

слѣдовательно:

$$\frac{\sin i_1}{\sin\sigma_1} = \frac{\sqrt{K_1\mu_1 + \dfrac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}{\sqrt{K\mu + \dfrac{4\pi C\mu}{\delta}}}\ldots\ldots\ldots (V\,bis)$$

По уравненіямъ движенія можно заключить, что дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{K\mu + \frac{4\pi C\mu}{\delta}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{K_1\mu_1 + \frac{4\pi C_1\mu_1}{\delta_1}}}$$

суть комплексныя скорости распространенія энергіи въ обѣихъ срединахъ; поэтому формула (V bis) представляетъ *законъ преломленія*, соотвѣтствующій закону Декарта для прозрачныхъ срединъ (діэлектриковъ).

Если обозначимъ черезъ

$$A_{11}\,, \quad B_{11}\,, \quad C_{11}$$

косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости паденія, т. е., если положимъ, что

$$A_{11}A_1 + B_{11}B_1 + C_{11}C_1 = 0$$

и

$$A_{11}A + B_{11}B + C_{11}C = 0\,,$$

причемъ

$$A\,, \quad B\,, \quad C$$

будутъ косинусы направленія *дѣйствительнаго* луча, идущаго въ первой срединѣ,—то изъ равенствъ (I) можемъ получить слѣдующее:

$$A_{11}\alpha_1 + B_{11}\beta_1 + C_{11}\gamma_1 = A_{11}\alpha + B_{11}\beta + C_{11}\gamma \quad . \; . \; . \quad (VII)$$

т. е. дѣйствительный преломленный лучъ лежитъ въ плоскости паденія.

Подобный-же законъ найдемъ и для дѣйствительнаго отраженнаго луча, а именно:

$$A_{11}\alpha' + B_{11}\beta' + C_{11}\gamma' = A_{11}\alpha + B_{11}\beta + C_{11}\gamma \cdot \; . \; . \; . \; (VIII)$$

Что-же касается до „нормаловъ поглощенія", то ихъ положеніе относительно плоскости паденія зависитъ отъ количествъ M, N, P и т. п., а потому этотъ вопросъ мы отложимъ до второй части нашей задачи. Хотя нѣкоторые авторы склонны думать, что и „нормалъ поглощенія" лежитъ въ плоскости паденія, но къ такому заключенію нѣтъ ни указаній опыта, ни достаточныхъ теоретическихъ основаній. Положеніе „нормала поглощенія" обусловлено, какъ увидимъ ниже, положеніемъ плоскости поляризаціи свѣтоваго вектора.

§ 4. Пользуясь этимъ соотношеніемъ (V), мы можемъ дать для H и H' другія выраженія, совершенно аналогичныя тѣмъ, которыя можно получить для прозрачныхъ срединъ.

Умножая равенства (I) по порядку на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, получимъ при помощи равенствъ (e):

$$\varrho_1 \cos\sigma_1 = \varrho \cos i_1 - H;$$

подставляя-же сюда значенiе ϱ_1 изъ уравненiя (V), находимъ:

$$H = -\varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} \ldots\ldots . \quad (II\ bis)$$

Зная уголъ σ_1 изъ равенства ($V\ bis$), мы отсюда найдемъ H.

Точно также найдемъ изъ формулы (III):

$$H' = 2\varrho \cos i_1 \ldots\ldots\ldots . \quad (III\ bis)$$

Тоже количество H' должны найти изъ равенства ($II\ bis$), если подставимъ вмѣсто σ_1 уголъ отраженiя σ'; черезъ сопоставленiе результатовъ получаемъ для угла отраженiя законъ, выражающiйся равенствомъ *)

$$\sigma' = 180^0 - i_1 \ldots\ldots\ldots . \quad (VI)$$

Зная выраженiе для H и H' въ видѣ выраженiй ($II\ bis$) и ($III\ bis$), мы можемъ дать для опредѣленiя α', β', γ' и α_1, β_1, γ_1 слѣдующiя формулы:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \alpha - 2A_1\varrho\cos i_1 \\ \beta' &= \beta - 2B_1\varrho\cos i_1 \\ \gamma' &= \gamma - 2C_1\varrho\cos i_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots . \quad (I\ bis)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha + \varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} A_1 \\ \beta_1 &= \beta + \varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} B_1 \\ \gamma_1 &= \gamma + \varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin\sigma_1} C_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots . \quad (IV\ bis)$$

Такимъ образомъ имѣемъ для этой половины нашей задачи другую форму рѣшенiя.

*) Нѣкоторые авторы вмѣсто этого равенства пишутъ:

$$\sigma' = -i_1;$$

но это въ примѣненiи къ прозрачнымъ срединамъ приводитъ къ физической нелѣпости:

$$\omega' = -\omega.$$

Полученныя формулы въ примѣненіи къ прозрачнымъ срединамъ, т. е. когда коэффиціенты электропроводности C и C_1 суть нули, даютъ тѣ-же результаты, какіе получаются для нихъ непосредственно.

§ 5. Прежде чѣмъ перейти къ рѣшенію второй части нашей задачи, т. е. къ опредѣленію M', N', P' и M_1, N_1, P_1, замѣтимъ, что направленіе *комплекснаго вектора* (α, β, γ) какъ разъ совпадаетъ съ направленіемъ такъ называемаго *радіана* (*vecteur-radiant* по терминологіи Пуанкаре). Дѣйствительно, по теоремѣ Пойнтинга радіанъ перпендикуляренъ къ плоскости электрической и магнитной силъ; но, косинусы направленія первой для изотропныхъ срединъ пропорціональны количествамъ

$$M, N, P;$$

для второй пропорціональны количествамъ

$$N\gamma - P\beta, \qquad P\alpha - M\gamma, \qquad M\beta - N\alpha,$$

а слѣдовательно косинусы направленія радіана будутъ пропорціональны

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$$

такъ какъ вслѣдствіе *условія періодичности*, т. е. вслѣдствіе условія

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0,$$

имѣемъ

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0.$$

§ 6. Перейдемъ теперь къ опредѣленію M', N', P'; M_1, N_1 и P_1.

Съ этой цѣлью воспользуемся условіями на границахъ, принявъ за нихъ равенство электрическихъ и магнитныхъ силъ вдоль плоскости раздѣла.

Если свѣтовой векторъ совпадаетъ съ электрической пертурбаціей, то составляющія магнитной силы для падающаго вектора будутъ:

$$\frac{4\pi}{K\mu\delta}(N\gamma - P\beta)e^{Q}, \quad \frac{4\pi}{K\mu\delta}(P\alpha - M\gamma)e^{Q}, \quad \frac{4\pi}{K\mu\delta}(M\beta - N\alpha)e^{Q}$$

и подобныя выраженія для отраженнаго и преломленнаго вектора.

Возьмемъ теперь за координатныя оси x и y двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя въ плоскости границы, а за ось z нормалъ къ границѣ.

Пусть эти оси будутъ OP, OQ и ON и косинусы ихъ угловъ съ прежними осями соотвѣтственно будутъ

$$A'', B'', C''; \quad A_{11}, B_{11}, C_{11} \quad \text{и} \quad A_1, B_1, C_1.$$

Проектируя электрическія и магнитныя силы на оси OP и OQ и сравнивая эти проекціи, получимъ слѣдующія четыре уравненія:

$$SMA'' + SM'A'' = \frac{K}{K_1} SM_1A'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$SMA_{11} + SM'A_{11} = \frac{K}{K_1} SM_1A_{11} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

— для электрическихъ силъ,—и

$$S(N\gamma - P\beta)A'' + S(N'\gamma' - P'\beta')A'' = \frac{K}{K_1} S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A'' \quad . \; (3)$$

$$S(N\gamma - P\beta)A_{11} + S(N'\gamma' - P'\beta')A_{11} = \frac{K}{K_1} S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A_{11} \quad . \; (4)$$

— для магнитныхъ силъ,—причемъ знакомъ S представлена сумма трехъ членовъ, соотвѣтствующихъ написанному за этимъ знакомъ.

