Къ задачѣ о равновѣсіи упругихъ изотропныхъ цилиндровъ.

В. А. Стеклова.

(Сообщено въ засѣданіи Харьк. Матем. Общества 24 января 1897 года).

1. Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ указать одно рѣшеніе уравненій равновѣсія упругихъ изотропныхъ цилиндровъ, болѣе общее, чѣмъ извѣстныя до сихъ поръ рѣшенія С. Венана и Клебша.

Изслѣдованіе этого рѣшенія приводитъ къ довольно интереснымъ результатамъ.

Такъ, пользуясь имъ, можно во первыхъ рѣшать нѣкоторые, сколько я знаю, до сихъ поръ не разсматривавшіеся вопросы о равновѣсіи цилиндровъ подъ дѣйствіемъ произвольно заданныхъ силъ, одинаково приложенныхъ къ точкамъ каждаго изъ сѣченій, перпендикулярнаго къ оси цилиндра, а также и подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ болѣе общаго характера.

Во вторыхъ, оно даетъ возможность изслѣдовать условія равновѣсія разсматриваемыхъ тѣлъ при довольно разнообразныхъ гипотезахъ и болѣе общихъ, чѣмъ извѣстныя гипотезы С. Венана и Клебша, относительно распредѣленія такъ называемыхъ напряженій внутри тѣла.

Наконецъ, рѣшеніе, о которомъ идетъ рѣчь, позволяетъ связать теоріи упругихъ массивныхъ стержней С. Венана и массивныхъ упругихъ пластинокъ Клебша, такъ какъ рѣшенія уравненій упругости, соотвѣтствующія этимъ теоріямъ, являются весьма частными случаями того болѣе общаго рѣшенія, которое я имѣю въ виду указать въ предлагаемой работѣ.

2. Прежде чѣмъ приступить къ главной цѣли изслѣдованія считаю не безполезнымъ напомнить читателю основныя положенія, опредѣленія и обозначенія теоріи деформируемыхъ тѣлъ.

Разсмотримъ тѣло (A), матерія котораго заполняетъ нѣкоторую область (D) пространства, ограниченную замкнутой поверхностью (S).

Въ теоріи деформируемыхъ и въ частности упругихъ твердыхъ тѣлъ предполагается, что матерія распредѣляется непрерывно внутри области (D), такъ что плотность ϱ тѣла есть конечная и непрерывная функція координатъ точекъ области (D).

Предполагается далѣе, что между матеріальными точками, непрерывная совокупность которыхъ образуетъ тѣло (A), дѣйствуютъ силы взаимодѣйствія.

Разсмотримъ какую либо часть (B), выдѣленную изъ тѣла (A) и ограниченную замкнутой поверхностью (S_1).

Оставшуюся часть тѣла (A) назовемъ черезъ (C).

Частицы объема (B) находятся подъ дѣйствіемъ силъ взаимодѣйствія частицъ, заключенныхъ въ этомъ объемѣ (B), и частицъ, составляющихъ объемъ (C).

Предполагается, что векторъ и моментъ силъ взаимодѣйствія частицъ объема (B) равны нулю, а силы дѣйствія части (C) на часть (B) замѣняются силами, сплошнымъ образомъ приложенными къ поверхности (S_1).

Пусть $\sum X$, $\sum Y$ и $\sum Z$ суть проекціи на оси координатъ вектора силъ послѣдней категоріи, дѣйствующихъ на площадку Δs поверхности (S_1).

Предполагается, что отношенія

$$\frac{\sum X}{\Delta s}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta s}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta s}$$

стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ при $\Delta s = 0$.

Эти предѣлы обозначаются черезъ

$$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n,$$

гдѣ подъ n разумѣется направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S_1) въ той точкѣ s, въ которую обращается въ предѣлѣ контуръ, ограничивающій площадку Δs.

Такимъ образомъ имѣемъ

$$\lim \frac{\sum X}{\Delta s} = X_n,$$

$$\lim \frac{\sum Y}{\Delta s} = Y_n,$$

$$\lim \frac{\sum Z}{\Delta s} = Z_n.$$

Величины X_n, Y_n и Z_n зависятъ отъ положенія точки s на поверхности (S_1) и отъ предѣльнаго направленія площадки Δs, опредѣляемаго нормалью n къ (S_1) въ точкѣ s, и называются *проекціями на оси координатъ напряженія, отнесеннаго къ единицѣ площади и дѣйствующаго въ точкѣ s площадки даннаго направленія* (послѣднее опредѣляется направленіемъ n).

Напряженія X_n, Y_n и Z_n представляются непрерывными функціями координатъ.

Проведемъ черезъ точку s три взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ координатъ.

Согласно принятому обозначенію, проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ точкѣ s на площадки перпендикулярныя къ осямъ x, y и z, представятся въ слѣдующемъ видѣ:

	на ось x	на ось y	на ось z
проекція напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ s площадки перпендикулярной къ оси x	X_x	Y_x	Z_x
. . . . y	X_y	Y_y	Z_y
. . . . z	X_z	Y_z	Z_z

Въ теоріи деформируемыхъ тѣлъ доказывается, что

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z), \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \\ Z_n &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z), \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$Z_y = Y_z, \qquad X_z = Z_x, \qquad Y_x = X_y. \tag{2}$$

Упругое твердое тѣло есть частный случай тѣлъ деформируемыхъ какимъ бы то ни было способомъ.

Все вышеизложенное справедливо и для упругихъ твердыхъ тѣлъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить только о послѣднихъ.

Въ упругомъ тѣлѣ напряженія развиваются подъ вліяніемъ сообщаемыхъ тѣлу деформацій.

Состояніе тѣла, когда всѣ напряженія равны нулю, называется *естественнымъ*.

Назовемъ черезъ x, y, z координаты какой либо точки тѣла въ естественномъ состояніи.

Координаты этой точки послѣ деформаціи можно представить подъ видомъ

$$x+u\,, \qquad y+v\,, \qquad z+w\,,$$

гдѣ u, v и w суть функціи координатъ x, y, z и, вообще, времени t.

Характерная особенность деформацій упругаго твердаго тѣла состоитъ въ слѣдующемъ:

Измѣненіе размѣровъ какой угодно части тѣла при деформаціи безконечно мало въ сравненіи съ размѣрами этой части.

Въ силу такого опредѣленія деформаціи упругаго твердаго тѣла величины u, v и w, равно какъ и ихъ производныя по координатамъ, должно считать безконечно малыми величинами.

За элементы, характеризующіе деформацію упругаго твердаго тѣла, принимаютъ величины, опредѣляющія измѣненіе послѣ деформаціи угловъ между каждыми двумя изъ трехъ реберъ элементарнаго прямоугольнаго до деформаціи параллелепипеда, пересѣкающихся въ одной вершинѣ, и удлинненія этихъ реберъ.

Назовемъ послѣдніе три изъ элементовъ деформаціи черезъ

$$x_x\,, \qquad y_y\,, \qquad z_z\,, \tag{3}$$

а удвоенныя величины первыхъ трехъ черезъ

$$z_y=y_z\,, \qquad x_z=z_x\,, \qquad y_x=x_y. \tag{3_1}$$

Въ теоріи упругости доказывается, что

$$\begin{gathered} x_x=\frac{\partial u}{\partial x}\,, \qquad y_y=\frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad z_z=\frac{\partial w}{\partial z}\,, \\ z_y=y_z=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\,, \quad x_z=z_x=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\,, \quad y_x=x_y=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}. \end{gathered} \tag{4}$$

Напряженія X, Y и Z со значками x, y и z предполагаются частными производными по перемѣннымъ (3) и (3_1) отъ квадратичной всегда отрицательной формы f шести аргументовъ (3) и (3_1), *) т. е.

$$\begin{gathered} X_x=\frac{\partial f}{\partial x_x}\,, \qquad Z_y=Y_z=\frac{\partial f}{\partial z_y}\,, \\ Y_y=\frac{\partial f}{\partial y_y}\,, \qquad X_z=Z_x=\frac{\partial f}{\partial x_z}\,, \\ Z_z=\frac{\partial f}{\partial z_z}\,, \qquad Y_x=X_y=\frac{\partial f}{\partial x_y}. \end{gathered} \tag{5}$$

*) Это допущеніе равносильно допущенію существованія потенціала частичныхъ силъ.

