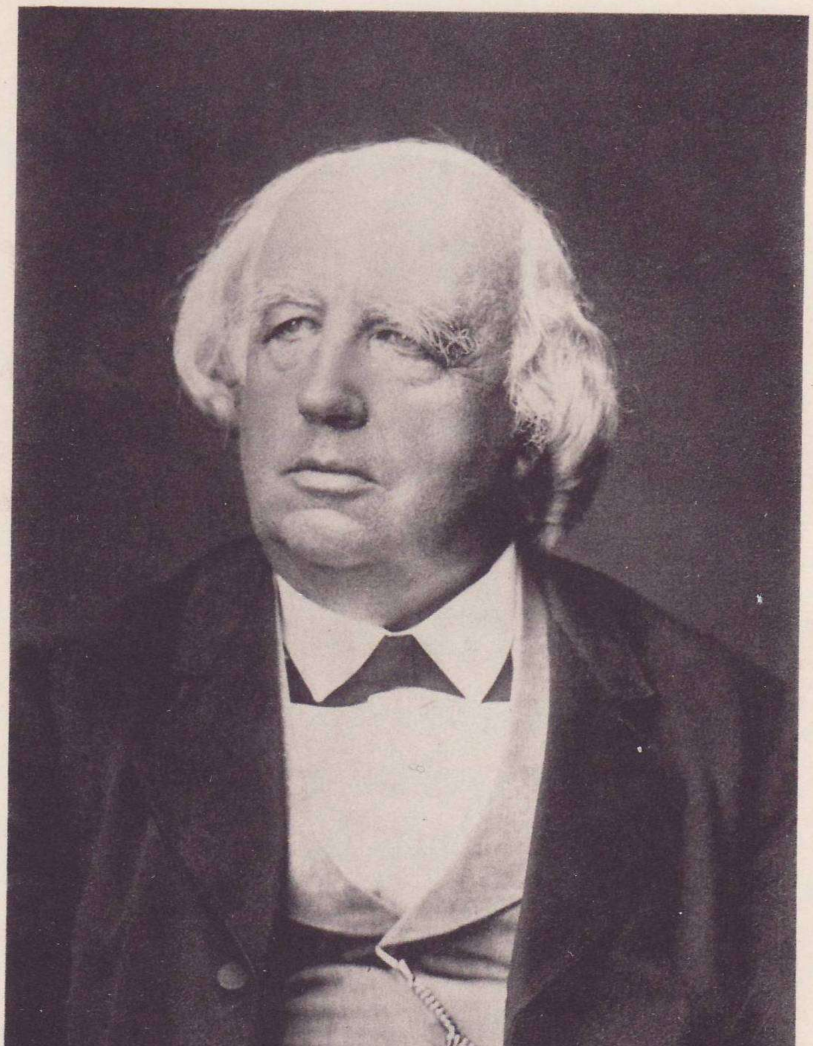

ФОТОТИПІЯ ШЕРЕРЪ, НАБГОЛЬЦЪ И Кº, МОСКВА.

K. Weierstrass.

Карлъ Вейерштрассъ.

Мм. гг.

Первые два мѣсяца текущаго года ознаменовались чувствительными утратами для математической науки: 18 января скончался въ Финляндіи молодой, но много обѣщавшій математикъ, магистрантъ С.-Петербургскаго Университета, *Владимiръ Андреевичъ Марковъ*, одинъ трудъ котораго напечатанъ въ сообщеніяхъ нашего Математическаго Общества, скончался въ самомъ началѣ своей ученой карьеры; 7-го февраля скончался въ Берлинѣ, на склонѣ лѣтъ, знаменитый германскій ученый *Карлъ Вейерштрассъ*, какъ разъ въ то время, когда подводилъ итоги своей, болѣе чѣмъ 57-ми лѣтней плодотворной ученой дѣятельности, приступивъ къ изданію своихъ трудовъ....

Къ крайнему сожалѣнію, ему не довелось самому окончить это дѣло: вышло только два тома, содержащіе его мемуары, помѣщавшіеся въ разныхъ періодическихъ изданіяхъ, главнымъ образомъ въ ежемѣсячныхъ отчетахъ Берлинской Академіи Наукъ, которой онъ состоялъ сорокъ лѣтъ членомъ, да печатаются теперь III-й томъ мемуаровъ и лекціи по Абелевымъ интеграламъ. Предвидя возможность не довести до конца, по преклонности лѣтъ, предпринятое изданіе и будучи озабоченъ, чтобы оно не прекратилось въ случаѣ его смерти, онъ обратился за содѣйствіемъ къ Берлинской Академіи Наукъ, которая, отнесясь сочувственно къ этому, выбрала изъ своей среды коммиссію изъ 4-хъ членовъ [1]), въ составъ которой вошелъ и самъ авторъ издаваемыхъ сочиненій, и поручила ей наблюденіе за этимъ изданіемъ. Но все-же приходится очень сожалѣть, что не придется уже самому автору довести дѣло до конца, тѣмъ болѣе, что теперь очередь за тѣми томами, которые будутъ посвящены его лекціямъ; послѣднія же записывались и составлялись его многочислеными слушателями, а не были изложены письменно имъ самимъ. Нѣкоторыя, впрочемъ, были уже отлитографированы и слѣдовательно, если не вполнѣ, то уже до нѣкоторой степени

[1]) Auwers, Frobenius, Schwarz, Weierstrass.

обработаны. Будемъ надѣяться, что давно ожидаемое математическимъ міромъ изданіе его лекцій не заставитъ себя долго ждать, что остальные члены коммиссіи и ученики покойнаго удвоятъ теперь свою энергію для ускоренія этого изданія, чтобы выразить тѣмъ свое глубокое почтеніе къ памяти знаменитаго ученаго, столько лѣтъ трудившагося на пользу науки и во славу своего отечества, и всегда привлекавшаго въ Берлинскій Университетъ столькихъ молодыхъ людей, стремившихся къ точному знанію изъ разныхъ странъ свѣта, въ томъ числѣ и изъ Россіи. Послѣднее обстоятельство налагаетъ и на насъ нравственную обязанность помянуть славнаго учителя стольскихъ поколѣній, который своими глубокими излѣдованіями дѣлился прежде всего со своими учениками, изъ коихъ многіе, сдѣлавшись извѣстными учеными, въ томъ числѣ и наша соотечественница, покойная С. В. Ковалевская, распространяли въ ученомъ мірѣ какъ результаты его изысканій, такъ и его научные взгляды. Желаніе исполнить этотъ долгъ по отношенію къ глубоко почитаемому нами ученому, недавно сошедшему въ могилу, но который еще долго будетъ жить въ своихъ твореніяхъ, было побудительною причиною къ составленію предлагаемаго вниманію нашего Математическаго Общества краткаго очерка его жизни и дѣятельности, хотя принимаясь за это, я хорошо сознавалъ, что взятая мною на себя задача не совсѣмъ соразмѣрна съ моими силами, ни съ тѣмъ количествомъ времени, которымъ я теперь располагаю; откладывать же исполненіе этого долга до болѣе благопріятнаго времени не хотѣлось изъ опасенія отложить на всегда.

Карлъ Вейерштрассъ родился 31-го октября 1815 года въ Остенфельдѣ, въ округѣ города Мюнстера въ Вестфаліи (въ Прирейнской Пруссіи). Среднее образованіе получилъ въ приготовительной школѣ при Мюнстерской гимназіи и затѣмъ въ гимназіи въ Падерборнѣ, откуда былъ выпущенъ съ атестатомъ зрѣлости осенью 1834 года и тогда же поступилъ въ Боннскій Университетъ. Въ университетѣ онъ пробылъ до Пасхи 1838 года, изучая государственныя, естественныя и математическія науки. Пробывъ, по кончаніи курса, полгода у своихъ, онъ еще долгое время потомъ посѣщалъ Академію въ Мюнстерѣ, чтобы усовершенствоваться въ высшей математикѣ, работая подъ руководствомъ извѣстнаго профессора *Гудермана*, много занимавшагося тогда молодой еще теоріей эллиптическихъ функцій, но получившей не задолго передъ тѣмъ вдругъ такое громадное развитіе въ совершенно новомъ направленіи, благодаря блестящимъ изслѣдованіямъ геніальныхъ Абеля и Якоби [1]. Неудивительно, что молодой, съ солиднымъ интересомъ къ

[1]) Обозначенія котораго, какъ извѣстно, были упрощены Гудерманомъ, и это Гудермановское обозначеніе Якобіевскихъ эллиптическихъ функцій, которыя онъ называлъ модулярными, весьма распространено теперь.

