О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

В. А. Стеклова.

1.

1. Вообразимъ нѣкоторую область (D) пространства, ограниченную замкнутой поверхностью (S).

Можно показать, что для каждой данной области (D), по крайней мѣрѣ въ томъ случаѣ, когда поверхность (S) конвексна и имѣетъ опредѣленную касательную плоскость и конечную кривизну въ каждой точкѣ, существуетъ безчисленное множество различныхъ между собою положительныхъ чиселъ k, каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная, конечная и непрерывная, вмѣстѣ съ ея производными, функція U координатъ x, y, z, удовлетворяющая условіямъ

$$\Delta U + kU = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} + hU = 0 \qquad \text{на поверхности } (S), \tag{2}$$

$$\int U^2 d\tau = 1. \tag{3}$$

Въ этихъ формулахъ употреблены слѣдующія обозначенія: Δ означаетъ знакъ операціи вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

n есть направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S), h есть положительная постоянная, $d\tau$ есть элементъ объема области (D), на которую распространяется интегралъ лѣвой части равенства (3).

Нѣкоторыя данныя для доказательства существованія функцій U читатель можетъ найти въ мемуарѣ H. Poincaré: „Sur les équations de la Physique Mathématique“ и въ моей статьѣ: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“, напечатанной въ Математическомъ Сборникѣ за 1897 годъ.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я остановлюсь главнымъ образомъ на двухъ предѣльныхъ случаяхъ, когда

$$h = 0\,, \qquad \text{или} \qquad h = \infty.$$

Въ первомъ случаѣ условіе (2) приводится къ виду

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,,$$

во второмъ

$$U = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

2. Послѣдній случай подробно изслѣдованъ H. Poincaré въ вышеупомянутомъ мемуарѣ.

H. Poincaré доказалъ, что *для всякой области* (D), ограниченной *какой угодно замкнутой поверхностью*, существуетъ безчисленное множество положительныхъ чиселъ

$$k_1\,,\ k_2\,, \ldots ,k_s\,, \ldots$$

и имъ соотвѣтствующихъ функцій

$$U_1\,,\ U_2\,, \ldots ,\ U_s\,, \ldots\,,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\Delta U_s + k_s U_s = 0 \qquad \text{внутри } (D)\,, \tag{4}$$

$$U_s = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,, \tag{5}$$

$$\int U_s^2 d\tau = 1\,. \tag{6}$$

$$(s = 1,\ 2,\ 3, \ldots \infty)$$

Функціи U_s H. Poincaré называетъ *гармоническими функціями*, а имъ соотвѣтствующія числа k_s *характеристическими числами* этихъ функцій для данной области.

Мы удержимъ то же названіе для чиселъ k_s, а функціи U_s будемъ называть *гармоническими функціями перваго рода*.

Числа k_s неопредѣленно возрастаютъ съ возрастаніемъ значка s и при достаточно большомъ s

$$k_s > as^{\frac{2}{3}}, \tag{7}$$

гдѣ a есть конечное положительное число, независящее отъ числа s.

Слѣдовательно,

$$\lim_{s=\infty} k_s = \infty.$$

Функціи U_s удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$\int U_s U_r d\tau = 0 \tag{8}$$

при r и s, не равныхъ между собою.

Назовемъ черезъ G извѣстную функцію Грина, вполнѣ опредѣляемую слѣдующими условіями:

1. G есть функція двухъ системъ координатъ

$$x, y, z \quad \text{и} \quad \xi, \eta, \zeta,$$

конечная и непрерывная во всѣхъ точкахъ области (D) за исключеніемъ точки

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

гдѣ G обращается въ ∞.

2. Разность

$$G - \frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остается конечной при $r = 0$.

3. Внутри области (D) функція G удовлетворяетъ уравненію Лапласа

$$\Delta G = 0.$$

4. На поверхности (S) G удовлетворяетъ условію

$$G = 0.$$

Каждую изъ функцій U_s можно представить подъ видомъ

$$U_s = k_s \int G U_s' d\tau', \tag{9}$$

гдѣ U_s' представляетъ выраженіе функціи U_s послѣ замѣны перемѣнныхъ x, y, z соотвѣтственно черезъ ξ, η, ζ, а $d\tau'$ есть элементъ объема области (D), на которую распространяется интегралъ правой части этого равенства, при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η, ζ.

Назовемъ черезъ l наибольшее изъ разстояній между двумя точками области (D).

Какъ извѣстно,

$$\int G^2 d\tau' < \frac{l}{4\pi} = Q.$$

Если φ и ψ суть какія либо функціи координатъ, то

$$\left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2 < \int \varphi^2 d\tau \int \psi^2 d\tau.$$

Это неравенство называютъ обыкновенно неравенствомъ Shwarz'a.

Но для случая одной перемѣнной оно доказано В. Я. Буняковскимъ еще въ 1859 г. *).

Пользуясь этимъ неравенствомъ, получаемъ [равенство (9)]

$$|U_s| < k_s Q, \tag{10}$$

ибо по условію

$$\int U_s^2 d\tau = 1.$$

Неравенствомъ (10) намъ придется пользоваться впослѣдствіи.

3. Разсмотримъ второй случай, когда $h = 0$.

Въ моемъ сочиненіи „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики" я показалъ, что для всякой области, ограниченной конвексной поверхностью, уклоненіе которой отъ сферы не превосходитъ нѣкотораго предѣла, существуетъ безчисленное множество положительныхъ, неравныхъ между собою чиселъ

$$\lambda_1,\quad \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots$$

и имъ соотвѣтствующихъ функцій

$$V_1,\quad V_2, \ldots, V_s, \ldots,$$

---

*) См. ст. проф. К. Андреева: „Нѣкоторыя обобщенія въ вопросѣ о разложеніи опредѣленнаго интеграла по формулѣ, предложенной П. Л. Чебышевымъ". Сообщ. Харьк. Мат. Общ., 1883 г.

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\Delta V_s + \lambda_s V_s = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{11}$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S), \tag{12}$$

$$\int V_s^2 d\tau = 1. \tag{13}$$

$$(s = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

Функціи V_s мы будемъ называть *гармоническими функціями второго рода*, а имъ соотвѣтствующія числа λ_s *характеристическими числами* этихъ функцій для данной области (D).

Гармоническія функціи второго рода существуютъ по всей вѣроятности для любой, по крайней мѣрѣ, конвексной, поверхности, но мы не имѣемъ строгаго доказательства этого общаго предположенія, хотя для нѣкоторыхъ простѣйшихъ случаевъ: цилиндра, эллипсоида онѣ могутъ быть построены при помощи функцій Бесселя и Ляме.

Числа λ_s (также какъ и въ предыдущемъ случаѣ k_s) неопредѣленно возрастаютъ съ безпредѣльнымъ возрастаніемъ числа s и при s достаточно большомъ

$$\lambda_s > b s^{\frac{2}{3}}, \tag{14}$$

гдѣ b есть конечная положительная постоянная, независящая отъ числа s

Такимъ образомъ

$$\lim_{s=\infty} \lambda_s = \infty.$$

Функціи V_s удовлетворяютъ условіямъ

$$\int V_s V_r d\tau = 0$$

при всякихъ r и s, не равныхъ между собою.

Въ вышеупомянутомъ соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ etc." я доказалъ существованіе функціи J, опредѣляемой слѣдующими условіями:

1. J есть функція двухъ системъ координатъ

$$x, y, z \quad \text{и} \quad \xi, \eta, \zeta,$$

конечная и непрерывная во всей области (D) за исключеніемъ точки

$$x = \xi, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta,$$

гдѣ J обращается въ ∞.

2. Разность

$$J - \frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остается конечной при $r=0$.

3. Внутри области (D) функція J удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta J = \frac{1}{D},$$

гдѣ D есть величина объема области (D).

4. На поверхности (S) J удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial J}{\partial n} = 0.$$

5. Интегралъ отъ функціи J, распространенный на всю область (D), равенъ нулю, т. е.

$$\int J d\tau = 0.$$

Функція J симметрична относительно перемѣнныхъ x, y, z и ξ, η, ζ и

$$\int J^2 d\tau < Q, \tag{15}$$

гдѣ Q есть положительная постоянная, зависящая только отъ размѣровъ области (D).

Неравенство (15) справедливо для любой точки ξ, η, ζ, лежащей *внутри* области (D).

Пользуясь функціей J, мы можемъ представить каждую изъ функцій V_s подъ видомъ

$$V_s = \lambda_s \int J V'_s d\tau'.$$

Отсюда, на основаніи (15), заключаемъ, что для любой точки внутри (D)

$$|V_s| < \lambda_s Q. \tag{16}$$

4. Въ настоящемъ изслѣдованіи мы займемся вопросомъ о разложеніи данной функціи f въ ряды по гармоническимъ функціямъ перваго и второго рода.

Начнемъ съ гармоническихъ функцій перваго рода U_s.

Пусть f есть заданная функція координатъ.

Положимъ

$$A_s = \int f\, U_s\, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и составимъ рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s\, U_s.$$

Въ третьей части вышеупомянутаго мемуара: „Sur les équations etc.“ H. Poincaré высказываетъ слѣдующую теорему:

Рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s\, U_s$$

представляетъ разложеніе функціи f по функціямъ U_s всякій разъ, когда этотъ рядъ сходится, хотя бы и не абсолютно и не равномѣрно.

Доказательство этой теоремы весьма сложно и искусственно.

Сверхъ того, какъ мы сейчасъ увидимъ, оно и не строго.

Въ первой части не разъ упоминавшагося мемуара: „Sur les équations etc.“ H. Poincaré доказываетъ слѣдующую теорему:

Существуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная функція v координатъ, удовлетворяющая условіямъ

$$\Delta v + kv + f = 0 \quad \text{внутри } (D), \tag{17}$$

$$v = 0 \quad \text{на поверхности } (S), \tag{18}$$

гдѣ f есть заданная функція координатъ, *конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими производными перваго порядка* внутри области (D), а k есть нѣкоторая постоянная.

Функція v представляется въ видѣ абсолютно и равномѣрно сходящагося ряда

$$v_0 + kv_1 + k^2 v_2 + \cdots + k^n v_n + \cdots, \tag{17_1}$$

гдѣ $v_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ суть функціи координатъ, опредѣляемыя равенствами

$$v_0 = \int G f' d\tau', \qquad v_n = \int G v'_{n-1} d\tau'.$$

Рядъ (17_1) сходится для всѣхъ значеній k, пока

$$|k| < k_1\,,$$

гдѣ k_1 есть нѣкоторое опредѣленное положительное число.

Вообще же, интегралъ уравненія (17) при условіи (18), разсматриваемый какъ функція параметра k, есть мероморфная функція k съ простыми полюсами, которыми служатъ характеристическія числа $k_s\,(s = 1\,,\ 2\,, \ldots)$.

Доказательство вышеупомянутой теоремы о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ можно раздѣлить на двѣ части.

Въ первой части H. Poincaré старается доказать, что

$$\lim_{k=-\infty} vk = -f\,,$$

если

$$k = -\alpha^2\,, \qquad \alpha = \beta + i\gamma \text{ *)}, \qquad \beta > 0\,.$$

Для этого онъ представляетъ функцію v въ видѣ

$$v = \int G f'\, d\tau'\,, \tag{19}$$

гдѣ подъ G разумѣетъ обобщенную функцію Грина, удовлетворяющую условіямъ 1), 2) и 4) §ª 2ᵒᵍᵒ, а вмѣсто условія 4) слѣдующему

$$\Delta G + kG = 0 \qquad \text{внутри } (D).$$

Но существованія функціи G H. Poincaré не доказываетъ, ограничившись замѣчаніемъ, что это можетъ быть доказано соображеніями, аналогичными тѣмъ, при помощи которыхъ доказывается существованіе функціи v.

Можно, дѣйствительно, показать, что вопросъ объ опредѣленіи функціи v, удовлетворяющей условіямъ (17) и (18), и задача объ опредѣленіи функціи w при помощи условій

$$\Delta w + kw = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{20}$$

$$w = f \qquad \text{на поверхности } (S) \tag{21}$$

эквивалентны, *если f есть также заданная функція координатъ точекъ поверхности (S), независящая отъ параметра k.*

Полагая

$$G = G_1 + \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}\,,$$

---

*) Черезъ i обозначенъ $\sqrt{-1}$.

H. Poincaré сводитъ опредѣленіе функціи G къ опредѣленію непрерывной внутри (D) функціи G_1 при помощи условій

$$\Delta G_1 + kG_1 = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$G_1 = -\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Условія эти по внѣшнему виду того же типа, что и (20), и (21), но въ данномъ случаѣ роль f играетъ функція

$$\frac{-e^{-\alpha r}}{4\pi r},$$

зависящая отъ параметра k.

Къ разсматриваемому случаю нельзя непосредственно примѣнять сужденія, относящіяся къ доказательству существованія функціи w [условія (20) и (21)].

Необходимы дополнительныя изысканія, которыхъ нѣтъ въ мемуарѣ H. Poincaré и безъ которыхъ рискованно утверждать, что G_1 есть мероморфная функція k съ простыми полюсами, которыми служатъ числа k_s.

Поэтому и исходное равенство оказывается недоказаннымъ съ надлежащей строгостью.

