Объ опредѣленіи длины въ неэвклидовой геометріи.

В. П. Алексѣевскаго.

Измѣреніе длины въ неэвклидовой геометріи основано на принципѣ: „если три точки A, B, C лежатъ на одной прямой, то разстояніе отъ A до C равно суммѣ разстояній отъ A до B и отъ B до C".

Такому требованію сложное отношеніе четырехъ точекъ не удовлетворяетъ, поэтому за мѣру длины принимается величина пропорціональная логариѳму сложнаго отношенія *).

Не смотря на очевидность этого принципа позволительно требовать доказательства его необходимости, такъ какъ ссылка на то, что онъ заимствуется изъ опыта, врядъ-ли можетъ служить достаточнымъ основаніемъ въ геометріи „неэвклидовой".

Съ другой стороны возникаетъ вопросъ, какъ согласить его съ положеніемъ, что два послѣдовательныхъ перемѣщенія прямой по ея направленію эквивалентны одному перемѣщенію, т. е. съ положеніемъ, что движенія составляютъ группу. Не удивительно ли, что понятіе объ эквивалентности перемѣщеній переводится на аналитическій языкъ въ видѣ алгебраической суммы? Конечно, нѣтъ сомнѣнія въ возможности этого, но рѣчь идетъ о необходимости.

Попытки согласить эти понятія привели меня къ болѣе общему опредѣленію длины. Оказывается, что упомянутый принципъ сводится къ признанію эвклидова постулата для той прямой, которая служитъ масштабомъ. Далѣе, сложное отношеніе, какъ и его логариѳмъ одинаково пригодны для опредѣленія длины, равно какъ и множество другихъ частныхъ случаевъ болѣе общей мѣры.

---

*) *F. Klein.* Nicht-Euklidische Geometrie. Zweiter Abdruck. Göttingen. 1893. S. 67.

**) *Clebsch-Lindemann.* Vorlesungen über Geometrie. Bd. 2. Leipzig. 1891. S. 465.

Эти результаты являются слѣдствіемъ введенія понятія суммы относительно инваріантныхъ точекъ; такое суммованіе есть не что иное, какъ интерпретація инволюціоннаго соотвѣтствія.

I.

Пусть имѣемъ прямую, между точками которой и рядомъ вещественныхъ чиселъ установлено одназначное соотвѣтствіе. Число, соотвѣтствующее точкѣ, называется координатой ея.

Допустимъ, что, при движеніи прямой вдоль нея самой, двѣ точки a и b остаются неподвижными; такія точки будемъ называть *инваріантными*.

Извѣстно, что передвиженіе прямой по ея направленію можетъ быть разсматриваемо, какъ преобразованіе, опредѣляемое уравненіемъ:

$$\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b} = \mu, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ c координата нѣкоторой точки до передвиженія прямой, x координата точки, съ которой первая совпадаетъ послѣ перемѣщенія прямой, μ параметръ, характеризующій величину этого перемѣщенія.

Координаты c и x опредѣляютъ начало и конецъ нѣкотораго отрѣзка прямой.

Изъ сказаннаго не трудно вывести опредѣленіе равенства двухъ отрѣзковъ одной и той-же прямой.

Какое бы понятіе мы ни соединяли со словомъ „длина", какъ-бы ни измѣрялось разстояніе, два отрѣзка одной и той-же прямой съ разными началами c и y и разными концами x и z будутъ равны, когда имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b} = \frac{y-b}{y-a} \cdot \frac{z-a}{z-b}. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Отсюда обнаруживается, что всякій отрѣзокъ можно замѣнить ему *равнымъ*, начало котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ. Положивъ въ предыдущемъ равенствѣ $c=0$, находимъ:

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b} = \frac{y-b}{y-a} \cdot \frac{z-a}{z-b}. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Такимъ образомъ координата x характеризуетъ отрѣзокъ ox равный yz; одновременно, x можетъ замѣнить и параметръ μ, въ силу одназначной зависимости между ними.

Равенство (3) можетъ быть истолковано иначе.