Форма f вообще содержитъ 21 постоянный коэффиціентъ.

При различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно строенія упругаго тѣла число коэффиціентовъ уменьшается.

Тѣло называется *изотропнымъ*, если видъ функціи f не зависитъ отъ направленія координатныхъ осей.

Для такого тѣла, какъ доказывается въ теоріи упругости,

$$f = -K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k\Theta^2\right), \tag{6}$$

гдѣ

$$\Theta = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{7}$$

а K и k двѣ положительныя постоянныя, зависящія отъ физическихъ свойствъ тѣла.

Такимъ образомъ, для изотропнаго тѣла, въ силу равенствъ (5) и (6),

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ Y_y &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ Z_z &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_z = Z_y &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ Z_x = X_z &= -K\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ X_y = Y_x &= -K\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

3. Пусть тѣло деформируется подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ его объема и силъ, приложенныхъ къ поверхности, его ограничивающей.

Назовемъ проекціи на оси координатъ первыхъ силъ черезъ

$$X, \quad Y, \quad Z,$$

а вторыхъ черезъ

$$P, \quad Q, \quad R.$$

Тѣ и другія будемъ предполагать непрерывными и конечными функціями координатъ.

Предположимъ, что тѣло находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ только что указанныхъ силъ.

При сдѣланныхъ выше предположеніяхъ, задача о равновѣсіи какого угодно упругаго твердаго тѣла приводится къ опредѣленію функцій u, v, w при помощи уравненій

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\varrho X=0,\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\varrho Y=0,\\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\varrho Z=0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

при условіяхъ на поверхности

$$
\begin{aligned}
P&=X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z),\\
Q&=Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)+Y_z\cos(n,z),\\
R&=Z_x\cos(n,x)+Z_y\cos(n,y)+Z_z\cos(n,z).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Послѣднія являются слѣдствіями равенствъ (1), которыя должны имѣть мѣсто для любой точки тѣла.

Разсматриваемая задача будетъ вполнѣ опредѣлена условіями (10) и (11), если еще поставимъ условіе, что упругое твердое тѣло не можетъ испытывать перемѣщеній, свойственныхъ неизмѣняемой системѣ.

Въ случаѣ изотропнаго тѣла уравненія равновѣсія, при помощи равенствъ (8) и (9), представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$
\begin{aligned}
&\Delta u+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\varrho}{K}X=0,\\
&\Delta v+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\varrho}{K}Y=0,\\
&\Delta w+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\varrho}{K}Z=0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

гдѣ Δ есть знакъ операціи вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а

$$\mu=2k+1.$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ мы будемъ говорить только о тѣлахъ изотропныхъ.

4. При настоящихъ средствахъ анализа задача объ опредѣленіи функцій u, v и w при помощи уравненій (12) и условій (11) не можетъ быть рѣшена въ общемъ видѣ при произвольно заданныхъ функціяхъ X, Y, Z; P, Q, R и для какого угодно тѣла.

Даже для простѣйшихъ видовъ тѣлъ, за весьма рѣдкими исключеніями, она представляетъ почти неодолимыя трудности.

Въ настоящемъ изслѣдованіи мы разсмотримъ только тѣла цилиндрическія и допустимъ, что на ихъ внутреннія массы не дѣйствуетъ силъ, т. е.

$$X = Y = Z = 0.$$

За ось z примемъ по обыкновенію ось цилиндра, за плоскость xy плоскость одного изъ его основаній.

При этомъ условія опредѣленности *) задачи можно представить подъ видомъ

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

при

$$x = y = z = 0. \tag{13}$$

Назовемъ черезъ a уголъ, составляемый внѣшней нормалью n къ боковой поверхности (S') цилиндра съ осью x.

Условія (11) для боковой поверхности цилиндра примутъ видъ

$$\begin{aligned} X_x \cos a + X_y \sin a &= P, \\ Y_x \cos a + Y_y \sin a &= Q, \\ Z_x \cos a + Z_y \sin a &= R, \end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ P, Q и R суть заданныя функціи координатъ точекъ поверхности (S').

Тѣ же условія (11) для основаній цилиндра приведутся къ слѣдующимъ

$$Z_x = P_1, \quad Z_y = Q_1, \quad Z_z = R_1, \tag{15}$$

гдѣ P_1, Q_1 и R_1 суть заданныя функціи x и y.

---

*) Условія, что тѣло не можетъ испытывать перемѣщеній, свойственныхъ неизмѣняемой системѣ.

Задача о равновѣсіи упругаго изотропнаго цилиндра при отсутствіи внѣшнихъ силъ приводится къ опредѣленію функцій u, v и w при помощи уравненій

$$\Delta u + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 ,$$

$$\Delta v + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0 , \qquad \textbf{(16)}$$

$$\Delta w + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

и условій (13), (14) и (15).

Къ уравненіямъ (16) должно присоединить еще слѣдующее

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} . \qquad (\mathbf{16_1})$$

Но и при сдѣланныхъ простѣйшихъ предположеніяхъ задачу нельзя рѣшить въ общемъ видѣ безъ нѣкоторыхъ, соотвѣтствующимъ образомъ составленныхъ, гипотезъ либо относительно распредѣленія напряженій внутри тѣла, либо относительно деформацій u, v и w.

Въ настоящее время извѣстно два частныхъ рѣшенія, сравнительно общаго характера, разсматриваемой задачи.

Одно принадлежитъ С. Венану, другое Клебшу.

С. Венанъ ставитъ гипотезу, что въ любой точкѣ внутри цилиндра напряженія на двѣ взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ zx и zy, параллельны оси цилиндра и допускаетъ, что на боковую поверхность цилиндра не дѣйствуетъ силъ, т. е.

$$P = Q = R = 0 .$$

При этомъ само собою опредѣляется общій типъ силъ P_1, Q_1 и R_1, которыя должны быть приложены къ основаніямъ цилиндра для того, чтобы оправдывались сдѣланныя имъ допущенія.

Клебшъ дѣлаетъ какъ бы обратныя предположенія.

Онъ допускаетъ, что въ каждой точкѣ тѣла напряженія, дѣйствующія на площадки, перпендикулярныя къ оси цилиндра, равны нулю и на основанія цилиндра не дѣйствуетъ силъ.

При этомъ въ получаемомъ имъ рѣшеніи самъ собою опредѣляется (до извѣстной степени) общій типъ силъ, которыя должны дѣйствовать на боковую поверхность цилиндра, чтобы поставленная имъ гипотеза дѣйствительно имѣла мѣсто.

Эти двѣ задачи разсматриваются въ настоящее время независимо другъ отъ друга и рѣшенія, имъ соотвѣтствующія, получаются въ каждомъ изъ этихъ случаевъ особо интегрированіемъ уравненій (16) вмѣстѣ съ уравненіями, служащими аналитическимъ выраженіемъ гипотезъ, соотвѣтствующихъ каждому изъ разсматриваемыхъ случаевъ.

Въ настоящемъ изслѣдованіи, какъ было уже упомянуто, я укажу болѣе общее рѣшеніе уравненій упругости, въ которомъ, какъ весьма частные случаи, заключаются и рѣшенія С. Венана и Клебша.

5. Назовемъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты послѣ деформаціи той точки упругаго тѣла, координаты которой въ естественномъ состояніи (до деформаціи) суть x, y, z.

Имѣемъ

$$x_1 = x + u,$$

$$y_1 = y + v,$$

$$z_1 = z + w.$$

Всякая прямая, параллельная до деформаціи оси цилиндра (оси z), преобразуется послѣ деформаціи въ нѣкоторую кривую, уравненіе которой, съ приближеніемъ до безконечно малыхъ порядка не выше перваго, можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + u_1, \\ y_1 &= y + v_1, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(17)}$$

гдѣ u_1 и v_1 суть выраженія функцій u и v по замѣнѣ въ послѣднихъ перемѣнной z черезъ z_1.