Но допустимъ, что оно справедливо, и что всѣ дальнѣйшія соображенія разсматриваемой части доказательства интересующей насъ теоремы вполнѣ строго приводятъ къ выводу, что

$$\lim_{k=\infty} vk = -f,$$

если

$$k = -\alpha^2, \qquad \alpha = \beta + \gamma i, \qquad \beta > 0.$$

Переходимъ ко второй части доказательства.

Здѣсь H. Poincaré доказываетъ прежде всего, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)} \quad {}^{*)}$$

сходится, если f обращается въ нуль на поверхности (S), рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s}$$

*) Въ этой формулѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau \qquad (s=1,2,\dots)$$

сходится, если

$$f = 0, \qquad \Delta f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Замѣтивъ, что интегральные вычеты мероморфной (относительно k) функціи v суть

$$-A_s U_s, \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и пользуясь извѣстной теоремой Миттагъ-Лефлера, H. Poincaré полагаетъ

$$v = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s k}{k_s(k - k_s)} + E(k) \tag{22}$$

въ первомъ случаѣ [$f = 0$ на поверх. (S)] и

$$v = -\sum_{s-1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k - k_s} + E(k) \tag{23}$$

во второмъ [$f = 0$, $\Delta f = 0$ на поверхн. (S)], гдѣ $E(k)$ есть голоморфная функція k, зависящая также и отъ координатъ x, y, z.

Замѣтивъ это, онъ останавливается сначала на второмъ случаѣ, когда

$$f = 0, \qquad \Delta f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

и старается опредѣлить функцію $E(k)$.

Положимъ

$$f_p = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_p U_p$$

и назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, опредѣляемую условіями

$$\Delta v_p + k v_p + f_p = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$v_p = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

По предыдущему такая функція существуетъ, *если f_p есть непрерывная функція координатъ вмѣстѣ со своими первыми производными*.

Послѣднее обстоятельство несомнѣнно имѣетъ мѣсто при всякомъ данномъ p, конечномъ и опредѣленномъ.

Не трудно убѣдиться, что функцію v можно представить подъ видомъ

$$v = v_p - \sum_{s=1}^{p} \frac{A_s U_s}{k - k_s}.$$

Это равенство справедливо при всякомъ данномъ p.

Отсюда H. Poincaré поспѣшно заключаетъ, что

$$v = \lim_{p=\infty} \left(v_p - \sum_1^p \frac{A_s U_s}{k - k_s} \right).$$

Во первыхъ, если $\lim_{p=\infty} f_p$ или, что тоже, рядъ

$$\sum_1^\infty A_s U_s$$

есть рядъ просто сходящійся, то нельзя утверждать, что v_p имѣетъ предѣлъ, а если и можно считать несомнѣннымъ, что v_p стремится къ опредѣленному предѣлу w, то нельзя утверждать, что эта предѣльная функція удовлетворяетъ уравненію

$$\Delta w + kw + \lim_{p=\infty} f_p = 0 \quad \text{внутри } (D) \tag{24}$$

при условіи

$$w = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Существованіе функціи v, удовлетворяющей этимъ условіямъ, можетъ быть доказано только въ томъ случаѣ, если f [см. услов. (17) и (18)] есть непрерывная функція координатъ вмѣстѣ со своими первыми производными.

Если же рядъ

$$\sum_{s=1}^\infty A_s U_s$$

сходится неравномѣрно, то

$$\lim f_p = f - \sum_{s=1}^\infty A_s U_s$$

можетъ дать и прерывную функцію и неимѣющую производныхъ, а потому и

$$w = \lim v_p$$

можетъ дать въ предѣлѣ (если только такой существуетъ) функцію w, не удовлетворяющую уравненію (24).

Далѣе, при всякомъ конечномъ p

$$\Delta \sum_{1}^{p} \frac{A_s U_s}{k - k_s} = - \sum_{1}^{p} \frac{k_s A_s U_s}{k - k_s}.$$

Но отсюда не слѣдуетъ, что и

$$\Delta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k - k_s} = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_s A_s U_s}{k - k_s}.$$

А въ такомъ случаѣ нельзя утверждать, что

$$v = \lim \left(v_p - \sum_{1}^{p} \frac{A_s U_s}{k - k_s} \right) = w - \sum_{1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k - k_s}.$$

Перейдя къ предѣлу, мы можемъ дѣйствительно получить функцію v', имѣющую тѣ же простые полюсы, что и v, и тѣ же интегральные вычеты, но не удовлетворяющую уравненію (17); быть можетъ даже не имѣющую производныхъ и могущую отличаться отъ v на какую угодно голоморфную по k функцію $E_1(k)$.

Слѣдовательно, мы не имѣемъ вообще права полагать

$$E(k) = \lim v_p = w \tag{25}$$

за исключеніемъ того случая, когда (какъ это прямо слѣдуетъ изъ предыдущихъ соображеній)

$$\lim f_p$$

есть функція координатъ, конечная и непрерывная вмѣстѣ съ ея первыми производными.

Это же обстоятельство можетъ считаться несомнѣннымъ только при допущеніи, что ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial x}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial y}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \tag{26}$$

сходятся равномѣрно.

Только при этихъ допущеніяхъ справедливо и равенство (25) и слѣдующее изъ него заключеніе, что

$$v = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k - k_s}. \tag{27}$$

По изслѣдованіямъ H. Poincaré ряды (26) сходятся абсолютно и равномѣрно, если

$$f=0\,, \quad \Delta f=0\,, \quad \Delta_2 f=0\,, \quad \Delta_3 f=0 \quad \text{на поверхности } (S)\,, \tag{28}$$

гдѣ Δ_2 и Δ_3 обозначаютъ дважды и трижды повторенную операцію Δ.

Поэтому для доказательства справедливости равенства (27) недостаточно двухъ условій

$$f=0\,, \qquad \Delta f=0\,,$$

какъ это несправедливо полагаетъ H. Poincaré.

Коль скоро равенство (27) доказано, то, пользуясь соотвѣтствующимъ образомъ предложеніемъ первой части доказательства *), можно убѣдиться, какъ показываетъ H. Poincaré, что

$$\lim_{p=\infty}\left[f-\sum_{1}^{p} A_s U_s\right]=0\,,$$

или

$$f=\sum_{1}^{\infty} A_s U_s\,,$$

т. е. функція f разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ перваго ряда.

Далѣе H. Poincaré разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ функція

$$v_0=\int G f' d\tau'\,,$$

гдѣ G есть обыкновенная функція Грина, удовлетворяетъ условіямъ

$$v_0=0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,,$$

$$\Delta v_0=f \qquad \text{внутри } (D)\,,$$

то v_0 разлагается въ рядъ по функціямъ U_s, если f удовлетворяетъ только одному условію

$$f=0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,, \tag{28_1}$$

---

*) Именно

$$\lim_{k=-\infty} vk=-f\,,$$

если

$$k=-\alpha^2\,, \qquad \alpha=\beta+i\gamma\,, \qquad \beta>0\,.$$

т. е.

$$v_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s}. \tag{29}$$

Замѣтимъ, что въ силу вышесказаннаго такое утвержденіе не основательно.

Равенство (29) можно считать несомнѣннымъ лишь въ томъ случаѣ, если не только v_0 и Δv_0 равны нулю на поверхности (S), но и

$$\Delta_2 v_0 = 0, \quad \Delta_3 v_0 = 0 \quad \text{на поверхности } (S)$$

а это вообще несправедливо, если Δf и $\Delta_2 f$ не обращаются въ нуль на той же поверхности.

Продолжаемъ далѣе разсужденія H. Poincaré.

Если f обращается въ нуль на поверхности (S), то

$$v = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)} + v_0. \tag{30}$$

Выводъ этого равенства точно также не строгъ, какъ и всѣхъ предшествовавшихъ.

Но допустимъ, что справедливость равенства (30) можетъ быть доказана.

Въ такомъ случаѣ, говоритъ H. Poincaré,

$$v = -\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{A_s U_s k}{k_s(k-k_s)} + \frac{A_s U_s}{k_s}\right) = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k-k_s}, \tag{31}$$

ибо f удовлетворяетъ равенству (28_1).

Мы только что показали, что одного условія (28_1) недостаточно для доказательства справедливости равенства (29).

Слѣдовательно, если даже признать справедливымъ равенство (30), все же равенство (31) будетъ неосновательно.

Будутъ неосновательны и всѣ слѣдующіе изъ него выводы.

Изъ равенства (31), имѣющаго тотъ же видъ, что и (27), H. Poincaré прямо заключаетъ, что

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

коль скоро f подчинено одному условію (28_1) и рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s$$

сходится, хотя бы и не равномѣрно, т. е. получаетъ теорему, высказанную нами въ началѣ §-а, которая такимъ образомъ и не можетъ считаться доказанной.

На основаніи сказаннаго мы приходимъ къ заключенію, что изъ всѣхъ сложныхъ и не строгихъ соображеній H. Poincaré можно вывести только слѣдующее предложеніе:

Функція f разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ U_s всякій разъ, когда ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial x}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial y}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial z}$$

сходятся равномѣрно, хотя бы и не абсолютно.

И эта теорема будетъ строго доказанной лишь въ томъ случаѣ, если считать строго доказаннымъ равенство (19), или, что тоже, существованіе функціи G_1, имѣющей тѣ же простые полюсы (относительно k), что и функція v. Но, повторяемъ, строгаго доказательства этого предложенія не имѣется въ мемуарѣ H. Poincaré.

Въ деталяхъ доказательства H. Poincaré встрѣчаются и другія нестрогія заключенія, на одно изъ которыхъ считаю нелишнимъ обратить вниманіе.

Если f и Δf обращаются въ нуль на поверхности (S), то ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s^2} \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s}$$

сходятся абсолютно и равномѣрно.

Такъ какъ

$$\Delta \frac{A_s U_s}{k_s} = -\frac{A_s U_s}{k_s},$$

то, какъ утверждаетъ H. Poincaré,

$$\Delta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s U_s}{k_s^2} = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s U_s}{k_s}. \tag{32}$$

Это равенство, вообще говоря, несправедливо.

Необходимо еще, чтобы ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{k_s} \frac{\partial U_s}{dx}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{k_s} \frac{\partial U_s}{dy}, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{k_s} \frac{\partial U_s}{dz} \tag{33}$$

сходились равномѣрно.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ два ряда

$$s = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$\sigma = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots,$$

гдѣ u_s, $v_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$ суть функціи координатъ, причемъ

$$v_s = \Delta u_s. \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Допустимъ, что

$$u_s = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

и что каждая изъ функцій $v_s (s = 0, 1, \ldots)$ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными.

Въ такомъ случаѣ

$$u_s = -\int G v_s' d\tau'. \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Пусть ряды s и σ сходятся равномѣрно.

Помноживъ обѣ части второго ряда на $G d\tau$ и интегрируя по всему объему области (D), получимъ

$$\int G \sigma d\tau = -u_0 - u_1 - \ldots - u_n \ldots = -s.$$

Отсюда

$$\Delta s = \sigma, \tag{34}$$

если только σ есть непрерывная функція внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными.

Если же эти условія не соблюдены, то равенство (34) можетъ и не быть справедливымъ.

Такъ какъ H. Poincaré не доказываетъ равномѣрной сходимости рядовъ (33), то равенство (32) также нельзя считать доказаннымъ.

5. Желая по возможности упростить доказательство теоремы H. Poincaré о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ, я предложилъ другой пріемъ доказательства, болѣе простой, въ статьѣ: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ", напечатанной въ Сообщ. Харьк. Мат. Общ. за 1896 годъ.

Я старался главнымъ образомъ избѣжать употребленія обобщенной функціи Грина G, существованіе которой, какъ говорилось выше, нельзя считать строго доказаннымъ.

Мнѣ удалось достигнуть этого и вмѣстѣ съ тѣмъ значительно упростить доказательство.

Но во время составленія работы, я не замѣтилъ нестрогости второй части доказательства H. Poincaré и точно также сдѣлалъ молчаливо нѣкоторыя допущенія, которыя счелъ затѣмъ доказанными.

Не излагая подробно предложеннаго мною анализа, я обращу вниманіе только на его заключительную часть.

Назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, удовлетворяющую условіямъ

$$\Delta v_p + k v_p + R_p = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$v_p = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

гдѣ

$$R_p = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_p U_p.$$

Для значеній $|k|$, меньшихъ k_1, функція v_p представляется подъ видомъ ряда

$$v_{p0} + k v_{p1} + \ldots + k^n v_{pn} + \ldots,$$

гдѣ

$$v_{p0} = \int G R'_p d\tau', \qquad v_{pn} = \int G v'_{p,n-1} d\tau'.$$

Увеличивая p до безконечности и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim_{p=\infty} v_{ps} = 0. \qquad (s = 2, 3, \ldots)$$

Положимъ

$$\lim v_p = w, \qquad \lim v_{p0} = w_0, \qquad \lim v_{p1} = w_1.$$

Функція v_p въ предѣлѣ обращается, слѣдовательно, въ

$$w = w_0 + k w_1. \tag{35}$$

Положивъ

$$\lim R_p = R,$$

я утверждаю, что

$$w_0 = \int G R' d\tau', \qquad w_1 = \int G w_0' d\tau', \tag{36}$$

или, что тоже,

$$\lim \int G R_p' d\tau' = \int G \lim R_p' d\tau'.$$

Это равенство, вообще говоря, справедливо только при допущеніи, что R есть непрерывная функція координатъ, для чего необходимо предположить, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s \tag{37}$$

сходится равномѣрно.