Пусть прямой сообщено перемѣщеніе, такъ что начало координатъ 0 перешло въ y; затѣмъ той-же прямой сообщено новое перемѣщеніе, равное перемѣщенію отъ 0 до x; требуется опредѣлить перемѣщеніе эквивалентное обоимъ предыдущимъ. Обозначимъ положеніе 0 послѣ этого перемѣщенія чрезъ z. Ясно, что перемѣщеніе отъ y до z должно быть равно перемѣщенію отъ 0 до x. Выразивъ это заключеніе аналитически, придемъ къ равенству (3), откуда

$$z = \frac{ab(x+y)-(a+b)xy}{ab-xy} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Если-бы существовалъ только единственный способъ установленія однозначнаго соотвѣтствія между точками прямой и рядомъ чиселъ, то для сужденія о величинахъ отрѣзковъ, имѣющихъ одно и то-же начало въ 0, достаточно было-бы назвать координаты ихъ концовъ. Поэтому для прямыхъ съ однѣми и тѣми-же инваріантными точками a и b и съ тождественной нумераціей точекъ *подъ словомъ длина отрѣзка, имѣющаго начало въ 0, можно разумѣть координату* конца его.

Согласившись съ такимъ терминомъ, найдемъ въ формулѣ (4) рѣшеніе вопроса: по даннымъ длинамъ x и y двухъ отрѣзковъ найти длину отрѣзка эквивалентнаго имъ обоимъ.

Другими словами, формула (4) представляетъ опредѣленіе сложенія длинъ отрѣзковъ одной и той-же прямой; координату z мы будемъ называть *суммой x и y относительно инваріантныхъ точекъ a и b.*

Эти опредѣленія вполнѣ согласуются съ понятіями эвклидовой геометріи; предположивъ, что инваріантныя точки совпадаютъ и удалены въ безконечность, получаемъ

$$z = x + y.$$

Не трудно перейти теперь къ понятію о разности относительно инваріантныхъ точекъ. Очевидно такою разностью отрѣзковъ z и y будетъ x, при чемъ

$$x = \frac{ab(z-y)}{ab-(a+b)y+zy}.$$

Тотъ-же результатъ мы получимъ и изъ рав. (3), а это приводитъ къ такому заключенію.

Такъ какъ координатами z, y опредѣляется отрѣзокъ съ началомъ въ y и концомъ въ z, а x выражаетъ *длину* равнаго ему отрѣзка, то заключаемъ: *длина отрѣзка равняется разности координатъ его конца и начала, разности относительно инваріантныхъ точекъ.*

Теперь вернемся къ равенству (2). Приравнявъ каждую часть его выраженію:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b},$$

видимъ, что u представляетъ длину каждаго изъ разсматриваемыхъ отрѣзковъ (c, x) и (y, z); слѣдовательно, опредѣленіе равенства двухъ отрѣзковъ, данное выше, сводится къ признанію равенства ихъ длинъ.

До сихъ поръ мы разсматривали отрѣзки, имѣющіе одно и то же направленіе. Чтобы составить себѣ понятіе о равныхъ, но противоположныхъ отрѣзкахъ, полагаемъ, что ихъ сумма $z=0$; слѣдовательно, такіе отрѣзки связаны соотношеніемъ:

$$y=-\frac{abx}{ab-(a+b)x}.$$

Изъ того же равенства (4) находимъ зависимость между отрѣзками, сумма которыхъ равна безконечности, именно:

$$ab-xy=0.$$

Наконецъ, если $x=a$ или b, то, каково бы ни было y, сумма ихъ z будетъ $=a$ или b: при прибавленіи къ отрѣзку a какого угодно отрѣзка сумма остается a. Вотъ это-то свойство и можетъ служить объясненіемъ причины, почему инваріантныя точки обыкновенно называются безконечно-удаленными.

Не трудно вывести формулы умноженія и дѣленія отрѣзковъ.