Кромѣ этихъ уравненій имѣемъ еще два, выражающихъ „условіе существованія“ періодическихъ измѣненій состоянія срединъ, а именно:

$$M'\alpha' + N'\beta' + P'\gamma' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

$$M_1\alpha_1 + N_1\beta_1 + P_1\gamma_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Что касается до условія

$$M\alpha + N\beta + P\beta = 0, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

относящагося до падающаго вектора, то оно должно считаться тождественно выполненнымъ и будетъ намъ служить лишь для упрощенія формулъ.

Такъ какъ мы уже опредѣлили всѣ $\alpha', \ldots \gamma_1$, то въ написанныхъ *шести* уравненіяхъ будутъ заключаться *шесть* неизвѣстныхъ M', N', P'; M_1, N_1, P_1, входящихъ въ нихъ линейно, слѣдовательно имѣемъ вполнѣ опредѣленную задачу съ однимъ опредѣленнымъ рѣшеніемъ, какъ это и можно было предвидѣть *à priori*.

Эти неизвѣстныя впослѣдствіи могутъ быть выражены при помощи четырехъ амплитудъ и двухъ азимутовъ плоскостей поляризаціи.

Изъ уравненій (3) и (4) мы можемъ исключить величины α', β', γ'; α_1, β_1, γ_1, уже опредѣленныя нами ранѣе. Подставляя значенія α_1, β_1, γ_1 изъ равенствъ (I), мы находимъ для преломленнаго вектора:

$$S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A'' = SM_1(C''\beta_1 - B''\gamma_1) = SM_1(C''\beta - B''\gamma) - HSM_1A_{11},$$

$$S(N_1\gamma_1 - P_1\beta_1)A_{11} = SM_1(C_{11}\beta_1 - B_{11}\gamma_1) = SM_1(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + HSM_1A''$$

и подобныя-же выраженія для отраженнаго вектора.

Подставляя все это въ уравненія (3) и (4), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} SM(C''\beta - B''\gamma) + SM'(C''\beta - B''\gamma) - H'SM'A_{11} = \\ = \frac{K}{K_1}[SM_1(C''\beta - B''\gamma) - HSM_1A_{11}] \end{aligned}\right\} \ldots (3\ bis)$$

$$\left.\begin{aligned} SM(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + SM'(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + H'SM'A'' = \\ = \frac{K}{K_1}[SM_1(C_{11}\beta - B_{11}\gamma) + HSM_1A'' \end{aligned}\right\} \ldots (4bis)$$

Подобнымъ образомъ равенства (5) и (6) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$SM'\alpha - H'SM'A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (5\ bis)$$

$$SM_1\alpha - H\,SM_1A_1 = 0 \ldots\ldots\ldots (6\ bis)$$

§ 7. Теперь, слѣдовательно, намъ предстоитъ разрѣшить систему уравненій (1), (2), (3 *bis*—6 *bis*) относительно $M', \ldots P_1$.

Для рѣшенія этой системы мы ее предварительно упростимъ. Для этой цѣли примемъ за прежнюю систему координатъ какъ разъ систему прямыхъ: OP, OQ, ON; въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} A'' &= 1, & B'' &= 0, & C'' &= 0 \\ A_{11} &= 0, & B_{11} &= 1, & C_{11} &= 0 \\ A_1 &= 0, & B_1 &= 0, & C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Внося эти упрощенія въ уравненія (3 *bis*) и (4 *bis*), получимъ:

$$(N + N')\gamma - (P + P')\beta - H'N' = \frac{K}{K_1}(N_1\gamma - P_1\beta - HN_1)$$

$$(M + M')\gamma - (P + P')\alpha - H'M' = \frac{K}{K_1}(M_1\gamma - P_1\alpha - HM_1),$$

умноживъ-же уравненія (1) и (2), которыя теперь будутъ имѣть видъ:

$$M + M' = \frac{K}{K_1}M_1 \ldots\ldots\ldots (1\ bis)$$

$$N + N' = \frac{K}{K_1}N_1 \ldots\ldots\ldots (2\ bis)$$

на γ и вычтя результаты соотвѣтственно изъ полученныхъ сейчасъ, найдемъ:

$$(P+P')\beta+H'N'=\frac{K}{K_1}(P_1\beta+HN_1)\ .\quad\ldots\ (3\ ter)$$

$$(P+P')\alpha+H'M'=\frac{K}{K_1}(P_1\alpha+HM_1).\quad\ldots\ (4\ ter)$$

Уравненія (5 *bis*) и (6 *bis*) теперь напишутся въ слѣдующемъ упрощенномъ видѣ:

$$M'\alpha+N'\beta+P'\gamma-H'P'=0\ \ldots\ldots\ (5\ ter)$$

$$M_1\alpha+N_1\beta+P_1\gamma-HP_1=0.\ \ldots\ldots\ (6\ ter)$$

Такимъ образомъ намъ надо рѣшить систему уравненій (1 *bis*), (2 *bis*), (3 *ter*—6 *ter*).

Разсматривая эти уравненія, не трудно замѣтить, что количества P' и P_1 входятъ въ нихъ иначе, чѣмъ M', N'; M_1 и N_1; поэтому мы ихъ исключимъ, пользуясь равенствами (5 *ter*) и (6 *ter*); находимъ изъ этихъ послѣднихъ:

$$P'=\frac{M'\alpha+N'\beta}{H'-\gamma},\qquad P_1=\frac{M_1\alpha+N_1\beta}{H-\gamma}.\ \ldots\ldots\ (a)$$

Подставляя эти значенія P' и P_1 въ (3 *ter*) и (4 *ter*), получаемъ послѣ простого упрощенія:

$$\left.\begin{aligned}&M'\alpha\beta+[\beta^2+(H'-\gamma)^2]N'-\varLambda_1\{M_1\alpha\beta+N_1[\beta^2+(H-\gamma)^2]\}=\\&\qquad\qquad=(N\gamma-P\beta)(H'-\gamma)\\&M'[\alpha^2+(H'-\gamma)^2]+N'\alpha\beta-\varLambda_1\{M_1[\alpha^2+(H-\gamma)^2]+N_1\alpha\beta\}=\\&\qquad\qquad=(M\gamma-P\alpha)(H'-\gamma),\end{aligned}\right\}\ldots\ (b)$$

гдѣ положено

$$\varLambda_1=\frac{K}{K_1}\cdot\frac{H'-\gamma}{H-\gamma}.\ \ldots\ldots\ldots\ (c)$$

Разсматривая эти уравненія (b), замѣчаемъ, что если въ коэффиціентахъ при M' замѣнимъ количества α и β черезъ β и α, то получимъ коэффиціенты при N'; тоже можно замѣтить относительно коэффиціентовъ при M_1 и N_1; кромѣ того тѣже равенства показываютъ, что, если замѣнимъ въ первомъ уравненіи (b) систему количествъ M', N'; α, β; M_1, N_1; M, N черезъ систему N', M'; β, α; N_1, M_1; N, M, то получимъ второе уравненіе (b). Кромѣ того коэффиціенты при M_1, N_1 отличаются отъ коэффиціентовъ при M' и N', за исключеніемъ множителя Δ_1, тѣмъ, что вмѣсто H входитъ H'. Этими замѣчаніями мы воспользуемся съ большой выгодой.

Подставимъ теперь въ уравненія (b) значенія M_1 и N_1 изъ равенствъ (1 *bis*) и (2 *bis*); по упрощеніи получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} M'\alpha\beta + N'[\beta^2 - (H-\gamma)(H'-\gamma)] &= \frac{H'-\gamma}{H'-H}\,U, \\ M'[\alpha^2 - (H-\gamma)(H'-\gamma)] + N'\alpha\beta &= \frac{H'-\gamma}{H'-H}\,V, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (d)$$

гдѣ положено для краткости:

$$U = -M\alpha\beta - N[\beta^2 + H(H-\gamma)] + P\beta(H-\gamma)$$
$$V = -M[\alpha^2 + H(H-\gamma)] - N\alpha\beta + P\alpha(H-\gamma).$$

Но эти выраженія U и V сейчасъ-же упрощаются.