наукѣ, Вейерштрассъ увлекся именно этой теоріей, занятія которой опредѣлили на всю жизнь его научное направленіе, (что онъ и самъ сознавалъ, какъ то видно изъ его рѣчи, произнесенной при вступленіи въ Академію). Какъ ни много было сдѣлано Абелемъ и Якоби для теоріи эллиптическихъ функцій, все же молодому, но глубоко вникавшему въ науку ученому, удалось замѣтить только затронутые, но еще не рѣшенные вопросы. Во введеніи къ своему „Précis d'une théorie des fonctions élliptiques" [1]) Абель высказалъ то положеніе, что модулярная функція $\mathrm{sn}(u)$, обозначаемая имъ чрезъ $\lambda(u)$, можетъ быть представлена въ видѣ частнаго двухъ рядовъ, расположенныхъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ независимой перемѣнной u, сходящихся для всякихъ ея значеній, коэффиціенты которыхъ суть цѣлыя функціи модуля,—но доказательства котораго онъ не успѣлъ дать. Вейерштрассъ поставилъ себѣ первою задачей найти эти разложенія, а также показать какъ изъ нихъ могутъ быть получены другія извѣстныя разложенія эллиптическихъ функцій. Это ему удалось сдѣлать лѣтомъ 1840 г., и осенью того же года онъ защищалъ свою работу подъ заглавіемъ: „Ueber die Entwickelung der Modular-Functionen" въ испытательной коммиссіи въ Мюнстерѣ для полученія права преподаванія (Facultas docendi). Гудерманъ далъ очень лестный отзывъ о ней, и она должна была быть напечатана, что однако не состоялось по неизвѣстнымъ причинамъ. Часть этой работы вошла позже въ мемуаръ объ Абелевыхъ функціяхъ, напечатанный въ 52 томѣ журнала Крелля [2]), а цѣликомъ она папечатана лишь теперь въ первомъ томѣ полнаго собранія его сочиненій, по желанію лицъ интересующихся исторіей теоріи эллиптическихъ функцій, какъ объясняетъ самъ авторъ въ примѣчаніи, слѣдующемъ за этимъ первымъ мемуаромъ I-го тома. Работа эта занимаетъ 49 стр. in 4^0 и содержитъ изложеніе теоріи тѣхъ функцій, которыя онъ обозначалъ впослѣдствіи черезъ $Al(u)$, и которыми занимались потомъ также Эрмитъ и Кэли. Самъ Вейерштрассъ впослѣдствіи замѣнилъ ихъ функціей $\sigma(u)$, (всѣ эти функціи представляютъ разные частные виды общей Θ-функціи) и за этой своей работой признаетъ лишь историческое значеніе; тѣмъ не менѣе это столь солидный самостоятельный трудъ, что могъ бы въ свое время доставить автору докторскую степень не только въ Германіи, но даже и у насъ, въ Россіи, гдѣ, какъ извѣстно, требованія отъ докторскихъ диссертацій бо́льше германскихъ. Для Вейерштрасса защита этой работы имѣла то практическое значеніе, что онъ былъ допущенъ къ пробнымъ урокамъ въ мѣстной гимназіи втеченіе

---

[1]) Crelle Journal. Bd. 4. S. 244; Bd. 6. S. 76; см. также „Oeuvres complettes, T. I. p. 527 § 10.

[2]) Послѣдній мемуаръ I-го тома его Mathematische Werke.

1841—42 учебнаго года, а въ началѣ слѣдующаго учебнаго года былъ приглашенъ учителемъ математики и физики въ прогимназію въ Deutsch-Krone, въ Пруссіи, въ Маріенвердерскомъ округѣ, и черезъ годъ былъ утвержденъ штатнымъ преподавателемъ этой прогимназіи.

Какъ въ этой работѣ уже обозначились та научная область, которою онъ не переставалъ интересоваться всю свою долгую жизнь—именно теорія функцій, и расположеніе къ методу рядовъ, а также строгость и точность его научныхъ изслѣдованій, такъ тоже самое замѣтно и въ слѣдующихъ его произведеніяхъ Мюнстеровскаго періода. Второй мемуаръ I-го тома его Math. Werke, озаглавленный: „Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absolute Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt", имѣетъ предметомъ рядъ Лорана, по нынѣшней терминологіи, и содержитъ нѣкоторыя предложенія теоріи функцій комплекснаго перемѣннаго, тогда еще несуществовавшей, доказанныя съ помощію особаго пріема, не столь легкаго, какъ нынѣшніе, но свидѣтельствующаго о высокихъ математическихъ способностяхъ тогда еще молодаго автора. Въ этой статьѣ онъ даетъ комплексной величинѣ $a+bi$ не приведенную форму Коши, но представляетъ ее въ такомъ видѣ:

$$a+bi=r\,\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i},$$

гдѣ r обозначаетъ модуль (absolute Betrag), а λ есть вещественная величина, измѣняющаяся отъ $-\infty$ до $+\infty$; она связана съ аргументомъ θ равенствомъ

$$\lambda=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

какъ нетрудно видѣть.

Слѣдующій мемуаръ „Zur Theorie der Potenzreihen "имѣетъ задачей дать высшій предѣлъ для абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ одной или нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ того-же вида, какъ въ предыдущемъ мемуарѣ. Здѣсь уже встрѣчаются термины „безусловно и равномѣрно-сходящіеся ряды".

Къ этому же періоду относится и только теперь опубликованный 4-й мемуаръ I-го тома его сочиненій, содержащій доказательство теоремы Коши для системы дифференціальныхъ уравненій, найденное въ эпоху, когда доказательство самого Коши еще не было извѣстно Вейерштрассу; доказательство послѣдняго въ сущности одинаково съ доказательствомъ перваго, но полнѣе его въ томъ отношеніи, что Вейерштрассъ доказываетъ, что ряды представляющіе интегралы не только безусловно, но и *равномѣрно*-сходящіеся, и потому представляютъ аналитическія функнія, (на что обращено вниманіе уже въ предыдущемъ мемуарѣ). Тутъ говорится впервые и объ *аналитическомъ продолженіи функцій*, причемъ усматривается возможность существованія такихъ особенныхъ точекъ, при приближеніи къ которымъ радіусъ круга сходимости уменьшается до нуля.

Этотъ мемуаръ написанъ въ 1842 г., откуда видно, что Вейерштрассъ къ этому понятію подошелъ независимо отъ Puiseux, знаменитый мемуаръ котораго объ алгебраическихъ функціяхъ былъ опубликованъ въ 1850—51 годахъ.

Какъ видимъ, уже Мюнстерскій періодъ ученой дѣятельности Вейерштрасса отмѣченъ солидными изслѣдованіями, и въ этотъ же періодъ выработалось то представленіе объ аналитической функціи, которое проходитъ чрезъ весь рядъ послѣдующихъ работъ Вейерштрасса и его учениковъ и дѣлается въ настоящее время господствующимъ; уже въ этотъ періодъ обращено вниманіе на необходимость равномѣрной сходимости рядовъ, тогда какъ другими было обращено вниманіе только на безусловную сходимость.

Къ эпохѣ пребыванія его въ Deutsch-Krone относятся три сочиненія: 1) Bemerkungen über die analytischen Facultäten (1843); 2) маленькая замѣтка „Reduction eines bestimmten dreifachen Integrals", а также, не вошедшее въ изданные томы его Werke, сочиненіе: 3) „Ueber die Sokratische Lehrmethode" (1845).

Первое изъ этихъ сочиненій возникло по желанію Крелля, котораго „Theorie der analytischen Facultäten", 1824 г., подверглась строгой критикѣ Ома, утверждавшаго, что самыя основанія Креллевской теоріи ложны. Хотя это обвиненіе Вейерштрассу и удалось снять, однако онъ самъ замѣтилъ много не несущественныхъ недостатковъ этой теоріи, что и сообщилъ лично Креллю, который и просилъ его изложить свои изслѣдованія. Впослѣдствіи, въ 1854 г., онъ еще разъ вернулся къ этому предмету по настоятельной просьбѣ того же Крелля, и напечаталъ въ 51-мъ томѣ его журнала систематическій трактатъ по этой теоріи. Онъ былъ перепечатанъ въ 1886 г. въ сборникѣ Вейерштрасса—Abhandlungen aus der Functionenlehre, причемъ въ подстрочномъ примѣчаніи авторъ говоритъ, что по его мнѣнію эта теорія не имѣетъ такого значенія какое ей придавалось прежде, и онъ печатаетъ ее опять лишь потому, что въ этой работѣ найдется кое-что полезное для начинающихъ математиковъ, причемъ онъ измѣнилъ только введеніе, войдя въ бо́льшія подробности относительно критикуемаго сочиненія, въ виду того, что теперь его не всякій можетъ достать.