Полагая въ рав. (3) $y=x$, находимъ

$$\frac{z-a}{z-b}=\frac{b}{a}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2.$$

Обобщая этотъ результатъ, находимъ, что сумма m отрѣзковъ равныхъ x опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{z-a}{z-b}=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^m.$$

Представивъ себѣ, что сумма n отрѣзковъ равныхъ u тоже равна z, послѣ несложныхъ преобразованій найдемъ формулу для вычисленія u въ функціи x:

$$u=ab\,\frac{\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}-1}{a\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}-b}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Таково выраженіе отрѣзка „пропорціональнаго" отрѣзку x; коэффиціентъ пропорціональности равенъ $\frac{m}{n}$. Такой отрѣзокъ удобно изображать символически такъ

$$u=\frac{m}{n}(x).$$

Согласуется-ли этотъ выводъ съ эвклидовой геометріей? Чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ равенство (5) въ видѣ:

$$\frac{m}{n}=\frac{\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b}\right)}{\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)}.$$

Полагая здѣсь $a=b=\infty$, находимъ

$$\frac{m}{n}=\frac{u}{x}.$$

Выведенные результаты относятся къ гиперболической геометріи, такъ какъ было предположено, что a и b числа вещественныя и различныя; чтобы перейти къ эллиптической геометріи достаточно, какъ извѣстно, принять, что координаты инваріантныхъ точекъ—числа комплексныя сопряженныя.

Сдѣлавъ допущеніе $a=b$, мы должны получить формулы, относящіяся къ параболической геометріи; но основное равенство (2) при этомъ обращается въ тождество; тѣмъ не менѣе слѣдствія, выведенныя изъ него, сохраняютъ смыслъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что вмѣсто параметра μ, можемъ взять другой, находящійся съ нимъ въ однозначномъ соотвѣтствіи. Вычтя изъ обѣихъ частей равенства (1) по единицѣ, приведемъ результатъ къ виду

$$\frac{c-x}{(c-a)(x-b)}=\frac{\mu-1}{b-a}.$$

Слѣдовательно, если принять за параметръ число v, опредѣляемое изъ формулы

$$v=\frac{\mu-1}{b-a},$$

то равенство (2) можно будетъ замѣнить слѣдующимъ:

$$\frac{c-x}{(c-a)(x-b)}=\frac{y-z}{(y-a)(z-b)},$$

которое уже не обращается въ тождество при $a=b$. Конечно въ этомъ случаѣ v должно разсматривать, какъ предѣлъ опредѣляющаго его отношенія.

II.

До сихъ поръ мы имѣли въ виду тождественныя прямыя, или, лучше сказать, тождественные ряды точекъ; теперь переходимъ къ общему случаю.

Прямыя могутъ различаться инваріантными точками и нумераціей точекъ, поэтому, о совмѣщеніи ихъ и рѣчи быть не можетъ; между ними возможно только соотвѣтствіе.

Положимъ, что мы нашли способъ установить однозначное соотвѣтствіе между точками разныхъ прямыхъ; положимъ, что начала координатъ ихъ другъ другу соотвѣтствуютъ и координатѣ x одной прямой соотвѣтствуетъ x' второй, x'' третьей и т. д., словомъ, отрѣзки ox, ox', ox'' другъ другу соотвѣтствуютъ. Если условиться считать такіе отрѣзки имѣющими равныя длины, то будетъ безразлично, которыя изъ чиселъ x, x', x'', ... принять за длину. Чтобы избѣгнуть путаницы, удобно избрать одну изъ прямыхъ за основную, за масштабъ, и названіе длины отнести къ координатамъ ея точекъ.

Такимъ образомъ, *длиною отрѣзка съ началомъ въ 0 называется координата конца соотвѣтственнаго отрѣзка масштаба*, поэтому число выражающее длину отрѣзка будетъ различно, смотря потому, на какомъ масштабѣ производится отсчитываніе. Это опредѣленіе обращается въ прежнее, когда масштабъ тождествененъ съ измѣряемой прямой.

При такомъ опредѣленіи длина отрѣзка ox есть функція $F(x)$ координаты x, относительно которой намъ пока извѣстно, что $F(0)=0$.