Отдѣляя въ U при M, N члены съ β, а въ V члены съ α, видимъ, что коэффиціентомъ будетъ служить двучленъ $M\alpha + N\beta$, который по условію

$$M\alpha + N\beta + P\gamma = 0$$

равенъ $-P\gamma$; значитъ, находимъ:

$$U = -H(H-\gamma)\,N + HP\beta; \qquad V = -H(H-\gamma)\,M + HP\alpha.$$

Полагая въ равенствахъ (d) для краткости письма:

$$(H-\gamma)(H'-\gamma) = \Gamma,$$

рѣшимъ ихъ относительно M'; находимъ:

$$M' = \frac{H[M(\alpha^2+\beta^2-\Gamma) + PH'\alpha]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}.$$

Пользуясь сдѣланнымъ выше замѣчаніемъ, т. е. замѣняя M, α, β черезъ N, β, α, найдемъ N', а именно:

$$N' = \frac{H[N(\alpha^2+\beta^2-\Gamma) + PH'\beta]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}.$$

Теперь, чтобы получить M_1 и N_1 соотвѣтственно изъ M' и N', стоитъ только замѣнить въ этихъ послѣднихъ H и H' черезъ H' и H и ввести коэффиціентъ $-\dfrac{K_1}{K}$. Получимъ:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'[M(\alpha^2+\beta^2-\Gamma) + PH\alpha]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}$$

и

$$N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'[N(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)+PH\beta]}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}.$$

Остается теперь найти P' и P_1.

Подставляя значенія M', N' и M_1, N_1 въ формулы (a), получимъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$P' = \frac{H(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+H\gamma)P}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)},$$

и

$$P_1 = -\frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+H'\gamma)P}{(H'-H)(\alpha^2+\beta^2-\Gamma)}$$

Полагая для простоты письма:

$$\alpha^2+\beta^2-\Gamma=\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

найденныя рѣшенія мы соберемъ въ видѣ системы:

$$M' = \frac{H}{H'-H}\left(M+\frac{PH'\alpha}{\Delta}\right),\ N' = \frac{H}{H'-H}\left(N+\frac{PH'\beta}{\Delta}\right),$$

$$P' = \frac{H}{H'-H}\left(1+\frac{H'(H-\gamma)}{\Delta}\right)P$$

для отраженнаго вектора,—и

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left(M+\frac{PH\alpha}{\Delta}\right),\ N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left(N+\frac{PH\beta}{\Delta}\right),$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K}\,\frac{H'}{H'-H}\left(1+\frac{H(H'-\gamma)}{\Delta}\right)P.$$

для преломленнаго.

Такимъ образомъ разрѣшена и вторая часть задачи въ общемъ видѣ.

§ 8. Такимъ образомъ мы получили слѣдующія системы рѣшеній: *для отраженныхъ волнъ*

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{H}{H'-H}\left[M+\frac{H'\alpha}{\Delta}P\right],\ N' = \frac{H}{H'-H}\left[N+\frac{H'\beta}{\Delta}P\right], \\ P' &= \frac{H}{H'-H}\left[1+\frac{H'(H-\gamma)}{\Delta}\right]P \end{aligned}\right\} . \quad (I)$$

и *для преломленныхъ волнъ*

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left[M + \frac{H\alpha}{\Delta} P\right], \\ N_1 &= \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left[N + \frac{H\beta}{\Delta} P\right], \\ P_1 &= \frac{K_1}{K} \cdot \frac{H'}{H'-H}\left[1 + \frac{H(H'-\gamma)}{\Delta}\right] P. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (II)$$

Если введемъ комплексные углы паденія и преломленія, то эти формулы примутъ другой видъ, представляющій ту выгоду, что отъ него легко перейти къ формуламъ отраженія и преломленія для прозрачныхъ срединъ (діэлектриковъ и очень слабыхъ проводниковъ).

Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$H = -\varrho \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin \sigma_1}, \quad H' = 2\varrho \cos i_1$$

и, слѣдовательно:

$$H' - H = \varrho \frac{\sin(i_1 + \sigma_1)}{\sin \sigma_1},$$

а потому получимъ вмѣсто системъ (I) и (II) слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} M' &= -\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin(i_1 + \sigma_1)}\left[M + \frac{2\varrho \cos i_1\, \alpha}{\Delta} P\right], \\ N' &= -\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin(i_1 + \sigma_1)}\left[N + \frac{2\varrho \cos i_1\, \beta}{\Delta} P\right], \\ P' &= -\frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin(i_1 + \sigma_1)}\left[1 + \frac{2\varrho \cos i_1 (H - \gamma)}{\Delta}\right] P \end{aligned}\right\} \ldots (I\ bis)$$

для отраженныхъ лучей, и

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)}\left[M - \frac{\varrho \sin(i_1 - \sigma_1)\, \alpha}{\Delta \sin \sigma_1} P\right], \\ N_1 &= \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)}\left[N - \frac{\varrho \sin(i_1 - \sigma_1)\, \beta}{\Delta \sin \sigma_1} P\right], \\ P_1 &= \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\sigma_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)}\left[1 - \frac{\varrho \sin(i_1 - \sigma_1)(H' - \gamma)}{\Delta \sin \sigma_1}\right] P. \end{aligned}\right\} \cdot (II bis)$$

для преломленныхъ.

Послѣднимъ формуламъ можно дать иной окончательный видъ въ тригонометрическихъ функціяхъ.

Мы можемъ найти, что

$$\varDelta = \varrho^2 \frac{\sin i_1}{\sin \sigma_1} \cos(i_1 - \sigma_1), \quad H' - \gamma = \varrho \cos i_1, \quad H - \gamma = -\varrho \frac{\sin i_1}{\sin \sigma_1} \cos \sigma_1,$$

поэтому формулы (I *bis*) обратятся въ слѣдующія:

$$M' = -\frac{\operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\operatorname{tg}(i_1 + \sigma_1)} M - \frac{2 \sin \sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\xi - N\eta);$$

$$N' = \frac{\sin(i_1 - \sigma_1)}{\sin(i_1 + \sigma_1)} N + \frac{2 \sin \sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\eta + N\xi);$$

$$P' = + \frac{\operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\operatorname{tg}(i_1 + \sigma_1)} P.$$

Здѣсь положено:

$$\beta^2 = \xi, \quad \eta = \sqrt{\xi \varrho^2 \sin^2 i_1 - \xi^2}$$

и затѣмъ члены съ $P\alpha$ и $P\beta$ въ формулахъ для M' и N' исключались при помощи равенства

$$P\gamma = -M\alpha - N\beta,$$

величина же α исключалась при помощи уравненія

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2 \sin^2 i_1.$$

Для преломленнаго вектора находимъ подобнымъ же образомъ слѣдующія формулы:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2 \sin \sigma_1 \cos \sigma_1}{\sin(i_1 + \sigma_1) \cos(i_1 - \sigma_1)} M - \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2 \sin \sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\xi - N\eta)$$

$$N_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2 \sin \sigma_1 \cos i_1}{\sin(i_1 + \sigma_1)} N + \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2 \sin \sigma_1 \operatorname{tg}(i_1 - \sigma_1)}{\varrho^2 \sin i_1 \sin(i_1 + \sigma_1)} (M\eta + N\xi).$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2 \sin^2 \sigma_1 \cos i_1}{\sin i_1 \cos(i_1 - \sigma_1) \sin(i_1 + \sigma_1)} P.$$

Если-бы пожелали ввести комплексные азимуты, то должны были-бы положить:

$$M = J \sin \Phi \cos i_1, \quad N = J \cos \Phi, \quad P = J \sin \Phi \sin i_1$$

$$M' = -J' \sin \Phi' \cos i_1, \quad N' = J' \cos \Phi', \quad P' = J' \sin \Phi' \sin i_1$$

$$M_1 = J_1 \sin \Phi_1 \cos \sigma_1, \quad N_1 = J_1 \cos \Phi_1, \quad P_1 = J_1 \sin \Phi_1 \sin \sigma_1.$$

Полученныя формулы для $\beta = 0$ обращаются въ обычныя формулы, тождественныя по виду съ формулами Фрэнэля.