Далѣе я разсуждаю слѣдующимъ образомъ.

Такъ какъ функція w должна удовлетворять уравненію

$$\Delta w + k w + R = 0,$$

и такъ какъ w_0 и w_1 опредѣляются формулами (36), то, подставивъ выраженіе w (35) въ послѣднее уравненіе, заключаемъ, что

$$w_1 = 0, \qquad w_0 = 0,$$

т. е.

$$w = 0 \qquad \text{и} \qquad R = 0.$$

Слѣдовательно,

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s.$$

Это заключеніе справедливо лишь въ томъ случаѣ, если

$$\Delta w_0 + R = 0, \qquad \Delta w_1 + w_0 = 0.$$

Первое же изъ этихъ равенствъ требуетъ, чтобы функція R была конечна и непрерывна вмѣстѣ съ ея первыми производными, а для этого не только рядъ (37), но и его первыя производныя по координатамъ должны быть рядами равномѣрно сходящимися.

Такимъ образомъ и нашъ анилизъ приводитъ, строго говоря, къ той же теоремѣ, что и анализъ H. Poincaré, но за то онъ несравненно проще и строже послѣдняго.

Пріемъ, предложенный мною, имѣетъ еще и то преимущество, что онъ легко распространяется и на случай гармоническихъ функцій второго рода, какъ это показано мною въ соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Матем. Физики".

Онъ можетъ быть примѣненъ и къ самому общему случаю функцій, удовлетворяющихъ условіямъ (1), (2) и (3) перваго §-а.

Метода же H. Poincaré относится исключительно къ случаю гармоническихъ функцій перваго рода и во всякомъ случаѣ не распространяется на гармоническія функціи второго рода.

Сопоставляя все сказанное, мы можемъ, такимъ образомъ, считать строго доказанной въ настоящее время слѣдующую теорему:

Рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s, \tag{38}$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau, \qquad (s=1,2,\ldots)$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда этотъ рядъ и ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial x}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial y}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \tag{39}$$

сходятся равномѣрно, хотя бы и не абсолютно.

Что же касается условій сходимости этихъ рядовъ, то мы можемъ утверждать лишь слѣдующее:

Ряды (38) и (39) сходятся абсолютно и равномѣрно, если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ восьми порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ

$$f=0, \qquad \Delta f=0, \qquad \Delta_2 f=0, \qquad \Delta_3 f=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Всякая функція f, удовлетворяющая этимъ условіямъ, разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ перваго рода.

Подобныя же теоремы могутъ быть строго доказаны и для случая гармоническихъ функцій второго рода, а именно:

Рядъ

$$A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s, \tag{40}$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau\,, \qquad A_s = \int f V_s d\tau\,, ^{*)} \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ второго рода всякій разъ, когда этотъ рядъ и ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial x}\,, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial y}\,, \quad \sum_{s=1}^{\infty} A_s \frac{\partial V_s}{\partial z} \qquad \textbf{(41)}$$

сходятся равномѣрно, хотя бы и не абсолютно.

Ряды (40) и (41) сходятся абсолютно и равномѣрно, если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ восьми порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial \Delta_2 f}{\partial n} = 0\,, \quad \frac{\partial \Delta_3 f}{\partial n} = 0 \qquad \textit{на поверхности } (S).$$

Всякая функція f, удовлетворяющая этимъ условіямъ, разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ второго рода.

Доказательство этихъ теоремъ читатель можетъ найти въ III-вей главѣ моего соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Матем. Физики“.

II.

1. Пусть f есть заданная функція координатъ области (D).

Будемъ вычислять функцію f по функціямъ U_s, полагая

$$f = B_1 U_1 + B_2 U_2 + \ldots + B_p U_p + R_p\,,$$

гдѣ $B_s (s=1\,,\,2\,,\ldots,p)$ суть нѣкоторыя постоянныя, R_p—функція координатъ.

Послѣдняя зависитъ и отъ выбора коэффиціентовъ B_s, и отъ ихъ числа p.

Выберемъ эти коэффиціенты подъ условіемъ, чтобы интегралъ

$$\int R_p^2 d\tau$$

имѣлъ наименьшее значеніе.

---

*) Напомнимъ, D есть объемъ области (D), V_s суть гармоническія функціи второго рода (см. § 1).

Удовлетворяя этому условію, получимъ

$$B_s = \int f U_s d\tau. \qquad (s=1, 2, \ldots)$$

Обозначимъ такимъ образомъ опредѣленные коэффиціенты B_s черезъ A_s, а подъ R_p будемъ теперь разумѣть значеніе этой функціи при $B_s = A_s$.

Положимъ

$$W_0^{(p)} = \int R_p^2 d\tau.$$

Такъ какъ функціи U_s удовлетворяютъ условіямъ (8) (см. часть I, § 2-ой), то

$$W_0^{(p)} = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \ldots - A_p^2. \tag{1}$$

Отсюда

$$W_0^{(p+1)} = W_0^{(p)} - A_{p+1}^2.$$

Слѣдовательно, $W_0^{(p)}$ убываетъ съ возрастаніемъ значка p, и

$$\lim_{p=\infty} W_0^{(p)}$$

есть конечная положительная постоянная, либо нуль.

Равенство (1) справедливо при всякомъ p.

Переходя къ предѣлу, получаемъ при $p=\infty$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 = \int f^2 d\tau - \lim_{p=\infty} W_0^{(p)}.$$

Это равенство приводитъ къ слѣдующей леммѣ:

Лемма I. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2,$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau, \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, интегрируемая въ области (D).

2. Предположимъ, что функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными и обращается въ нуль на поверхности (S).

Введемъ слѣдующія обозначенія

$$V_0^{(p)} = \int \left[\left(\frac{\partial R_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau\,,$$

$$M = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau\,,$$

$$\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau = (\varphi\,,\ \psi)\,,$$

гдѣ φ и ψ какія либо функціи координатъ, которыя могутъ быть и равны между собою.

Изъ равенства

$$R_p = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \dots - A_p U_p$$

выводимъ слѣдующее

$$V_0^{(p)} = M - 2\sum_{s=1}^{p} A_s(f,\ U_s) + \sum_{s=1}^{p} A_s^2(U_s,\ U_s) + 2\sum_{r,\,s=1,2,\dots,\,p} A_r A_s(U_r\,,\ U_s)\,.$$

Такъ какъ по условію f обращается въ нуль на поверхности (S), то по теоремѣ Грина

$$(f,\ U_s) = -\int f \varDelta U_s d\tau = k_s \int f U_s d\tau = k_s A_s\,.$$

Далѣе,

$$(U_s,\ U_s) = -\int U_s \varDelta U_s d\tau = k_s\,,$$

ибо функція U_s удовлетворяетъ условіямъ (5) и (6) §-а 2-ого 1-ой части.

Наконецъ,

$$(U_r\,,\ U_s) = 0 \qquad (r \gtrless s)$$

въ силу равенства (8) 1-ой части.

Слѣдовательно,

$$V_0^{(p)} = M - \sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2\,.$$

Отсюда

$$V_0^{(p+1)} = V_0^{(p)} - k_{p+1} A_{p+1}^2 .$$

Интегралъ $V_0^{(p)}$ убываетъ съ возрастаніемъ значка p, и

$$\lim_{p=\infty} V_0^{(p)}$$

есть конечная положительная постоянная, либо нуль.

Изъ равенства

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2 = M - \lim_{p=\infty} V_0^{(p)}$$

выводимъ слѣдующую лемму:

Лемма II. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s \tag{2}$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными и обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Я полагаю, что ограничивающія условія, которымъ мы подчинили функцію f, не существенны.

Рядъ (2) будетъ сходящимся, коль скоро функція f конечна и интегрируема внутри области (D) и не подчинена никакимъ другимъ условіямъ *). Впрочемъ, строго доказать это предложеніе мнѣ не удалось.

Совершенно такимъ же путемъ мы докажемъ подобныя же леммы и для случая гармоническихъ функцій второго рода V_s, а именно:

Лемма III. *Рядъ*

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s^2 ,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau , \qquad A_s = \int f V_s d\tau , \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, конечная и интегрируемая въ области (D).

---

*) Конечно, я разумѣю при этомъ функцію вполнѣ опредѣленную.

Лемма IV. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2,$$

гдѣ

$$A_s = \int f V_s d\tau, \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція f, конечная и непрерывная внутри области (D).

3. Само собой разумѣется, подобныя леммы справедливы и для случая двухъ и одной перемѣнной.

Въ послѣднемъ случаѣ можно получить результаты въ извѣстномъ смыслѣ болѣе общаго характера.

Пусть a и b суть положительныя числа, удовлетворяющія условію

$$b > a.$$

Допустимъ, что перемѣнная x измѣняется въ интервалѣ отъ a до b. Этотъ интервалъ будемъ обозначать черезъ

$$(a, b).$$

Назовемъ черезъ p функцію x, положительную и не обращающуюся въ нуль въ интервалѣ (a, b) (включая и предѣлы a и b), черезъ q также положительную функцію x въ разсматриваемомъ интервалѣ.

Послѣдняя можетъ равняться нулю.

Извѣстно, что для каждаго интервала (a, b) существуетъ безчисленное множество положительныхъ чиселъ

$$k_1, k_2, \ldots, k_n \ldots$$

и имъ соотвѣтствующихъ функцій

$$U_1, \quad U_2, \ldots, U_n, \ldots,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\frac{d^2 U_s}{dx^2} + (k_s p - q)\, U_s = 0 \quad \text{внутри } (a, b), \tag{3}$$

$$\frac{dU_s}{dx} + HU_s = 0 \quad \text{при } x = b, \tag{4}$$

$$(s=1, 2, 3, \ldots)$$

$$\frac{dU_s}{dx} - hU_s = 0 \quad \text{при } x = a, \tag{5}$$

$$\int_a^b p U_s^2 dx = 1 . \tag{6}$$

Въ формулахъ (4) и (5) H и h суть положительныя постоянныя.

Въ такомъ именно видѣ эта теорема доказана мною въ статьѣ: „Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня“, напечатанной въ Сообщ. Харьк. Матем. Общ. за 1896 г. *).

Функціи U_s удовлетворяютъ условіямъ

$$\int_a^b p U_r U_s dx = 0 \tag{7}$$

при всякихъ r и s, не равныхъ между собою.

Въ только что упомянутой статьѣ я доказалъ, что числа k_s удовлетворяютъ условіямъ

$$k_s > M(s-1)^2 , \qquad (s=1,2,3,\ldots)$$

гдѣ M есть конечная положительная постоянная, а функціи U_s условіямъ

$$|U_s| < k_s N , \tag{8}$$

гдѣ N есть также конечная положительная постоянная.

Положимъ

$$A_s = \int_a^b p \cdot \varphi \cdot U_s dx , \tag{9}$$

гдѣ φ есть какая либо заданная функція x.

Допустимъ, что φ имѣетъ первую производную въ интервалѣ (a, b). Положимъ

$$R_p = \varphi - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \ldots - A_p U_p$$

и составимъ выраженіе

---

*) Впервые эта теорема доказана, если не ошибаюсь, Liouville'мъ и Sturm'омъ въ 1836 году.

$$T_p = \int_a^b (R_p')^2 dx =$$

$$= \int_a^b [\varphi'(x)]^2 dx - 2\sum_{s=1}^{p} A_s \int_a^b \varphi' U_s' dx + 2 \sum_{r,s=1,2,3,\dots,p} A_s A_s \int_a^b U_r' U_s' dx +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} A_s^2 \int_a^b (U_s')^2 dx, \tag{10}$$

гдѣ, вообще, черезъ F' обозначена первая производная какой либо функціи F.

Черезъ F'' мы будемъ дальше обозначать вторую производную какой либо функціи F.

При помощи интеграціи по частямъ получаемъ

$$\int_a^b \varphi' U_s' dx = \varphi(b) U_s'(b) - \varphi(a) U_s'(a) - \int_a^b \varphi U_s'' dx,$$

или, въ силу условій (3), (4), (5) и (9),

$$\int_a^b \varphi' U_s' dx = -[H\varphi(b) U_s(b) + h\varphi(a) U_s(a)] + k_s A_s - \int_a^b q\varphi U_s dx.$$

Точно также [при помощи (9)] получимъ

$$\int_a^b U_r' U_s' dx = -[HU_r(b) U_s(b) + hU_r(a) U_s(a)] - \int_a^b q U_s U_r dx.$$

Наконецъ,

$$\int_a^b (U_s')^2 dx = -[HU_s^2(b) + hU_s^2(a)] - \int_a^b qU_s^2 dx + k_s,$$

ибо [рав. (6)]

$$\int_a^b p U_s^2 dx = 1.$$

Подставивъ полученные результаты въ выраженіе T_p [рав. (10)], приведемъ его послѣ несложныхъ преобразованій къ слѣдующему виду

$$T_p = H\varphi^2(b) + h\varphi^2(a) + \int_a^b \varphi^2 dx - \sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 - \int_a^b q\left(\varphi - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s\right)^2 dx -$$

$$- H\left[\varphi(b) - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s(b)\right]^2 - h\left[\varphi(a) - \sum_{s=1}^{p} A_s U_s(a)\right]^2.$$

Такъ какъ по условію H и h положительны, функція q также положительна въ интервалѣ (a, b) и

$$T_p > 0$$

при всякомъ p, то мы должны имѣть

$$\sum_{s=1}^{p} k_s A_s^2 < H\varphi^2(b) + h\varphi^2(a) + \int_a^b \varphi^2 dx, \tag{11}$$

каково бы ни было число p.