Остается указать, какимъ образомъ можно установить соотвѣтствіе между точками измѣряемой прямой и точками масштаба. Мы достигаемъ этого предположеніемъ: *длина суммы двухъ отрѣзковъ равняется суммѣ ихъ длинъ*. Это предположеніе напоминаетъ принципъ слагаемости, но разница въ томъ, что здѣсь сложеніе на прямой и на масштабѣ совершается относительно ихъ инваріантныхъ точекъ.

Пусть инваріантныя точки прямой суть a и b, координаты концовъ двухъ данныхъ отрѣзковъ x, y, кордината ихъ суммы z.

Предположимъ, что α и β суть инваріантныя точки масштаба; тогда длины предыдущихъ отрѣзковъ будутъ $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ и по условію, въ силу извѣстной теоремы сложенія, два слѣдующія равенства:

$$F(z) = \frac{\alpha\beta[F(x)+F(y)] - (\alpha+\beta)F(x)F(y)}{\alpha\beta - F(x)F(y)}$$

$$z = \frac{ab(x+y) - (a+b)xy}{ab - xy}$$

существуютъ совмѣстно.

Такимъ образомъ, опредѣленіе длины сводится къ опредѣленію вида функціи $F(x)$.

Изъ разсмотрѣнія предыдущихъ равенствъ слѣдуетъ, что z появляется изъ x какъ результатъ линейной подстановки

$$\begin{pmatrix} ab-(a+b)y, & aby \\ -y \quad , & ab \end{pmatrix}$$

и одновременно $F(x)$ подвергается линейному преобразованію

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta-(\alpha+\beta)F(y), & \alpha\beta F(y) \\ -F(y) \quad , & \alpha\beta \end{pmatrix},$$

а изъ условія $F(0)=0$ вытекаетъ, что $F(y)$ становится безконечно-малой величиной одновременно съ y. Изъ этихъ двухъ положеній заключаемъ, что безконечно-малому преобразованію x отвѣчаетъ безконечно-малое преобразованіе $F(x)$.

Такой выводъ намѣчаетъ путь для составленія дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ $F(x)$.

Составивъ приращенія

$$F(z) - F(x) = F(y)\frac{[F(x)-\alpha][F(x)-\beta]}{\alpha\beta - F(x)F(y)},$$

$$z - x = y\frac{(x-a)(x-b)}{ab-xy},$$

по раздѣленіи ихъ, получимъ:

$$\frac{F(z)-F(x)}{z-x} = \frac{F(y)}{y}\cdot\frac{[F(x)-\alpha][F(x)-\beta]}{(x-a)(x-b)}\cdot\frac{ab-xy}{\alpha\beta - F(x)F(y)}.$$

Переходя къ предѣлу, при уменьшеніи y до нуля, находимъ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(0)\frac{[F(x)-\alpha][F(x)-\beta]}{(x-a)(x-b)}\frac{ab}{\alpha\beta}.$$

Очевидно, что постоянное $F'(0)$ должно быть отлично отъ нуля; обозначимъ его чрезъ k.

Интегрируя полученное уравненіе отъ 0 до x, получимъ:

$$F(x) = \alpha\beta \frac{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda} - 1}{\alpha\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda} - \beta} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ

$$\lambda = k\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}.$$

Таково выраженіе длины отрѣзка ox, когда a не равно b.

Сопоставимъ этотъ результатъ съ формулой (5) предыдущаго §.

Полагая $\alpha = a$, $\beta = b$, получимъ $\lambda = k$ и

$$F(x) = ab \frac{\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{k} - 1}{a\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{k} - b}.$$

Отсюда видимъ, что, не смотря на одинаковость координатъ трехъ соотвѣтственныхъ точекъ o, a, b, $F(x)$ отлично отъ x. Произвольное постоянное k даетъ возможность установить соотвѣтствіе любой точки c данной прямой съ произвольною точкою γ на масштабѣ. Сравнивая теперь этотъ выводъ съ формулой (5) предыдущаго §, убѣждаемся, что *мѣра длины ox на масштабѣ съ инваріантными точками a и b выражается отрѣзкомъ равнымъ отрѣзку $k.(x)$ данной прямой.*

Слѣдовательно, постоянное $F'(0) = k$ должно разсматривать какъ коэффиціентъ пропорціональности.

