Sur le problème de la distribution de l'électricité.

Par W. Stekloff.

Dans une Note, inserée dans le № 21 (22 November 1897) des Comptes Rendus, M. Liapounoff a indiqué une méthode pour résoudre le problème de la distribution électrostatique sous certaines conditions par rapport à la surface du conducteur.

Dans cette Note nous allons indiquer une autre méthode de la solution du même problème, présentant une modification convenable de la méthode connue de M. Robin et toute différente de celle de M. Liapounoff.

Soit (S) une surface fermée convexe à courbure finie, determinée et différente de zéro.

Désignons par s un point de la surface (S), par M un point quelconque. Soit r la distance du point s au point M, ds l'élément de la surface (S), n la direction de la normale extérieure à cette surface. Soit enfin ϱ_0 une fonction quelconque finie et continue en tout point de (S).

Prenons une fonction V du point M finie et continue avec ses dérivées à l'intérieur et à l'extérieur du domaine (D), limité par (S).

Désignons par $\frac{\partial V_s}{\partial n}$ (ou simpl. $\frac{\partial V}{\partial n}$) la valeur de l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n, y)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n, z) \tag{1}$$

au point s, par $\frac{\partial V_{is}}{\partial n}$ (ou simpl. $\frac{\partial V_i}{\partial n}$) la limite, vers laquelle tend (1), quand le point M tend vers s, en étant à l'intérieur de (S), par $\frac{\partial V_{es}}{\partial n}$

(ou simpl. $\frac{\partial V_e}{\partial n}$) la limite, vers laquelle tend (1), quand le point M tend vers s, en étant à l'extérieur de (S) *).

Formons la suite d'intégrales

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \varrho_0 \frac{1}{r}\, ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}\frac{1}{r}\, ds. \qquad (k=2,3,\ldots) \qquad (2)$$

V_k sont des fonctions du point M.

Supposons que M est un point de la surface (S).

Désignons par ψ l'angle de la droite $\overline{Ms}$ avec la normale n en M et par φ l'angle de la droite $\overline{Ms}$ avec la normale n en s.

On aura

$$\varrho_k = \frac{1}{2\pi}\int \varrho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r^2}\, ds, \qquad (k=1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

où

$$\varrho_{k-1} = \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}. \qquad (k=2,3,\ldots)$$

Reprenons maintenant la fonction V et posons

$$W = \int V_i \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds, \quad P = \int \frac{\partial V_i}{\partial n}\frac{1}{r}\, ds.$$

Supposons que V satisfait à l'équation de Laplace.

On a

$$V = \frac{1}{4\pi} W + \frac{1}{4\pi} P$$

pour chaque point M à l'intérieur de (S).

En supposant que M tend vers s et en passant à la limite, nous avons

$$V_{is} = \frac{1}{2\pi} W_s + \frac{1}{2\pi} P_s.$$

En appliquant cette formule à la fonction V_{k-1} et en tenant compte des égalités (2) et (3), on trouve

$$V_k = \frac{1}{2\pi}\int V_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds \qquad (k=2,3,\ldots)$$

en tous les points de la surface (S).

---

*) Nous supposons que M reste constamment sur la normale à la surface (S) en s.

Soit ϱ_0 une fonction positive. On a

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int v_{k-1} \frac{\cos\varphi}{r^2} ds,$$

v_k étant le module de V_k sur (S).

Soient M_k et m_k le maximum et le minimum de v_k.

On sait que

$$M_k < M_{k-1}, \quad m_k > m_{k-1}, \tag{4}$$

$$\lim_{k=\infty} V_k = \text{const.} \tag{5}$$

Si la courbure de la surface (S) est finie et différente de zéro, on peut assigner une limite supérieure D_1 et une limite inférieure D_0 du rapport

$$\frac{r}{\cos\psi}.$$

Soit en particulier $\varrho_0 = 1$.

Désignons les valeurs correspondantes de V_k par K_k, les valeurs de ϱ_k par I_k.

Soient M_k^0 et m_k^0 le maximum et le minimum de $|K_k|$.

On peut démontrer sans peine que

$$\frac{m_k^0}{D_1} \leqq I_k \leqq \frac{M_k^0}{D_0}. \tag{6}$$

Désignons par

$$I_{sk}^{\gamma}$$

l'intégrale I_k relative au point s et étendue à une portion quelconque γ de la surface (S).