Если u и v суть цѣлыя раціональныя функціи перемѣнной z, то уравненія (17) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_0 + m_1 z_1 + \ldots + m_s z_1^s, \\ y_1 &= n_0 + n_1 z_1 + \ldots + n_s z_1^s, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(17}_1\textbf{)}$$

гдѣ m_j и $n_j (j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ суть нѣкоторыя функціи отъ x и y.

При этомъ, какъ показываютъ уравненія (17_1), всякая прямая, параллельная до деформаціи оси цилиндра, обратится послѣ деформаціи въ кривую, проекціи которой на плоскости xz и yz суть параболы степени s.

Такую деформацію будемъ называть *параболической деформаціей степени* s.

Деформаціи, соотвѣтствующія задачамъ С. Венана и Клебша, суть параболическія: для первой третьей, для послѣдней второй степени.

Исходнымъ пунктомъ нашихъ изысканій будетъ служить слѣдующая задача:

Опредѣлить самый общій типъ функцій u, v *и* w *при условіи, что деформація упругаго цилиндра есть параболическая третьей степени.*

Такимъ образомъ, вмѣсто частныхъ гипотезъ о распредѣленіи напряженій внутри цилиндра мы беремъ за исходную точку опредѣленную и навѣрно возможную гипотезу о характерѣ деформацій u, v и w.

Очевидно, что въ опредѣленныхъ подъ этимъ условіемъ функціяхъ u, v и w должны будутъ содержаться, какъ частные случаи, и выраженія, соотвѣтствующія рѣшеніямъ С. Венана и Клебша, представляющимъ частные виды параболической деформаціи третьей степени.

6. Положимъ

$$\left.\begin{aligned}
u &= u_0 + zu_1 + \frac{z^2}{2!}u_2 + \frac{z^3}{3!}u_3\,, \\
v &= v_0 + zv_1 + \frac{z^2}{2!}v_2 + \frac{z^3}{3!}v_3\,, \\
w &= w_0 + zw_1 + \frac{z^2}{2!}w_2 + \frac{z^3}{3!}w_3\,, \\
\Theta &= \Theta_0 + z\Theta_1 + \frac{z^2}{2!}\Theta_2 + \frac{z^3}{3!}\Theta\,,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

гдѣ u_j, v_j, w_j, Θ_j $(j = 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3)$ суть функціи отъ x и y.

Эти выраженія для u, v, w и Θ должны удовлетворять уравненіямъ (16) и (16_1) при всякомъ z.

Подставляя ихъ въ уравненія (16) и (16_1) и приравнивая нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ z, получаемъ слѣдующую систему уравненій для опредѣленія функцій u_j, v_j, w_j и Θ_j

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
& u_2 + \Delta u_0 + \mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial x} = 0\,, \\
& u_3 + \Delta u_1 + \mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial x} = 0\,, \\
& \Delta u_2 + \mu\frac{\partial\Theta_2}{\partial x} = 0\,, \\
& \Delta u_3 + \mu\frac{\partial\Theta_3}{\partial x} = 0\,,
\end{aligned}\right.
\qquad
\left.\begin{aligned}
& v_2 + \Delta v_0 + \mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial y} = 0\,, \\
& v_3 + \Delta v_1 + \mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial y} = 0\,, \\
& \Delta v_2 + \mu\frac{\partial\Theta_2}{\partial y} = 0\,, \\
& \Delta v_3 + \mu\frac{\partial\Theta_3}{\partial y} = 0\,,
\end{aligned}\right\}\quad (20)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta w_0+w_2+\mu\Theta_1=0\,,\\
&\Delta w_1+w_3+\mu\Theta_2=0\,,\\
&\Delta w_2+\mu\Theta_3=0\,,\\
&\Delta w_3=0\,,
\end{aligned}\right\}\tag{21}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta_0=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+w_1\,,\\
&\Theta_1=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+w_2\,,\\
&\Theta_2=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+w_3\,,\\
&\Theta_3=\frac{\partial u_3}{\partial x}+\frac{\partial v_3}{\partial y}.
\end{aligned}\right\}\tag{22}
$$

Первыя два каждой изъ группъ уравненій (19), (20) и (21) даютъ

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
&u_2=-\Delta u_0-\mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}\,, && v_2=-\Delta v_0-\mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\,,\\
&u_3=-\Delta u_1-\mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\,, && v_3=-\Delta v_1-\mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial y}\,,
\end{aligned}
\quad(24)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&w_1=\Theta_0-\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),\\
&w_2=\Theta_1-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{25}
$$

Рѣшая второе изъ (21) и третье изъ (22) относительно Θ_2 и w_3, получаемъ

$$
\Theta_2(1+\mu)=\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}-\Delta w_1\,,
$$

$$
w_3=-\Delta w_1-\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right).
$$

Отсюда, при помощи (23), (24) и (25), получаемъ

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta_2=-\Delta\Theta_0\,,\\
&w_3=\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_0\right).
\end{aligned}\right\}\tag{26}
$$

Наконецъ, послѣднее изъ уравненій (22), при помощи (23) и (24), даетъ

$$\Theta_3 = -\varDelta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \mu\Theta_1\right). \tag{27}$$

Уравненія (23), (24), (25), (26) и (27) даютъ выраженія функцій u_k, v_k, $\Theta_k (k=2, 3)$ и $w_i (i=1, 2, 3)$ черезъ шесть функцій u_j, v_j и $\Theta_j (j=0, 1)$.

Задача такимъ образомъ сводится къ опредѣленію этихъ послѣднихъ и функціи w_0.

Подставивъ найденныя выраженія u_k, v_k, w_k и $\Theta_k (k=2, 3)$ въ два послѣднія изъ уравненій каждой изъ группъ (19), (20) и (21), получимъ слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять искомыя функціи

$$\varDelta_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_0\right) = 0, \tag{28}$$

$$\varDelta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_1\right) = 0, \tag{28_1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varDelta\left(\varDelta u_j + 2\mu\frac{\partial \Theta_j}{\partial x}\right) = 0, \\ &\varDelta\left(\varDelta v_j + 2\mu\frac{\partial \Theta_j}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}\right\} (j=0,1) \tag{29}$$

Въ первомъ изъ этихъ уравненій $\varDelta_2$ обозначаетъ дважды повторенную операцію $\varDelta$.

Наконецъ, первое изъ уравненій (21) даетъ слѣдующее уравненіе для функціи w_0

$$\varDelta w_0 + (1+\mu)\Theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}. \tag{30}$$

Такимъ образомъ, параболическая деформація третьей степени возможна для цилиндрическаго тѣла тогда и только тогда, когда функціи u_j, v_j, $\Theta_j (j=0, 1)$, при помощи которыхъ по формуламъ предыдущаго §-а выражаются всѣ коэффиціенты при степеняхъ z въ равенствахъ (18), *удовлетворяютъ уравненіямъ (28), (28_1), (29) и (30).*

Каждому рѣшенію этихъ уравненій будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное рѣшеніе уравненій упругости, т. е. одна изъ возможныхъ параболическихъ деформацій третьей степени.

7. Прежде чѣмъ перейти къ изслѣдованію наиболѣе интересныхъ изъ этихъ рѣшеній, выразимъ напряженія X, Y, Z со значками x, y, z черезъ функціи u_j, v_j и $\Theta_j\,(j=0\,,\,1)$.