Въ Deutsch-Krone Вейерштрассъ оставался до 1848 года, когда перешелъ преподавателемъ математики и физики въ католическую гимназію города Braunsberg'а въ восточной Пруссіи (не далеко отъ Кенигсберга), и въ первый-же годъ своей преподавательской дѣятельности въ этой гимназіи, напечаталъ въ ея отчетѣ за 1848—49 годъ, (Braunsberger-Programm) замѣчательную статью подъ заглавіемъ: „Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale“, содержащую нѣкоторые результаты его изслѣдованій. Изъ этой статьи видно, что онъ уже давно занимался этими интегралами и, главнымъ образомъ, задачей Якоби—найти на самомъ дѣлѣ аналитическія выраженія для функцій, обратныхъ Абелевымъ интеграламъ, и это удалось ему сдѣлать путемъ отличнымъ отъ того, которому слѣдовали Göpel и др. Онъ заявляетъ тамъ кромѣ того еще, что онъ въ своихъ упоминаемыхъ изысканіяхъ выходитъ изъ самыхъ интегральныхъ уравненій, которыми эти функціи опредѣляются, и показываетъ затѣмъ съ помощію теоремы Абеля, что всѣ они суть корни уравненія, котораго коэффиціенты выражаются чрезъ нѣкоторое число вспомогательныхъ функцій, вполнѣ аналогичныхъ Θ-функціямъ Якоби въ теоріи эллиптическихъ функцій, и которыя подобно этимъ разлагаются въ постоянно-сходящіеся ряды, составленные по одному весьма простому закону, причемъ эти сходящіеся ряды онъ получаетъ съ помощію нѣсколькихъ характеристическихъ свойствъ этихъ функцій, которыми онѣ вполнѣ опредѣляются. Но для этого нужно знать нѣкоторыя соотношенія между періодами интеграловъ 1-го и 2-го рода, аналогичныя извѣстному Лежандровскому въ теоріи эллиптическихъ функцій, которыя получаются сами собою (in ungesuchter Weise) по пути, которому онъ слѣдовалъ, однако нѣсколько обстоятельно; почему онъ былъ очень обрадованъ, найдя въ одномъ мемуарѣ Абеля: „Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes“ [1]) одно тождество—истинный источникъ, изъ котораго получаются очень просто какъ эти, такъ и многія другія соотношенія, болѣе общія. Выводу упомянутыхъ соотношеній изъ этого тождества, (выведеннаго Абелемъ для болѣе общаго случая) и посвящается статья Вейерштрасса, о которой идетъ рѣчь, причемъ онъ попутно знакомитъ читателя съ гиперэллиптическими функціями многихъ перемѣнныхъ, аналогичными модулярнымъ.

Болѣе подробное изложеніе изслѣдованій Вейерштрасса въ этой области, о которыхъ онъ только упоминалъ въ названной статьѣ, но еще безъ доказательствъ, мы находимъ въ его статьѣ: „Zur Theorie der Abelschen Functionen“, написанной имъ въ 1853 г. въ Saline-Westerkoten въ Вестфаліи и напечатанной въ 47 т. журнала Крелля. Здѣсь, кромѣ изложенія нѣкоторыхъ свойствъ Абелевыхъ функцій и интеграловъ, мы встрѣчаемся впервые съ тѣмъ натуральнымъ переходомъ отъ интеграловъ къ функціямъ многихъ перемѣнныхъ: $Al(u_1, u_2, \dots u_\rho)$ (представляющихъ частные случаи общей Θ-функціи), который, по нашему мнѣнію, есть одно изъ важнѣйшихъ открытій Вейерштрасса.

[1]) Т. II, стр. 54 прежняго и 43 новаго изданія „Oeuvres complètes“ Абеля.

Послѣ этого мемуара былъ напечатанъ имъ въ 51 томѣ того-же журнала вышеупомянутый мемуаръ „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten“, а въ слѣдующемъ, 52-мъ, мемуаръ подъ заглавіемъ: „Theorie der Abelschen Functionen“, писанный при стѣсненныхъ обстоятельствахъ и, къ сожалѣнію, оставшійся неоконченнымъ, вслѣдствіе потери рукописи, какъ то я лично слышалъ отъ Вейерштрасса. Онъ прервался вначалѣ II-й главы, надписанной такъ: „Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischen Functionen durch Reihen“, содержавшей, въ видѣ отступленія, изслѣдованія изъ области эллиптическихъ функцій, составлявшія предметъ его перваго мемуара и теперь выброшенныя. Это послѣдній мемуаръ I-го тома его Math. Werke. Первая глава съ надписью: „Erklärung der Abelschen Functionen; Bestimmung der Form derselben“, содержитъ доказательство возможности представить Абелевы функціи въ видѣ частного двухъ постоянно-сходящихся рядовъ ϱ аргументовъ, основанное на теоремѣ Абеля и представляющее обобщеніе аналогичнаго положенія въ теоріи эллиптическихъ функцій, высказаннаго въ его самой первой работѣ (Мюнстерской), доказательство, которому онъ самъ придавалъ очень большое значеніе, какъ то я слышалъ лично отъ него. Этотъ мемуаръ содержитъ доказательства и выводы многихъ формулъ, сообщенныхъ въ „программѣ“ и въ 47 т. журнала Крелля, но не всѣхъ.

Эти изслѣдованія, новизною и солидностью результатовъ обратили на Вейерштрасса вниманіе ученыхъ Германіи, и въ 1856 г. онъ былъ приглашенъ въ Берлинскій университетъ экстраординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ чистой математики, а въ слѣдующемъ, 1857-мъ былъ избранъ въ члены Берлинской Академіи Наукъ, въ періодическомъ изданіи которой: Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften, онъ съ той поры сталъ помѣщать свои труды за немногими исключеніями. Многіе изъ его мемуаровъ и замѣтокъ переводились на французскій языкъ и печатались во французскихъ изданіяхъ, главнымъ образомъ въ Bulletin Darboux. Для насъ, русскихъ, небезъинтересно, что первая помѣщенная имъ въ томъ же году замѣтка была вызвана извѣстнымъ мемуаромъ нашего знаменитаго ученаго, покойнаго П. Л. Чебышева, объ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ въ логариѳмахъ, помѣщеннымъ въ журналѣ Ліувиля 2-я серія, т. II. По поводу этой работы Вейерштрассъ показалъ, что условія интегрируемости эллиптическаго интеграла въ логариѳмахъ могутъ быть легко выведены, если интегралъ разложить на интегралы трехъ родовъ и выразить эти послѣдніе въ функціи отъ инграла перваго рода, означаемаго имъ чрезъ u, а затѣмъ ввести вмѣсто интеграловъ третьяго рода ихъ линейныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами; эти послѣднія приводятся въ случаѣ интегрируемости въ логариѳмахъ на основаніи теоремы о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ нормальныхъ интегралахъ третьяго рода и теоремы Абеля каждая къ суммѣ логариѳма отъ нѣкоторой раціональной функціи x и $\sqrt{R(x)}$, раздѣленнаго на нѣкоторое четное число, и интеграла перваго рода u, умноженнаго на нѣкоторую постоянную; этотъ послѣдній, равно какъ и интегралъ второго рода должны уйти изъ результата подстановки этихъ выраженій вмѣсто введенныхъ линейныхъ функцій интеграловъ третьяго рода въ разложеніе даннаго интеграла, въ случаѣ интегрируемости его въ логариѳмахъ, что доставитъ еще два условія. Всѣ эти условія, какъ первыя, вытекающія изъ теоремы Абеля, такъ и сейчасъ упомянутыя, получаются сперва въ трансцендентной формѣ, но на основаніи фундаментальныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ функцій легко приводятся къ алгебраическимъ соотношеніямъ между постоянными, входящими въ данный интегралъ; оставляетъ желать лучшаго имѣющійся способъ приведенія даннаго интеграла къ сказанному виду, но и его возможно сдѣлать болѣе удобнымъ при помощи упомянутаго свойства интеграла третьяго рода. Легкость полученія такимъ способомъ условій интегрируемости въ логариѳмахъ побудила его, говоритъ далѣе Вейерштрассъ, поставить эту задачу шире, примѣнительно къ Абелевымъ интеграламъ, и его розысканія по этому вопросу, какъ онъ заявляетъ, были не безуспѣшны, такъ какъ главныя трудности имъ уже преодолѣны, и сравнительно немного остается сдѣлать, чтобы рѣшить эту задачу окончательно. При этомъ изслѣдованіи главными вспомогательными средствами его были соотношенія между періодами интеграловъ и теорема Абеля, которыя составляютъ по его мнѣнію фундаментъ всего интегральнаго исчисленія, причемъ онъ обѣщаетъ показать, въ другой статьѣ, что сама теорема Абеля есть слѣдствіе нѣкотораго другого предложенія. Вопросъ объ интегрируемости въ логариѳмахъ онъ считаетъ неустранимымъ изъ интегральнаго исчисленія, такъ какъ логариѳмы первыя трансцендентныя, съ которыми мы знакомимся, и онъ очень сожалѣетъ, что эти вопросы едва затрогиваются въ учебникахъ, авторамъ которыхъ угодно давать гордое названіе системы интегральнаго исчисленія (den stolzen Namen eines Systems der Integral-Rechnung) собранію отдѣльныхъ результатовъ, добытыхъ усиліями Эйлера, Лагранжа и др. Онъ заявляетъ въ заключеніе, что для интеграла вида $\int F(x, \sqrt[m]{R(x)})\,dx$ изслѣдованіе этого вопроса доведено имъ до конца, и онъ надѣется въ скоромъ времени сообщить Академіи о результатахъ своихъ изысканій. Однако это обѣщаніе, какъ и предыдущее, осталось неисполненнымъ по неизвѣстной причинѣ.