Въ общемъ случаѣ, при неравенствѣ координатъ инваріантныхъ точекъ прямой и масштаба, дѣло обстоитъ нѣсколько иначе.

Формула (1) является какъ результатъ исключенія u изъ равенствъ

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{u-a}{u-b} = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda},$$

и

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{F(x)-\alpha}{F(x)-\beta} = \frac{b}{a} \cdot \frac{u-a}{u-b},$$

изъ коихъ первое показываетъ, что u есть координата точки $\lambda.(x)$ на данной прямой; второе, что точки масштаба $F(x)$ находятся въ проективномъ соотвѣтствіи съ точками $\lambda.(x)$ данной прямой. Ясно, что это проективное соотвѣтствіе устанавливается тремя парами точекъ: (a, α), (b, β), (o, o).

Такимъ образомъ: *мѣра длины ох выражается отрѣзкамъ масштаба проективно-соотвѣтственнымъ съ отрѣзкомъ $\lambda.(x)$ данной прямой.*

Предположимъ теперь, что инваріантныя точки масштаба совпадаютъ, т. е. $\alpha = \beta$. Тогда дифференціальное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{\alpha^2 dF}{(F-\alpha)^2} = \frac{k\,ab\,dx}{(x-a)(x-b)}.$$

Откуда

$$F(x) = \frac{\alpha\lambda \log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)}{\lambda \operatorname{og}\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

при чемъ

$$\lambda = \frac{k\,ab}{a-b}.$$

Теперь мы имѣемъ возможность выяснить значеніе предположенія, которое принимается какъ принципъ въ неэвклидовой геометріи.

Предположимъ, что инваріантныя точки масштаба не только совпадаютъ, но и удалены въ безконечность; т. е. примемъ, что $\alpha = \infty$, тогда

$$F(x) = \lambda \log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и теорема сложенія на масштабѣ обращается въ слѣдующую:

$$F(z) = F(x) + F(y).$$

Выраженіе (3) представляетъ обыкновенное опредѣленіе мѣры длины въ неэвклидовой геометріи. Выводъ его основываютъ на принципѣ слагаемости; очевидно: *принципъ слагаемости равносиленъ принятію за масштабъ такой прямой, инваріантныя точки которой совпадаютъ и удалены въ безконечность*; другими словами, въ данномъ случаѣ масштабъ есть не что иное какъ эвклидова прямая.

Итакъ *принципъ слагаемости длинъ и постулатъ Эвклида представляютъ одно и то-же предположеніе, выраженное въ различной формѣ.*

Общее опредѣленіе длины, данное выше, даетъ возможность измѣрить длину отрѣзка какой угодно прямой гиперболической, эллиптической или параболической на какомъ угодно масштабѣ и мы видимъ, что нѣтъ никакой необходимости принимать за масштабъ эвклидову прямую; такой выборъ можно оправдывать удобствомъ, привычкой, но отнюдь не необходимостью. Ясно также, что принципъ слагаемости нельзя разсматривать, какъ начало, непосредственно вытекающее изъ самаго понятія объ измѣреніи.

Формула (3) есть частный случай (1); легко убѣдиться, что и функція обратная (3) также представляетъ длину.

Это заключеніе основывается на простомъ замѣчаніи, что *между координатой конца измѣряемаго отрѣзка и его длиною существуетъ взаимность*: координаты масштаба выражаютъ длины соотвѣтственныхъ отрѣзковъ данной прямой и, обратно, координаты точекъ данной прямой представляютъ длины отрѣзковъ масштаба. Въ частномъ случаѣ при предположеніи, что данная прямая есть эвклидова, а машстабъ гиперболическая прямая, т. е. полагая $a = b = \infty$, получаемъ:

$$F(x) = \alpha\beta \, \frac{e^{\lambda x} - 1}{\alpha e^{\lambda x} - \beta},$$

при чемъ

$$\lambda = \frac{k(\alpha - \beta)}{\alpha\beta}.$$

Нѣкоторые частные случаи этой формулы заслуживаютъ упоминанія.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = +1$, $k = 1$, тогда

$$F(x) = \operatorname{tgh} x,$$

гиперболическій тангенсъ есть длина эвклидова отрѣзка на гиперболическомъ масштабѣ.