При помощи формулъ (8), (9), (18), (23), (24), (25), (26) и (27) получимъ

$$X_x=\sum_0^3\frac{z^k}{k!}X_{x,k}\,,\quad Y_y=\sum_0^3\frac{z^k}{k!}Y_{y,k}\,,\quad Z_z=\sum_0^3\frac{z^k}{k!}Z_{z,k}\,,$$

$$X_y=Y_x=\sum_0^3\frac{z^k}{k!}X_{y,k}\,,\quad Y_z=Z_y=\sum_0^3\frac{z^k}{k!}Y_{z,k}\,,\quad Z_x=X_z=\sum_0^3\frac{z^k}{k!}Z_{x,k}\,,\tag{31}$$

гдѣ, какъ нетрудно убѣдиться,

$$X_{x,j}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Theta_j+\frac{\partial u_j}{\partial x}\right),$$

$$Y_{y,j}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Theta_j+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right),\qquad (j=0,1)$$

$$X_{y,j}=-K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}+\frac{\partial v_j}{\partial x}\right);$$

$$X_{x,i}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Delta\Theta_j+\Delta\frac{\partial u_j}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial x^2}\right),$$

$$Y_{y,i}=-2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Delta\Theta_j+\Delta\frac{\partial v_j}{\partial y}+\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial y^2}\right),\qquad (i=2,3;\,j=0,1)$$

$$X_{y,i}=-K\left[\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial y}+\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)+2\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial x\,\partial y}\right];\tag{32}$$

$$Z_{x,0}=-K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+u_1\right),\quad Z_{y,0}=-K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+v_1\right),$$

$$Z_{x,k}=-K\left[(1-\mu)\frac{\partial\Theta_j}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\Delta u_j\right],$$

$$(k=1,2;\,j=0,1)$$

$$Z_{y,k}=-K\left[(1-\mu)\frac{\partial\Theta_j}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\Delta v_j\right],$$

$$Z_{x,3}=-K\frac{\partial\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_0\right)}{\partial x},$$

$$Z_{y,3} = -K \frac{\partial \Delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\,\Theta_0 \right)}{\partial y};$$

$$\left.\begin{aligned} Z_{z,j} &= -2K\left[\frac{\mu+1}{2}\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right], \qquad (j=0,1) \\ Z_{z,2} &= -2K\left[\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{1-\mu}{2}\Delta\Theta_0\right], \\ Z_{z,3} &= K(\mu-1)\,\Delta\Theta_1. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

8. Переходимъ теперь къ рѣшенію слѣдующей задачи:

Найти общее рѣшеніе уравненій равновѣсія упругаго изотропнаго цилиндра при слѣдующихъ условіяхъ:

1) Тѣло испытываетъ параболическую деформацію третьей степени,

2) На внутреннія массы тѣла не дѣйствуетъ силъ,

3) На боковую поверхность цилиндра дѣйствуютъ силы

$$X = X_0 + zX_1, \quad Y = Y_0 + zY_1, \quad Z = Z_0 + zZ_1,$$

гдѣ X_j, Y_j, $Z_j\,(j=0,\,1)$ *суть произвольно заданныя функціи* x *и* y.

Рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j $(j=0,\,1)$, w_0 при помощи уравненій (28), (28$_1$), (29), (30) и условій

$$X_x \cos a + X_y \sin a = X_0 + zX_1,$$
$$Y_x \cos a + Y_y \sin a = Y_0 + zY_1,$$
$$Z_x \cos a + Z_y \sin a = Z_0 + zZ_1.$$

Послѣднія, при помощи (31), приведутся къ слѣдующимъ

$$\left.\begin{aligned} X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a &= X_j, \qquad (j=0,1) \\ X_{x,i}\cos a + X_{y,i}\sin a &= 0, \qquad (i=2,3) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a &= Y_j, \qquad (j=0,1) \\ X_{y,i}\cos a + Y_{y,i}\sin a &= 0, \qquad (i=2,3) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a = Z_0, \tag{35$_0$}$$

$$Z_{x,k}\cos a + Z_{y,k}\sin a = Z_k, \qquad (k=1,2) \quad (Z_2=0) \tag{35}$$

$$Z_{x,3}\cos a + Z_{y,3}\sin a = 0. \tag{35$_1$}$$

Положимъ

$$\varDelta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\varDelta\Theta_0=P.$$

Въ силу уравненія (28) имѣемъ

$$\varDelta P=0. \tag{36}$$

Условіе (35_1), въ силу (32), приводится къ виду

$$\frac{\partial P}{\partial n}=0, \tag{37}$$

гдѣ n есть направленіе внѣшней нормали къ боковой поверхности цилиндра.

Изъ уравненій (36) и (37) слѣдуетъ, что

$$P=\varDelta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\varDelta\Theta_0=C=\mathrm{const.} \tag{38}$$

При этомъ

$$Z_{x,3}=0, \qquad Z_{y,3}=0. \tag{39}$$

Задача приведена къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j, w_0 при помощи уравненій (38), (28_1), (29), (30) и поверхностныхъ условій (33), (34), (35_0) и (35).

Уравненія (38) и (28_1) мы можемъ заключить въ одно, положивъ

$$\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\varDelta\Theta_j=C_j \qquad (j=0,1) \tag{38_1}$$

и условившись считать

$$C_1=0.$$

Положивъ въ общихъ уравненіяхъ равновѣсія (10)

$$X=Y=Z=0$$

и подставивъ вмѣсто $X_x, X_y, \ldots, Z_z$ ихъ выраженія (31), разобьемъ уравненія (10) на систему 12-ти уравненій, между которыми будетъ 4 слѣдующаго вида [въ силу (39)]

$$\frac{\partial X_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y,i}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial Y_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial Y_{y,i}}{\partial y}=0. \qquad (i=2,3) \tag{40}$$

Помножимъ эти уравненія соотвѣтственно на u_i и v_i и, сложивъ, проинтегрируемъ результатъ по всей площади сѣченія, перпендикулярнаго къ оси цилиндра, которое будемъ называть *нормальнымъ сѣченіемъ цилиндра*.

Получимъ

$$\int\left[u_i\left(\frac{\partial X_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y,i}}{\partial y}\right)+v_i\left(\frac{\partial X_{y,i}}{\partial x}+\frac{\partial Y_{y,i}}{\partial y}\right)\right]dq=0\,,$$

гдѣ dq есть элементъ площади только что упомянутаго сѣченія.

Это равенство легко приводится къ слѣдующему виду

$$\int[(X_{x,i}\cos a+X_{y,i}\sin a)\,u_i+(X_{y,i}\cos a+Y_{y,i}\sin a)\,v_i]\,ds-$$

$$-\int\left[X_{x,i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+Y_{y,i}\frac{\partial v_i}{\partial y}+X_{y,i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right]dq=0\,,$$

гдѣ ds есть элементъ периферіи нормальнаго сѣченія.

Первый изъ этихъ интеграловъ (считая слѣва) равенъ нулю въ силу уравненій (33).

Слѣдовательно,

$$\int\left[X_{x,i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+Y_{y,i}\frac{\partial v_i}{\partial y}+X_{y,i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right]dq=0.$$

Замѣтивъ, что

$$X_{x,i}=-2K\left(k\Theta_i+\frac{\partial u_i}{\partial x}\right),\quad Y_{y,i}=-2K\left(k\Theta_i+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right),$$

$$X_{y,i}=-K\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right),$$

получимъ

$$\int\left[2k\,\Theta_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0. \quad \textbf{(41)}$$

Уравненіе (27) при помощи (38_1) (при $j=1$) приводится къ слѣдующему виду

$$\Theta_3=-\Delta\Theta_1.$$

Принимая въ разсчетъ первое изъ уравненій (26), можемъ писать

$$\Theta_i=-\Delta\Theta_j. \qquad {\scriptstyle (i=2,3;\;j=0,1)} \quad \textbf{(42)}$$

Воспользовавшись затѣмъ уравненіями (23) и (24), получимъ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=-\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\mu\varDelta\Theta_j\,, \qquad (i=2,3;\,j=0,1)$$

или, на основаніи (38_1),

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=-C_j-\varDelta\Theta_j. \qquad (i=2,3;\,j=0,1)$$

При помощи этого равенства и (42) приводимъ (41) къ слѣдующему виду

$$2kC_j\int\varDelta\Theta_j\,dq+\int\left[2k(\varDelta\Theta_j)^2+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\right. \tag{43}$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0.$$

Подставимъ во второе изъ условій (35) (при $k=2$) вмѣсто $Z_{x,2}$ и $Z_{y,2}$ ихъ выраженія (32).

Получимъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\,\Theta_j\right]\cos a+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\,\Theta_j\right]\sin a=$$
$$=-(\varDelta u_j\cos a+\varDelta v_j\sin a).$$

Положимъ

$$P_j=\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\,\Theta_j.$$

Интегрируя предыдущее равенство по всей периферіи нормальнаго сѣченія, находимъ

$$\int\frac{\partial P_j}{\partial n}\,ds=-\int(\varDelta u_j\cos a+\varDelta v_j\sin a)\,ds.$$

Но

$$\int(\varDelta u_j\cos a+\varDelta v_j\sin a)\,ds=\int\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)dq=(1-\mu)\int\varDelta\Theta_j dq+C_jq,$$

гдѣ q есть площадь нормальнаго сѣченія цилиндра.