Nous tirerons des égalités (3) à l'aide de la méthode de la moyenne arithmétique de C. Neumann

$$N_k - n_k \leqq (N_{k-1} - n_{k-1}) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{I_{sk}^{\beta}}{I_{sk}} + \frac{I_{s'k}^{\alpha}}{I_{sk}} \right) \right] =$$

$$= (N_{k-1} - n_{k-1})(1 - \tau_k),$$

N_k et n_k étant le maximum et le minimum du rapport

$$\frac{\varrho_k}{I_k}.$$

α et β sont les portions de la surface (S) telles que l'on a

$$\alpha + \beta = S,$$

S étant l'aire de la surface (S).

En tenant compte des inégalités (4) et (6), on peut démontrer que

$$\tau_k > Q \frac{D_0^2}{2D_1^2} \frac{l}{L^2} = \mu, \qquad (\mu < 1)$$

l et L étant le minimum et le maximum de l'intégrale

$$\int \frac{ds}{r},$$

Q le minimum de la somme

$$\int\limits_{\alpha} \frac{ds}{r} + \int\limits_{\beta} \frac{ds}{r_1} {}^{*)}.$$

Par suite

$$N_k - n_k \leqq (M_0 - m_0)(1-\mu)^k = (M_0 - m_0)\lambda^k, \qquad (\lambda < 1)$$

où M_0 et m_0 sont le maximum et le minimum de ϱ_0 sur (S).

Supposons que ϱ_0 satisfait à la condition

$$\int \varrho_0 \, ds = 0.$$

Dans ce cas tous les ϱ_k changent le signe sur (S); il en est de même du rapport

$$\frac{\varrho_k}{I_k}.$$

On a par conséquent pour toutes les valeurs de k [inégalités (4) et (6)]

$$|\varrho_k| \leqq (M_0 - m_0) I_k \lambda^k \leqq (M_0 - m_0) \frac{M_1^0}{D_0} \lambda^k.$$

Donc *la série*

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

---

*) Nous désignons par $\int\limits_{\alpha} \frac{ds}{r}$ et $\int\limits_{\beta} \frac{ds}{r_1}$ l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ relative aux points s et s' et étendue aux portions α et β.

D'après cela formons la fonction

$$V = \frac{1}{2\pi}\int (\lambda\varrho_0 + \lambda^2\varrho_1 + \dots + \lambda^{k+1}\varrho_k + \dots)\frac{1}{r}\,ds,$$

λ étant une constante dont le module est inférieur ou au plus égal à l'unité.

Il est évident que V satisfait aux conditions de la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{à l'intérieur de } (D),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial n} &= \lambda\varrho_0 + (\lambda - 1)[\lambda\varrho_1 + \lambda^2\varrho_2 + \dots + \lambda^k\varrho_k + \dots], \\ \frac{\partial V_e}{\partial n} &= -\lambda\varrho_0 + (\lambda + 1)[\lambda\varrho_1 + \lambda^2\varrho_2 + \dots + \lambda^k\varrho_k + \dots]. \end{aligned}\right\} \text{sur } (S)$$

En posant $\lambda = 1$ nous obtiendrons la solution du problème intérieur de C. Neumann, en posant $\lambda = -1$, la solution du problème extérieur.

Supposons maintenant que ϱ_0 est toujours positif sur (S).

On a

$$\varrho_k' = \frac{1}{2\pi}\int \varrho_{k-1}'\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds,$$

en posant pour abréger

$$\varrho_{k-1}' = \varrho_k - \varrho_{k-1}.$$

D'après ce que nous avons expliqué on peut affirmer que la série

$$\varrho_1' + \varrho_2' + \dots + \varrho_k' + \dots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

Donc ϱ_k tend vers une limite ϱ $(\varrho > 0)$.

En tenant compte des égalités (2) et en passant à la limite, nous avons [d'après (5)]

$$\int \frac{\varrho}{r}\,ds = \text{const.}$$

Par conséquent $\varrho = lim\,\varrho_k$ *est la densité d'une couche superficielle sans action sur un point intérieur.*

Le problème de la distribution de l'électricité est donc résolu pour toutes les surfaces convexes ayant la courbure finie et différente de zéro.

Mais cette dérniere restriction n'a rien d'essentiel.

Les résultats obtenus seront encore vrais, quand la surface (S) contient un nombre fini des portions planes et l'aire des portions, où la courbure est différente de zéro, n'est pas nulle.