Нѣсколько словъ объ Эваристѣ Галуа.

М. А. Тихомандрицкаго.

Мм. гг.!

Въ настоящемъ засѣданіи нашего Общества, мнѣ хотѣлось бы сказать нѣсколько словъ въ память того геніальнаго юноши, безвременной кончинѣ котораго на злополучной дуэли исполнится чрезъ двѣ недѣли ровно 65 лѣтъ.

Вы догадываетесь, конечно, что я намѣренъ говорить объ Эваристѣ Галуа.

На дняхъ Французское Математическое Общество издало отдѣльною брошюрой его „Oeuvres mathématiques“ съ предисловіемъ президента этого общества Эм. Пикара. Это первое, за 65 лѣтъ, отдѣльное изданіе полнаго собранія сочиненій Галуа; раньше, именно въ 1846 г., слѣдовательно чрезъ 14 лѣтъ послѣ его смерти, эти сочиненія были напечатаны Ліувилемъ въ его журналѣ. Какое громадное вліяніе эти спѣшные наброски, какъ ихъ правильнѣе можно назвать, имѣли на развитіе Высшей Алгебры и теоріи группъ вообще, во второй половинѣ и особенно въ концѣ настоящаго столѣтія—это представляетъ общеизвѣстный фактъ, и не о заслугахъ Галуа въ этой области я намѣренъ говорить теперь: есть еще другая область, менѣе извѣстная, гдѣ онъ также далеко опередилъ свое время. Г. Эм. Пикаръ въ своемъ предисловіи, впервые, сколько мнѣ извѣстно, обращаетъ вниманіе на то, что было сдѣлано Галуа въ теоріи самыхъ общихъ Абелевыхъ интеграловъ; этого самаго предмета и я намѣренъ коснуться, чтобы нѣсколько пополнить своими соображеніями указанія Эм. Пикара, что я считаю тѣмъ болѣе необходимымъ, что гг. Бриль и Нётеръ въ своемъ весьма интересномъ и очень подробномъ обозрѣніи „Развитія теоріи алгебраическихъ функцій (и ихъ интеграловъ, какъ слѣдовало-бы прибавить) въ прежнее и новѣйшее время“ *) о Галуа вовсе не упоминаютъ. Рукописей, содер-

*) „Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit“. Bericht erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von D-r A. Brill und D-r M. Noether. Jahresbericht der D. M. V. 3 Bd. 1892—1893. Berlin 1894.

жащихъ изслѣдованія Галуа въ этой области не осталось вовсе; о результатахъ же этихъ изслѣдованій мы знаемъ только изъ письма его къ Огюсту Шевалье, писанному наканунѣ дуэли. Перечень этихъ результатовъ занимаетъ не много болѣе двухъ страницъ: отъ конца 29-й до начала 32-й, въ упомянутомъ новомъ изданіи его математическихъ сочиненій. Вотъ они: имъ найдена была теорема Абеля для интеграловъ, зависящихъ отъ какой угодно алгебраической функціи, опредѣляемой какимъ угодно алгебраическимъ уравненіемъ, а не отъ радикаловъ только; работа Абеля (XII мемуаръ новаго изданія его „Oeuvres“), представленная въ 1826 г. Парижской Академіи Наукъ, ему не могла быть извѣстна, ибо она напечатана только въ 1841 г. въ „Mémoires des Savants Etrangers“; онъ могъ быть только наведенъ на нее тѣмъ, что касательно этого предмета было напечатано Абелемъ и Якоби въ журналѣ Крелля *). Далѣе онъ, подобно Абелю, нашелъ, что есть интегралы, для которыхъ извѣстная сумма ихъ приводится къ постоянной, и которые онъ назвалъ функціями перваго рода; что есть интегралы второго рода, для которыхъ таковая же сумма приводится къ алгебраической функціи, и интегралы третьяго рода, сумма которыхъ приводится къ одному логариѳму. Сверхъ того онъ нашелъ, опередивъ въ этомъ Абеля и Якоби **), что эти интегралы имѣютъ періоды, число которыхъ всегда четное: $2n$, и что число независимыхъ интеграловъ перваго рода равно половинѣ числа періодовъ, и столько же независимыхъ интеграловъ второго рода. *Періоды эти очевидно суть интегралы по сомкнутымъ путямъ*, ибо далѣе онъ говоритъ: „relatives à une même revolution de x ***). Отсюда видно, что онъ разсматривалъ независимую перемѣнную какъ комплексную величину—иначе трудно себѣ представить это „revolution de x“. О полярномъ періодѣ интеграловъ третьяго рода онъ не упоминаетъ. Относительно функціи (интеграла) третьяго рода $\Pi(x, a)$ онъ нашелъ далѣе, что она обладаетъ свойствомъ, выражаемымъ равенствомъ:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = \sum \varphi(a)\psi(x), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

гдѣ $\varphi(a)$ и $\psi(x)$ функціи (интегралы) перваго и второго рода. Это весьма важный моментъ: отсюда одинъ шагъ остается до нормальнаго интеграла третьяго рода, относительно котораго имѣется теорема о пе-

---

*) *Abel.* Oeuvres completes. Мемуары XXI и XXVII перваго тома, и *Jacobi.* Gesammelte Werke. II Bd. Мемуаръ № 1.

**) Мемуаръ Якоби: „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodis, quibus theoria transcendentium Abelianorum inititur“ напечатанъ только въ 1834 г., слѣд. черезъ 2 года послѣ смерти Галуа.