Интегрируемъ затѣмъ (38_1) по всей площади этого сѣченія.

Получаемъ

$$\int \Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)dq-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq=C_j q=\int\frac{\partial P_j}{\partial n}ds.$$

Слѣдовательно,

$$C_j q=-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq-C_j q\,,$$

т. е.

$$-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq=2k\int \Delta\Theta_j\,dq=2C_j q\,,$$

гдѣ q есть площадь нормальнаго сѣченія.

Вслѣдствіе этого равенство (43) приметъ видъ

$$2C_j^2 q+\int\left[2k(\Delta\Theta_j)^2+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0\,.$$

Слѣдовательно, необходимо

$$C_j=0\,,\quad \Delta\Theta_j=0\,,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial v_i}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}=0\,. \qquad \textbf{(44)}$$

Отсюда

$$u_i=\Phi_i(y)\,,\qquad v_i=\Psi_i(x)\,.$$

Подставивъ эти выраженія въ послѣднее изъ уравненій (44), получимъ

$$\Phi_i'(y)+\Psi_i'(x)=0\,,$$

т. е.

$$\Phi_i(y)=a_i y+b_i\,,\qquad \Psi_i(x)=-a_i x+c_i\,, \qquad (i=2,3)$$

гдѣ a_i, b_i, c_i суть произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ уравненія (44) даютъ

$$C_j=0\,,\quad \Delta\Theta_j=0\,,\quad u_i=a_i y+b_i\,,\quad v_i=-a_i x+c_i\,.$$

$$(i=2,3;\ j=0,1).$$

При помощи этихъ уравненій и уравненій (23) и (24) получаемъ

$$\Delta u_j+\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x}=a_j y+b_j\,,\quad \Delta v_j+\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y}=-a_j x+c_j\,. \qquad \textbf{(45)}$$

Въ этихъ уравненіяхъ черезъ a_j, b_j и c_j замѣнены постоянныя a_i, b_i и c_i.

Замѣтимъ, что уравненія (45) по внѣшнему виду не отличаются отъ уравненій равновѣсія плоской упругой пластинки, деформирующейся въ ея плоскости подъ дѣйствіемъ двухъ силъ, приложенныхъ къ ея периферіи: постоянной силы, равной

$$\sqrt{b_j^2 + c_j^2}$$

и составляющей съ осями координатъ углы, cosinus'ы которыхъ

$$\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 + c_j^2}}, \quad \frac{c_j}{\sqrt{b_j^2 + c_j^2}}$$

и силы, пропорціональной разстоянію точекъ периферіи отъ начала координатъ и направленной по касательной къ периферіи.

Но въ данномъ случаѣ Θ_j, вообще, не равно

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}.$$

Воспользовавшись уравненіями (45), получимъ [рав. (32)]

$$X_{x,i} = 0, \quad X_{y,i} = 0, \quad Y_{y,i} = 0. \qquad (i=2,3)$$

При этомъ вторыя изъ условій (33) и (34) удовлетворяются сами собой.

9. Такимъ образомъ задача сведена къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j *) при помощи уравненій

$$\varDelta\Theta_j = 0, \quad \varDelta u_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x} = a_j y + b_j, \quad \varDelta v_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y} = -a_j x + c_j \qquad (j=0,1) \qquad \textbf{(46)}$$

при слѣдующихъ условіяхъ на периферіи нормальнаго сѣченія

$$\left((\mu-1)\Theta_j + 2\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)\cos a + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\sin a = -\frac{X_j}{K} = X'_j, \qquad (s=0,1) \qquad \textbf{(47)}$$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\cos a + \left((\mu-1)\Theta_j + 2\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\sin a = -\frac{Y_j}{K} = Y'_j, \qquad \textbf{(47}_1\textbf{)}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right]\cos a + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right]\sin a = \\ = (b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a + Z'_j,\end{gathered} \qquad \textbf{(48)}$$

---

*) Мы пока оставляемъ въ сторонѣ функцію w_0.

если условимся считать

$$Z_0' = -\frac{Z_1}{K}, \quad Z_1' = 0.$$

Положимъ

$$S_j = \Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right).$$

Легко видѣть, что S_j удовлетворяетъ уравненію Лапласа

$$\Delta S_j = 0, \tag{49}$$

а на периферіи сѣченія условію [рав. (48)]

$$\frac{\partial S_j}{\partial n} = P_j, \tag{50}$$

гдѣ

$$P_j = (b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a + Z_j'.$$

Условіями (49) и (50) функція S_j опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной.

Задача возможна, если

$$\int P_j\, ds = 0.$$

Такъ какъ

$$\int [(b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a]\, ds = 0,$$

то должно быть

$$\int Z_j'\, ds = 0.$$

Такимъ образомъ функція Z_1 должна удовлетворять условію

$$\int Z_1\, ds = 0,$$

въ остальномъ же она вполнѣ произвольна.

Существуютъ общіе методы для опредѣленія функцій, удовлетворяющихъ условіямъ вида (49) и (50).

Одна изъ такихъ методъ принадлежитъ C. Neumann'у, другая предложена недавно мною (идея принадлежитъ Robin'у).

*

Обѣ эти методы примѣнимы къ конвексным контурамъ, имѣющимъ опредѣленную касательную и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Опредѣливъ такъ или иначе функцію S_j, получимъ

$$S_j = f_j(x, y),$$

гдѣ $f_j(x, y)$ есть опредѣленная до нѣкоторой произвольной постоянной функція координатъ.

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\Theta_j = f_j(x, y) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right). \qquad (j=0, 1) \qquad \mathbf{(51)}$$

При этомъ условіе (48) удовлетворено, а уравненіе

$$\Delta\Theta_j = 0$$

является простымъ слѣдствіемъ двухъ послѣднихъ изъ уравненій (46) и уравненія (51).

Задача сведена къ опредѣленію функцій u_j, $v_j (j = 0, 1)$ при помощи уравненій

$$\begin{aligned} \Delta u_j + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) &= a_j y + b_j - \mu\frac{\partial f_j}{\partial x}, \\ \Delta v_j + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) &= -a_j x + c_j - \mu\frac{\partial f_j}{\partial y} \end{aligned} \qquad \mathbf{(52)}$$

и условій (47) и (47_1) на периферіи.

Опредѣливъ при помощи этихъ уравненій функціи u_j и v_j, найдемъ и Θ_j при помощи (51).

10. Нетрудно убѣдиться, что уравненія (52) можно представить подъ видомъ

$$\frac{\partial X_{x,j}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y,j}}{\partial y} = -K\left(a_j y + b_j - \mu\frac{\partial f_j}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial X_{y,j}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{y,j}}{\partial y} = -K\left(-a_j x + c_j - \mu\frac{\partial f_j}{\partial y}\right).$$

Допустимъ, что возможны два рѣшенія уравненій (52) при условіяхъ (47) и (47_1).

Пусть значенія функцій u_j, v_j, Θ_j, соотвѣтствующихъ этимъ рѣшеніямъ, суть

$$u_j^0,\ v_j^0,\ \Theta_j^0 \quad \text{и} \quad u_j',\ v_j',\ \Theta_j'.$$

Положимъ

$$U_j = u_j^0 - u_j', \qquad V_j = v_j^0 - v_j', \qquad \Theta_j = \Theta_j^0 - \Theta_j'.$$

Будемъ разумѣть подъ $X'_{x,j}$, $X'_{y,j}$, $Y'_{y,j}$ выраженія $X_{x,j}$, $X_{y,j}$, $Y_{y,j}$ по замѣнѣ въ послѣднихъ функцій u_j, v_j черезъ U_j, V_j.