Въ Monats-Berichte мы находимъ еще только одну замѣтку, касающуюся Абелевыхъ интеграловъ, именно замѣтку объ интегрированіи системы гиперэллиптическихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=0}^{i=\varrho} \frac{x_i^\lambda \, dx_i}{\sqrt{R(x_i)}} = 0\,, \quad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots \varrho - 1]$$

вызванной замѣткой по тому-же предмету Якоби, помѣщенной въ 32-мъ томѣ журнала Крелля [1]), въ которой онъ выводитъ алгебраическіе интегралы этой системы изъ теоремы Абеля, а затѣмъ на самомъ дѣлѣ выводитъ квадратное соотношеніе между двумя симметрическими функціями и линейное между тремя таковыми функціями отъ $x_0, x_1, x_2, \ldots x_\rho$, существованіе которыхъ было предусмотрѣно Якоби въ упомянутой сейчасъ замѣткѣ.

Другія изслѣдованія, помѣщенныя въ Berliner Berichte, и вошедшія въ составъ первыхъ томовъ его Mathematische Werke, относятся къ другимъ вопросамъ; свои-же изслѣдованія изъ области Абелевыхъ интеграловъ и функцій онъ сообщалъ большею частію на лекціяхъ, иногда въ письмахъ къ другимъ ученымъ. Изъ одного мемуара С. В. Ковалевской видно, что онъ занимался также резсмотрѣніемъ случаевъ, когда Абелевы интегралы какого-либо ранга сводятся къ таковымъ нисшаго ранга, въ частности къ эллиптическимъ; методою Вейерштрасса она и пользовалась при рѣшеніи подобнаго вопроса.

Гиперэллиптическіе интегралы тотчасъ слѣдуютъ за эллиптическими въ системѣ интегральнаго исчисленія; поэтому предшественники Вейерштрасса въ этой области, Якоби, Ришело и Эрмитъ, на нихъ исключительно и обратили свое вниманіе; съ нихъ совершенно естественно началъ свои изысканія и Вейерштрассъ тѣмъ болѣе, что въ этомъ конкретномъ случаѣ всѣ вычисленія могутъ быть не только указаны, но и выполнены на самомъ дѣлѣ [2]). Вейерштрассъ нѣсколько разъ излагалъ полную теорію ихъ на лекціяхъ въ Берлинскомъ Университетѣ, которыя записывались и составлялись его слушателями. Одинъ такой рукописный курсъ я видѣлъ лѣтомъ 1884 г. въ Лейпцигскомъ математическомъ семинарѣ, пріобрѣтенный стараніями профес. Клейна. Лучше всего по этому предмету, какъ я слышалъ отъ самого Вейерштрасса осенью того-же года, курсъ записанный и составленный по его лекціямъ Гурвицемъ [3]), къ которому онъ и совѣтовалъ мнѣ обратиться для разъясненія занимавшаго меня тогда вопроса; однако, такъ какъ для меня было достаточно того указанія, которое я получилъ лично отъ самого Вейерштрасса по этому вопросу, то я не рѣшился просить Гурвица выслать мнѣ этотъ курсъ на просмотръ, и потому не могу его здѣсь описать.

---

[1]) Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. II, мемуаръ № 13.

[2]) См. наше „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ“. Харьковъ 1885 г.

[3]) Hurwitz, въ 1884 г. профессоръ Кенигсбергскаго Университета, теперь Цюрихскаго Политехникума.

Вейерштрассъ однако не ограничился изученіемъ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ, но также обстоятельно изслѣдовалъ и общіе Абелевы интегралы, зависящіе отъ ирраціональности, опредѣляемой какимъ угодно неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$, но ничего по этому предмету не напечаталъ. Единственное, что мы встрѣтили въ печати, гдѣ сообщались основныя формулы изъ его теоріи Абелевыхъ интеграловъ, хотя безъ доказательствъ, это замѣтка Берлинскаго профессора Геттнера (Hettner) въ Gött. Nachrichten, 1884 г., подъ заглавіемъ: Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindentig-umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen", написанной по поводу статьи Шварца въ 87-мъ томѣ журнала Борхардта (Крелля), и только теперь напечатанные во II-мъ т. Math. Werke Вейерштрасса отрывки изъ его письма къ Шварцу по поводу той-же статьи этого послѣдняго, въ которой доказывается такое предложеніе: „Если неприводимое алгебраическое уравненіе между двумя перемѣнными допускаетъ безконечный рядъ (eine Schaar) раціонально и однозначно-обратимыхъ преобразованій въ самое себя, то рангъ алгебраическаго образа есть нуль или единица". Геттнеръ даетъ алгебраическое доказательство этого предложенія на основаніи формулъ Вейерштрасса, которыя онъ поэтому предварительно и приводитъ. Сущность его доказательства заключается въ томъ, что допущеніе существованія преобразованія уравненія въ самое себя при помощи раціонально-обратимой подстановки, содержащей одинъ произвольный параметръ, ведетъ къ противорѣчію съ той истиной, легко доказываемой имъ при помощи формулъ Вейерштрасса, что число мѣстъ алгебраическаго образа опредѣляемаго даннымъ неприводимымъ алгебраическимъ уравненіемъ $f(x, y) = 0$ ранга ϱ, для которыхъ можно найти функцію, которая только въ одномъ этомъ мѣстѣ обращалась бы въ нуль порядка $\leqq \varrho$, есть конечное. Вейерштрассъ въ своемъ письмѣ къ Шварцу показываетъ, что между двумя функціями z_1 и z_r обращающимися въ одномъ только мѣстѣ (a, b) въ ∞^{v_1} и ∞^{v_r} соотвѣтственно, причемъ $v_1 \leqq \varrho$, а v_r число простое съ v_1 и ближайшее къ нему, для котораго существуетъ такая функція, имѣетъ мѣсто неприводимое алгебраическое уравненіе $\overset{v_r\, v_1}{F(z_1, z_r)} = 0$, которое точно также будетъ преобразовываться само въ себя въ одно время съ уравненіемъ $f(x, y) = 0$; опираясь на это, а также на то, какъ и Геттнеръ, что такихъ мѣстъ (a, b) для которыхъ существуетъ функція какъ z_1 имѣется конечное число, онъ заключаетъ, что „если какое либо уравненіе $f(x, y) = 0$ допускаетъ раціональныя преобразованія въ самое себя, то во всякомъ случаѣ, если рангъ его $\varrho > 1$, число такихъ преобразованій будетъ всегда конечное". Въ этомъ письмѣ онъ замѣчаетъ также, что если r, имѣетъ наименьшее значеніе, то уравненіе между z_1 и z_r будетъ содержать наименьшее число постоянныхъ. Вообще, если v_1 не меньше ϱ, то число ихъ будетъ, согласно съ предложеніемъ Римана равно $3\varrho-3$; но v_1 можетъ спуститься до 2, (какъ для эллиптическихъ и гиперэллиптическихъ интеграловъ), и число произвольныхъ коэффицiентовъ спускается тогда до $2\varrho-1$. Имѣется и способъ для приведенія даннаго уравненія къ такому „каноническому виду", хотя мало практичный. Тѣмъ не менѣе г-жа Ковалевская нашла для него эти уравненія на самомъ дѣлѣ для $\varrho=1, 2, 3, 4, 5$.—Въ заключеніе онъ въ первый разъ въ этомъ письмѣ сообщаетъ выраженіе раціональной функціи отъ x, y, связанныхъ уравненіемъ $f(x, y)=0$, и общаго Абелева интеграла, зависящаго отъ этой ирраціональности, чрезъ примъ-функціи обоихъ родовъ.

