Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VII, ~~№ 6.~~

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VII.

~~№ 6.~~

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильберберга и С-вья.
Рыбная улица, домъ № 30-9.
1910 - 1902.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VII.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ VII.

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильберберг и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1902.

33.

На основаніи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, 10-го апрѣля 1902 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *А. Ляпуновъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

VII-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му мая 1902 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: А. М. Ляпуновъ.
2. Товарищи предсѣдателя: М. А. Тихомандрицкій и В. А. Стекловъ.
3. Секретарь А. П. Пшеборскій.

В. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго универс.
2. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
3. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ, академикъ.
4. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Московскаго университета.
5. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. университета св. Владиміра.
6. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго университета.
7. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. университета.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. университета, академикъ.
9. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. электро-техн. инст.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, прив.-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. технолог. института.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
5. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директ. СПБ. технол. института.
6. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. университета св. Владиміра.
7. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инстит.
8. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумск. реальн. училища.
9. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, прив.-доцентъ Харьк. универс.

10. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. универс.
11. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, прив.-доцентъ Харьк. универс.
12. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инстит.
13. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, директ. Харьк. технол. института.
14. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Кіевскаго политехн. инстит.
15. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежск. кадетск. корпуса.
16. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
17. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
18. Косачъ Михаилъ Петровичъ, прив.-доцентъ Харьк. университета.
19. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимн.
20. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. нар. уч. Курск. губ.
21. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, прив.-доцентъ Харьк. унив.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. технол. инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго университета.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьковѣ.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьков. гимназіи.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
28. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. техн. института.
29. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новороссійскаго универс.
30. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. техн. инст.
31. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. техн. института.
32. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
33. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, прив.-доцентъ Харьк. универс.
34. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
35. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьк. учебн. округа.
36. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьк. универс.
37. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, бывш. преп. Урюпинск. реальн. учил.
38. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Томскаго технол. инст.
39. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмскаго реальн. учил.
40. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
41. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимназіи.
42. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьк. университета.
43. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьковскаго университета.
44. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. универс.
45. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьк. универс.
46. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Усть-Медвѣд. реальн. учил.
47. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
48. Шимковъ Андрей Петровичъ, бывш. проф. Харьк. университета.
49. Шиховъ Василій Васильевичъ, директ. Харьк. реальн. училища.
50. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. препод. 2-й Харьк. гимн.
51. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. технол. инст.

D. Члены-корреспонденты.

а) русскіе:

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго универс.
2. Вороной Георгій Өеодосьевичъ, проф. Варшавскаго университета.
3. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Кіевск. политехн. инст.
4. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, попеч. Московск. учебн. округа.
5. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. университета.
6. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варшавскаго университета.
7. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермск. гимназіи.

b) иностранные:

1. Cosserat E., проф. Тулузскаго университета.
2. Kneser A., проф. Берлинской горной академіи (Bergakademie).
3. Korn A., прив.-доцентъ Мюнхенскаго университета.
4. Zaremba S., проф. Краковскаго университета.

Note sur le problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance.

Par M. N. Saltykow.

Le problème dont il s'agit revient à intégrer le système canonique d'équations différentielles ordinaires

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y'}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

où l'on a posé

$$H = -\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{m}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{y^2}.$$

Le système (1) admet deux intégrales bien connues

$$\left.\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= L, \\ (xy' - yx')^2 - a^2 y'^2 &= M, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

L, M désignant les fonctions

$$L = \frac{2m}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{2m'}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{\alpha^2}{y^2} + 2\beta$$

$$M = \frac{2ma(x-a)}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} - \frac{2m'a(x+a)}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} + \frac{\alpha^2}{y^2}(a^2 - x^2 - y^2) + \gamma,$$

β, γ étant deux constantes arbitraires *). Comme la première des intégrales (2) est celle des forces vives, la seconde ne contenant pas explicitement la variable t, on en conclut que les équations (2) forment un système de deux intégrales en involution par rapport au système canonique (1). Donc en effectuant la qudrature de la différentielle exacte

$$x'dx + y'dy \,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

x', y' représentant les valeurs tirées des équations (2), on obtient, d'après le théorème de Jacobi **), les deux autres intégrales du système (1) par différentiation seulement.