Равенство (11) приводитъ къ слѣдующей леммѣ:

Лемма V. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2,$$

гдѣ

$$A_s = \int_a^b \varphi p U_s dx,$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своей первой производной въ интервалѣ (a, b).

Послѣднее ограниченіе является простымъ слѣдствіемъ употребленнаго нами способа доказательства и, по всей вѣроятности, не существенно.

Весьма вѣроятно, что и условіе непрерывности функціи $\varphi(x)$ можно отбросить, и лемма V-ая всетаки будетъ справедлива.

Но во всякомъ случаѣ можно считать справедливой слѣдующую лемму:

Лемма VI. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная внутри (a, b).

Подобнымъ же путемъ можно доказать слѣдующую лемму:

Лемма VII. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2$$

есть рядъ всегда сходящійся, какова бы ни была функція $\varphi(x)$, конечная и интегрируемая въ интервалѣ (a, b).

4. Сейчасъ же мы дадимъ важное приложеніе доказанныхъ нами леммъ. H. Poincaré въ соч. „Sur les éqnations etc." показалъ, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau,$$

а $U_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ суть гармоническія функціи перваго рода, сходится абсолютно и равномѣрно, если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ шести порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ

$$f = 0, \qquad \Delta f = 0, \qquad \Delta_2 f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Точно также въ моей работѣ: „О дифференц. уравн. Матем. Физ." доказано, что рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s,$$

гдѣ

$$A_s = \int f V_s d\tau,$$

а $V_s (s = 1, 2, 3, \ldots)$ суть гармоническія функціи второго рода, сходится абсолютно и равномѣрно, если f есть непрерывная функція координатъ внутри (D) со своими производными первыхъ шести порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_2 f}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Объ этихъ теоремахъ я упоминалъ уже въ первой части изслѣдованія.

Пользуясь приведенными выше леммами, мы докажемъ слѣдующую болѣе общую теорему:

Теорема I. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s$$

сходится абсолютно и равномѣрно, если функція f *конечна и непрерывна внутри* (D) *вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяетъ на поверхности* (S) *только двумъ условіямъ*

$$f=0\,, \qquad \Delta f=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

При этихъ условіяхъ имѣютъ мѣсто равенства вида

$$A_s=\int fU_s d\tau=-\frac{1}{k_s}\int f\Delta U_s d\tau=-\frac{1}{k_s}\int U_s\Delta f d\tau=\frac{1}{k_s^2}\int \Delta U_s \Delta f d\tau=$$

$$=\frac{1}{k_s^2}\int U_s\Delta_2 f d\tau\,.$$

Эти равенства легко получаются при помощи теоремы Грина и равенствъ (4) и (5) 1-ой части изслѣдованія.

Положивъ

$$B_s=\int U_s\Delta_2 f d\tau\,,$$

получимъ

$$A_s=\frac{B_s}{k_s^2}.$$

Воспользовавшись неравенствомъ (10) 2-го §-а 1-ой части и послѣднимъ равенствомъ, получимъ

$$|A_s U_s|<\frac{|B_s|}{k_s}.$$

Такъ какъ

$$\left(|B_s|-\frac{1}{k_s}\right)^2>0\,,$$

то

$$\frac{|B_s|}{k_s}<\frac{1}{2}\left(B_s^2+\frac{1}{k_s^2}\right).$$

Модуль каждаго члена ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s \tag{12}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\left(B_s^2+\frac{1}{k_s^2}\right).$$

Послѣднiй же сходится, ибо рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

сходится по леммѣ I-ой, а рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{k_s^2}$$

сходится потому, что числа $k_s (s=1, 2, 3, \ldots)$ удовлетворяютъ неравенствамъ (7) 1-ой части.

Рядъ (12) сходится, слѣдовательно, абсолютно и равномѣрно.

Теорема доказана.

Совершенно такимъ же путемъ убѣдимся при помощи леммы III-ей въ справедливости слѣдующей теоремы:

Теорема II. *Рядъ*

$$A_0+\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s,$$

гдѣ, напомнимъ,

$$A_0=\frac{1}{D}\int f d\tau, \qquad A_s=\int f V_s d\tau, \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

а V_s суть гармоническiя функцiи второго рода, сходится абсолютно и равномѣрно, если функцiя f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ съ ея производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяетъ только двумъ условiямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n}=0, \quad \frac{\partial \Delta f}{\partial n}=0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Останавливаться на доказательствѣ этой теоремы, вполнѣ сходномъ съ доказательствомъ предыдущей, нѣтъ надобности.

5. Особаго вниманія заслуживаетъ случай одной перемѣнной.

Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня приводится въ концѣ концовъ къ разысканію условій разложимости данной функціи φ въ рядъ вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} U_s \int_a^b p\varphi U_s dx\,, \tag{13}$$

гдѣ U_s, p, φ имѣютъ тотъ же смыслъ, что и въ $3^{\text{-тьемъ}}$ $\S^{\text{-ѣ}}$.

Въ вышеупомянутой статьѣ: „Задача объ охлажденіи и т. д.“ я доказалъ, что этотъ рядъ представляетъ разложеніе функціи φ по функціямъ U_s, коль скоро онъ сходится равномѣрно, хотя бы и не абсолютно *).

Задача, слѣдовательно, сводится на изслѣдованіе условій равномѣрной сходимости разсматриваемаго ряда.

Я показалъ, что онъ сходится абсолютно и равномѣрно въ интервалѣ $(a\,,\, b)$, если функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная въ этомъ интервалѣ вмѣстѣ со своими производными первыхъ $4^{\text{-хъ}}$ порядковъ, удовлетворяетъ еще условіямъ.

$$\begin{aligned} &\varphi'(a) - h\varphi(a) = 0\,, \\ &\varphi'(b) + H\varphi(b) = 0\,, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\psi'(a) - h\psi(a) = 0\,, \\ &\psi'(b) + H\psi(b) = 0\,, \end{aligned} \tag{15}$$

гдѣ

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)q - \varphi''(x)}{p} \quad **)\,.$$

Условія (14) не налагаютъ въ сущности никакого ограниченія на функцію $\varphi(x)$, такъ какъ только функціи, удовлетворяющія этимъ условіямъ, и могутъ разлагаться въ рядъ (13) во всемъ интервалѣ $(a\,,\, b)$ (включая и предѣлы).

Условія же (15) вносятъ излишнее ограниченіе, отъ котораго желательно освободиться.

---

*) Пользуюсь кстати случаемъ исправить неправильно формулированную теорему XIV статьи: „Задача объ охлажденіи и т. д.“.

Вмѣсто словъ: „хотя бы и не абсолютно, *и не* равномѣрно“ должно быть: „хотя бы и не абсолютно, *но* равномѣрно“.

**) См. теорему XV „Задача объ охлажденіи и т. д.“; q имѣетъ тотъ же смыслъ, что и въ $\S^{\text{-ѣ}}$ 3-тьемъ.

Этого мы достигнемъ, пользуясь леммой VI.

Допустимъ, что $\varphi(x)$ удовлетворяетъ только условiямъ (14) и остается конечной и непрерывной въ интервалѣ (a, b) вмѣстѣ со своими производными только двухъ первыхъ порядковъ.

Въ такомъ случаѣ, какъ показано въ статьѣ: „Задача объ охлажденiи и т, д." (стрн. 41, 42),

$$A_s = \int_a^b p\varphi U_s dx = \frac{1}{k_s}\int_a^b \psi_1 U_s dx = \frac{B_s}{k_s}, \qquad (s=1, 2, 3, \ldots)$$

гдѣ

$$\psi_1 = q\varphi - \varphi'', \quad B_s = \int_a^b \psi_1 U_s dx.$$

Такъ какъ

$$\left(|B_s| - \frac{1}{k_s}\right)^2 > 0,$$

то

$$\frac{|B_s|}{k_s} < \frac{1}{2}\left(B_s^2 + \frac{1}{k_s^2}\right).$$

Пользуясь этимъ неравенствомъ и (8) §-а 3-тьяго, получаемъ

$$|U_s A_s| < \frac{N}{2} k_s B_s^2 + \frac{1}{2k_s}.$$

Модуль каждаго члена ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s \tag{16}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\left(Nk_s B_s^2 + \frac{1}{k_s}\right).$$

Послѣднiй же сходится.

Въ самомъ дѣлѣ, рядъ

$$\frac{N}{2}\sum_{s=1}^{\infty} k_s B_s^2$$

сходится въ силу леммы VI, а рядъ

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{k_s}$$

сходится потому, что числа $k_s(s=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\dots)$ удовлетворяютъ условіямъ

$$k_s > M(s-1)^2$$

(см. § 3).

Рядъ (16) сходится, слѣдовательно, абсолютно и равномѣрно.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую важную теорему:

Теорема III. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty}A_sU_s,$$

гдѣ

$$A_s=\int_a^b p\varphi U_s dx\,,$$

а $U_s(s=1\,,\ 2\,,\ 3\,,\dots)$ *суть функціи, опредѣляемыя условіями* (3), (4), (5) *и* (6) *§-а 3-тьяго, сходится абсолютно и равномѣрно въ интервалѣ* $(a\,,\ b)$, *если функція* $\varphi(x)$ *конечна и непрерывна въ интервалѣ* $(a\,,\ b)$ *вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяетъ условіямъ*

$$\varphi'(a)-h\varphi(a)=0\,,$$

$$\varphi'(b)+H\varphi(b)=0\,.$$

Сопоставляя эту теорему съ теоремой, высказанной въ началѣ §-а, выводимъ слѣдующую:

Теорема IV. *Всякая функція* $\varphi(x)$, *конечная и непрерывная въ интервалѣ* $(a\,,\ b)$ *вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющая условіямъ*

$$\varphi'(a)-h\varphi(a)=0\,,$$

$$\varphi'(b)+H\varphi(b)=0\,,$$

разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ

$$\sum_{s=}^{\infty}A_sU_s.$$

Такимъ образомъ, задачу объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня можно считать рѣшенной при весьма общихъ предположеніяхъ о характерѣ данной функціи $\varphi(x)$ *).

Я думаю, что условіе существованія второй производной функціи $\varphi(x)$ несущественно.

Замѣтимъ, что всѣ предыдущія соображенія не теряютъ силы и въ предѣльныхъ случаяхъ, когда

$$H = h = 0\,,$$

или когда

$$H = \infty\,, \qquad h = \infty\,.$$

6. Разсмотримъ теперь гармоническія функціи второго рода.

Будемъ разумѣть подъ $B_s (s = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$ какія либо (неопредѣленныя) постоянныя и положимъ

$$R_p = f - B_0 - B_1 V_1 - B_2 V_2 - \ldots - B_p V_p. \tag{17}$$

Положимъ затѣмъ

$$V^{(p)} = \int \left[\left(\frac{\partial R_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau\,, \quad W^{(p)} = \int R_p^2 \, d\tau\,,$$

$$M = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau\,, \qquad N = \int f^2 d\tau\,.$$

Легко убѣдиться, что

$$V^{(p)} = M + \sum_{s=1}^{p} B_s^2 (V_s, V_s) - 2 \sum_{s=1}^{p} B_s (f, V_s) + 2 \sum_{s,r=1,2,\ldots,p} B_s B_r (V_s, V_r).$$

По предыдущему

$$(V_s, V_s) = \lambda_s\,, \qquad (V_s, V_r) = 0\,.$$

Сверхъ того

$$(f, V_s) = \lambda_s \int f V_s d\tau = \lambda_s A_s\,.$$

---

*) См. мою статью: „Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня" „Сообщ. Харьк. Матем. Общ." Т. V, 1897 г., стр. 1—3 и 38—48.

Слѣдовательно,

$$V^{(p)} = M + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s B_s^2 - 2\sum_{s=1}^{p} \lambda_s B_s A_s =$$

$$= M + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s [(B_s - A_s)^2 - A_s^2] = M + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s (C_s^2 - A_s^2),$$

гдѣ положено для сокращенія

$$C_s = B_s - A_s. \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

Составимъ теперь выраженіе $W^{(p)}$.

Получимъ

$$\int R_p^2 d\tau = W^{(p)} = \int \Big(f^2 - 2fB_0 - 2\sum_{s=1}^{p} B_s f V_s + B_0^2 +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} B_s^2 V_s^2 + 2\sum_{s=1}^{p} B_0 B_s V_s + 2\sum_{s, r = 1, 2, \ldots, p} B_s B_r V_s V_r \Big) d\tau.$$

Такъ какъ

$$\int V_s^2 d\tau = 1, \qquad \int V_s d\tau = 0, \qquad \int V_r V_s d\tau = 0, \qquad (r \gtrless s)$$

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau, \qquad A_s = \int f V_s d\tau, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

то

$$W^{(p)} = N + D(B_0^2 - 2A_0 B_0) + \sum_{s=1}^{p} B_s^2 - 2\sum_{s=1}^{p} B_s A_s =$$

$$= N + D[(B_0 - A_0)^2 - A_0^2] + \sum_{s=1}^{p} [(B_s - A_s)^2 - A_s^2] =$$

$$= N + D(C_0^2 - A_0^2) + \sum_{e=1}^{p} (C_s^2 - A_s^2),$$

гдѣ, очевидно,

$$C_s = B_s - A_s \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

Если

$$B_s = A_s, \qquad {\scriptstyle s=0,1,2,\ldots,p}$$

то

$$V_0^{(p)} = M - \sum_{s=1}^{p} \lambda_s A_s^2, \qquad W_0^{(p)} = N - \sum_{s=1}^{p} A_s^2 - DA_0^2.$$

Слѣдовательно,

$$V^{(p)} = V_0^{(p)} + \sum_{s=1}^{p} \lambda_s C_s^2,$$

$$W^{(p)} = W_0^{(p)} + \sum_{s=1}^{p} C_s^2. \qquad (18)$$

Здѣсь $V_0^{(p)}$ и $W_0^{(p)}$ обозначаютъ, очевидно, интегралы $V^{(p)}$ и $W^{(p)}$ по замѣнѣ въ послѣднихъ постоянныхъ B_s черезъ $A_s (s=0, 1, 2, \ldots, p)$ *).