Замѣтка Геттнера, какъ сказано выше, напечатана въ 1884 г., тогда какъ это письмо Вейерштрасса было написано лѣтомъ 1875; къ тому-же времени, именно 1875—76, относится и тотъ рукописный курсъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, читанный въ Берлинскомъ университетѣ, съ которымъ я имѣлъ случай познакомиться въ 1884 г. въ библіотекѣ Лейпцигскаго семинара. Изъ этого курса видно, что у Вейерштрасса все выводится изъ одного тождества, о которомъ уже было выше упомянуто. Отсюда онъ получаетъ формы нормальныхъ интеграловъ второго и третьяго рода, соотношенія аналогичныя Лежандровскому въ теоріи эллиптическихъ функцій между періодами интеграловъ перваго и второго рода, примъ-функціи и выраженіе чрезъ нихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, а также алгебраической функціи, зависящей отъ той-же ирраціональности; отсюда, какъ простое слѣдствіе теорему Абеля. Частный случай послѣдней приводитъ къ рѣшенію задачи Якоби, именно: онъ выражаетъ чрезъ новыя перемѣнныя—значенія суммъ ϱ интеграловъ перваго рода,—суммы интеграловъ второго и третьяго рода и разсматриваетъ частныя производныя по нимъ суммъ интеграловъ второго рода; оказывается, что эти послѣднія суть частныя производныя нѣкоторой вспомогательной функціи, чрезъ которую все можетъ быть выражено. Если эту функцію взять показателемъ степени числа e, то получается однозначная, конечная и непрерывная функція ϱ новыхъ перемѣнныхъ, обладающая свойствами, аналогичными свойствамъ Якобіевой Θ-функціи. Вейерштрассъ въ заключеніе выводитъ ея разложеніе въ рядъ. Такимъ образомъ теорія Абелевыхъ трансцендентныхъ сводится къ теоріи Θ-функцій многихъ перемѣнныхъ самымъ натуральнымъ, а не искусственнымъ образомъ, какъ у другихъ изслѣдователей. Разъ такой результатъ получился, натурально является желаніе обратно отъ Θ-функціи вернуться къ Абелевымъ интеграламъ. Вейерштрассъ думалъ и объ этомъ, но едвали самъ приступалъ къ подробному рѣшенію этого вопроса, а далъ указанія своему ученику Шоттки (Schottky), изслѣдованія котораго изложены въ его извѣстномъ сочиненіи „Abriss einer Theorie der Abelschen Function von drei Variablen“. Leipzig 1880 [1]).

Какъ ни замѣчательна по своей простотѣ, натуральности и изяществу теорія Абелевыхъ интеграловъ Вейерштрасса, но это не она принесла ему его обширную извѣстность. Признававшаяся до сихъ поръ, и не безъ основанія, очень трудною и въ тоже время имѣющая пока мало приложеній (но которая, несомнѣнно, будетъ ихъ имѣть), теорія Абелевыхъ интеграловъ интересовала до недавняго времени сравнительно очень не многихъ. Въ Германіи ею стали больше интересоваться въ семидесятыхъ годахъ, когда появились лекціи Неймана о Римановой теоріи Абелевыхъ интеграловъ и теорія Абелевыхъ функцій Клебша и Гордана; во Франціи-же стали ею заниматься лишь въ слѣдующее десятилѣтіе послѣ Бріо и Букэ, если не считать работы Галуа и Пюизе; въ другихъ-же государствахъ Европы и Америки, куда ее перенесъ Кэли, стали ею интересоваться тоже лишь въ восьмидесятыхъ годахъ. Но это были именно теоріи Римана и Клебша, съ которыми начали знакомиться, тогда какъ другія двѣ: Гöпеля и Розенгайна, и Вейерштрасса, и въ Германіи находили мало послѣдователей,—Вейерштрассовская конечно потому, что распространялась лишь при помощи его лекцій, того-же, что было имъ напечатано, было не совсѣмъ достаточно для составленія полнаго понятія и о его теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ, но достаточно все-таки, чтобы заинтересовать ею. Должно полагать, что Вейерштрассъ медлилъ изданіемъ своего курса сперва изъ желанія еще болѣе усовершенствовать разныя доказательства, а можетъ быть и рѣшить какіе либо частные вопросы и тѣмъ пополнить свой курсъ, а потомъ уже не хватало быть можетъ по преклонности лѣтъ и энергіи приняться за обработку начисто своихъ лекцій, тѣмъ болѣе, что такая работа, въ нѣкоторомъ смыслѣ техническая, не много и скучновата для человѣка особенно склоннаго преимущественно къ созерцательной дѣятельности, къ размышленію, къ углубленію въ науку, какимъ уже давно сталъ Вейерштрассъ, хотя въ молодости былъ отличнымъ вычислителемъ, какъ о томъ свидѣтельствуетъ первая его работа.

---

[1]) О сущности Вейерштрассовской теоріи какъ гиперэллиптическихъ интеграловъ, такъ и Абелевыхъ, можно составить полное понятіе по моимъ сочиненіямъ: „Отчетъ о занятіяхъ моихъ въ Лейпцигѣ. Харьковъ 1885 г.“; „Обращеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ. Харьковъ 1885 г.“, „Основанія теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Харьковъ, 1895 г.“, къ которымъ поэтому я и могу совѣтовать обратиться интересующихся этой теоріей; но долженъ замѣтить, что мои доказательства и выводы часто очень отличаются отъ Вейерштрассовскихъ, ибо послѣдніе основаны исключительно на формѣ разложенія разсматриваемыхъ функцій въ степенные ряды (Potenzreihen) вблизи той или другой особенной точки, тогда какъ я предпочелъ чисто алгебраическіе выводы и доказательства. Вышеупомянутая замѣтка Геттнера можетъ дать понятіе о способахъ доказательства Вейерштрасса, обратиться къ которой поэтому я также могу совѣтовать желающимъ.

И дѣйствительно, въ настоящее время появляется много прекрасныхъ курсовъ, обработываемыхъ учениками свѣтилъ первой величины современнаго математическаго міра, которымъ самимъ и некогда и скучно заниматься отшлифовкой своихъ лекцій. Остается пожелать, чтобы и ученики Вейерштрасса, подобно ученикамъ Клейна, Ли, Пуанкарэ, Гурса,—поскорѣе издали замѣчательныя его лекціи по теоріи гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, а также и по другимъ предметамъ. Хотя теперь многія изъ его доказательствъ и методовъ могутъ быть замѣнены уже другими, какъ то можно видѣть изъ работъ Нётера и изъ моихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ", тѣмъ не менѣе эти лекціи долго будутъ еще представлять огромный интересъ и будутъ признаны всѣми однимъ изъ лучшихъ твореній Вейерштрасса, и его теорія—одной изъ лучшихъ теорій науки.

А пока, нужно признаться, ученой славѣ Вейерштрасса способствовали, какъ это впрочемъ чаще всего бываетъ, его труды изъ области знанія, получившей уже раньше права гражданства у математиковъ обоихъ полушарій, именно его изслѣдованія по теоріи эллиптическихъ функцій и по теоріи аналитическихъ функцій вообще.

Послѣ первой работы Вейерштрасса, посвященной теоріи функцій $Al(u)$, имъ самимъ были опубликованы только два мемуара по теоріи эллиптическихъ функцій: одинъ изъ нихъ, написанный въ 1882 году, посвященъ выводу частнаго дифференціальнаго уравненія по u, ω, ω', которому удовлетворяютъ функціи $\sigma(u, \omega, \omega')$ и $\sigma_\lambda(u, \omega, \omega')$ [1]), и примѣненію этого уравненія къ разложенію этихъ функцій въ рядъ — онъ является такимъ образомъ замѣстителемъ самаго перваго мемуара, преслѣдовавшаго подобную цѣль относительно прежнихъ функцій $Al(u)$, замѣненныхъ теперь функціей $\sigma(u)$; второй читанный въ Академіи въ 1883 году, написанъ съ цѣлію восполнить усмотрѣнный Вейерштрассомъ пробѣлъ въ Якобіевой „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" [2]), въ которомъ Якоби рѣшилъ свою задачу только для случая, когда модуль k заключается въ предѣлахъ 0 и 1, Вейерштрассъ-же выражаетъ q въ функціи k рядомъ быстро-сходящимся и для комплекснаго k.

Первымъ, познакомившимъ ученый міръ съ функціями $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ Вейерштрасса, былъ, сколько намъ извѣстно, его ученикъ Kiepert, помѣстившій въ 1882 г. въ одномъ изъ томовъ журнала Крелля мемуаръ, посвященный умноженію аргумента эллиптическихъ функцій, и затѣмъ H. Schwartz, издавшій въ 1883 г. 10 листовъ „Formeln und Lehrsätze

---

[1]) Онъ былъ въ слѣдующемъ году отлитографированъ въ Геттингенѣ съ прибавленіемъ Шварца; этимъ изданіемъ я пользовался при составленіи послѣдней главы моей „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій". Харьковъ, 1895 г.