Получимъ

$$\frac{\partial X'_{x,j}}{\partial x} + \frac{\partial X'_{y,j}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X'_{y,j}}{\partial x} + \frac{\partial Y'_{y,j}}{\partial y} = 0. \tag{53}$$

На периферіи сѣченія будемъ имѣть

$$\begin{aligned} X'_{x,j}\cos a + X'_{y,j}\sin a = 0, \\ X'_{y,j}\cos a + Y'_{y,j}\sin a = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Совершимъ надъ уравненіями (53) ту же операцію, что и надъ уравненіями (40) въ §-ѣ 8-мъ.

Получимъ [при помощи (54)]

$$\int\left[X'_{x,j}\frac{\partial U_j}{\partial x} + Y'_{y,j}\frac{\partial V_j}{\partial y} + X'_{y,j}\left(\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right)\right]dq = 0. \tag{55}$$

Но

$$X'_{x,j} = -2K\left(k\Theta_j + \frac{\partial U_j}{\partial x}\right), \quad Y'_{y,j} = -2K\left(k\Theta_j + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right),$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right), \quad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}.$$

Эти равенства, вмѣстѣ съ (55), приводятъ къ заключенію, что

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V_j}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x} = 0,$$

т. е.

$$U_j = A_j y + B_j, \qquad V_j = -A_j x + C_j, \qquad (j=0,1)$$

гдѣ A_j, B_j, C_j суть произвольныя постоянныя.

Если мы воспользуемся еще условіями (13) §-а 4-аго, то получимъ

$$A_0 = B_0 = C_0 = 0.$$

Слѣдовательно, уравненія (52) вмѣстѣ съ поверхностными условіями (47) и (47_1) (при $j = 0$) и условіями (13) опредѣляютъ функціи u_0 и v_0 вполнѣ и единственнымъ образомъ, Функціи же u_1 и v_1 опредѣляются вполнѣ до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій

$$A_1 y + B_1, \qquad -A_1 x + C_1.$$

11. Пусть u_j^0 и v_j^0 суть какія либо частныя рѣшенія уравненій (52). Положивъ

$$u_j = u_j^0 + U_j, \qquad v_j = v_j^0 + V_j,$$

сведемъ задачу къ опредѣленію функцій U_j и V_j при помощи уравненій

$$\varDelta U_j + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) = 0, \quad \varDelta V_j + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) = 0 \qquad \textbf{(56)}$$

при поверхностныхъ условіяхъ типа (47) и (47_1), только въ правыхъ частяхъ вмѣсто функцій X'_j и Y'_j будутъ стоять нѣкоторыя другія, выраженія которыхъ мы не будемъ выписывать, а въ лѣвыхъ подъ функціей Θ_j нужно будетъ разумѣть выраженіе вида

$$\Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial x}.$$

Въ уравненіяхъ (52)

$$\mu = 2k + 1.$$

Положивъ

$$\frac{1}{1+k} = 1 - \lambda,$$

приведемъ уравненія (56) къ виду

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + (1+\lambda)\frac{\partial^2 V_j}{\partial x \partial y} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} &= 0, \\ 2\frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2} + (1+\lambda)\frac{\partial^2 U_j}{\partial x \partial y} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \qquad (j=0,1)$$

Эти уравненія по виду тождественны съ уравненіями равновѣсія упругой пластинки въ задачѣ Clebsch'a *).

---

*) См. Clebsch. „Theorie d. Elasticität". Leipzig, 1862, s. 166 etc. Постоянная λ въ данномъ случаѣ не равна постоянной μ въ задачѣ Clebsch'a, а именно

$$\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Опредѣленіе функцій U_j и V_j, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ при условіяхъ типа (47) и (47_1), для частнаго случая прямого кругового цилиндра произведено мною въ статьѣ: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ“, напечатанной въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общества“ за 1891 годъ.

Повторять относящіяся сюда изслѣдованія нѣтъ надобности.

12. Окончательное рѣшеніе задачи, поставленной нами въ §-ѣ 8-омъ, приводится къ опредѣленію функціи w_0.

Для этого служитъ уравненіе (30), которое легко приводится къ слѣдующему виду

$$\varDelta w_0 = f_1(x, y) - \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \psi(x, y), \tag{57}$$

гдѣ $\psi(x, y)$ есть, очевидно, извѣстная функція координатъ (f_1, u_1 и v_1 извѣстны).

На периферіи нормальнаго сѣченія функція w_0 должна удовлетворять условію (35_0), которое при помощи равенствъ (32) преобразуется къ виду

$$\frac{\partial W_0}{\partial n} = -(u_1 \cos a + v_1 \sin a) - \frac{Z_0}{K} = \varphi(x, y), \tag{58}$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ есть извѣстная функція координатъ точекъ периферіи.

Задача возможна, если

$$\int \psi(x,\ y)\, dq + \int \varphi(x,\ y) ds = 0.$$

Этому условію можно удовлетворить, подобравъ соотвѣтствующимъ образомъ добавочную произвольную постоянную къ функціи $f_1(x, y)$.

Условіями (57) и (58) функція w_0 опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной.

Послѣдняя опредѣлится изъ условія [услов. (13)]

$$w_0 = 0 \qquad \text{при } x = y = 0.$$

Опредѣленіе функціи w_0 легко приводится къ рѣшенію извѣстной задачи C. Neumann'a.

Задачу, поставленную въ началѣ 8-ого §-а, можно считать разрѣшенной въ самомъ общемъ видѣ.

13. *Въ частности можемъ положить*

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0.$$

Получимъ рѣшеніе задачи о равновѣсіи упругаго изотропнаго цилиндра при условіи, что на его внутреннія массы не дѣйствуетъ силъ, а къ боковой поверхности приложены произвольно заданныя силы, одинаково къ периферіи любого изъ нормальныхъ сѣченій цилиндра, независимо отъ разстоянія этого сѣченія отъ основанія цилиндра.

Положивъ, наконецъ, еще

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0\,,$$

получимъ самое общее рѣшеніе уравненій равновѣсія при условіи, что на боковую поверхность не дѣйствуетъ силъ.

Это рѣшеніе является обобщеніемъ извѣстнаго рѣшенія С. Венана.

Послѣднее получится изъ приведеннаго нами, если ввести еще добавочное условіе, что моментъ и векторъ всѣхъ упругихъ силъ имѣютъ одну и ту же величину и направленіе въ каждомъ изъ нормальныхъ сѣченій цилиндра, независимо отъ разстоянія этого сѣченія отъ основанія цилиндра.

Это предложеніе является простымъ слѣдствіемъ общей теоремы, доказанной мною въ вышеупомянутой статьѣ: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ“ въ 1891 году.

14. Укажемъ теперь одно *частное рѣшеніе уравненій (28), (28_1), и (29), которое содержитъ въ себѣ, какъ частные случаи, и рѣшенія С. Венана и Клебша.*

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, полагая

$$\Delta u_j + m_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = A_j\,,$$

$$\Delta v_j + m_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} = B_j\,, \qquad (j=0,1) \qquad \textbf{(59)}$$

$$\Theta_j = n_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) + A_j x + B_j y + C_j\,,$$

гдѣ A_j, B_j, C_j, m_j и n_j произвольныя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, прямымъ слѣдствіемъ уравненій (59) будутъ слѣдующія

$$\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) + m_j \Delta\Theta_j = 0\,,$$

$$n_j \Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) - \Delta\Theta_j = 0\,.$$

Если только постоянныя m_j и n_j таковы, что

$$1 + m_j n_j \gtrless 0 \,,$$

то необходимо

$$\varDelta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) = 0\,, \qquad \varDelta\Theta_j = 0\,. \qquad {\scriptstyle (j=0,1)}$$

Уравненія (28), (28_1) и (29) оказываются прямыми слѣдствіями уравненій (59).