Изъ равенства (18) слѣдуетъ, что

$$\frac{V^{(p)} - V_0^{(p)}}{W^{(p)} - W_0^{(p)}} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} \lambda_s C_s^2}{\sum\limits_{s=1}^{p} C_s^2}. \qquad (19)$$

Это равенство справедливо при какомъ угодно p и каковы бы ни были коэффиціенты $B_s (s = 0, 1, 2, \ldots, p)$.

Равенство (19) даетъ

$$\frac{V^{(p)} - V_0^{(p)}}{W^{(p)} - W_0^{(p)}} < \lambda_p,$$

или

$$V^{(p)} - \lambda_p W^{(p)} < V_0^{(p)} - \lambda_p W_0^{(p)}. \qquad (20)$$

Обозначимъ черезъ φ какую либо функцію координатъ и положимъ

$$B_0 = \int \varphi d\tau, \qquad B_s = \int \varphi V_s d\tau. \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

Возьмемъ затѣмъ m произвольныхъ функцій

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$$

---

*) Напомнимъ, что

$$A_0 = \frac{1}{D} \int f d\tau, \qquad A_s = \int f V_s d\tau. \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots,p)}$$

и m произвольныхъ постоянныхъ

$$\alpha_1\,,\quad \alpha_2\,,\,\ldots\,,\;\alpha_m$$

и положимъ

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_m\varphi_m .$$

Получимъ

$$\begin{aligned} B_0 &= \alpha_1\int\varphi_1\,d\tau + \alpha_2\int\varphi_2\,d\tau + \ldots + \alpha_m\int\varphi_m\,d\tau, \\ B_s &= \alpha_1\psi_{1s} + \alpha_2\psi_{2s} + \ldots + \alpha_m\psi_{ms}, \\ &\qquad (s=1,2,\ldots,p) \end{aligned} \tag{21}$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\psi_{ks} = \int\varphi_k V_s\,d\tau. \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

Подставивъ такимъ образомъ опредѣленныя постоянныя B_s въ выраженіе

$$B_0 + \sum_{s=1}^{p} B_s V_s,$$

приведемъ его къ виду

$$\alpha_1\vartheta_1 + \alpha_2\vartheta_2 + \ldots + \alpha_m\vartheta_m,$$

гдѣ

$$\vartheta_k = \int\varphi_k\,d\tau + \sum_{s=1}^{p} V_s\psi_{ks}. \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$R_p = f - \alpha_1\vartheta_1 - \alpha_2\vartheta_2 - \ldots - \alpha_m\vartheta_m .$$

Разобъемъ объемъ области (D) на m составляющихъ объемовъ.

Назовемъ наибольшее изъ разстояній между двумя точками k'таго изъ составляющихъ объемовъ черезъ $l_{k,m}$.

Наибольшее изъ чиселъ $l_{k,m}$ обозначимъ просто черезъ l_m.

Положимъ

$$L_m = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{l_m^2}.$$

Всегда можно производить дѣленіе объема области (D) на составляющіе объемы такимъ образомъ, что при возрастаніи числа m число l_m будетъ стремиться къ нулю, и мы получимъ

$$\lim_{m=\infty} L_m = \infty .$$

Въ своемъ мемуарѣ: „Sur les équations etc.“ H. Poincaré доказалъ слѣдующую лемму:

Лемма VIII. *Если функція F удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int F d\tau_k = 0 , \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

гдѣ $d\tau_k$ есть элементъ k'таго изъ m составляющихъ объемовъ, на который распространяется интегралъ

$$\int F d\tau_k ,$$

то отношеніе $\frac{V}{W}$ интеграловъ

$$V = \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau \quad \text{и} \quad W = \int F^2 d\tau$$

болѣе числа L_m, т. е.

$$\frac{V}{W} > L_m .$$

Эта лемма оказывается весьма полезной при изслѣдованіи различныхъ вопросовъ, относящихся къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій Математической Физики, и дважды доказана H. Poincaré: одинъ разъ въ XII томѣ журнала: „Amarican Journal of Mathematics“, другой —въ вышеупомянутомъ мемуарѣ: „Sur les équations etc.“.

Въ своей статьѣ: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“ я далъ третье доказательство этой леммы, находящееся въ непосредственной связи съ вопросами интегрированія разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій, и потому считаю возможнымъ не останавливаться на доказательствѣ этой леммы въ настоящемъ изслѣдованіи.

Опредѣлимъ теперь коэффиціенты $\alpha_k (k = 1 , 2 , \ldots , m)$, пока совершенно произвольные, при помощи равенствъ

$$\int f d\tau_k = \alpha_1 \int \vartheta_1 d\tau_k + \alpha_2 \int \vartheta_2 d\tau_k + \ldots + \alpha_m \int \vartheta_m d\tau_k . \qquad (k=1,2,\ldots,m) \quad (22)$$

Всегда можно подобрать произвольныя функціи $\varphi_k (k=1\,,\,2\,,\,\ldots\,,m)$ такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \int \vartheta_1 d\tau_1\,, & \int \vartheta_2 d\tau_1\,, \ldots\,, & \int \vartheta_m d\tau_1 \\ \int \vartheta_1 d\tau_2\,, & \int \vartheta_2 d\tau_2\,, \ldots\,, & \int \vartheta_m d\tau_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int \vartheta_1 d\tau_m\,, & \int \vartheta_2 d\tau_m\,, \ldots\,, & \int \vartheta_m d\tau_m \end{vmatrix}$$

не будетъ равенъ нулю.

Уравненія (22) дадутъ вполнѣ опредѣленныя величины постоянныхъ $\alpha_k (k=1\,,\,2\,,\ldots\,,\,m)$, послѣ чего по формуламъ (21) опредѣлимъ и коэффиціенты $B_s (s=0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots\,,\,p)$.

Назовемъ интегралы $V^{(p)}$ и $W^{(p)}$ при этомъ выборѣ коэффиціентовъ B_s соотвѣтственно черезъ $V_1^{(p)}$ и $W_1^{(p)}$.

На основаніи леммы VIII можемъ писать

$$\frac{V_1^{(p)}}{W_1^{(p)}} > L_m,$$

или

$$V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0. \tag{23}$$

Числа m и p независимы между собою.

При всякомъ данномъ числѣ p, сколь бы велико оно ни было, всегда можно найти такое число m, что будетъ имѣть мѣсто неравенство вида

$$L_m > \lambda_p.$$

При этомъ будемъ имѣть

$$V_1^{(p)} - \lambda_p W_1^{(p)} > V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0.$$

Сопоставляя послѣднія неравенства съ (20), получаемъ

$$V_0^{(p)} - \lambda_p W_0^{(p)} > V_1^{(p)} - \lambda_p W_1^{(p)} > V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0,$$

т. е.

$$W_0^{(p)} < \frac{V_0^{(p)}}{\lambda_p}. \tag{24}$$

Это неравенство справедливо при всякомъ p.

Увеличивая p до безконечности и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim_{p=\infty} W_0^{(p)} = 0 .$$

Слѣдовательно,

$$\int f^2 d\tau = DA_0^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 .$$

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема V. *Если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, то*

$$\int f^2 d\tau = DA_0^2 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 , \tag{25}$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau , \quad A_s = \int f V_s d\tau .$$

Формула подобная (25) была выведена еще раньше проф. А. М. Ляпуновымъ. Въ сообщеніяхъ, сдѣланныхъ Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіяхъ 13 декабря 1896 г., 2 января и 2 мая 1897 г., онъ доказалъ, что въ случаѣ тригонометрическихъ и обобщенныхъ сферическихъ функцій равенство типа (25) справедливо всегда, коль скоро функція f *конечна* и *интегрируема* въ извѣстной области измѣненія входящихъ въ нее перемѣнныхъ, независимо отъ того, разлагается ли f въ ряды по вышеупомянутымъ функціямъ, или нѣтъ.

Онъ указалъ также примѣненіе этой формулы къ разысканію точныхъ низшихъ предѣловъ многихъ опредѣленныхъ интеграловъ и къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ Математической Физики, напр., къ рѣшенію извѣстной задачи электростатики.

Прежде чѣмъ перейти къ главной цѣли изслѣдованія, остановимся подробнѣе на равенствѣ (25) и, руководствуясь идеями проф. А. М. Ляпунова, выведемъ изъ него нѣкоторыя слѣдствія.

На основаніи только что сказаннаго мы можемъ думать, что условіе существованія первыхъ производныхъ отъ f (также какъ и въ случаѣ проф. А. М. Ляпунова) несущественно и является лишь слѣдствіемъ употребленнаго нами пріема доказательства.

Пусть f есть функція, конечная и непрерывная внутри (D), но не имѣющая производныхъ.

Можно найти такую функцію f_1, которая принимала бы внутри (D) тѣ же значенія, что и f, и имѣла бы опредѣленныя производныя по координатамъ.

При этомъ будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} &\int f d\tau = \int f_1 d\tau, \quad \int f^2 d\tau = \int f_1^2 d\tau, \\ &\int f V_s d\tau = \int f_1 V_s d\tau. \\ &\qquad\qquad (s=1,2,\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

По теоремѣ V-ой будемъ имѣть

$$\int f_1^2 d\tau = \frac{1}{D}\left(\int f_1 d\tau\right)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\int f_1 V_s d\tau\right)^2.$$

Въ силу же (26) получимъ

$$\int f^2 d\tau = \frac{1}{D}\left(\int f d\tau\right)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}\left(\int f V_s d\tau\right)^2.$$

Можно думать, что и условіе непрерывности функціи f несущественно. Равенство (25) будетъ, по всей вѣроятности, справедливо, коль скоро f конечна и интегрируема внутри (D).

Однако строго доказать это предложеніе намъ пока не удалось.

7. Обозначимъ черезъ φ и ψ двѣ конечныя и непрерывныя внутри (D) функціи координатъ и положимъ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int \varphi d\tau, \qquad A_s = \int \varphi V_s d\tau,$$

$$(s=1,2,\ldots)$$

$$B_0 = \frac{1}{D}\int \psi d\tau, \qquad B_s = \int \psi V_s d\tau.$$

Примѣнивъ къ функціямъ

$$\varphi + \psi \qquad \text{и} \qquad \varphi - \psi$$

теорему V-ую, получимъ

$$\int (\varphi+\psi)^2 d\tau = D(A_0+B_0)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}(A_s+B_s)^2,$$

$$\int (\varphi-\psi)^2 d\tau = D(A_0-B_0)^2 + \sum_{s=1}^{\infty}(A_s-B_s)^2.$$

Вычитая изъ перваго равенства второе, находимъ

$$\int \varphi\psi d\tau = DA_0B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_sB_s .$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема VI. *Коль скоро функціи φ и ψ конечны и непрерывны внутри области (D), то*

$$\int \varphi\psi d\tau = DA_0B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_sB_s , \tag{27}$$

гдѣ

$$DA_0 = \int \varphi d\tau , \qquad A_s = \int \varphi V_s d\tau ,$$

$$DB_0 = \int \psi d\tau , \qquad B_s = \int \psi V_s d\tau .$$

Равенство (27) всегда справедливо, независимо отъ того, разлагаются ли функціи φ и ψ въ ряды по функціямъ V_s, или нѣтъ.

Можно думать, что это равенство справедливо и при болѣе общихъ условіяхъ относительно функцій φ и ψ, когда эти функціи только конечны и интегрируемы внутри (D).

Замѣтимъ, что рядъ правой части равенства (27) есть рядъ *абсолютно* сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(|A_s| - |B_s|)^2 > 0 ,$$

т. е.

$$|A_s|\,|B_s| < \frac{1}{2}(A_s^2 + B_s^2).$$

Каждый членъ ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s|\,|B_s|$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{\infty}(A_s^2 + B_s^2).$$

Но по леммѣ III-тьей каждый изъ рядовъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \quad \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

сходится.

Слѣдовательно, рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} |A_s|\ |B_s|$$

есть рядъ сходящійся, т. е. рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s$$

сходится абсолютно.

8. Все вышеизложенное съ незначительными измѣненіями примѣнимо и къ гармоническимъ функціямъ перваго рода U_s.

Пусть f какая либо функція координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D) и обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Положимъ

$$f = B_1 U_1 + B_2 U_2 + \cdots + B_p U_p + R_p,$$

гдѣ $B_s (s = 1, 2, \ldots, p)$ суть какія либо постоянныя.

Выберемъ B_s такъ, чтобы интегралъ

$$\int R_p^2 d\tau$$

былъ minimum.