[2]) Gesammelte Werke, Bd. I. S. 497 ff.

zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwartz". Послѣднее изданіе очень способствовало распространенію Вейерштрассовской теоріи эллиптическихъ функцій, дотолѣ извѣстной лишь его ученикамъ изъ его лекцій, а также и извѣстное сочиненіе Halphen'a: „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications", первый томъ котораго вышелъ уже чрезъ три года послѣ таблицъ Schwartz'a, именно въ 1886 г., а второй въ 1888 г. Не мало способствовали тому также и лекціи, отчасти и книга: „Modulfunctionen" Клейна, который не только ввелъ Вейерштрассовскія функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ въ свои лекціи, но построилъ и для гиперэллиптическихъ интеграловъ функцію аналогичную $\sigma(u)$, обладающей свойствомъ быть „формой" отъ u и ω, ω', т. е. однородной функціей этихъ величинъ, и въ этомъ направленіи сталъ вмѣстѣ съ Burchardt'омъ разрабатывать теоріи этихъ интеграловъ. Что касается до книги Halphen'a, то въ ней Вейерштрассовскія функціи вводятся еще не самостоятельно, но выводятся изъ Якобіевскихъ, что не натурально; какъ можно видѣть изъ статьи Миттагъ-Леффлера: „О введеніи въ анализъ эллиптическихъ функцій", написанной по шведски и напечатанной въ 1876 г. въ Гельсингфорсѣ, а также изъ нашей „Теоріи эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій", они появляются сами собою, равно какъ и Эрмитовская каноническая форма подрадикальной функціи въ эллиптическомъ интегралѣ, принятая Вейерштрассомъ, при извѣстной постановкѣ вопроса о теоремѣ Эйлера. Функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ на столько хорошо извѣстны теперь—онѣ встрѣчаются уже и въ изслѣдованіяхъ русскихъ ученыхъ—, что мнѣ о нихъ распространяться излишне: незнакомымъ-же съ ними могу указать на свое вышеназванное сочиненіе по теоріи эллиптическихъ функцій. Скажу еще только то, что Вейерштрассъ излагалъ теорію эллиптическихъ функцій на своихъ лекціяхъ двоякимъ образомъ: одинъ разъ онъ выходилъ изъ интеграловъ,—это тотъ курсъ, который повидимому слушалъ Миттагъ-Леффлеръ, какъ то можно предполагать на основаніи вышеупомянутой статьи его; другой разъ,—и этотъ курсъ былъ повторяемъ,—онъ принималъ за исходную точку теорему сложенія и доказывалъ, что аналитическая функція одной независимой перемѣнной обладающая алгебраической теоремой сложенія будетъ: или 1) алгебраическая, или 2) алгебраическая отъ $e^{\frac{u\pi i}{\omega}}$, или 3) алгебраическая функція отъ $s=\wp(u)$, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3,$$

гдѣ g_2 и g_3 приличнымъ образомъ выбранныя постоянныя, и условіемъ, что $\wp(0) = \infty^2$, а затѣмъ онъ прямо строилъ функцію $\sigma(u)$ по ея нулямъ согласно съ своей извѣстной теоремой, о которой будетъ рѣчь впереди, и оттуда, дифференцируя по взятіи логариѳма разъ и другой, получалъ функцію $\zeta(u)$ и $\wp(u)$ и обнаруживалъ такимъ образомъ ихъ свойства, а затѣмъ и свойства эллиптическихъ интеграловъ. Имъ подробно былъ развитъ и способъ вычисленія этихъ функцій. Такой рукописный курсъ я видѣлъ въ Лейпцигѣ въ 1883 г. Оба курса появятся вмѣстѣ въ одномъ изъ слѣдующихъ томовъ „Mathem. Werke“ Вейерштрасса.

При занятіяхъ спеціальными теоріями функцій эллиптическихъ, гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ, естественно было встрѣтиться съ вопросами, касающимися аналитическихъ функцій вообще, и обратиться къ внимательному пересмотру установившихся понятій: отсюда вышли и курсы по введенію въ общую теорію аналитическихъ функцій, читавшіеся нѣсколько разъ Вейерштрассомъ, (между прочимъ и въ осенній семестръ 1884 г., когда я былъ въ Берлинѣ), и рядъ мемуаровъ и замѣтокъ, помѣщавшихся въ ежемѣсячныхъ отчетахъ Академіи, и собранныхъ въ 1886 г. въ особый сборникъ подъ названіемъ: „Abhandlungen aus der Functionenlehre“ (Berlin, J. Springer) въ виду громаднаго интереса, возбужденнаго ими въ математическомъ мірѣ и вызвавшаго цѣлый рядъ дальнѣйшихъ изслѣдованій. Въ этой сферѣ вліяніе Вейерштрасса была огромное: если изслѣдованія въ теоріи гиперэллиптическихъ интеграловъ вызвали не болѣе какъ 10—12 опубликованныхъ работъ, теорія же эллиптическихъ функцій уже значительно больше, то изслѣдованія по вопросамъ общей теоріи функцій создали цѣлую литературу на всѣхъ почти европейскихъ языкахъ, столь обширную, что одинъ списокъ сочиненій потребовалъ бы не одинъ печатный листъ. Особенно посчатливилось, что впрочемъ весьма понятно, вопросу объ аналитическомъ представленіи однозначныхъ функцій, а затѣмъ непрерывнымъ функціямъ неимѣющимъ производныхъ, и вообще теоріи рядовъ. И дѣйствительно, возможность построить однозначную функцію по даннымъ ея нулямъ, а также и однозначную функцію съ даннымъ числомъ существенно-особенныхъ точекъ, принадлежитъ къ числу замѣчательнѣйшихъ его открытій. И въ этой области его идеи и открытія распространялись его учениками не менѣе, чѣмъ его мемуарами, хотя многіе изъ нихъ переводились на французскій языкъ вскорѣ по выходѣ. Пинкэрле, Коссакъ, Штольцъ, Ковалевская, Миттагъ-Леффлеръ, Бирманъ и другіе были изъ числа первыхъ и наиболѣе ознакомившихъ ученый міръ съ его взглядами и открытіями въ области аналитическихъ функцій. Но до сихъ поръ нѣтъ такого курса, который близко подходилъ бы къ его лекціямъ и далъ бы возможность составить полное и точное понятіе о всей его теоріи аналитическихъ функцій, какъ объ органически цѣломъ. Я даже не знаю была-ли она излагаема полностью и на его лекціяхъ, ибо онъ, ссылаясь на свой курсъ въ нѣкоторыхъ мемуарахъ, называетъ его „введеніемъ въ теорію аналитическихъ функцій“. Мнѣ два раза въ 1884 г. представлялся случай ознакомиться съ такимъ курсомъ: одинъ разъ лѣтомъ въ Лейпцигѣ по рукописнымъ лекціямъ, имѣвшимся въ библіотекѣ математическаго семинара, другой разъ осенью того-же года въ Берлинѣ, когда Вейерштрассъ читалъ этотъ курсъ; но я не воспользовался этими случаями, боясь отвлечься отъ главнаго предмета своихъ тогдашнихъ занятій—теорій гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ, и въ Берлинѣ прослушалъ лишь нѣсколько лекцій, посвященныхъ понятію о числѣ и четыремъ дѣйствіямъ надъ числами, съ чего Вейерштрассъ всегда считалъ нужнымъ начинать эти курсы. Это начало однакожъ большинству слушателей показалось скучнымъ, и я былъ свидѣтелемъ знакомаго намъ явленія: послѣ первой лекціи въ большой аудиторіи, не могшей вмѣстить всѣхъ слушателей, онъ долженъ былъ перейти въ громадный залъ, выстроенный отдѣльно въ саду за зданіемъ Университета, который могъ вмѣстить болѣе тысячи слушателей; но число ихъ, (можетъ быть и вслѣдствіе дурныхъ аккустическихъ и оптическихъ свойствъ этой залы), быстро сократилось, такъ что онъ чрезъ нѣсколько лекцій перешелъ въ аудиторію, меньшую первоначальной, которая могла вмѣстить не болѣе 150—200 слушателей, и то далеко была не полна. Онъ читалъ сидя въ креслахъ около доски, на которой формулы писалъ одинъ изъ студентовъ; читалъ онъ не спѣшно и достаточно громко, но возрастъ (ему на слѣдующій годъ исполнилось 70 лѣтъ) уже сказывался: не всякое слово выходило отчетливо, и частенько приходилось ему поправлять свои выраженія. Впрочемъ столь элементарныя вещи часто повторять представляетъ своего рода трудность, ибо приходится задерживать ради слушателей естественное быстрое теченіе своихъ мыслей. Какъ дѣло шло дальше, не знаю, ибо я тоже пересталъ ходить на лекціи по вышеуказанной причинѣ. Но возвратимся отъ лектора и лекцій къ ихъ предмету—теоріи аналитическихъ функцій. Какъ извѣстно, Вейерштрассъ усвоилъ Лагранжевское опредѣленіе аналитической функціи рядомъ расположеннымъ по степенямъ независимой перемѣнной или независимыхъ перемѣнныхъ, если ихъ нѣсколько, но *безусловно* и *равномѣрно-сходящимся* внутри извѣстной области, о чемъ во времена Лагранжа еще не думали; необходимость сходимости ряда была указана раньше Абелемъ и Коши, послѣднимъ даже и необходимость ея безусловности, но равномѣрность, если неявно и заключалась въ нѣкоторыхъ изъ прежнихъ доказатетьствъ, и если даже и были у Вейерштрасса предшественники, обращавшіе на это вниманіе, какъ Стоксъ, Зейдель, Гейне и можетъ быть и еще нѣкоторые другіе, то все-таки онъ былъ первый, который уже въ раннихъ своихъ работахъ подчеркнулъ ея необходимость для ряда представляющаго аналитическую функцію, и постояннымъ употребленіемъ выраженія „безусловно и равномѣрно-сходящійся рядъ“, такъ сказать пріучилъ математиковъ не забывать этого необходимаго условія для того, чтобы рядъ могъ представлять аналитическую функцію. Мы уже упоминали какъ рано и независимо отъ другихъ возникла у него идея объ аналитическомъ продолженіи функцій. Это его привело къ понятію о функціяхъ, которыя не могутъ быть продолжены за извѣстную границу, къ функціямъ прерывнымъ (fonction lacunaire), и къ роли, которую тутъ играютъ существенно особенныя точки. Онъ показалъ, въ мемуарѣ „Zur Functionentheorie", что можно построить такой сходящійся рядъ, который въ разныхъ областяхъ будетъ представлять различныя функціи. Ряды же привели его и къ непрерывнымъ функціямъ, которыя не имѣютъ производныхъ [1]). Строго обосновавъ теорію рядовъ, онъ сдѣлалъ ихъ почти единственнымъ средствомъ и орудіемъ всѣхъ своихъ выводовъ и доказательствъ, проведя строго и послѣдовательно ихъ употребленіе чрезъ всѣ свои изслѣдованія и курсы. Это придаетъ его работамъ и курсамъ единство, стройность, строгость и элементарность, хотя нѣкоторые выводы и доказательства выходятъ чрезъ это-же не рѣдко длинноваты, что затрудняетъ ихъ усвоеніе и нѣсколько вредитъ производимому ими впечатлѣнію. Но съ другой стороны, онъ чрезъ это даетъ своимъ ученикамъ такое орудіе, которое остается нерѣдко единственнымъ дѣйствительнымъ въ тѣхъ областяхъ знанія, въ которыя заведены теперь математики успѣхами науки. Вейерштрассъ, какъ и Кронекеръ, (хотя въ другомъ смыслѣ,) были ариѳметическаго направленія въ математикѣ, въ противоположность ученымъ Клебшевской школы, которые суть геометры по преимуществу, изслѣдуя вопросы чистаго анализа при помощи геометріи. Вейерштрассъ не хотѣлъ пользоваться и Римановой поверхностью при изученіи алгебраическихъ функцій, лишая себя такого хорошаго вспомогательнаго средства только для того, чтобы оставаться чистымъ ариѳметикомъ.