Уравненіе (30) преобразуется въ слѣдующее

$$\varDelta w_0 = [1 - n_1(1+\mu)]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - (1+\mu)(A_1 x + B_1 y + C_1)\,. \qquad \textbf{(60)}$$

Первыя два изъ уравненій (59) можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} (1 + m_j n_j)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + m_j n_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} &= (1 - m_j) A_j\,, \\ (1 + m_j n_j)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + m_j n_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} &= (1 - m_j) B_j\,. \end{aligned}\right\} {\scriptstyle (j=0,1)} \qquad \textbf{(61)}$$

Разумѣя теперь подъ u_j, v_j функціи, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, подъ w_0 функцію, удовлетворяющую уравненію (60), получаемъ рѣшеніе уравненій равновѣсія подъ видомъ

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z u_1 + \frac{z^2}{2}\left[n_0(m_0 - \mu)\frac{\partial P_0}{\partial x} + (m_0 - \mu - 1)A_0\right] + \\ &\quad + \frac{z^3}{6}\left[n_1(m_1 - \mu)\frac{\partial P_1}{\partial x} + (m_1 - \mu - 1)A_1\right], \\ v &= v_0 + z v_1 + \frac{z^2}{2}\left[n_0(m_0 - \mu)\frac{\partial P_0}{\partial y} + (m_0 - \mu - 1)B_0\right] + \\ &\quad + \frac{z^3}{6}\left[n_1(m_1 - \mu)\frac{\partial P_1}{\partial y} + (m_1 - \mu - 1)B_1\right], \\ w &= w_0 + z[(n_0 - 1)P_0 + A_0 x + B_0 y + C_0] + \\ &\quad + \frac{z^2}{2}[(n_1 - 1)P_1 + A_1 x + B_1 y + C_1], \\ \Theta &= n_0 P_0 + A_0 x + B_0 y + C_0 + z[n_1 P_1 + A_1 x + B_1 y + C_1]. \end{aligned} \qquad \textbf{(62)}$$

Коэффиціенты при степеняхъ z въ выраженіяхъ проекцій напряженій на оси координатъ будутъ опредѣляться слѣдующими формулами

$$X_{x,j} = -2K\left[\frac{\mu-1}{2}(n_j P_j + A_j x + B_j y + C_j) + \frac{\partial u_j}{\partial x}\right],$$

$$Y_{y,j} = -2K\left[\frac{\mu-1}{2}(n_j P_j + A_j x + B_j y + C_j) + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \qquad (j=0,1)$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right),$$

$$X_{x,i} = -2Kn_j(\mu - m_j)\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}, \quad Y_{y,i} = -2Kn_j(\mu - m_j)\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2}, \qquad (i=2,3$$

$$X_{y,i} = 0,$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right), \qquad \textbf{(63)}$$

$$Z_{x,k} = -K\left[[(1-\mu)n_j + m_j n_j - 1]\frac{\partial P_j}{\partial x} + (m_j - \mu)A_j\right],$$

$$(k=1,2;\ j=0,1)$$

$$Z_{y,k} = -K\left[[(1-\mu)n_j + m_j n_j - 1]\frac{\partial P_j}{\partial y} + (m_j - \mu)B_j\right],$$

$$Z_{x,3} = 0, \quad Z_{y,3} = 0,$$

$$Z_{z,j} = -K\left[[n_j(\mu+1) - 2]P_j + (\mu+1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \qquad (j=0,1)$$

$$Z_{z,i} = 0. \qquad (i=2,3)$$

Въ уравненіяхъ (62) и (63)

$$P_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}.$$

Функціи u_j и v_j можно опредѣлить при помощи уравненій (61) при условіяхъ на поверхности

$$X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a = X_j,$$

$$(j=0,1)$$

$$X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a = Y_j,$$

гдѣ X_j и Y_j суть заданныя функціи координатъ x и y.

Для опредѣленія функціи w_0, удовлетворяющей уравненію (60), можно поставить на поверхности цилиндра условіе вида

$$Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a = Z_0\,,$$

разумѣя подъ Z_0 заданную функцію координатъ.

Вообще, какъ не трудно видѣть, *получается рѣшеніе задачи о равновѣсіи цилиндра подъ дѣйствіемъ слѣдующихъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности*

$$P = X_0 + zX_1 + z^2X_2 + z^3X_3\,,$$

$$Q = Y_0 + zY_1 + z^2Y_2 + z^3Y_3\,,$$

$$R = Z_0 + zZ_1 + z^2Z_2\,,$$

гдѣ X_k, Y_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, Z_i $(i = 0, 1, 2)$ *суть функціи координатъ* x *и* y.

Пять изъ этихъ одиннадцати функцій можно задать произвольно, остальныя опредѣлятся по этимъ пяти.

15. До сихъ поръ мы предполагали постоянныя m_j и n_j какими угодно, подчиненными лишь одному условію

$$1 + m_j n_j \gtrless 0\,, \tag{64}$$

а постоянныя A_j, B_j, C_j совершенно произвольными.

Разсмотримъ теперь два частныхъ случая:

1) Постоянныя A_j, B_j, C_j произвольны, а

$$m_0 = m_1 = \mu\,, \qquad n_1 = n_0 = 1\,, \tag{65}$$

2) Постоянныя A_j, B_j, C_j равны нулю, а

$$m_0 = m_1 = \frac{3\mu - 1}{2}\,, \quad n_0 = n_1 = \frac{2}{\mu + 1}. \tag{66}$$

Эти значенія постоянныхъ m_j, n_j возможны, такъ какъ условіе (64) навѣрно выполняется въ обоихъ случаяхъ.

Предположимъ, что m_j и n_j удовлетворяютъ условіямъ (65).

Уравненія (60) и (61) примутъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned} (1+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x\partial y} &= (1-\mu)A_j\,, \\ (1+\mu)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x\partial y} &= (1-\mu)B_j\,, \end{aligned}\right\} \quad (j=0,1) \tag{67}$$

$$\varDelta w_0 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (1+\mu)(A_1x + B_1y + C_1) = 0.$$

Уравненія (62) дадутъ слѣдующія выраженія для проекцій на оси координатъ перемѣщеній точекъ упругаго тѣла

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + z u_1 - \frac{z^2}{2} A_0 - \frac{z^3}{6} A_1 , \\
v &= v_0 + z v_1 - \frac{z^2}{2} B_0 - \frac{z^3}{6} B_1 , \qquad \textbf{(68)} \\
w &= w_0 + z(A_0 x + B_0 y + C_0) + \frac{z^2}{2}(A_1 x + B_1 y + C_1) .
\end{aligned}
$$

Наконецъ, уравненія (63) приведутся къ слѣдующимъ

$$
\begin{aligned}
X_{x,j} &= -K\left[(\mu+1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu-1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \\
Y_{y,j} &= -K\left[(\mu-1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu+1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \\
Z_{z,j} &= -K[(\mu-1)P_j + (\mu+1)(A_j x + B_j y + C_j)], \qquad \textbf{(69)} \\
X_{y,j} &= -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right), \\
&\qquad (j=0,1) \\
Z_{x,0} &= -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right), \\
X_{x,i} &= 0, \quad Y_{y,i} = 0, \quad X_{y,i} = 0, \quad Z_{z,i} = 0, \qquad (i=2,3) \\
Z_{x,k} &= 0, \quad Z_{y,k} = 0. \qquad (k=1,2,3)
\end{aligned}
$$

Задача будетъ рѣшена, коль скоро будутъ извѣстны функціи u_j, v_j $(j=0, 1)$ и w_0.

Эти функціи должны удовлетворять уравненіямъ (67), на поверхности же цилиндра (боковой) можно поставить слѣдующія условія

$$
\begin{aligned}
X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a &= X_j , \\
X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a &= Y_j , \qquad \textbf{(70)} \\
Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a &= Z_0 ,
\end{aligned}
$$

гдѣ подъ $X_{x,j}, \ldots, Z_{y,0}$ разумѣются выраженія (69), а подъ X_j, Y_j $(j=0, 1)$, Z_0 заданныя функціи координатъ x, y.

Уравненія (67) вмѣстѣ съ условіями (70) опредѣляютъ функціи u_j и v_j до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій типа

$$Ay + B, \qquad -Ax + C, \tag{71}$$

а функцію w_0 до произвольной постоянной.

Въ разсматриваемомъ случаѣ получается рѣшеніе аналогичное тому, которое мы указывали въ §-ахъ отъ 8-ого до 14-аго.