Изъ этихъ формулъ вытекаетъ любопытное слѣдствіе, что нормальныя составляющія колебаній въ отраженныхъ и преломленныхъ волнахъ зависятъ лишь отъ нормальныхъ составляющихъ колебаній падающихъ волнъ, между тѣмъ какъ тангенціальныя составляющія зависятъ не только отъ тангенціальныхъ составляющихъ падающихъ волнъ, но и отъ нормальныхъ.

Эта зависимость изчезаетъ для составляющихъ, перпендикулярныхъ къ плоскости паденія, въ трехъ случаяхъ:

1) Если допустимъ, что „нормалъ поглощенія" падающихъ волнъ лежитъ въ плоскости паденія, т. е., что

$$\beta = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

2) Если падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ азимутѣ, т. е., когда

$$M = P = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

3) Когда лучъ падаетъ нормально, ибо тогда

$$P = 0.$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изчезаетъ и нормальная составляющая.

При общепринятомъ взглядѣ на поглощеніе всегда имѣемъ, что

$$\beta = 0\,;$$

но, какъ не трудно убѣдиться, „нормалъ поглощенія" долженъ лежать всегда въ плоскости колебанія и нормала къ плоской волнѣ, а потому условіе (a) имѣетъ мѣсто лишь въ случаѣ, когда падающій свѣтъ поляризованъ во второмъ азимутѣ, т. е. когда падающія колебанія лежатъ въ плоскости паденія.

Однако, не смотря на такую разницу во взглядахъ на законы поглощенія, результаты получаются одни и тѣже. Дѣйствительно, мы всегда можемъ разложить падающій свѣтъ на двѣ части: одну поляризованную въ 1-мъ азимутѣ, а другую во 2-мъ и для перваго случая будетъ имѣть мѣсто условіе (b), а для втораго—(a).

§ 9. Чтобы получить окончательныя рѣшенія уравненій (I) и (II) нужно въ нихъ раздѣлить дѣйствительныя и мнимыя части. Съ этой цѣлью положимъ:

$$H' = -\frac{4\pi}{\lambda} P' e^{\Theta' \sqrt{-1}}\,, \quad H_0 + H_1 \sqrt{-1} = P e^{\Theta \sqrt{-1}}$$

и между этими количествами P, P', Θ и Θ' будутъ существовать соотношенія, получаемыя изъ равенствъ (c) и (d) и равенства (II) § 2:

$$P^2\cos 2\Theta = P'^2\cos 2\Theta' + \Lambda^2\cos 2T, \quad P^2\sin 2\Theta = P'^2\sin 2\Theta' + \Lambda^2\sin 2T \quad (1)$$

гдѣ положено для симметріи формулъ:

$$\omega^2(K - K_1) = \Lambda^2\cos 2T, \quad 2(C - C_1)\omega\lambda = \Lambda^2\sin 2T. \quad . \; . \; . \; (2)$$

Такъ какъ количество h_0 и уголъ паденія i будемъ считать данными, то P и Θ опредѣлятся изъ соотношеній (1), если предварительно будутъ найдены вспомогательныя величины Λ и T изъ условій (2).

Далѣе найдемъ:

$$H = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} + Pe^{\Theta\sqrt{-1}}\right), \text{*)}$$

$$H' - H = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(P'e^{\Theta'\sqrt{-1}} - Pe^{\Theta\sqrt{-1}}\right).$$

Положимъ затѣмъ:

$$\alpha = -\frac{2\pi}{\lambda} Fe^{-\Phi\sqrt{-1}}, \quad \beta = -\frac{2\pi}{\lambda} g_0, \quad \gamma = -\frac{2\pi}{\lambda} P'e^{\Theta'\sqrt{-1}},$$

причемъ F, Φ, P' и Θ' удовлетворяютъ соотношенію:

$$F^2\sin^2\Phi + P'^2\sin^2\Theta' = 1. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Далѣе находимъ

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left[F^2e^{-2\Phi\sqrt{-1}} - PP'e^{(\Theta'+\Theta)\sqrt{-1}} + g_0^2\right]$$

и положимъ, что

$$\Delta = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} Ve^{-v\sqrt{-1}},$$

причемъ эти вспомогательныя количества V и v опредѣлятся изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v &= F^2\cos 2\Phi - PP'\cos(\Theta' + \Theta) + g_0^2 \\ V\sin v &= F^2\sin 2\Phi + PP'\sin(\Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (4)$$

Такъ какъ **):

$$F\cos\Phi = f_0, \quad F\sin\Phi = \sin i,$$

то F и Φ тоже извѣстны.

---

*) Можно положить:

$$H = -\frac{2\pi}{\lambda} pe^{\theta\sqrt{-1}},$$

что представляетъ извѣстную выгоду, которой мы впослѣдствіи воспользуемся.

**) Количества f_0, g_0, h_0 пропорціональны дѣйствительнымъ частямъ α, β, γ.

Затѣмъ опредѣляемъ:

$$\frac{H'\alpha}{\Delta}=V'e^{v'\sqrt{-1}}\,,\quad \frac{H'\beta}{\Delta}=\frac{2g_0P'}{V}e^{(\Theta'+v)\sqrt{-1}}\,,\quad \frac{H'(H-\gamma)}{\Delta}=V''e^{v''\sqrt{-1}}\,,$$

гдѣ положено:

$$V'=\frac{2P'F}{V}\,,\quad V''=\frac{2P'P}{V}\,,\quad v'=\Theta'-\Phi+v\,,\quad v''=\Theta'+\Theta+v\,.\quad (5)$$

Потомъ положимъ, что

$$\frac{H}{H'-H}=Ue^{u\sqrt{-1}}\,,$$

причемъ вспомогательныя величины U и u опредѣляются изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned}P'U\cos(\Theta'+u)-PU\cos(\Theta+u)&=P'\cos\Theta'+P\cos\Theta\\ P'U\sin(\Theta'+u)-PU\sin(\Theta+u)&=P'\sin\Theta'+P\sin\Theta\end{aligned}\right\}\,.\,.\quad (6)$$

такъ какъ

$$\frac{H}{H'-H}=\frac{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}}+Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}}-Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}\,.$$

Затѣмъ полагаемъ:

$$\frac{H}{H'-H}=U_1e^{u_1\sqrt{-1}}\,,$$

причемъ вспомогательныя величины U_1 и u_1 опредѣляются изъ соотношеній:

$$\left.\begin{aligned}P'U_1\cos(\Theta'+u_1)-PU_1\cos(\Theta+u_1)&=2P'\cos\Theta'\\ P'U_1\sin(\Theta'+u_1)-PU_1\sin(\Theta+u_1)&=2P'\sin\Theta'\end{aligned}\right\}\,.\,.\quad (7)$$

такъ какъ

$$\frac{H'}{H'-H}=\frac{2P'e^{\Theta'\sqrt{-1}}}{P'e^{\Theta'\sqrt{-1}}-Pe^{\Theta\sqrt{-1}}}\,.$$

Далѣе находимъ:

$$\frac{H\alpha}{\Delta}=U'e^{u'\sqrt{-1}}+U''e^{u''\sqrt{-1}}\,,\quad \frac{H\beta}{\Delta}=\left[\frac{P'}{V}e^{(\Theta'+v)\sqrt{-1}}+\frac{P}{V}e^{(\Theta+v)\sqrt{-1}}\right]g_0\,,$$

$$\frac{H(H'-\gamma)}{\Delta}=V_1e^{v_1\sqrt{-1}}+V_{11}e^{v_{11}\sqrt{-1}}\,,$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{array}{c} U' = \dfrac{P'F}{V}, \quad U'' = \dfrac{PF}{V}, \quad V_1 = \dfrac{P'^2}{V}, \quad V_{11} = \dfrac{PP'}{V}, \\ u' = \Theta' - \Phi + v, \quad u'' = \Theta - \Phi + v; \\ v_1 = 2\Theta' + v, \quad v_{11} = \Theta' + \Theta + v, \end{array}\right\} \quad . \quad . \ (8)$$

значитъ:

$$u' = v'; \quad v_{11} = v'', \quad V' = 2U', \quad V'' = 2V_{11} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (9)$$

§ 10. Теперь надо опредѣлить U, u, U_1 и u_1; мы ограничимся приведеніемъ уравненій (6) и (7) къ виду уравненій (4).