Получимъ

$$B_s = \int f U_s d\tau.$$

Будемъ обозначать, такимъ образомъ, опредѣленныя постоянныя B_s черезъ A_s.

При этихъ значеніяхъ постоянныхъ B_s интегралы

$$V_0^{(p)} = \int \left[\left(\frac{\partial R_p}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial R_p}{dz}\right)^2 \right] d\tau, \quad W_0^{(p)} = \int R_p^2 d\tau$$

будутъ убывать съ возрастаніемъ значка p.

Разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ §-ѣ 6-омъ, убѣдимся въ справедливости неравенства

$$V^{(p)} - k_p W^{(p)} < V_0^{(p)} - k_p W_0^{(p)},$$

гдѣ $k_p (p = 1, 2, \dots)$ суть характеристическія числа функцій U_s для области (D).

Положимъ

$$B_s = \int \varphi U_s d\tau,$$

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_m \varphi_m,$$

гдѣ α_s суть пока неопредѣленныя постоянныя, а φ_s какія либо функціи координатъ.

Обозначимъ интегралы $V^{(p)}$ и $W^{(p)}$ при этихъ значеніяхъ постоянныхъ B_s соотвѣтственно черезъ $V_1^{(p)}$ и $W_1^{(p)}$.

По леммѣ VIII можемъ выбрать постоянныя α_s такъ, чтобы было

$$V_1^{(p)} - L_m W_1^{(p)} > 0.$$

Сверхъ того числомъ m при всякомъ данномъ p можно распорядиться такъ, что будетъ

$$L_m > k_p.$$

При этихъ условіяхъ будемъ имѣть

$$V_0^{(p)} - k_p W_0^{(p)} > 0,$$

или

$$W_0^{(p)} < \frac{V_0^{(p)}}{k_p}.$$

Это неравенство показываетъ, что

$$\lim_{p=\infty} W_0^{(p)} = 0.$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема VII. *Если функція f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными по координатамъ и обращается въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int f^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \tag{28}$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau. \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Равенство (28) справедливо независимо отъ того, разлагается ли f въ рядъ по функціямъ U_s, или нѣтъ.

Теорема VII-ая справедлива, хотя бы f и не имѣла частныхъ производныхъ внутри (D).

Она справедлива, вѣроятно, коль скоро f конечна и интегрируема внутри области (D).

Какъ слѣдствіе получается слѣдующая теорема:

Теорема VIII. *Если φ и ψ суть двѣ функціи координатъ, конечныя и непрерывныя внутри (D) и обращающіяся въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int \varphi\psi d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s, \tag{29}$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi U_s d\tau, \quad B_s = \int \psi U_s d\tau. \qquad (s=1,2,\ldots)$$

Рядъ правой части равенства (29) сходится абсолютно.

9. Пусть φ есть функція координатъ, конечная и непрерывная внутри (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющая условію

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Положимъ

$$\psi = \Delta\varphi.$$

Функція ψ должна удовлетворять условію

$$\int \psi d\tau = 0. \tag{30}$$

По теоремѣ VI-ой

$$\int \varphi\psi d\tau = DA_0B_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s.$$

Въ данномъ случаѣ [въ силу (30)]

$$B_0 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$\int \varphi\psi d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s .$$

Такъ какъ $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ равно нулю на поверхности (S), то по теоремѣ Грина

$$\int \varphi\psi d\tau = \int \varphi \Delta\varphi d\tau = -\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau . \qquad (31)$$

Сверхъ того

$$\int \Delta\varphi V_s d\tau = \int \varphi \Delta V_s d\tau = -\lambda_s \int \varphi V_s d\tau = -\lambda_s A_s ,$$

ибо V_s удовлетворяетъ условіямъ (11) и (12) §-а 3-тьяго первой части.

Но

$$B_s = \int \psi V_s d\tau = \int \Delta\varphi V_s d\tau .$$

Слѣдовательно,

$$B_s = -\lambda_s A_s$$

и

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s = -\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2 . \qquad (32)$$

Равенства (31) и (32) приводятъ къ заключенію, что

$$\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2 .$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема IX. *Если функція φ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяетъ условію*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \textit{на поверхности } (S),$$

то

$$\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2 ,$$

что

$$A_s = \int \varphi V_s d\tau. \qquad {\scriptstyle (s=1,2,\ldots)}$$

Пусть φ и ψ двѣ функціи координатъ, конечныя и непрерывныя внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Функціи

$$\Phi_1 = \varphi + \psi \quad \text{и} \quad \Phi_2 = \varphi - \psi$$

также конечны и непрерывны внутри (D) вмѣстѣ съ ихъ производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяютъ условіямъ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

По теоремѣ IX-ой можемъ писать

$$(\Phi_1, \Phi_1) = \int \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left(\int \Phi_1 V_s d\tau \right)^2,$$

$$(\Phi_2, \Phi_2) = \int \left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \left(\int \Phi_2 V_s d\tau \right)^2.$$

Такъ какъ

$$\int \Phi_1 V_s d\tau = A_s + B_s,$$

$$\int \Phi_2 V_s d\tau = A_s - B_s,$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi V_s d\tau, \qquad B_s = \int \psi V_s d\tau,$$

а

$$(\Phi_1, \Phi_1) - (\Phi_2, \Phi_2) = 4(\varphi, \psi) = 4 \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau,$$

то

$$(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s B_s.$$

Такимъ образомъ, какъ слѣдствіе теоремы IX-ой, получается слѣдующая теорема:

Теорема X. *Если функціи* φ *и* ψ *конечны и непрерывны внутри области* (D) *вмѣстѣ съ ихъ производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяютъ условіямъ*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \qquad \textit{на поверхности } (S)\,,$$

то

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s A_s B_s\,. \tag{33}$$

Рядъ правой части равенства (33) сходится абсолютно.

10. Подобныя же теоремы могутъ быть доказаны и для функцій U_s (гармоническія функціи перваго рода).

Пусть ψ есть функція координатъ, конечная и непрерывная внутри (D) и обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Опредѣлимъ функцію φ при помощи условій

$$\Delta\varphi=\psi \qquad \text{внутри } (D)\,, \tag{34}$$

$$\varphi=0 \qquad \text{на поверхности } (S)\,. \tag{35}$$

Условія (34) и (35) опредѣляютъ функцію φ вполнѣ и единственнымъ образомъ.

Функція φ представится въ видѣ

$$\varphi=-\int G\psi' d\tau'\,,$$

гдѣ G есть обыкновенная функція Грина (см. 1-ую часть).

Такъ какъ φ и ψ обращаются въ нуль на поверхности (S), то по теоремѣ VIII-ой

$$\int\varphi\psi d\tau=\sum_{s=1}^{\infty}A_s B_s\,.$$

Но

$$B_s=\int\psi U_s d\tau=\int\Delta\varphi U_s d\tau=\int\varphi\Delta U_s d\tau=-\,k_s\int\varphi U_s d\tau=-\,k_s A_s\,.$$

Поэтому

$$\int \varphi\psi d\tau = \int \varphi\Delta\varphi d\tau = -\sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2.$$

Но по теоремѣ Грина

$$\int \varphi\Delta\varphi d\tau = -\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = -(\varphi\,,\ \varphi).$$

Слѣдовательно,

$$(\varphi\,,\ \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2.$$

Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Теорема XI. *Если функція φ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и обращается въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2\,,$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi U_s d\tau. \qquad (s = 1, 2, \ldots$$

Какъ слѣдствіе этой теоремы получимъ слѣдующую:

Теорема XII. *Если φ и ψ суть двѣ функціи координатъ, конечныя и непрерывныя внутри (D) вмѣстѣ съ ихъ производными первыхъ двухъ порядковъ и обращающіяся въ нуль на поверхности (S), то*

$$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s B_s\,,$$

гдѣ

$$A_s = \int \varphi U_s d\tau\,, \quad B_s = \int \psi U_s d\tau. \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

11. Равенство (27) теоремы VI доказано нами въ предположеніи, что обѣ функціи φ и ψ *конечны* и *непрерывны* внутри области (D).

Допустимъ теперь, что одна изъ этихъ функцій, положимъ ψ, не подчиняется условію непрерывности. Предположимъ только, что ψ *конечна* и *интегрируема* внутри области (D).

Помножимъ обѣ части равенства

$$\varphi = A_0 + \sum_{s=1}^{p} A_s V_s + R_p$$

на функцію ψ и интегрируемъ результатъ по какой либо части (D_1) области (D).

Называя черезъ $d\tau_1$ элементъ области (D_1), получимъ

$$\int \varphi\psi d\tau_1 = A_0 \int \psi d\tau_1 + \sum_{s=1}^{p} A_s B_s + \int R_p \psi d\tau_1,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int \varphi d\tau, \quad A_s = \int \varphi V_s d\tau, \quad B_s = \int \psi V_s d\tau_1. \quad (s=1, 2, \ldots, p)$$

Имѣемъ

$$\left(\int R_p \psi d\tau_1\right)^2 < \int R_p^2 d\tau_1 \int \psi^2 d\tau_1.$$

Такъ какъ ψ есть конечная функція координатъ, то

$$\int \psi^2 d\tau_1$$

есть конечная положительная постоянная.

Обозначимъ ее черезъ M.

Далѣе, очевидно, что

$$\int R_p^2 d\tau_1 < \int R_p^2 d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$\left(\int R_p \psi d\tau_1\right)^2 < M \int R_p^2 d\tau.$$

Это неравенство справедливо при всякомъ p.

Увеличивая p до безконечности и переходя къ предѣлу, получаемъ

$$\lim_{p=\infty} \int R_p \psi d\tau_1 = 0,$$

ибо, по теоремѣ V-ой,

$$\lim_{p=\infty} \int R_p^2 d\tau = 0.$$

Изъ сказаннаго выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XIII. *Если φ есть функція координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D), а ψ функція координатъ только конечная и интегрируемая внутри (D) (хотя бы и прерывная), то*

$$\int \varphi\psi d\tau_1 = \frac{1}{D}\int \varphi d\tau \cdot \int \psi d\tau_1 + \sum_{s=1}^{\infty}\int \varphi V_s d\tau \cdot \int \psi V_s d\tau_1 .$$

Это равенство справедливо на какую бы часть (D_1) области (D) ни распространялись интегралы, содержащіе функцію ψ.

Полагая въ частности

$$\psi = 1 ,$$

получаемъ

$$\int \varphi d\tau_1 = \frac{D_1}{D}\int \varphi d\tau + \sum_{s=1}^{\infty}\int \varphi V_s d\tau \cdot \int V_s d\tau_1 . \tag{36}$$

Этой формулой воспользуемся впослѣдствіи.

12. Укажемъ на нѣкоторыя приложенія полученныхъ нами результатовъ.

Въ своей статьѣ: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ" я, пользуясь обобщеннымъ тождествомъ E. Picard'а, приведеннымъ имъ въ „Traité d'Analyse", доказалъ слѣдующую теорему:

Теорема XIV. *Если функція f, конечная и непрерывная внутри (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, обращается въ нуль на поверхности (S), то* т о ч н ы й *низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ интеграловъ*

$$V = \int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] d\tau , \quad W = \int f^2 d\tau \tag{37}$$

равенъ k_1, наименьшему изъ характеристическихъ чиселъ гармоническихъ функцій перваго рода.

Эта теорема можетъ быть получена весьма просто, какъ слѣдствіе теоремъ VIII-ой и XI-ой.

Если φ обращается въ нуль на поверхности (S), то

$$V = \sum_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2 , \quad W = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2 .$$

Отсюда

$$\frac{V}{W} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty} k_s A_s^2}{\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s^2} \geqq k_1.$$

Число k_1 есть точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$, ибо для функціи U_1, удовлетворяющей условіямъ

$$\Delta U_1 + k_1 U_1 = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$U_1 = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

имѣемъ

$$\frac{\int\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}{\int U_1^2 d\tau} = k_1.$$

Теорема доказана.

Я уже пользовался одной леммой H. Poincaré, состоящей въ томъ, что отношеніе $\frac{V}{W}$ [рав. (37)] болѣе числа $\left(\frac{4}{3l}\right)^2$, гдѣ l есть наибольшее изъ разстояній между двумя точками поверхности (S), если функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f d\tau = 0. \tag{38}$$

При помощи вышедоказанныхъ теоремъ мы можемъ не только доказать эту лемму, но и найти *точный* низшій предѣлъ отношенія интеграловъ V и W при условіи (38).

Не трудно убѣдиться, что

$$(\varphi, \psi)^2 < (\varphi, \varphi) \cdot (\psi, \psi), \tag{39}$$

каковы бы ни были функціи φ и ψ, имѣющія производныя перваго порядка внутри области (D).

Доказательство этого неравенства можно найти въ моемъ соч.: „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики", напечатанномъ въ Математическомъ Сборникѣ (стр. 501, 1897 г.).

Допустимъ, что ψ удовлетворяетъ условіямъ

$$\Delta\psi + \varphi = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{40}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{41}$$

Условіями (40) и (41) функція ψ вполнѣ опредѣлится до нѣкоторой произвольной постоянной C.