16. Предположимъ, что

$$X_j = 0, \qquad Y_j = 0.$$

Опредѣленіе функцій u_j, v_j приводится къ интегрированію уравненій

$$\begin{aligned} \Delta u_j + \mu \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= A_j, \\ \Delta v_j + \mu \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= B_j, \end{aligned} \tag{72}$$

гдѣ

$$\Theta_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + A_j x + B_j y + C_j,$$

при слѣдующихъ условіяхъ на поверхности

$$\begin{aligned} &\left[(\mu+1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu-1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right]\cos a + \\ &\qquad + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right]\sin a = 0, \\ &\left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right]\cos a + \\ &+ \left[(\mu-1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu+1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right]\sin a = 0. \end{aligned} \tag{73}$$

Такъ какъ условіями (72) и (73) функціи u_j, v_j опредѣляются вполнѣ до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій типа (71), то, найдя какое бы то ни было рѣшеніе уравненій (72), удовлетворяющее въ тоже время и условіямъ (73), мы получимъ самое общее рѣшеніе, прибавивъ къ найденному только что упомянутыя линейныя функціи вида (71).

Положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = \frac{1-\mu}{\mu}(A_j x + B_j y + D_j), \tag{74}$$

гдѣ D_j есть нѣкоторая постоянная.

Уравненія (72) приведутся къ слѣдующимъ

$$\Delta u_j = 0\,, \quad \Delta v_j = 0. \tag{75}$$

При помощи уравненій (74) и (75) находимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial x} = \frac{1-\mu}{\mu}(B_j x - A_j y + E_j)\,, \tag{74_1}$$

гдѣ E_j произвольная постоянная.

Принявъ въ разсчетъ это уравненіе и (74), приводимъ равенства (73) къ слѣдующему виду

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial x} + \lambda(A_j x + B_j y + F_j)\right]\cos a + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \lambda(B_j x - A_j y + E_j)\right]\sin a = 0,$$

$$\left[\frac{\partial v_j}{\partial x} - \lambda(B_j x - A_j y + E_j)\right]\cos a + \left[\frac{\partial v_j}{\partial y} + \lambda(A_j x + B_j y + F_j)\right]\sin a = 0, \tag{76}$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{\mu - 1}{2\mu}\,, \quad F_j = \mu C_j - (\mu - 1) D_j.$$

Положимъ

$$\varphi_j = \lambda\left[A_j \frac{x^2 - y^2}{2} + B_j xy + F_j x + E_j y\right],$$

$$\psi_j = \lambda\left[A_j xy - B_j \frac{x^2 - y^2}{2} - E_j x + F_j y\right].$$

Можемъ писать [рав. (76)]

$$\frac{\partial(u_j + \varphi_j)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial(u_j + \varphi_j)}{\partial y}\sin a = 0,$$

$$\frac{\partial(v_j + \psi_j)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial(v_j + \psi_j)}{\partial y}\sin a = 0. \tag{77}$$

Такъ какъ

$$\Delta(u_j + \varphi_j) = 0\,, \qquad \Delta(v_j + \psi_j) = 0\,,$$

то

$$u_j = -\lambda\left[A_j \frac{x^2 - y^2}{2} + B_j xy + F_j x + E_j y\right] + M_j\,,$$

$$v_j = -\lambda\left[A_j xy - B_j \frac{x^2 - y^2}{2} - E_j x + F_j y\right] + N_j.$$

Уравненія (74) и (74_1) будутъ удовлетворены, если положимъ

$$C_j = D_j.$$

Самое общее рѣшеніе получимъ, прибавивъ къ найденнымъ функціямъ u_j и v_j линейныя функціи типа (71).

Остается только опредѣлить функцію w_0 при помощи послѣдняго изъ уравненій (67) и послѣдняго изъ условій (70).

Очевидно, *что полученное такимъ путемъ рѣшеніе совпадетъ съ рѣшеніемъ С. Венана, если положить еще*

$$Z_0 = 0.$$

17. Разсмотримъ второй случай

$$A_j = B_j = C_j = 0, \qquad m_0 = m_1 = \frac{3\mu - 1}{2}, \qquad n_0 = n_1 = \frac{2}{\mu + 1}.$$

Уравненія (61) обратятся въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &4\mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + (\mu + 1)\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + (3\mu - 1)\frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=0,1) \\ &4\mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + (\mu + 1)\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + (3\mu - 1)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

а равенства (63) въ слѣдующія

$$X_{x,j} = -\frac{2K}{\mu + 1}\left[2\mu \frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu - 1)\frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \quad X_{x,i} = -K\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2},$$

$$(j=0,1;\ i=2,3)$$

$$Y_{y,j} = -\frac{2K}{\mu + 1}\left[(\mu - 1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \quad Y_{y,i} = -K\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2},$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right), \quad X_{y,i} = 0,$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right),$$

$$Z_{x,k} = 0, \quad Z_{y,k} = 0, \qquad (k=1,2,3)$$

$$Z_{z,s} = 0. \qquad (s=0,1,2,3)$$

Проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность цилиндра представятся подъ видомъ

$$P = X_0 + zX_1 + z^2X_2 + z^3X_3\,,$$

$$Q = Y_0 + zY + z^2Y_2 + z^3Y_3\,,$$

$$R = Z_0\,,$$

гдѣ X_s, $Y_s (s = 0, 1, 2, 3)$, Z_0 суть функціи x и y.

Изъ нихъ пять, напр., X_0, Y_0, X_1, Y_1 и Z_0, какъ упоминалось выше, могутъ быть заданы произвольно, остальныя опредѣлятся сами собой.

Предположимъ, что

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1 = 0\,, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1 = 0. \tag{79}$$

Въ такомъ случаѣ

$$Z_{x,0} = 0\,, \qquad Z_{y,0} = 0.$$

Уравненіе (60) приметъ видъ

$$\Delta w_0 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = 0$$

и является прямымъ слѣдствіемъ уравненій (79).

Уравненія (78) при $j = 1$ приводятся, при помощи (79), къ двумъ слѣдующимъ

$$\frac{\partial \Delta w_0}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Delta w_0}{\partial y} = 0\,,$$

или

$$\Delta w_0 = M\,,$$

гдѣ M есть произвольная постоянная.

Положивъ

$$w_0 = f + \frac{M}{4}(x^2 + y^2)\,,$$

получимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія f

$$\Delta f = 0.$$

Функціи u_1 и v_1 выразятся черезъ f слѣдующимъ образомъ

$$u_1 = -\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{M}{2}x\,, \quad v_1 = -\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{M}{2}y.$$

Послѣднее изъ уравненій (59) даетъ

$$\frac{\mu+1}{2}\Theta_1=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=-M.$$

Принявъ во вниманіе все сказанное, получаемъ [изъ (62)]

$$u=u_0-z\left(\frac{M}{2}x+\frac{\partial f}{\partial x}\right)+z^2\frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),$$

$$v=v_0-z\left(\frac{M}{2}y+\frac{\partial f}{\partial y}\right)+z^2\frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right),$$

$$w=f+\frac{M}{2}(x^2+y^2)+z\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-\frac{z^2}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}M.$$

Здѣсь f есть функція, удовлетворяющая уравненію Лапласа, а u_0, v_0 удовлетворяютъ уравненіямъ вида

$$4\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+(\mu+1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+(3\mu-1)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}=0,$$

$$4\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+(\mu+1)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+(3\mu-1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}=0.$$

Полученное такимъ образомъ рѣшеніе очевидно совпадаетъ съ извѣстнымъ рѣшеніемъ Clebsch'а [см. Clebsch. „Theorie d. Elasticität", Leipzig, 1862, s. 152, форм. (130) и (131)].

18. Въ заключеніе замѣтимъ, что, пользуясь вышеприведенными изслѣдованіями, мы могли бы рѣшить задачу о равновѣсіи цилиндра при гипотезѣ, что напряженія, дѣйствующія въ каждой точкѣ тѣла на двѣ взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ xz и yz, лежатъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ только что упомянутымъ (обобщеніе извѣстной гипотезы С. Венана), а также и при нѣкоторыхъ другихъ предположеніяхъ относительно распредѣленія напряженій внутри цилиндра.

Я позволю себѣ ограничиться этимъ замѣчаніемъ, не приводя относящихся сюда изслѣдованій.