Опредѣлимъ сначала $U\cos u$ и $U\sin u$. Съ этой цѣлью умножимъ уравненія (6) сначала на $\sin x$ и $\cos x$, а затѣмъ на $\cos x$ и $-\sin x$ и результаты сложимъ; найдемъ:

$$[P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U\cos u +$$
$$+ [P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U\sin u = P'\sin(\Theta' + x) + P\sin(\Theta + x);$$
$$[P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U\cos u -$$
$$- [P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U\sin u = P'\cos(\Theta' + x) + P\cos(\Theta + x).$$

Если сдѣлаемъ здѣсь x равнымъ $-\Theta'$ или $-\Theta$, то получимъ очень удобную для опредѣленія $U\cos u$ и $U\sin u$ систему. Пусть

$$x = -\Theta',$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} P\sin(\Theta' - \Theta)\, U\cos u + [P' - P\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\sin u = -P\sin(\Theta' - \Theta) \\ [P' - P\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\cos u - P\sin(\Theta' - \Theta)\, U\sin u = P' + P\cos(\Theta' - \Theta). \end{array}\right\} . \ (a)$$

Эту систему можно рѣшить двояко. Положимъ, *во первыхъ*, что опредѣлили двѣ вспомогательныя величины μ и ν изъ равенствъ:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' + P\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \operatorname{tg}\nu = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' - P\cos(\Theta' - \Theta)} \ . \ . \ (10)$$

Тогда изъ системы (a) найдемъ:

$$U\cos u = \frac{\sin\nu\cos(\mu + \nu)}{\sin\mu}, \quad U\sin u = -\frac{\sin\nu\sin(\mu + \nu)}{\sin\mu} \ . \ . \ (11)$$

Отсюда:

$$U = \pm \frac{\sin\nu}{\sin\mu}, \quad u = n\pi - (\mu + \nu). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Верхнему знаку при U соотвѣтствуетъ $n = 0$, а нижнему $n = 1$, такъ-какъ U всегда положительно.

Во вторыхъ изъ системы (a) прямо находимъ:

$$\left.\begin{aligned} U\cos u &= \frac{P'^2 - P^2}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)} \\ U\sin u &= -\frac{2PP'\sin(\Theta' - \Theta)}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (bis)$$

Съ другой стороны мы могли-бы взять:

$$x = -\Theta$$

и получили-бы систему, аналогичную (a), а именно:

$$P'\sin(\Theta' - \Theta)\, U\cos u - [P - P'\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\sin u = P'\sin(\Theta' - \Theta),$$
$$[P - P'\cos(\Theta' - \Theta)]\, U\cos u + P'\sin(\Theta' - \Theta)\, U\sin u = -[P + P'\cos(\Theta' - \Theta)].$$

Отсюда, если положимъ:

$$\mathrm{tg}\,\mu' = \frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \mathrm{tg}\,\nu' = \frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)}. \quad (10\,bis)$$

то найдемъ:

$$U\cos u = -\frac{\sin\nu'\cos(\mu' + \nu')}{\sin\mu'}, \quad U\sin u = -\frac{\sin\nu'\sin(\mu' + \nu')}{\sin\mu'}. \quad (11\,bis)$$

$$U = \mp \frac{\sin\nu'}{\sin\mu'}, \quad u = n\pi + (\mu' + \nu') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12\,bis)$$

Верхнему знаку при U соотвѣтствуетъ $n = 0$, а нижнему $n = 1$.

Итакъ U и u опредѣлены

§ 11. Теперь надо опредѣлить U_1 и u_1.

Система (7) подобно тому, какъ система (6), даетъ:

$$[P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U_1\cos u_1 +$$
$$+ [P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U_1\sin u_1 = 2P'\sin(\Theta' + x)$$

$$[P'\cos(\Theta' + x) - P\cos(\Theta + x)]\, U_1\cos u_1 -$$
$$- [P'\sin(\Theta' + x) - P\sin(\Theta + x)]\, U_1\sin u_1 = 2P'\cos(\Theta' + x).$$

Положивъ здѣсь

$$x = -\Theta,$$

получимъ:

$$\left.\begin{array}{c} P'\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\cos u_1 - \\ -[P-P'\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\sin u_1 = 2P'\sin(\Theta'-\Theta) \\ -[P-P'\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\cos u_1 - \\ -P'\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\sin u_1 = 2P'\cos(\Theta'-\Theta). \end{array}\right\}\ldots\ldots(b)$$

Положивъ же:

$$\operatorname{tg}\mu_1 = \operatorname{tg}(\Theta'-\Theta),\quad \operatorname{tg}v_1 = \frac{P'\sin(\Theta'-\Theta)}{P-P'\cos(\Theta'-\Theta)},\ \ldots\ (13)$$

найдемъ:

$$U_1\cos u_1 = -\frac{2\sin v_1\cos(\mu_1+v_1)}{\sin\mu_1},\quad U_1\sin u_1 = -\frac{2\sin v_1\sin(\mu_1+v_1)}{\sin\mu_1}.\ (14)$$

Отсюда:

$$U_1 = \mp\frac{2\sin v_1}{\sin\mu_1},\quad u_1 = n\pi + (\mu_1+v_1)\ \ldots\ldots(15)$$

причемъ верхнему знаку при U_1 соотвѣтствуетъ $n=0$, а нижнему $n=1$.

Если-бы мы взяли

$$x = -\Theta',$$

то получили-бы для опредѣленія U_1 и u_1 уравненія:

$$[P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\cos u_1 - P\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\sin u_1 = 2P',$$

$$P\sin(\Theta'-\Theta)\,U_1\cos u_1 + [P'-P\cos(\Theta'-\Theta)]\,U_1\sin u_1 = 0.$$

Полагая здѣсь:

$$\operatorname{tg}\mu_0 = \frac{P'}{P'-P\cos(\Theta'-\Theta)} = \frac{P'\operatorname{tg}v}{P\sin(\Theta'-\Theta)}$$

и пользуясь значеніемъ $\operatorname{tg}v$, получимъ:

$$U_1\cos u_1 = 2\operatorname{tg}\mu_0\cos^2 v,\quad U_1\sin u_1 = -2\operatorname{tg}\mu_0\cos v\sin v\ \ .\ .\ (14\ bis)$$

Отсюда:

$$U_1 = \pm 2\operatorname{tg}\mu_0\cos v,\quad u_1 = n\pi - v.\ \ \ldots\ (15\ bis)$$

Мы предпочитаемъ рѣшеніе (15).

Опредѣляя непосредственно, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} U_1\cos u_1 &= \frac{2P'[P' - P\cos(\Theta' - \Theta)]}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)} \\ U_1\sin u_1 &= -\frac{2P'P\sin(\Theta' - \Theta)}{P'^2 + P^2 - 2PP'\cos(\Theta' - \Theta)}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (16)$$

Сравнивая съ (11 *bis*), усматриваемъ, что

$$U\sin u = U_1\sin u_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Это соотношеніе значительно облегчаетъ вычисленія. Пользуясь имъ и выраженіемъ $\mathrm{tg}\mu_0$ въ функціи v, найдемъ изъ (17)

$$\frac{2P'\sin v}{P\sin(\Theta' - \Theta)} = \frac{\sin(\mu + v)}{\sin\mu},$$

а затѣмъ —

$$U_1\cos u_1 = \frac{\cos v \sin(\mu + v)}{\sin\mu}.$$

Если положимъ

$$\frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{2P'} = \mathrm{tg}z,$$

то получимъ:

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{\sin v \cos z}{2P'\sin(v - z)}.$$

§ 12. Перейдемъ теперь къ рѣшенію первоначальной системы и для удобства разсмотримъ отдѣльно случаи, когда падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ и во второмъ азимутѣ.