При этомъ функція φ должна удовлетворять одному условію вида

$$\int \varphi d\tau = 0.$$

Неравенство (39) при помощи теоремы Грина приведется къ слѣдующему

$$\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^2 < (\varphi\,,\ \varphi) \cdot \int \varphi\psi d\tau.$$

Но

$$\left(\int \varphi\psi\, d\tau\right)^2 < \int \varphi^2 d\tau \cdot \int \psi^2 d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^2 < (\varphi\,,\ \varphi) \cdot \left(\int \varphi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int \psi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\frac{\int \varphi^2\, d\tau}{(\varphi\,,\ \varphi)} < \frac{\left(\int \psi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int \varphi^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Опредѣлимъ постоянную C изъ условія

$$\int \psi d\tau = 0.$$

По теоремѣ V-ой получимъ

$$\int \varphi^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2, \qquad \int \psi^2 d\tau = \sum_{s=1}^{\infty} B_s^2,$$

гдѣ, напоминаемъ,

$$A_s = \int \varphi V_s d\tau\,, \quad B_s = \int \psi V_s d\tau\,. \qquad (s=1\ 2, \ldots)$$

На основаніи (40) получаемъ

$$A_s = -\int \Delta\psi\, V_s d\tau.$$

По теоремѣ Грина

$$\int \Delta\varphi\, V_s d\tau = \int \Delta V_s \psi\, d\tau = -\lambda_s \int V_s \psi d\tau = -\lambda_s B_s .$$

Слѣдовательно,

$$A_s = \lambda_s B_s$$

и

$$\frac{\int \varphi^2 d\tau}{\int \psi^2 d\tau} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 B_s^2}{\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2} .$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{V}{W} = \frac{\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}{\int \varphi^2 d\tau} = \frac{\sqrt{\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s^2 B_s^2}}{\sqrt{\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2}} . \tag{42}$$

Отсюда

$$\frac{V}{W} \geq \lambda_1 ,$$

т. е. отношеніе $\frac{V}{W}$ всегда больше, или въ крайнемъ случаѣ равно числу λ_1, если среднее ариѳметическое изъ значеній функціи φ внутри области (D) есть нуль.

Для функціи V_1, удовлетворяющей условіямъ

$$\Delta V_1 + \lambda_1 V_1 = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

это отношеніе какъ разъ равно λ_1.

Такимъ образомъ можно считать доказанной слѣдующую теорему:

Теорема XV. *Если функція φ, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, удовлетворяетъ условію*

$$\int \varphi d\tau = 0 , \tag{43}$$

то точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ *интеграловъ*

$$V = \int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\,, \qquad W = \int \varphi^2 d\tau$$

равенъ λ_1, *наименьшему изъ характеристическихъ чиселъ гармоническихъ функцій второго рода.*

Равенство (42) справедливо, если функція φ подчинена лишь одному условію (43).

Допустимъ, что φ удовлетворяетъ еще слѣдующимъ условіямъ

$$\int \varphi V_1 d\tau = 0\,, \qquad \int \varphi V_2 d\tau = 0, \ldots, \int \varphi V_p d\tau = 0. \tag{44}$$

Въ такомъ случаѣ

$$\frac{V}{W} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{s=p+1}^{\infty} \lambda_s^2 B_s^2}}{\sqrt{\sum\limits_{s=p+1}^{\infty} B_s^2}}\,.$$

Отсюда

$$\frac{V}{W} \geqq \lambda_{p+1}\,.$$

Такимъ образомъ низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ для функціи φ, удовлетворяющей условіямъ (43) и (44), равенъ λ_{p+1}.

Число λ_{p+1} есть *точный* низшій предѣлъ, ибо для функціи

$$\varphi = V_{p+1}$$

имѣемъ

$$\frac{V}{W} = \lambda_{p+1}\,.$$

Этотъ результатъ мы можемъ формулировать въ видѣ слѣдующей теоремы:

Теорема XVI. *Если функція* φ, *конечная и непрерывная внутри области* (D) *вмѣстѣ со своими первыми производными, удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int \varphi d\tau = 0\,, \qquad \int \varphi V_1 d\tau = 0\,, \qquad \int \varphi V_2 d\tau = 0\,, \ldots, \int \varphi V_p d\tau = 0,$$

то точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ *интеграловъ*

$$V=\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau\,,\quad W=\int\varphi^2 d\tau$$

равенъ λ_{p+1}.

Подобнымъ же путемъ легко доказать слѣдующую теорему:

Теорема XVII. *Если функція φ конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими первыми производными, обращается въ нуль на поверхности (S) и удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int\varphi U_1 d\tau=0,\quad \int\varphi U_2 d\tau=0\,,\ldots,\int\varphi U_p d\tau=0\,,$$

то точный низшій предѣлъ отношенія $\frac{V}{W}$ *равенъ* k_{p+1}.

13. Предположимъ, что несжимаемая жидкость, ограниченная поверхностью (S), течетъ съ потенціаломъ скоростей V, и пусть нормальная составляющая скорости теченія на поверхности (S) равна заданной функціи f.

Функція V опредѣляется условіями

$$\Delta V=0 \qquad \text{внутри } (D),$$
$$\frac{\partial V}{\partial n}=f \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{45}$$

Функція f конечна и должна удовлетворять условію

$$\int f d\tau=0,$$

въ остальномъ же она вполнѣ произвольна.

Функція V вполнѣ опредѣляется условіями (45) до нѣкоторой постоянной произвольной.

Во многихъ задачахъ Гидродинамики требуется опредѣлить удвоенную живую силу $2T$ жидкой массы, не опредѣляя самой функціи V.

Имѣемъ

$$2T=\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Интегралъ правой части этого равенства распространяется на весь объемъ жидкой массы.

Для вычисленія $2T$ при каждомъ данномъ значеніи f необходимо опредѣлить сначала функцію V, т. е. каждый разъ рѣшать извѣстную задачу C. Neumann'a.

Рѣшеніе этой задачи представляетъ громадныя трудности, даже съ чисто теоретической точки зрѣнія; даже не существуетъ общей методы для доказательства существованія функціи V для какой угодно замкнутой поверхности (S).

Въ моей статьѣ: „Къ вопросу о существованіи конечной и непрерывной внутри данной области функціи координатъ, удовлетворяющей уравненію Лапласа при заданныхъ значеніяхъ ея нормальной производной на поверхности, ограничивающей область“ я указывалъ, что употреблявшіяся до сихъ поръ методы рѣшенія разсматриваемой задачи (напр. метода C. Neumann'a) недостаточно обоснованы.

Я предложилъ въ этой статьѣ вполнѣ строгую методу рѣшенія задачи C. Neumann'a, но примѣнимую, строго говоря, только къ конвекснымъ поверхностямъ, отклоненіе которыхъ отъ сферы не превосходитъ нѣкотораго предѣла.

Но и эта метода имѣетъ лишь чисто теоретическое значеніе, и вычисленіе при помощи ея функціи V почти невыполнимо практически, даже для простѣйшихъ случаевъ сферы, цилиндра, эллипсоида.

Вычисленіе же интеграла $2T$, даже въ только что упомянутыхъ простѣйшихъ случаяхъ, еще затруднительнѣе.

Пользуясь вышеприведенными теоремами можно значительно упростить дѣло во всѣхъ случаяхъ, когда извѣстны для данной области (D) гармоническія функціи второго рода.

Вычисленіе этихъ функцій, вообще говоря, также весьма затруднительно, но для сферы, цилиндра, эллипсоида и т. п. функціи $V_s (s=1, 2, \ldots)$ можно построить, пользуясь хорошо извѣстными сферическими функціями, функціями Бесселя, Лямэ и т. п.

Въ этихъ случаяхъ и во всѣхъ другихъ, когда извѣстны функціи V_s, вычисленіе интеграла $2T$, какъ мы сейчасъ покажемъ, можно производить, не рѣшая каждый разъ (при каждомъ данномъ f) задачу C. Neumann'a.

Назовемъ черезъ v функцію координатъ, конечную и непрерывную внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющую одному условію

$$\frac{\partial v}{\partial n} = f \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{46}$$

Существуетъ безчисленное множество функцій, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ.

Возьмемъ какую либо опредѣленную изъ нихъ.

Положимъ

$$V = V_0 + v. \tag{47}$$

Такъ какъ V удовлетворяетъ условіямъ (45), а v условію (46), то V_0 есть функція координатъ, удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ

$$\Delta V_0 + \Delta v = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{48}$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S). \tag{49}$$

Подставивъ въ $2T$ вмѣсто V его выраженіе черезъ V_0 и v (47), получимъ

$$2T = (V_0, V_0) + 2(V_0, v) + (v, v) \text{ *)}.$$

По теоремѣ Грина и въ силу (48) и (49) получаемъ

$$(V_0, v) = -\int v\Delta V_0 d\tau = \int v\Delta v d\tau = -(v, v) + \int v\frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

или, въ силу (46),

$$(V_0, v) = -(v, v) + \int vfds.$$

Слѣдовательно,

$$2T = (V_0, V_0) - (v, v) + 2\int vfds.$$

Вычисленіе интеграловъ

$$(v, v) \quad \text{и} \quad \int vfds,$$

теоретически говоря, не представляетъ затрудненій.

Функцію v можно подобрать такъ, чтобы это вычисленіе было возможно легкимъ.

Остается только опредѣлить интегралъ (V_0, V_0).

Такъ какъ V_0 есть конечная и непрерывная функція координатъ вмѣстѣ съ ея производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

то къ функціи V_0 примѣнима теорема IX-ая.

---

*) Напомнимъ, черезъ (F, Φ) мы обозначаемъ интегралъ вида

$$\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)d\tau.$$

Въ силу этого можемъ писать

$$(V_0\,,\,V_0)=\sum_{s=1}^{\infty}\lambda_s A_s^2.$$

Но

$$A_s=\int V_0 V_s d\tau=-\frac{1}{\lambda_s}\int V_0 \varDelta V_s d\tau.$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial V_0}{\partial n}=0\,,\qquad \frac{\partial V_s}{\partial n}=0\qquad \text{на поверхности } (S),$$

то, по теоремѣ Грина,

$$\int V_0 \varDelta V_s d\tau=\int V_s \varDelta V_0 d\tau\,,$$

или, въ силу (48),

$$\int V_0 \varDelta V_s d\tau=-\int V_s \varDelta v d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$\lambda_s A_s^2=\frac{1}{\lambda_s}\left(\int V_s \varDelta v d\tau\right)^2 \qquad (s=1\,,2\,,\ldots)$$

и

$$(V_0\,,\ V_0)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s}\left(\int V_s \varDelta v d\tau\right)^2.$$

Рядъ правой части этого равенства хорошо сходится.

Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ, когда для области (D) извѣстны функціи $V_s(s=1\,,\,2\,,\,\ldots)$, вычисленіе живой силы T приводится къ опредѣленію функціи v, конечной и непрерывной внутри (D) вмѣстѣ съ ея производными первыхъ двухъ порядковъ и удовлетворяющей условію

$$\frac{\partial v}{\partial n}=f \qquad \text{на поверхности } (S),$$

и затѣмъ къ вычисленію интеграловъ

$$(v\,,\,v),\qquad \int v f ds\,,\qquad \int V_s \varDelta v d\tau. \qquad (s=1\,,2\,,\ldots)$$

Опредѣленіе функціи V при каждомъ данномъ f оказывается излишнимъ.

14. Чтобы еще болѣе отмѣтить значеніе гармоническихъ функцій при рѣшеніи самыхъ разнообразныхъ вопросовъ Анализа и Математической Физики, разсмотримъ слѣдующую задачу.

Допустимъ, что намъ извѣстна по опыту составляющая по какому либо направленію силы притяженія внѣшней точки тѣломъ, матерія котораго заполняетъ область (D), ограниченную замкнутой поверхностью (S), или извѣстенъ потенціалъ этого тѣла на внѣшнія точки.

Опредѣлить плотность ϱ тѣла.

Пусть ξ, η, ζ координаты внѣшней точки, пусть r есть разстояніе точекъ объема (D) отъ точки ξ, η, ζ.

Обозначимъ черезъ

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$$

cosinus'ы угловъ направленія s извѣстной намъ составляющей U силы притяженія.

Имѣемъ

$$\alpha_1 \int \frac{\varrho(x-\xi)}{r^3} d\tau + \alpha_2 \int \frac{\varrho(y-\eta)}{r^3} d\tau + \alpha_3 \int \frac{\varrho(z-\zeta)}{r^3} d\tau = U,$$

гдѣ U есть извѣстная функція координатъ ξ, η и ζ.

Это равенство можно представить подъ видомъ

$$\int \varrho \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau = U.$$

Функція

$$\varphi = \frac{\cos(r, s)}{r^2}$$

конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ внутри области (D).

Примѣняя къ интегралу

$$\int \varrho \varphi d\tau$$

теорему XIII-ую, получаемъ

$$\int \varrho \varphi d\tau = a_0 A_0 + a_1 A_1 + \dots + a_s A_s + \dots, \tag{50}$$

гдѣ

$$a_0 = \int \varrho d\tau, \qquad a_s = \int \varrho V_s d\tau,$$

$$(s=1, 2, \dots)$$

$$A_0 = \frac{1}{D} \int \varphi d\tau, \qquad A_s = \int \varphi V_s d\tau.$$

Равенство (50) справедливо, если мы допустимъ только, что плотность ϱ тѣла есть функція координатъ, конечная и интегрируемая внутри области (D) *).

Такимъ образомъ получаемъ

$$a_0 A_0 + a_1 A_1 + \dots + a_s A_s + \dots = U.$$

Рядъ лѣвой части этого равенства сходится абсолютно, какъ было указано выше (см. теорему VI-ую).