Если же $\alpha = +i$, $\beta = -i$, $k = 1$, длина опредѣляется равенствомъ:

$$F(x) = \operatorname{tg} x,$$

тангенсъ эвклидова отрѣзка x есть его длина на эллиптическомъ масштабѣ.

Въ силу взаимности координаты съ длиною, функціи $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctgh} x$ представляютъ эвклидовы длины эллиптическаго и гиперболическаго отрѣзковъ, при извѣстномъ выборѣ инваріантныхъ точекъ.

Простѣйшія выраженія длины, конечно, будутъ раціональныя функціи координатъ. Полученіе ихъ не представляетъ затрудненія благодаря произвольности постояннаго k. Если $a = b$, $\alpha = \beta$, то можно выбрать k такъ, чтобы $\lambda = 1$; для этого должно быть

$$k = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} : \frac{ab}{a - b};$$

тогда формула (1) обращается въ такую:

$$F(x) = \frac{\alpha\beta\,(a - b)\,x}{(a\beta - \alpha b)x + ab\,(\alpha - \beta)}.$$

Если же $a = b$, $\alpha = \beta$,

$$F(x) = \frac{ka\alpha x}{(ka - \alpha)x + a\alpha}.$$

Итакъ, во всякой геометріи можно выбрать масштабъ такъ, что длина выражается дробно-линейной функціей координаты, при чемъ *мѣра длины выражается отрѣзкомъ масштаба проективно-соотвѣтственнымъ съ измѣряемымъ отрѣзкомъ.*

Наконецъ, въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда

$$a\beta - \alpha b = 0,$$

находимъ

$$F(x) = kx,$$

при чемъ

$$k = \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}.$$

То же имѣетъ мѣсто и въ параболической геометріи.

Слѣдовательно, *во всякой геометріи гиперболической, эллиптической и параболической можно выбрать масштабъ такъ, что мѣра длины будетъ пропорціональна самому отрѣзку.*

III.

Опредѣленіе длины, котораго мы придерживались до сихъ поръ, не представляетъ еще полнаго обобщенія, мы удержали *особенность длины уничтожаться одновременно съ отрѣзкомъ.* Необходимость устранить это ограниченіе обнаруживается непосредственно изъ предыдущихъ формулъ: онѣ теряютъ смыслъ при допущеніи, что одна или обѣ инваріантныя точки прямой или масштаба совпадаютъ съ началомъ координатъ.

Для объясненія причины этого обстоятельства надо напомнить, что всѣ выводы основаны на движеніи прямой по ея направленію. Чтобы судить о величинѣ перемѣщенія, мы разсматривали перемѣщенія начала координатъ и тѣмъ самымъ устранили возможность его совпаденія съ инваріантными точками. Поэтому для изслѣдованія тѣхъ случаевъ, когда начало неподвижно, необходимо видоизмѣнить формулы, принявъ за начало отрѣзковъ точку, отличную отъ начала координатъ и не совпадающую съ другой неподвижной точкой прямой.

Разсмотримъ сначала одинъ частный случай, когда инваріантныя точки прямой суть $a = 0$, $b = \infty$. Положимъ, что отъ нѣкотораго перемѣщенія прямой точка c совпала съ x, въ то же время точка y совпала съ z.

Выраженіе равенства перемѣщеній получимъ изъ формулы (2) § 1, положивъ въ ней $a=0$, $b=\infty$, а именно:

$$\frac{x}{c}=\frac{z}{y},$$

при чемъ каждое изъ этихъ отношеній равно параметру перемѣщенія μ.

Пользуясь этимъ равенствомъ можно, по даннымъ началу y и концу z отрѣзка, найти конецъ равнаго ему отрѣзка, имѣющаго начало въ c.