Первый случай. Пусть падающій свѣтъ поляризованъ въ первомъ азимутѣ; тогда

$$M = 0, \qquad P = 0,$$

а потому уравненія (I) и (I) § 8 показываютъ, что

$$M' = 0, \qquad P' = 0,$$

$$M_1 = 0, \qquad P_1 = 0,$$

т. е. въ этомъ случаѣ и отраженный, и преломленный свѣтъ поляризованы въ томъ-же первомъ азимутѣ. Это заключеніе не зависитъ отъ частной формы закона поглощенія.

Итакъ остаются уравненія:

$$N' = \frac{H}{H' - H} N \quad \text{и} \quad N_1 = \frac{H'}{H' - H} \cdot \frac{K_1}{K} N.$$

Пусть падающій свѣтъ поляризованъ прямолинейно, тогда N количество дѣйствительное, но коэффиціенты при N комплексны, слѣдовательно

$$N' = R_1 + S_1 \sqrt{-1}, \quad N_1 = P_1 + Q_1 \sqrt{-1}$$

а амплитуды будутъ:

$$\sqrt{R_1^2 + S_1^2}, \qquad \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

и разности фазъ будутъ:

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \frac{S_1}{R_1}, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = \frac{Q_1}{P_1}.$$

Подставляя значенія

$$\frac{H}{H' - H} \quad \text{и} \quad \frac{H'}{H' - H}$$

изъ § 9, находимъ по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей слѣдующія выраженія:

$$R_1 = NU\cos u, \quad S_1 = NU\sin u, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \operatorname{tg} u,$$

а потому:

$$\sqrt{R_1^2 + S_1^2} = \pm \frac{\sin\nu}{\sin\mu} N, \quad \frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = n\pi - (\mu + \nu). \quad . \; . \; . \; (1)$$

Затѣмъ найдемъ:

$$P_1 = \frac{K_1}{K} NU_1 \cos u_1, \quad Q_1 = \frac{K_1}{K} NU_1 \sin u_1, \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = \operatorname{tg} u_1,$$

откуда:

$$\sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = \mp \frac{K_1}{K} \cdot \frac{2\sin\nu_1}{\sin\mu_1} N, \quad \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1} = n\pi + (\mu_1 + \nu_1). \; . \; . \; (2)$$

Если-бы падающій свѣтъ былъ поляризованъ эллиптически, то должно было-бы взять:

$$N = A + \Gamma\sqrt{-1} = Se^{\tau\sqrt{-1}}$$

и амплитуда его была-бы S, а разность фазъ его составляющихъ равнялась-бы $\frac{\lambda\tau}{2\pi}$.

Въ этомъ случаѣ въ уравненiяхъ для N' и N_1 вмѣсто U, U_1, u, u_1 надо взять:

$$US, \quad U_1S, \quad u+\tau \quad \text{и} \quad u_1+\tau_1;$$

слѣдовательно амплитуды увеличились-бы въ S разъ, а фазы на τ, и окончательныя рѣшенiя были-бы:

$$\sqrt{R_1^2+S_1^2}=\pm\frac{\sin v}{\sin\mu}S, \qquad \frac{2\pi\Delta'}{\lambda}=n\pi-(\mu+v)+\tau.$$

$$\sqrt{P_1^2+Q_1^2}=\mp\frac{2\sin v_1}{\sin\mu_1}\cdot\frac{K_1}{K}S, \qquad \frac{2\pi\Delta_1}{\lambda_1}=n\pi+(\mu_1+v_1)+\tau.$$

Если-бы мы подобрали падающiй лучъ такъ, чтобы удовлетворялось или равенство

$$\tau=\mu+v,$$

или равенство

$$-\tau=\mu_1+v_1,$$

то въ такомъ случаѣ или отраженный лучъ, или преломленный, были-бы поляризованы прямолинейно.

§ 12. *Второй случай.* Пусть падающiй свѣтъ поляризованъ во второмъ азимутѣ; тогда

$$N=0 \quad \text{и} \quad \beta=0.$$

Разсмотримъ сначала отраженный лучъ. Въ этомъ случаѣ уравненiя будутъ:

$$M'=\frac{H}{H'-H}\left(M+\frac{H'\alpha}{\Delta}P\right), \quad P'=\frac{H}{H'-H}\left(1+\frac{H'(H-\gamma)}{\Delta}\right)P.$$

Такъ какъ $\beta=0$, то, слѣдовательно, (§ 9) и $g_0=0$; значитъ, предыдущiя уравненiя можно будетъ написать при помощи равенствъ того-же § 9 въ слѣдующей формѣ:

$$\left.\begin{aligned} M'&=Ue^{u\sqrt{-1}}[M+V'e^{v'\sqrt{-1}}P]\\ P'&=Ue^{u\sqrt{-1}}[1+V''u^{v''\sqrt{-1}}]P, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(a)$$

причемъ, какъ положено раньше:

$$V'=\frac{2P'F}{V}, \quad V''=\frac{2P'P}{V}, \quad v'=\Theta'-\Phi+v, \quad v''=\Theta'+\Theta+v.$$

Такъ-какъ отраженный свѣтъ эллиптически поляризованный, то положимъ:

$$M' = M_1' + M_2'\sqrt{-1}\,, \quad P' = P_1' + P_2'\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (b)$$

и искомыя амплитуды будутъ:

$$M_0' = \sqrt{M_1'^2 + M_2'^2}\,, \quad P_0' = \sqrt{P_1'^2 + P_2'^2}\,,$$

разности-же фазъ опредѣлятся изъ уравненій:

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \frac{M_2'}{M_1'}, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = \frac{P_2'}{P_1'}$$

и разность фазъ обѣихъ составляющихъ отраженнаго луча будетъ опредѣляться разностью

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\Delta' - \Delta'').$$

Подставляя значенія M' и P' изъ (b) въ (a) и сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, получимъ для опредѣленія M_1', M_2', P_1' и P_2' слѣдующія уравненія:

$$\left.\begin{aligned} M_1' &= [M\cos u + PV'\cos(u+v')]U; \\ P_1' &= PU[\cos u + V''\cos(u+v'')], \\ M_2' &= [M\sin u + PV'\sin(u+v')]U; \\ P_2' &= PU[\sin u + V''\sin(u+v'')]. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (c)$$

Отсюда:

$$\left\{\begin{aligned} M_0'^2 &= U^2[M^2 + P^2V'^2 + 2MPV'\cos v']; \\ P_0'^2 &= P^2U^2[1 + V''^2 + 2V''\cos v'']. \end{aligned}\right.$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = \frac{M\sin u + PV'\sin(u+v')}{M\cos u + PV'\cos(u+v')}\,, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = \frac{\sin u + V''\sin(u+v'')}{\cos u + V''\cos(u+v'')}.$$

Но эти формулы можно преобразовать.

Положимъ, что мы опредѣлили два вспомогательныя количества μ_{11} и v_{11} по равенствамъ:

$$\operatorname{tg}\mu_{11} = \frac{PV'\sin u'}{M + PV'\cos v'}\,, \quad \operatorname{tg}v_{11} = \frac{V''\sin v''}{1 + V''\cos v''} \quad \ldots\ldots (d)$$

Въ такомъ случаѣ, найдемъ:

$$\frac{2\pi\Delta'}{\lambda} = u + \mu_{11}, \quad \frac{2\pi\Delta''}{\lambda} = u + \nu_{11},$$

откуда разность фазъ будетъ

$$\frac{2\pi(\Delta' - \Delta'')}{\lambda} = \mu_{11} - \nu_{11} \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

Слѣдовательно, она независитъ непосредственно отъ u.