Допустимъ, что намъ извѣстны по опыту значенія U въ n различныхъ внѣшнихъ точкахъ.

Для каждой такой точки и каждаго даннаго направленія s мы можемъ вычислить n интеграловъ $A_s (s = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Назовемъ значенія этихъ интеграловъ въ какой либо k'той изъ n взятыхъ точекъ черезъ

$$A_{s,k}, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

соотвѣтствующее значеніе U обозначимъ черезъ U_k.

Для приближеннаго вычисленія коэффиціентовъ $a_s (s = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ мы можемъ воспользоваться n уравненіями вида

$$\begin{aligned} a_0 A_{0,1} + a_1 A_{1,1} + a_2 A_{2,1} + \dots + a_{n-1} A_{n-1,1} &= U_1, \\ a_0 A_{0,2} + a_1 A_{1,2} + a_2 A_{2,2} + \dots + a_{n-1} A_{n-1,2} &= U_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_0 A_{0,n} + a_1 A_{1,n} + a_2 A_{2,n} + \dots + a_{n-1} A_{n-1,n} &= U_n. \end{aligned} \tag{51}$$

Здѣсь всѣ $A_{s,k} (s = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, \dots, n)$ и $U_k (k = 1, 2, \dots, n)$ суть вполнѣ опредѣленныя постоянныя.

Внѣшнія точки всегда можно выбрать такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A_{0,1}, & A_{1,1}, & A_{2,1}, & \dots, & A_{n-1,1} \\ A_{0,2}, & A_{1,2}, & A_{2,2}, & \dots, & A_{n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{0,n}, & A_{1,n}, & A_{2,n}, & \dots, & A_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

не будетъ равенъ нулю.

Изъ уравненій (51) получимъ вполнѣ опредѣленныя выраженія коэффиціентовъ $a_s (s = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

*) Плотность ρ, слѣдовательно, можетъ быть и прерывной функціей координатъ.

Коэффиціентъ a_0 даетъ, очевидно, массу всего тѣла.

Средняя плотность δ тѣла представится подъ видомъ

$$\delta=\frac{1}{D}a_0=\frac{1}{D}\int\varrho d\tau.$$

Если бы ϱ разлагалось въ рядъ по функціямъ V_s, то мы получили бы приближенное выраженіе ϱ въ видѣ

$$\varrho=\frac{a_0}{D}+a_1V_1+a_2V_2+\ldots+a_{n-1}V_{n-1}. \tag{52}$$

Соотвѣтствующимъ выборомъ числа n можно увеличивать степень приближенія сколь угодно далеко.

Но если ϱ и не разлагается въ рядъ по гармоническимъ функціямъ V_s, то все же иногда можно пользоваться формулой (52) для приближеннаго вычисленія ϱ при помощи функцій V_s, ибо при такомъ вычисленіи (при взятыхъ нами постоянныхъ a_s) погрѣшность вычисленія, за мѣру которой примемъ по Чебышеву интегралъ

$$\int\left(\varrho-\frac{a_0}{D}-a_1V_1-a_2V_2-\ldots-a_{n-1}V_{n-1}\right)^2 d\tau,$$

есть наименьшая, и по теоремѣ V-ой стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастаніи числа n, если только сдѣлать гипотезу, что плотность ϱ есть непрерывная функція координатъ.

Есть основанія предполагать, что сказанное будетъ справедливо и независимо отъ послѣдней гипотезы.

Примѣнимъ къ разсматриваемому случаю формулу (36) §-а 11-аго.

Получимъ приближенно

$$\int\varrho d\tau_1=\frac{D_1}{D}a_0+\sum_{s=1}^{n-1}a_s\int V_s d\tau_1,$$

гдѣ, напомнимъ, $d\tau_1$ есть элементъ объема какой либо части (D_1) области (D), а D_1 объемъ этой части.

При помощи этой формулы можемъ вычислять съ достаточной степенью приближенія интегралъ отъ функціи ϱ, распространенный на любую часть области (D).

Съ физической точки зрѣнія это равносильно опредѣленію плотности тѣла въ любой его точкѣ.

Разумѣя подъ D_1 какой либо достаточно малый объемъ тѣла и называя черезъ δ плотность въ какой либо точкѣ, характеризующей положеніе этого объема въ тѣлѣ, получимъ съ достаточнымъ приближеніемъ

$$\delta = \frac{a_0}{D} + \frac{1}{D_1} \sum_{s=1}^{n-1} a_s \int V_s d\tau_1.$$

Все это безусловно справедливо въ предположеніи, что ϱ есть непрерывная функція координатъ.

Въ силу сдѣланныхъ выше замѣчаній можно думать, что указанная метода справедлива и въ болѣе общемъ случаѣ, когда ϱ не подчиняется условію непрерывности, а есть только конечная и интегрируемая функція координатъ внутри области (D).

Указанная метода примѣнима непосредственно къ весьма важной задачѣ объ опредѣленіи плотности земли.

Поверхность земли можно принимать за эллипсоидъ вращенія или, еще проще, за сферу.

Для этихъ случаевъ опредѣленіе функцій $V_s (s = 1, 2, \ldots, n-1)$ не представляетъ особыхъ затрудненій.

Построивъ функціи $V_s (s = 1, 2, \ldots, n-1)$ и опредѣливъ изъ n наблюденій въ различныхъ точкахъ надъ земной поверхностью составляющія силы притяженія земли по какимъ либо направленіямъ, найдемъ постоянныя $A_{s,k}$, а затѣмъ при помощи уравненій (51) и коэффиціенты $a_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$.

Такимъ образомъ рѣшимъ задачу о распредѣленіи матеріи внутри земного шара.

Все дѣло сводится къ опредѣленію изъ опыта значеній U_k въ различныхъ точкахъ надъ земной поверхностью.

Наблюденія, которыя давали бы соотвѣтствующія значенія U_k, не представляются намъ невозможными, тѣмъ болѣе, что наблюденія, аналогичныя съ интересующими насъ, уже производились.

Предположимъ далѣе, что намъ извѣстны величины $U_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ составляющихъ по какимъ либо направленіямъ силы притяженія земли въ n внѣшнихъ точкахъ.

При достаточно большомъ n можемъ, по предыдущему, опредѣлить съ достаточной точностью коэффиціенты $a_s (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Зная же эти коэффиціенты, можемъ вычислить составляющую силы притяженія по какому угодно направленію въ какой угодно точкѣ ξ, η, ζ.

Выраженіе этой составляющей по направленію s въ точкѣ

$$\xi = \alpha, \qquad \eta = \beta, \qquad \zeta = \gamma$$

представится подъ видомъ

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \int \varrho \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau;$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

По теоремѣ XIII-ой получаемъ

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + \ldots + a_n B_n + \ldots$$

Зная коэффиціенты $a_s (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ и вычисливъ интегралы

$$B_0 = \frac{1}{D} \int \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau, \qquad B_s = \int \frac{V_s \cos(r, s)}{r^2} d\tau, \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1)$$

получимъ приближенное выраженіе функціи U въ точкѣ α, β, γ подъ видомъ

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = a_0 B_0 + a_1 B_1 + a_2 B_2 + \ldots + a_{n-1} B_{n-1}.$$

Подобнымъ же путемъ можно рѣшать слѣдующую задачу:

Извѣстна величина составляющей по нѣкоторымъ направленіямъ силы притяженія всего земного шара въ n внѣшнихъ точкахъ. Опредѣлить составляющую притяженія по данному направленію s какой либо опредѣленной части D_1 земного шара.

Назовемъ черезъ $d\tau_1$ элементъ объема этой части.

Искомая составляющая въ точкѣ

$$\xi = \alpha, \qquad \eta = \beta, \qquad z = \gamma$$

представится подъ видомъ

$$U_1(\alpha, \beta, \gamma) = \int \varrho \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau_1.$$

Интегралъ правой части этого равенства распространяется на всю часть (D_1) земного шара.

По теоремѣ XIII-ой имѣемъ

$$U_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{a_0}{D} \int \frac{\cos(r, s)}{r^2} d\tau_1 + a_1 \int \frac{V_1 \cos(r, s)}{r^2} d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots + a_n \int \frac{V_n \cos(r, s)}{r^2} d\tau_1 + \ldots \tag{53}$$

Опредѣливъ, подобно предыдущему, по даннымъ задачи коэффиціенты $a_s (s=0, 1, 2, \ldots, n-1)$, получимъ приближенное выраженіе $U_1(\alpha, \beta, \gamma)$, отбросивъ въ равенствѣ (53) всѣ члены, слѣдующіе за $(n-1)$'ымъ.

15. Переходимъ теперь къ главной цѣли нашего изслѣдованія: къ задачѣ о разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

Пусть f есть заданная функція координатъ.

Положимъ

$$f = A_0 + A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_p V_p + R_p,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau, \quad A_s = \int f V_s d\tau. \qquad (s=1, 2, \ldots)$$

Если f есть конечная и непрерывная функція координатъ внутри области (D), то по теоремѣ V-ой

$$\lim_{p=\infty}\int R_p^2 d\tau = 0.$$

Если рядъ

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s \tag{54}$$

сходится и представляетъ непрерывную функцію координатъ, то $\lim\limits_{p=\infty} R_p$ есть также непрерывная функція координатъ, и мы можемъ писать

$$\lim_{p=\infty}\int R_p^2 d\tau = \int \lim_{p=\infty} R_p^2 d\tau = \int (\lim_{p=\infty} R_p)^2 d\tau = 0.$$

При этомъ необходимо

$$\lim_{p=\infty} R_p = 0,$$

и мы получаемъ

$$f = A_0 + A_1 V_1 + A_2 V_2 + \ldots + A_n V_n + \ldots$$

Рядъ (54) представитъ непрерывную функцію координатъ, если онъ сходится равномѣрно.

Такимъ образомъ можно считать доказанной слѣдующую теорему:

Теорема XVIII. *Рядъ*

$$A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s,$$

гдѣ

$$A_0 = \frac{1}{D}\int f d\tau\,, \qquad A_s = \int f V_s d\tau\,, \qquad (s=1,2,\ldots)$$

а D есть объемъ области (D), представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ второго рода всякій разъ, когда онъ сходится равномѣрно (хотя бы и не абсолютно).

Сопоставляя эту теорему съ теоремой II-ой, выводимъ слѣдующую:

Теорема XIX. *Всякая функція f координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяющая двумъ условіямъ*

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ вида

$$f = A_0 + \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s.$$

16. Точно такія же теоремы могутъ быть доказаны и для гармоническихъ функцій перваго рода U_s.

Такъ, пользуясь теоремой VII, безъ труда выводимъ слѣдующую:

Теорема XX. *Рядъ*

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s,$$

гдѣ

$$A_s = \int f U_s d\tau\,, \qquad (s=1,2,\ldots)$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ перваго рода всякій разъ, когда онъ сходится равномѣрно (хотя бы и не абсолютно).

Сопоставляя, наконецъ, эту теорему съ теоремой I-ой выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XXI. *Всякая функція f координатъ, конечная и непрерывная внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ и удовлетворяющая только двумъ условіямъ*

$$f = 0\,, \qquad \Delta f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

разлагается въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ вида

$$f = \sum_{s=1}^{\infty} A_s U_s.$$

17. Изслѣдованія послѣдней части нашей работы значительно подвигаютъ впередъ рѣшеніе вопроса о разложеніи данной функціи въ ряды по гармоническимъ функціямъ (перваго и второго рода).

Какъ было показано въ первой части статьи, мы могли до сихъ поръ на основаніи изысканій H. Poincaré и тѣхъ, которыя приведены мною въ статьяхъ: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ“ и „О дифференціальныхъ уравненіяхъ Математической Физики“, утверждать, что разложеніе данной функціи f по функціямъ U_s и $V_s (s = 1, 2, \dots)$ возможно, если f конечна и непрерывна внутри области (D) вмѣстѣ со своими производными первыхъ 8-ми порядковъ и удовлетворяетъ въ первомъ случаѣ (при разложеніи по функціямъ U_s) условіямъ

$$f = 0, \qquad \Delta f = 0, \tag{55}$$

на поверхности (S)

$$\Delta_2 f = 0, \qquad \Delta_3 f = 0, \tag{56}$$

а во второмъ (при разложеніи по функціямъ V_s) условіямъ

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0, \tag{55$_1$}$$

на поверхности (S)

$$\frac{\partial \Delta_2 f}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta_3 f}{\partial n} = 0. \tag{56$_1$}$$

Послѣднія теоремы показываютъ, что въ обоихъ случаяхъ достаточно допустить существованіе конечныхъ и непрерывныхъ производныхъ функціи f только до 5-аго порядка (невключительно) и не принимать въ разсчетъ условія (56) въ первомъ (при функціяхъ U_s) и (56_1) во второмъ случаѣ (при функціяхъ V_s).

Есть основаніе предполагать, что и условія

$$\Delta f = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)$$

въ первомъ (при функціяхъ U_s) и

$$\frac{\partial \Delta f}{\partial n} = 0 \qquad \text{на поверхности } (S)$$

во второмъ случаѣ (при функціяхъ V_s) не существенны.

Я позволю себѣ ограничиться этимъ замѣчаніемъ, такъ какъ вполнѣ строгаго доказательства только что высказаннаго предположенія я пока дать не въ состояніи.