C'est ainsi que toutes les difficultés du problème consistent à résoudre les équations (2) et à intégrer la différentielle (3). On y parvient aisément par l'introduction de nouvelles variables de Jacobi λ', λ'' ***) en posant

$$ax = \sqrt{(a^2 - \lambda')(a^2 - \lambda'')}\,, \qquad ay = \sqrt{-\lambda'\lambda''}\,.$$

Il s'ensuit, en effet,

$$2a\,(x'dx + y'dy) = 2\,[x'd\sqrt{(a^2 - \lambda')(a^2 - \lambda'')} + y'd\sqrt{-\lambda'\lambda''}] =$$

$$= -\,[\sqrt{\lambda''(a^2 - \lambda')}\,.\,y' + \sqrt{-\lambda'(a^2 - \lambda'')}\,.\,x']\,\frac{d\lambda'}{\sqrt{-\lambda'(a^2 - \lambda')}} +$$

$$+\,[\sqrt{-\lambda'(a^2 - \lambda'')}\,.\,y' - \sqrt{\lambda''(a^2 - \lambda')}\,.\,x']\,\frac{d\lambda''}{\sqrt{\lambda''(a^2 - \lambda'')}}\,.$$

Mais d'après les formules de Jacobi ****), les expressions en crochets rectilignes deviennent

$$a\sqrt{-(M + \lambda' L)}\,, \qquad a\sqrt{M + \lambda'' L}\,,$$

la première étant fonction de λ' seulement et la seconde ne contenant que λ''. La différentielle (3) prend donc la forme

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{M + \lambda'' L}{\lambda''(a^2 - \lambda'')}}\,d\lambda'' - \sqrt{\frac{M + \lambda' L}{\lambda'(a^2 - \lambda')}}\,d\lambda'\right],$$

les variables λ', λ'' étant séparées.

---

*) Jacobi. Gesammelte Werke, Bd. IV, Theoria novi mutiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, p. 465.

**) Jacobi. Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 35. Ce théorème publié en 1836 ne présente qu'un cas particulier de celui de Liouville, annoncé par ce geomètre en 1856, Journal de Liouville, 1-re série, t. XX, p. 137.

***) Bd. IV, pp. 467—468.

****) Bd. IV, p. 468, formules (14), (15).

Par conséquent, les deux intégrales requises s'obtiennent en différentiant l'intégrale de cette dernière formule partiellement par rapport aux constantes arbitraires γ et β:

$$\int \frac{d\lambda''}{\sqrt{\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda''L)}} - \int \frac{d\lambda'}{\sqrt{\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda'L)}} = \gamma',$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\lambda'' d\lambda''}{\sqrt{\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda''L)}} - \frac{1}{2}\int \frac{\lambda' d\lambda'}{\sqrt{\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda'L)}} = t+\beta',$$

γ', β' étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Quant à λ', λ'', elles sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 + (x^2+y^2-a^2)\lambda - a^2y^2 = 0$$

et ne présentent donc qu'un cas particulier des coordonnées elliptiques dont se servit Jacobi en traitant le même problème par sa seconde méthode *).

---

*) Vorlesungen über Dynamik. Zweite Ausgabe, 1884. S. 221.

Къ теоріи дисперсіи: случай многихъ полосъ поглощенія.

А. П. Грузинцева.