Затѣмъ изъ (c) находимъ, вводя μ_{11} и ν_{11}:

$$\left.\begin{aligned} M_1' &= PUV'\sin v' \frac{\cos(u+\mu_{11})}{\sin\mu_{11}}, \quad P_1' = PUV''\sin v'' \frac{\cos(u+\nu_{11})}{\sin\nu_{11}} \\ M_2' &= PUV'\sin v' \frac{\sin(u+\mu_{11})}{\sin\mu_{11}}, \quad P_2' = PUV''\sin v'' \frac{\sin(u+\nu_{11})}{\sin\nu_{11}} \end{aligned}\right\} . \quad (4)$$

и слѣдовательно:

$$M_0' = PUV' \frac{\sin v'}{\sin\mu_{11}}, \quad P_0' = PUV'' \frac{\sin v''}{\sin\nu_{11}} \quad \dots\dots (5)$$

Теперь надо опредѣлить v' и v''.

Изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v &= F^2\cos 2\Phi - PP'\cos(\Theta' + \Theta) \\ V\sin v &= F^2\sin 2\Phi + PP'\sin(\Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (f)$$

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v' &= F^2\cos(\Theta' + \Phi) - PP'\cos(\Theta + \Phi) \\ V\sin v' &= F^2\sin(\Theta' + \Phi) + PP'\sin(\Theta + \Phi) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (h)$$

и затѣмъ:

$$\left.\begin{aligned} V\cos v'' &= F^2\cos(2\Phi + \Theta' + \Theta) - P'P \\ V\sin v'' &= F^2\sin(2\Phi + \Theta' + \Theta). \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (i)$$

Замѣтимъ, что хотя въ формулу для опредѣленія μ_{11} входятъ M и P, но ихъ отношеніе исключится, ибо мы имѣемъ:

$$\frac{P}{M} = \text{tg}\, i. \quad \dots\dots\dots\dots (6)$$

§ 14. Опредѣлимъ теперь преломленныя колебанія, т. е. M_1 и P_1. Формулы (II) § 8 даютъ:

$$M_1 = \frac{K_1}{K} U_1[Me^{u_1\sqrt{-1}} + P(U'e^{(u_1+u')\sqrt{-1}} + U''e^{(u_1+u'')\sqrt{-1}})],$$

$$P_1 = \frac{K_1}{K} U_1[e^{u_1\sqrt{-1}} + V_1 e^{(v_1+u_1)\sqrt{-1}} + V_{11} e^{(v_{11}+u_1)\sqrt{-1}}]P.$$

Положимъ:

$$M_1 = M_{11} + M_{12}\sqrt{-1}, \quad P_1 = P_{11} + P_{12}\sqrt{-1};$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \frac{K_1}{K} U_1[M\cos u_1 + PU'\cos(u_1+u') + PU''\cos(u_1+u'')] \\ M_{12} &= \frac{K_1}{K} U_1[M\sin u_1 + PU'\sin(u_1+u') + PU''\sin(u_1+u'')] \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

и

$$\left.\begin{aligned} P_{11} &= \frac{K_1}{K} U_1[\cos u_1 + V_1\cos(u_1+v_1) + V_{11}\cos(u_1+v_{11})]P \\ P_{12} &= \frac{K_1}{K} U_1[\sin u_1 + V_1\sin(u_1+v_1) + V_{11}\sin(u_1+v_{11})]P. \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Положимъ:

$$\operatorname{tg}\mu_2 = \frac{P(U'\sin u' + U''\sin u'')}{M + PU''\cos u' + PU''\cos u''};$$

тогда:

$$M_{11} = \frac{K_1}{K} U_1[\cos u_1 \operatorname{ctg}\mu_2 - \sin u_1]P(U'\sin u' + U''\sin u''),$$

$$M_{12} = \frac{K_1}{K} U_1[\sin u_1 \operatorname{ctg}\mu_2 + \cos u_1]P(U'\sin u' + U''\sin u'');$$

а отсюда находимъ:

$$M_{11} = \frac{K_1 U_1 P}{K} \cdot \frac{\sin(u_1+\mu_2)}{\sin\mu_2}(U'\sin u' + U''\sin u'')$$

$$M_{12} = \frac{K_1 U_1 P}{K} \cdot \frac{\sin(u_1+\mu_2)}{\sin\mu_2}(U'\sin u' + U''\sin u'').$$

Отсюда наконецъ найдемъ:

$$M_{01} = \pm \frac{K_1 U_1}{K} P \cdot \frac{U' \sin u' + U'' \sin u''}{\sin \mu_2} \quad \ldots\ldots (9)$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi \Delta_1}{\lambda_1} = \operatorname{tg}(u_1 + \mu_2),$$

т. е.

$$\frac{2\pi \Delta_1'}{\lambda_1} = u_1 + \mu_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Формулы (8) даютъ, если положимъ:

$$\operatorname{tg} v_2 = \frac{V_1 \sin v_1 + V_{11} \sin v_{11}}{1 + V_1 \cos v_1 + V_{11} \cos v_{11}},$$

слѣдующія:

$$P_{11} = \frac{K_1}{K} P U_1 (V_1 \sin u_1 + V_{11} \sin v_{11}) \frac{\cos(u_1 + v_2)}{\sin v_2}$$

$$P_{12} = \frac{K_1}{K} P U_1 (V_1 \sin v_1 + V_{11} \sin v_{11}) \frac{\sin(u_1 + v_2)}{\sin v_2}.$$

Отсюда наконецъ:

$$P_{01} = \pm \frac{K_1}{K} P U_1 \frac{V_1 \sin v_1 + V_{11} \sin v_{11}}{\sin v_2} \quad \ldots\ldots (11)$$

и

$$\frac{2\pi \Delta_1''}{\lambda_1} = u_1 + v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

и слѣдовательно, разность фазъ опредѣлится равенствомъ

$$\frac{2\pi(\Delta_1' - \Delta_1'')}{\lambda_1} = \mu_2 - v_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Теперь остается дать формулы для u', u'', v_1 и v_{11}, но такъ какъ по § 13, $u' = v'$ и $v_{11} = v''$, то для нихъ формулы даны въ предыдущемъ § [равенства (h) и (i)]. Слѣдовательно, надо составить равенства только для опредѣленія u'' и v_1.

Изъ равенствъ (f) § 13 имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} V \cos u'' &= F^2 \cos(\Theta + \Phi) - P P' \cos(\Theta' + \Phi) \\ V \sin u'' &= F^2 \sin(\Theta + \Phi) + P P' \sin(\Theta' + \Phi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (k)$$

и

$$\left.\begin{aligned} V\cos v_1 &= F^2\cos 2(\Theta' + \Phi) - PP'\cos(\Theta' - \Theta) \\ V\sin v_1 &= F^2\sin 2(\Theta' + \Phi) - PP'\sin(\Theta' - \Theta). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (l)$$

Итакъ все найдено.

§ 15. Формулы §§ 13—14 можно упростить и привести всѣ опредѣляемыя количества къ другимъ, которыя въ частныхъ случаяхъ, напримѣръ, когда верхняя средина прозрачна, принимаютъ простыя значенія, значительно упрощающія формулы.

Введемъ положеніе (§ 9)

$$H = pe^{\theta\sqrt{-1}},$$

т. е. примемъ, что:

$$P'\cos\Theta' + P\cos\Theta = p\cos\theta, \quad P'\sin\Theta' + P\sin\Theta = p\sin\theta \ldots (1)$$

Отсюда находимъ:

$$p^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\cos(\Theta' - \Theta) \ldots\ldots\ldots (2)$$

и

$$\mathrm{tg}(\Theta' - \theta) = \frac{P\sin(\Theta' - \Theta)}{P' + P\cos(\Theta' - \Theta)}, \quad \mathrm{tg}(\Theta - \theta) = -\frac{P'\sin(\Theta' - \Theta)}{P + P'\cos(\Theta' - \Theta)},$$

и сравнивая съ формулами (10) и (10 *bis*) § 10, находимъ:

$$\Theta' - \theta = \mu, \quad \Theta - \theta = -\mu'.$$

Отсюда получаемъ:

$$\theta = \Theta' - \mu, \quad \Theta' - \Theta = \mu + \mu'. \ldots\ldots\ldots (3)$$

Введемъ затѣмъ еще количества p_1 и θ_1, аналогичныя p и θ, а именно положимъ:

$$P\cos\Theta' + P'\cos\Theta = p_1\cos\theta_1, \quad P\sin\Theta' + P'\sin\Theta = p_1\sin\theta_1 \ldots (4)$$

Отсюда находимъ *во первыхъ*

$$p_1 = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

и *во вторыхъ*:

$$\mathrm{tg}(\Theta' - \theta_1) = \mathrm{tg}\mu', \quad \mathrm{tg}(\Theta - \theta_1) = -\mathrm{tg}\mu,$$

т. е.

$$\theta_1 = \Theta' - \mu' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Мы выражаемъ θ и θ_1 при помощи Θ', ибо эта величина для случая, когда верхняя средина прозрачна, равна $\frac{\pi}{2}$.