Занятія Абелевыми функціями, зависящими отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ, заставили его, болѣе чѣмъ кого либо, обратить вниманіе и на функціи многихъ перемѣнныхъ вообще, и во II томѣ его Mathem. Werke мы находимъ 4 мемуара [2]), посвященныя такимъ функціямъ. Изъ нихъ три первые показываютъ, что Вейерштрассъ занимался разработкой теоріи функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ системами періодовъ по плану Ліувиля и нашелъ нѣкоторыя теоремы, аналогичныя теоремѣ Ліувиля относительно функцій двояко-періодическихъ отъ од-

---

[1]) 6-й мемуаръ II-го тома.

[2]) Ueber die allgemeinen eindeutigen und 2n-fach periodischen Functionen von n Veränderlichen. 1869. 2) Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen mehreren Veränderlichen. 1879. 3) Untersuchungen über die 2r-fach periodischen Functionen von r Veränderlichen. 1880. 4) Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.

ной независимой перемѣнной; но эти изслѣдованія остались неоконченными. Послѣдній мемуаръ, (который былъ отлитографированъ въ 1879 г., а напечатанъ первый разъ въ 1886 г. въ сборникѣ „Abhandlungen aus der Functionenlehre") посвященъ доказательствамъ тѣхъ общихъ предложеній, представляющихъ обобщенія нѣкоторыхъ предложеній, касающихся функцій одной независимой перемѣнной, которыя ему необходимы были въ теоріи Абелевыхъ трансцендентныхъ.

Мы коснулись въ нашемъ очеркѣ лишь тѣхъ областей анализа, разработкой которыхъ Вейерштрассъ главнымъ образомъ занимался—центральныхъ, такъ сказать, областей его научной дѣятельности, ибо не имѣли времени познакомиться съ другими его работами, каковы напр.: Neuer Beweis des Fundamental-Satzes der Algebra (1859). Ueber die homogenen Functionen 2. Grades. Ueber eine Gattung reeller periodischen Functionen. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Ueber sogenannte Dirichlet's Princip. Bemerkungen zur Integration eines Systems linearer Differential gleichungen mit constanten Coefficienten. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Zur Lindemann'schen Abhandlung „Ueber die Ludolph'sche Zahl", въ которомъ онъ упрощаетъ доказательство Линдемана, Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationalle Function einer Veränderlichen dargestellt kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen 1891 г. и нѣкоторыя другія. Изъ двухъ здѣсь упомянутыхъ новыхъ доказательствъ основнаго предложенія Алгебры, второе представляетъ нѣкоторое видоизмѣненіе перваго. Они представляютъ интересъ, будучи построены на отличныхъ отъ другихъ доказательствъ основаніяхъ, но не отличаются краткостью.

Сверхъ упомянутыхъ курсовъ по теоріи функцій вообще, по теоріи эллиптическихъ, гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ функцій, Вейерштрассъ читалъ еще лекціи по Варіаціонному исчисленію, представляющія огромный интересъ и въ научномъ и въ педагогическомъ отношеніи. Литографированный курсъ, который я имѣлъ случай просматривать, составляетъ томъ очень мелкаго письма, по размѣрамъ не меньшій перваго тома Math. Werke, и посвященъ только вопросамъ о maxima и minima простыхъ интеграловъ. Этому курсу предпослано введеніе, содержащее нѣкоторыя необходимыя свѣденія изъ Вейерштрассовской теоріи аналитическихъ функцій, (въ которомъ упоминаются уже и изслѣдованія Пуанкарэ, касающіяся Фуксовыхъ функцій); а затѣмъ подробная теорія maxima и minima функцій одной и главнымъ образомъ, нѣсколькихъ перемѣнныхъ, какъ абсолютныхъ, такъ и относительныхъ. Здѣсь я встрѣтилъ между прочимъ то, чего еще нигдѣ не встрѣчалъ, именно критеріи для различенія относительныхъ maxima и minima, когда они розыскиваются при помощи метода Лагранжа. Для вывода этихъ критеріевъ въ случаѣ функціи многихъ перемѣнныхъ ему понадобилось познакомить слушателей съ теоріей квадратичныхъ формъ, которыхъ перемѣнныя или независимы, или связаны нѣкоторыми условіями: условіемъ неизмѣняемости знака такой формы будетъ тогда требованіе, чтобы нѣкоторое уравненіе, легко получаемое въ формѣ опредѣлителя въ обоихъ случаяхъ, имѣло-бы всѣ корни вещественные и одного знака, что узнается по раскрытіи уравненія по числу перемѣнъ знаковъ его коэффиціентовъ. Если n перемѣнныхъ связаны m условіями, то это уравненіе будетъ степени $n-m$, и въ опредѣлителѣ всѣ элементы, находящіеся въ пересѣченіи послѣднихъ m строкъ съ послѣдними m столбцами, будутъ нули, а неизвѣстная входитъ, и притомъ въ первой степени, только въ элементы расположенные по главной діагонали, какъ и для случая, когда n перемѣнныхъ независимы. Если нѣкоторыя условія даны въ формѣ неравенства: $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) > 0$, то онъ полагаетъ $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = x_{n+1}^2$, что для вещественныхъ значеній перемѣнныхъ равносильно данному условію, и такимъ образомъ задача сводится къ обыкновенной задачѣ объ относительныхъ maxima и minima. Это замѣчаніе мнѣ раньше тоже нигдѣ не встрѣчалось. Оба эти отдѣла занимаютъ почти четвертую часть всего курса; часть о maxima и minima разбита на 15 главъ; по этому уже можно судить какъ детально она разработана. Собственно курсъ Варіаціоннаго исчисленія разбивается на четыре части: сперва введеніе, разбивающееся на двѣ главы: первая имѣетъ назначеніемъ указать связь задачъ Варіаціоннаго исчисленія съ обыкновенной теоріей maxima и minima, для чего трактуется задача о плоской кривой, описывающей при вращеніи около прямой, взятой въ той-же плоскости, поверхность наименьшаго объема, по способу этой теоріи, разсматривая сперва многоугольникъ и переходя потомъ къ предѣлу, когда число сторонъ становится безконечно-большимъ; вторая глава посвящена тому, чтобы дать общее понятіе о задачахъ варіаціоннаго исчисленія. Затѣмъ первый отдѣлъ, разбитый на 15 главъ, посвященъ абсолютнымъ maxima и minima простого интеграла вида $\int_{t_0}^{t} F(x, y; x', y')\, dt$, гдѣ $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$. Этотъ отдѣлъ содержитъ много цѣнныхъ разъясненій, а главы VIII—XIII содержатъ и новое. Вейерштрассъ показываетъ сперва на частномъ примѣрѣ, именно на задачѣ Ньютона о тѣлѣ вращенія, поверхность котораго встрѣчаетъ наименьшее сопротивленіе отъ жидкой среды, въ которой движется, что необходимыя условія, выводимыя изъ разсмотрѣнія второй варіаціи, недостаточны, и даетъ новые критеріи. Второй отдѣлъ изъ 10 главъ посвященъ задачѣ объ изопериметрахъ, причемъ Вейерштрасъ развиваетъ свои критеріи и для этого случая; наконецъ послѣдній, третій отдѣлъ, изъ двухъ главъ, посвященъ тому случаю, когда функціи, входящія въ выраженіе, стоящее подъ знакомъ интеграла, и ихъ производныя связаны уравненіями.