Въ электромагнитной теоріи дисперсіи Гельмгольца, изложенной нами съ нѣкоторыми дополненіями въ статьѣ *) „Электромагнитная теорія проводниковъ", разсматривается простѣйшій случай, когда средина заключаетъ въ себѣ одинъ родъ матеріальныхъ іонъ, поляризующихся подъ вліяніемъ электрическихъ силъ; въ настоящей статьѣ мы разсмотримъ случай, когда въ тѣлѣ существуютъ молекюли нѣсколькихъ родовъ, т. е. когда тѣло даетъ спектръ со многими полосами поглощенія и покажемъ, что общія уравненія сохранятъ свой прежній видъ: измѣнится лишь значеніе нѣкоторыхъ коэффиціентовъ.

Пусть въ разсматриваемомъ тѣлѣ находится n различныхъ *іонъ*, т. е. n различнаго рода молекюлей. Обозначимъ количества, относящіяся къ i-ой изъ нихъ, прежними буквами, какъ въ упомянутой нашей работѣ, съ указателемъ i внизу; поэтому, электрическая энергія средины представится въ видѣ: (вмѣсто фор. (1) ст. 22):

$$U = \int \left[\frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2) - \frac{4\pi}{K} \sum_1^n (ff_i + gg_i + hh_i) + \right.$$

$$\left. + 2\pi \sum_1^n \frac{1}{K_i}(f_i^2 + g_i^2 + h_i^2) \right] d\tau\, ; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

энергія-же токовъ перемѣщенія въ видѣ [вмѣсто фор. (3) стр. 24):

$$W = A \int \left[F \frac{d(f + \sum f_i)}{dt} + G \frac{d(g + \sum g_i)}{dt} + H \frac{d(h + \sum h_i)}{dt} \right] d\tau \, . \quad . \; (b)$$

---

*) Записки Императорскаго Харьковскаго университета, кн. 4, 1899 г.

Работа *диссипативныхъ силъ* будетъ, если обозначимъ R работу токовъ проводимости (стр. 25):

$$\sum P_a p_a = -\frac{1}{2}\sum_1^n \int m_i \left[\left(\frac{df_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh_i}{dt}\right)^2\right] d\tau +$$

$$+\sum_1^n \int [r_1 f_i + r_2 g_i + r_3 h_i]\, d\tau + R,$$

гдѣ положено:

$$r_1 = k_{1i}\frac{df_i}{dt}, \quad r_2 = k_{2i}\frac{dg_i}{dt}, \quad r_3 = k_{3i}\frac{dh_i}{dt}. \quad \ldots \ldots (c)$$

Поэтому, вмѣсто уравненій (I) § 25, (II) § 26 и (III) § 27, будемъ имѣть:

$$\frac{4\pi}{K}\left(f - \sum_1^n f_i\right) - A\frac{dF}{dt} + P_0 = 0 \quad \text{и т. п.} \ldots \ldots (d)$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + A\frac{d(f + \sum f_i)}{dt} + Ap = 0 \quad \text{и т. п.} \ldots (e)$$

$$4\pi\left(\frac{f_i}{K_i} - \frac{f}{K}\right) - A\frac{dF}{dt} + m_i\frac{d^2 f_i}{dt^2} + r_1 = 0. \quad \text{и т. п.} \ldots (f)$$

Изъ (d) и (f) черезъ исключеніе F, G, H находимъ:

$$m_i\frac{d^2 f_i}{dt^2} + k_i\frac{df_i}{dt} + \frac{4\pi}{K_i}f_i + \frac{4\pi}{K}\sum_1^n f_i - \frac{8\pi}{K}f = 0 \quad \text{и т. п.} \ldots (h)$$

принимая, что $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$.

Для магнитной силы получимъ [вм. (2) стр. 33] уравненія:

$$A\mu\frac{d\alpha}{dt} = \frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial}{\partial y}(h - \sum h_i) - \frac{\partial}{\partial z}(g - \sum g_i)\right] \quad \text{и т. п.} \ldots (k)$$

Опредѣлимъ прежде всего связь между f, g, h съ одной стороны и f_i, g_i, h_i съ другой.