Такъ какъ перемѣщеніе точки c до точки x вполнѣ характеризуется координатой x, то *длиной отрѣзка cx можно называть координату конца отрѣзка x*; слѣдовательно, предыдущая формула даетъ возможность опредѣлить длину всякаго отрѣзка прямой съ инваріантными точками 0 и ∞. Конечно, для упрощенія лучше всего принять $c=1$.

Напомнимъ, что теорема сложенія на прямой выражается тѣмъ же самымъ равенствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если сообщить прямой перемѣщеніе отъ c до y, потомъ перемѣщеніе отъ c до x, то точка y перейдетъ въ z, такъ какъ отрѣзки cx и yz должны быть равны; слѣдовательно равенство

$$z=\frac{xy}{c}$$

представляетъ теорему сложенія въ данномъ частномъ случаѣ.

Между новымъ опредѣленіемъ длины и прежнимъ нѣтъ существеннаго различія, хотя теперь длиной отрѣзка, не имѣющаго протяженія, будетъ c, число отличное отъ нуля. Не трудно догадаться, что существуетъ масштабъ на которомъ длины отрѣзковъ разсматриваемой прямой измѣряются посредствомъ

$$x-c,$$

такъ что одновременное уничтоженіе отрѣзка и его длины вновь возстановляется. Инваріантныя точки этого масштаба будутъ $-c$ и ∞, а теорема сложенія принимаетъ видъ:

$$F(z)=F(x)+F(y)+\frac{1}{c}F(x)F(y).$$

Сказанное справедливо вообще, какъ это видно изъ тождества:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{b-c}{a-c}\cdot\frac{(x-c)-(a-c)}{(x-c)-(b-c)},$$

которое выражаетъ, что *длина x на масштабѣ* (a, b) *при отсчитываніи отъ точки c равна длинѣ $x-c$ на масштабѣ* $(a-c, b-c)$ *при отсчитываніи отъ нуля.* Этотъ выводъ остается неизмѣннымъ и при допущеніи, что 0 есть инваріантная точка какъ на прямой, такъ и на масштабѣ, лишь-бы только c было отлично отъ нуля.

Итакъ, опредѣленіе длины слѣдуетъ дополнить замѣчаніемъ, что вообще нѣтъ надобности принимать начало координатъ за начало отрѣзковъ какъ на измѣряемой прямой, такъ и на масштабѣ, вслѣдствіе чего *длина отрѣзка безъ протяженія можетъ изображаться какимъ угодно числомъ.*

Примемъ точку c за начало отрѣзковъ на прямой (a, b) и точку γ за начало на масштабѣ (α, β). Обозначимъ длину отрѣзка cx чрезъ $F(x)$, тогда по условію будетъ:

$$F(c)=\gamma.$$

На основаніи формулы (2) § 1 теорема сложенія на прямой приметъ видъ:

$$z=\frac{ab(x+y)-(a+b)xy-c(ab-xy)}{ab-xy+c(x+y-a-b)}.$$

Аналогичная формула для масштаба получится изъ предыдущей, замѣняя c, a, b, x, y, z соотвѣтственно чрезъ γ, α, β, $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$. Пользуясь этими зависимостями не трудно приложить пріемъ § 2 для составленія дифференціальнаго уравненія, опредѣляющаго $F(x)$: но можно обойтись и безъ этихъ вычисленій.

Мы только что установили связь между длинами на масштабахъ c, a, b и o, $a-c$, $b-c$; извѣстно, что вторая прямая есть преобразованіе первой вида:

$$x'=x-c.$$

Пусть искомая длина ξ отрѣзка cx вычисляется изъ уравненія

$$\xi=\Phi(x,\ c,\ a,\ b,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta).$$

Преобразовавъ прямую x въ $x-c$ и ξ въ $\xi-\gamma$, получимъ:

$$\xi-\gamma=\Phi(x-c,\ o,\ a-c,\ b-c,\ o,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\gamma),$$

такъ что $\xi-\gamma$ будетъ длиною $x-c$, при томъ начала отрѣзковъ на обѣихъ прямыхъ совпадаютъ съ началами координатъ. Слѣдовательно, это равенство отличается отъ формулы (1) § 2 только новыми обозначеніями; введя ихъ въ эту формулу и написавъ $F(x)$ вмѣсто ξ, получимъ:

$$F(x) = \gamma + (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \frac{\left(\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda} - 1}{(\alpha - \gamma)\left(\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda} - (\beta - \gamma)} \ldots (1)$$

Соотвѣтственный показатель λ имѣетъ видъ:

$$\lambda = k \frac{(a-c)(b-c)}{a-b} \cdot \frac{\alpha - \beta}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)},$$

при чемъ постоянное k отлично отъ прежняго.