Въ 1885 г. ему исполнилось 70 лѣтъ; по уставу германскихъ университетовъ этотъ возрастъ даетъ право профессору, сохраняя званіе, не читать болѣе лекцій. Вейерштрассъ воспользовался этимъ правомъ и уѣзжалъ въ Италію, но не на долго: по словамъ С. В. Ковалевской, съ которой я встрѣтился въ 1887 году, онъ соскучился безъ лекцій и опять сталъ читать ихъ; но едвали это долго продолжалось; по крайней мѣрѣ въ предисловіи къ I т. Math. Werke, отъ 15 мая 1894 г., онъ говоритъ, что пять лѣтъ назадъ онъ рѣшился издать полное собраніе своихъ сочиненій, но едва принялся за работу, какъ его посѣтила упорная болѣзнь, которая на нѣсколько лѣтъ сдѣлала его совершенно неспособнымъ къ работѣ, и только съ прошлаго лѣта т. е. въ 1893 г., состояніе здоровья позволило ему вновь приняться за изданіе своихъ сочиненій при содѣйствіи Академіи, какъ сказано выше, за которымъ онъ къ ней обратился, боясь не дожить до окончанія изданія. Опасенія его, какъ видимъ, оправдались и его не стало прежде, чѣмъ окончилось печатаніе III тома его сочиненій....

Профессоръ *М. Тихомандрицкій.*

Харьковъ,
27 февраля 1897 г.

Ровно черезъ мѣсяцъ послѣ того, какъ прочитана была эта рѣчь, и послѣ того, какъ уже приступлено было къ ея печатанію, мнѣ попался въ читальнѣ Университета только-что наканунѣ полученный № 16 „Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin“, содержащій отчетъ о засѣданіи 5-го марта (нов. стиля) 1897 г., наибольшую часть котораго занимаетъ рѣчь E. Lampe: „Zum Gedächtnisse von Karl Weierstrass“, прочитанная въ этомъ засѣданіи и содержащая много интересныхъ свѣденій о жизни и дѣятельности Вейерштрасса, а также характеристику его какъ учителя и человѣка,—свѣденій, почерпнутыхъ какъ изъ документальныхъ источниковъ, такъ и изъ личныхъ сношеній съ людьми, близко знавшими покойнаго ученаго, тогда какъ у меня подъ руками было лишь то, что помѣщено о немъ въ Braunsberger-progromm и въ „Conversations-lexikon“ Meyer'a, да кое-какія отрывочныя свѣденія, попадающіяся съ статьяхъ, напечатанныхъ въ первыхъ двухъ томахъ его Math. Werke. Такъ какъ весьма интересная рѣчь г-на Лампе, будучи напечатана въ спеціальномъ изданіи, можетъ быть не легко доступна иному читателю, то я позволю себѣ пополнить мою рѣчь нѣкоторыми заимствованными оттуда біографическими свѣденіями.

Карлъ Вейерштрассъ, католическаго вѣроисповѣданія, былъ старшій сынъ бургомистра города Остенфельда, у котораго были еще одинъ сынъ, Петръ Вейерштрассъ, теперь профессоръ филологіи въ Бреславскомъ Университетѣ, и двѣ дочери, Клара и Елизавета. К. Вейерштрассъ былъ холостъ; его сестры проживали вмѣстѣ съ нимъ въ Берлинѣ; одна изъ нихъ, Клара, умерла за годъ до его кончины, послѣдовавшей отъ болѣзни легкихъ, бывшей слѣдствіемъ инфлюэнцы, посѣтившей передъ тѣмъ его домъ. Послѣдніе годы своей жизни онъ не могъ ходить и проводилъ все время дома, въ креслахъ на колесахъ (Rollstuhl). Бывшіе тогда въ Берлинѣ ученики его, собравшись, постановили, чтобы ежедневно одинъ изъ нихъ посѣщалъ любимаго учителя, чтобы доставить ему въ бесѣдѣ развлеченіе, такъ какъ онъ любилъ общество, и отнюдь не былъ исключительно кабинетнымъ ученымъ, какъ то можно было о немъ думать, судя по наружному виду, и какимъ онъ мнѣ лично дѣйствительно представлялся. Въ гимназіи онъ давалъ отъ 28—30 уроковъ въ недѣлю, и не смотря на то, находилъ время заниматься наукою; подъ старость онъ съ любовью вспоминалъ время своего учительства. Въ 1854 г. Кенигсбергскій Университетъ, по предложенію извѣстнаго профессора Ришело, удостоилъ его степени доктора honoris causa. Чрезъ два года послѣ того онъ отправился съ ученою цѣлью въ Берлинъ, гдѣ въ то время открылось мѣсто преподавателя математики въ Технологическомъ Институтѣ (Gewerbeinstitut), на которое онъ былъ назначенъ 29 мая того же года, а 12 ноября того же года былъ назначенъ и экстраординарнымъ профессоромъ Университета; въ Академію былъ избранъ около того же времени, а вступительную рѣчь читалъ 9 іюля 1857 г. (день Лейбница). Въ Институтѣ онъ имѣлъ 12 лекцій въ недѣлю: 6 часовъ по Аналитической Геометріи и 6 часовъ по Дифференціальному и Интегральному исчисленію; здѣсь Hamburger и Schwartz сдѣлались его ревностными учениками. Въ Университетѣ онъ читалъ ежегодно одинъ курсъ publice и по крайней мѣрѣ одинъ privatim, предметомъ которыхъ были сперва теорія эллиптическихъ функцій (сначала по Якоби; функціи $\wp(u)$ и $\sigma(u)$ появились впервые въ курсѣ 1862—63 года); геометрическая оптика, короткое время послѣ смерти Штейнера синтетическая геометрія, пока не установился окончательно полный циклъ его курсовъ: по теоріи функцій вообще, по теоріи эллиптическихъ функцій, по теоріямъ гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ и по варіаціонному исчисленію.

Множество лекцій по высшимъ наукамъ и усилившіяся съ переходомъ въ Берлинъ собственныя ученыя занятія сильно разстроили его нервную систему, съ нимъ стали дѣлаться головокруженія и обмороки [1]);

---

[1]) Это было причиною, что съ 1862 г. онъ сталъ прибѣгать къ помощи студентовъ, когда нужно было писать формулы на доскѣ.

вслѣдствіе чего по требованію пользовавшихъ его врачей онъ долженъ былъ съ 1862 года сократить свою преподавательскую дѣятельность, и въ Институтѣ онъ былъ временно замѣщенъ Аронгольдомъ, хотя числился тамъ преподавателемъ до 1864 г., когда была учреждена въ Берлинскомъ Университетѣ, нарочно для него, третья ординатура по математикѣ. Какъ извѣстно, подъ его редакціей изданы сочиненія Штейнера и 6 послѣднихъ томовъ сочиненій Якоби; кромѣ того первое время по смерти Борхардта онъ принималъ вмѣстѣ съ Кронекеромъ участіе въ редактированіи журнала Креля.

Прилагаемый при семъ портретъ Вейерштрасса представляетъ увеличенную фотографомъ А. Федецкимъ въ Харьковѣ копію съ фотографической карточки, пріобрѣтенной мною въ Берлинѣ зимою 1884 г. и очень похожей на Вейерштрасса въ то время; когда же именно снята эта фотографія мнѣ осталось неизвѣстнымъ.

М. Т.

29 Марта 1897 г.