Изъ формулъ (3) и (6) находимъ еще:

$$\theta_1 - \theta = \mu - \mu' \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Замѣтимъ здѣсь еще одно любопытное соотношеніе для p. Выраженіе для $\mathrm{ctg}\mu + \mathrm{ctg}\mu'$ легко даетъ слѣдующее

$$p^2 = \frac{PP'\sin^2(\Theta' - \Theta)}{\sin\mu\sin\mu'} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Это соотношеніе даетъ простую возможность опредѣлить четверти окружности, въ которыхъ лежатъ μ и μ'.

При помощи p, θ и θ_1 мы просто выразимъ $\mathrm{tg}\mu_2$ и $\mathrm{tg}\nu_2$, а также $\mathrm{tg}\mu_{11}$ и $\mathrm{tg}\nu_{11}$.

Съ этой цѣлью положимъ:

$$\left.\begin{aligned} U'\sin u' + U''\sin u'' &= \frac{F}{V^2}\,\Omega\sin(\Phi + \tau) \\ U'\cos u' + U''\cos u'' &= \frac{F}{V^2}\,\Omega_1\cos(\Phi + \tau_1), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9)$$

причемъ Ω и τ, Ω_1 и τ_1 опредѣляются соотношеніями:

$$\Omega\cos\tau = p[F^2\cos\theta + PP'\cos\theta_1], \quad \Omega\sin\tau = p[F^2\sin\theta + PP'\sin\theta_1], \ (10)$$

какъ не трудно убѣдиться при помощи равенствъ (h) § 13 и (k) § 14, и соотношеніями:

$$\Omega_1\cos\tau_1 = p[F^2\cos\theta - PP'\cos\theta_1], \quad \Omega_1\sin\tau_1 = p[F^2\sin\theta - PP'\sin\theta_1] \ (11)$$

вытекающими изъ формулъ (i) § 13 и (l) § 14.

Изъ (10) и (11) обычнымъ путемъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \Omega^2 &= p^2[F^4 + P^2P'^2 + 2F^2PP'\cos(\mu' - \mu)] \\ \Omega_1^2 &= p^2[F^4 + P^2P'^2 - 2F^2PP'\cos(\mu' - \mu)]. \end{aligned}\right\} \ldots (12)$$

Значитъ, вычисливъ одно изъ количествъ Ω или Ω_1, другое найдемъ изъ соотношенія, вытекающаго изъ равенствъ (12), а именно:

$$\Omega^2 + \Omega_1^2 = 2p^2(F^4 + P^2P'^2) \ldots\ldots\ldots (13)$$

Для опредѣленія τ и τ_1 (11) составляемъ формулы:

или:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tg}(\tau-\theta) &= -\frac{PP'\sin(\mu'-\mu)}{F^2+PP'\cos(\mu'-\mu)}, \\ \mathrm{tg}(\tau_1-\theta) &= \frac{PP'\sin(\mu'-\mu)}{F^2-PP'\cos(\mu'-\mu)}, \\ \mathrm{tg}(\tau-\theta_1) &= \frac{F^2\sin(\mu'-\mu)}{PP'+F^2\cos(\mu'-\mu)}, \\ \mathrm{tg}(\tau_1-\theta_1) &= -\frac{F^2\sin(\mu'-\mu)}{PP'-F^2\cos(\mu'-\mu)}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Зная эти вспомогательныя величины, получимъ:

$$\mathrm{tg}\mu_2 = \frac{PF\Omega\sin(\Phi+\tau)}{MV^2+PF\Omega_1\cos(\Phi+\tau_1)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Для опредѣленія v_2 сначала полагаемъ, что:

$$P'\sin 2\Theta' + P\sin(\Theta'+\Theta) = M\sin m, \quad P'\cos 2\Theta' + P\cos(\Theta'+\Theta) = M\cos m,$$

а затѣмъ, при помощи формулъ (1), находимъ отсюда:

$$M\cos(\Theta'-m) = p\cos\theta, \quad M\sin(\Theta'-m) = -p\sin\theta,$$

т. е.

$$M = p, \quad m = \Theta' + \theta = 2\Theta' - \mu. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Теперь безъ труда находимъ:

$$\mathrm{tg}v_2 = \frac{F^2P'p\sin(2\Phi+2\Theta'-\mu) - PP'^3\sin(\Theta'-\Theta)}{V^2-P^2P'^2+F^2P'p\cos(2\Phi+2\Theta'-\mu)-PP'^3\cos(\Theta'-\Theta)} . (17)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ $\mathrm{tg}\mu_{11}$ и $\mathrm{tg}v_{11}$, если предварительно опредѣлимъ вспомогательныя величины q, q_1, t и t_1 по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} F^2\cos\Theta' + PP'\cos\Theta &= q\cos t, \quad F^2\cos\Theta' - PP'\cos\Theta = q_1\cos t_1, \\ F^2\sin\Theta' + PP'\sin\Theta &= q\sin t, \quad F^2\sin\Theta' - PP'\sin\Theta = q_1\sin t_1, \end{aligned}\right\} . (81)$$

а именно:

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= F^4 + P^2P'^2 + 2F^2PP\cos(\Theta'-\Theta), \\ q_1^2 &= F^4 + P^2P'^2 - 2F^2PP'\cos(\Theta'-\Theta), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

и

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(t-\Theta)&=\frac{F^2\sin(\Theta'-\Theta)}{PP'+F^2\cos(\Theta'-\Theta)}\,,\\ \operatorname{tg}(t-\Theta')&=\frac{PP'\sin(\Theta'-\Theta)}{F^2+PP'\cos(\Theta'-\Theta)}\,,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\,(20)$$

или:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(t_1-\Theta')&=\frac{PP'\sin(\Theta'-\Theta)}{F^2-PP'\cos(\Theta'-\Theta)}\,,\\ \operatorname{tg}(t_1-\Theta)&=\frac{F^2\sin(\Theta'-\Theta)}{PP'-F^2\cos(\Theta'-\Theta)}\,.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\,(21)$$

Теперь можемъ найти

$$\operatorname{tg}\mu_{11}=\frac{2PP'Fq\sin(\Phi+t)}{MV^2+2PP'Fq_1\cos(\Phi+t_1)}\,;\ \ldots\ldots\,(22)$$

и наконецъ найдемъ:

$$\operatorname{tg}v_{11}=\frac{2PP'F^2\sin(2\Phi+\Theta'+\Theta)}{V^2-2P^2P'^2+2PF^2\cos(2\Phi+\Theta'+\Theta)}\,.\ \ldots\,(23)$$

Количество V^2, входящее въ эти формулы, опредѣляется изъ равенства

$$V^2=F^4+P^2P'^2-2PP'F^2\cos(2\Phi+\Theta'+\Theta)\,.\ \ldots\,(24)$$

которое вытекаетъ изъ (f) или (h) или (i) § 13.

При помощи этого значенія V^2 выраженіе (23) превращается въ слѣдующее:

$$\operatorname{tg}v_{11}=\frac{2PP'F^2\sin(2\Phi+\Theta'+\Theta)}{F^4-P^2P'^2}\,.\ \ldots\,(23\,bis)$$