Едва-ли необходимо упоминать, что при $c = \infty$ или $\gamma = \infty$ предыдущее преобразованіе должно быть замѣнено преобразованіемъ типа $\frac{1}{x}$.

Если-же $\alpha = \beta$, то предыдущая формула приводится къ виду:

$$F(x) = \frac{\alpha\lambda \log\left(\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right) + \gamma(\alpha - \gamma)}{\lambda \log\left(\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right) + (\alpha - \gamma)} \ldots\ldots (2)$$

и

$$\lambda = \frac{k(a-c)(b-c)}{a-b}$$

Разсмотримъ теперь одинъ изъ тѣхъ случаевъ, когда формула (1) § 2 становится непригодной, именно положимъ $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $\gamma = 1$. Выраженіе длины будетъ такое:

$$F(x) = \left(\frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda},$$

когда $a \gtrless b$; если же $a = b$, то

$$F(x) = e^{k(c-a)\frac{x-c}{x-a}}.$$

Слѣдовательно, простѣйшими выраженіями длины будутъ функціи:

$$x^k, \quad e^x.$$

Если-же выбрать постоянное k такъ, чтобы $\lambda = 1$, то первая изъ двухъ послѣдихъ формулъ даетъ:

$$F(x) = \frac{c-b}{c-a} \cdot \frac{x-a}{x-b}.$$

Правая часть этого выраженія есть не что иное какъ параметръ μ, характеризующій величину перемѣщенія отъ c до x; слѣдовательно, *параметръ перемѣщенія есть длина отрѣзка* cx *прямой* (c, a, b) *на масштабѣ* $(1, o, \infty)$.

Такимъ образомъ утвержденіе, что параметръ μ не годится для измѣренія длины отрѣзковъ, можемъ считать лишеннымъ основанія.

IV.

Вопросъ, которымъ мы занимались находится въ тѣсной связи съ одной задачей проективной геометріи.

Пусть имѣемъ двѣ прямыя, точки которыхъ находятся въ инволюціонномъ соотвѣтствіи. Положимъ, что a и b суть сопряженныя точки на одной прямой, α и β — на другой. Какое соотвѣтствіе можно установить между тѣми точками этихъ прямыхъ, которыя находятся внѣ отвѣзковъ (a, b) и (α, β)?

Возьмемъ еще двѣ пары сопряженныхъ точекъ (x, y) (c, z) на первой прямой и двѣ пары такихъ-же точекъ на второй: (ξ, η) (γ, ζ).

По опредѣленію

$$\frac{(c-x)(y-a)(b-z)}{(z-y)(x-b)(a-c)} = -1,$$

$$\frac{(\gamma-\xi)(\eta-\alpha)(\beta-\zeta)}{(\zeta-\eta)(\xi-\beta)(\alpha-\gamma)} = -1.$$

Требуется опредѣлить зависимость между соотвѣтственными точками ξ и x, предполагая, что точки c и γ другъ другу соотвѣтствуютъ.

Первое изъ этихъ условій выражаетъ не что иное, какъ то, что z есть сумма отрѣзковъ x, y, отсчитываемыхъ отъ c, сумма относительно инваріантныхъ точекъ a, b; это видно изъ послѣдней формулы § 1. Второе выражаетъ то же свойство на другой прямой. Слѣдовательно, вопросъ, который требуется рѣшить, отличается отъ опредѣленія длины въ неэвклидовой геометріи только формой выраженія, а потому искомая зависимость ξ отъ x рѣшается формулами, данными въ предыдущемъ; самое общее его рѣшеніе даетъ формула (1) § 3.