***) Пикаръ же говоритъ: pour les intégrales hyperelliptiques nous n'avons aucune difficulté à comprendre ce qu'il entend par période, mais il en est autrement dans le cas général....

ремѣнѣ параметра съ аргументомъ. Изъ этого равенства получается, замѣчаетъ онъ далѣе, для періода $\Pi(a)$ функціи $\Pi(x, a)$, такое выраженіе:

$$\Pi(a) = \sum \psi \times \varphi(a), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ ψ періодъ $\psi(x)$, относящійся къ тому же сомкнутому пути x (relative à une même revolution de x). Изъ соотношенія (1) можно, говоритъ онъ, получить теоремы аналогичныя Лежандровской въ теоріи эллиптическихъ функцій:

$$FE' + EF' - FF' = \frac{\pi}{2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

т. е. вывести соотношенія между періодами интеграловъ I и II рода, найденныя потомъ Вейерштрассомъ. Все это мѣсто письма къ Шевалье заставляетъ думать, что *Галуа получилъ эти результаты изъ того-же тождества, изъ котораго вывелъ ихъ позднѣе Вейерштрассъ*, (конечно самостоятельно, ибо хотя Braunsberger-Programm вышла въ 1849 г. а сочиненія Галуа напечатаны были въ журналѣ Ліувиля уже въ 1846 г., но тогда на нихъ еще мало было обращено вниманіе, и Вейерштрассъ, занимавшійся этимъ вопросомъ уже задолго до этого времени, живя въ провинціи, могъ и не видѣть этого журнала; да кромѣ того, чтобы оцѣнить и воспользоваться этими строками, надобно уже быть достаточно знакомымъ съ этими вопросами). То обстоятельство, что двое ученыхъ независимо одинъ отъ другого пришли, повидимому, одинаковымъ путемъ къ тѣмъ же результатамъ, много говоритъ въ пользу мнѣнія о натуральности этого пути.

Замѣтимъ еще, что мемуаръ V Абеля, въ которомъ подобное тождество выводится для болѣе общихъ интеграловъ, врядъ ли былъ извѣстенъ Галуа, такъ какъ онъ былъ напечатанъ по норвежски въ мемуарахъ Королевскаго Норвежскаго Общества Наукъ (и не вошелъ даже въ первое изданіе сочиненій Абеля).

Слѣдовательно и *это фундаментальное тождество по всей вѣроятности было найдено имъ самимъ.*

Далѣе Галуа говоритъ о задачѣ умноженія и дѣленія „интегральныхъ функцій“ на цѣлое число p. Онъ нашелъ именно, что уравненіе, дающее дѣленіе періодовъ на p частей, степени $p^{2n} - 1$, и что его группа состоитъ изъ

$$(p^{2n} - 1)(p^{2n} - p) \ldots (p^{2n} - p^{2n-1})$$

размѣщеній (permutation), уравненіе же дающее дѣленіе на p суммы n интеграловъ, степени p^{2n} и рѣшимо въ радикалахъ. Онъ занимался, по его словамъ и преобразованіемъ Абелевыхъ интеграловъ; это мѣсто письма не вполнѣ ясно; но и здѣсь сквозитъ важный законъ сохраненія ранга при раціональныхъ преобразованіяхъ. Ясно выраженное понятіе о рангѣ у него не встрѣчается (у Абеля есть формула для его вычисленія, хотя не для общаго случая), но онъ говоритъ объ интегралахъ съ одинаковымъ числомъ періодовъ, а это число равно удвоенному рангу. Интересно упоминаніе о томъ, что всегда можно преобразовать данный интегралъ въ другой, котораго одинъ періодъ былъ бы въ p разъ меньше, а остальные $2n-1$ тѣ же самые (аналогично съ transformatio prima въ „Fundamenta" Якоби). Далѣе онъ размышлялъ также надъ задачей: найти, какія можно производить перемѣны въ количествахъ и трансцендентныхъ функціяхъ, не нарушая соотношеній между ними. Здѣсь виднѣется зародышъ того, что нѣмецкіе ученые называютъ invariante Darstellung функцій, чѣмъ они стали заниматься уже въ послѣдней трети настоящаго столѣтія.—Такимъ образомъ мы видимъ, что если бы несчастная дуэль не унесла бы этого геніальнаго юношу столь рано въ могилу, давно бы мы имѣли натуральную теорію Абелевыхъ интеграловъ. Дважды естественный ходъ развитія этой теоріи былъ останавливаемъ преждевременными кончинами, одинъ разъ геніальнаго Абеля, другой разъ не менѣе геніальнаго Галуа, и только Вейерштрассу удалось довести эту теорію до извѣстной степени законченности—говорю такъ потому, что науку едва ли когда либо можно будетъ считать вполнѣ законченною.

Справедливо Пикаръ заканчиваетъ свое предисловіе словами:

„Ce n'est pas sans émotion que l'on achève la lecture du testament scientifique de ce jeune homme de vingt ans, écrit la veille du jour ou il devait disparaître dans une obscure querelle. Sa mort fut pour la science une perte immense; l'influence de Galois, s'il eût vécu, aurait grandement modifié l'orientation des recherches mathématiques. Je ne me risquerai pas à des comparaisons perilleuses: Galois a sans doute des égaux parmi les mathématiciens de ce siècle; aucun ne le surpasse par l'originalité et la profondeur de ses conceptions".