Пусть, какъ и прежде:

$$f = Me^{\varrho}, \quad g = Ne^{\varrho}, \quad h = Pe^{\varrho},$$

и

$$f_i = u_i f; \quad g_i = u_i g, \quad h_i = u_i h, \quad \ldots \ldots \ldots (l)$$

тогда уравненія (h) дадутъ по подстановкѣ:

$$\left[-m_i p^2 + k_i p\sqrt{-1} + \frac{4\pi}{K_i}\right] u_i - \frac{8\pi}{K} + \frac{4\pi}{K}\sum_1^n u_i = 0.$$

или, если положимъ:

$$-\frac{m_i K}{8\pi} p^2 + \frac{K}{2K_i} + \frac{Kk_i}{8\pi} p\sqrt{-1} = A_i - \frac{1}{2}, \qquad (i=1, 2, 3 \ldots n)$$

то получимъ:

$$(2A_i - 1)\, u_i = 2 - \sum_1^n u_i \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (n)$$

Примѣнимъ это уравненіе къ u_1; получимъ:

$$(2A_1 - 1)\, u_1 = 2 - \sum_1^n u_i \, ,$$

а сравнивая съ тѣмъ же уравненіемъ (n), найдемъ:

$$u_i = \frac{2A_1 - 1}{2A_i - 1}\, u_1 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Полагая здѣсь $i = 2, 3, \ldots n$, мы выразимъ всѣ u_i въ функціи u_1. Отсюда находимъ:

$$\sum_1^n u_i = (2A_1 - 1) u_1 \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1} \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

Но:

$$(2A_1 - 1)\, u_1 = 2 - \sum_1^n u_i \, ,$$

подставляя значеніе $\sum u_i$ изъ (q), получимъ:

$$(2A_1 - 1)\, u_1 = 2 - u_1 (2A_1 - 1) \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1} \, ,$$

откуда:

$$u_1 = \frac{2}{(2A_1 - 1)\left[1 + \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1}\right]} \, .$$

Пусть

$$1+\sum_1^n \frac{1}{2A_i-1}=\frac{2}{S}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (r)$$

тогда:

$$u_1=\frac{S}{2A_1-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

и по равенству (p):

$$\left.\begin{array}{l} u_2=\dfrac{S}{2A_2-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_n=\dfrac{S}{2A_n-1}\,. \end{array}\right\} \quad \ldots (2)$$

Сложивъ (1) и (2), найдемъ:

$$\sum_1^n u_i=S\sum_1^n \frac{1}{2A_i-1}=S\left(\frac{2}{S}-1\right),$$

т. е.

$$\sum_1^n u_i=2-S \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

или при помощи (r):

$$\sum_1^n u_i=2-\frac{2}{1+\sum_1^n \dfrac{1}{2A_i-1}} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Здѣсь:

$$2A_i-1=\frac{K}{K_i}-\frac{m_iK}{4\pi}p^2+\frac{k_iK}{4\pi}p\sqrt{-1} \quad \ldots \ldots (5)$$

или, если положимъ:

$$\frac{K}{K_i}=\eta_i, \quad \frac{m_iK}{4\pi}=a_i', \quad \frac{k_iK}{4\pi}=b_i' \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

$$2A_i=1+\eta_i-a_i'p^2+b_i'p\sqrt{-1} \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

Теперь уравненія (k) напишутся въ видѣ:

$$A\mu\frac{d\alpha}{dt}=\frac{4\pi(1-u)}{K}\left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad \text{и т. д.} \quad \ldots \ldots (\mathrm{I})$$

гдѣ положили:

$$u = \sum_1^n u_i = 2 - S. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

Уравненія-же (e) будутъ:

$$4\pi A(1+u)\frac{df}{dt} + 4\pi A p = \frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}. \quad \text{и т. п.} \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{III})$$

Опредѣлимъ теперь составляющія тока проводимости: p, q и r. Имѣемъ согласно опредѣленію (стр. 36, § 33):

$$p_1 = C(P - \sum_1^n P_i) = C\left(\frac{4\pi}{K} f - \sum_1^n \frac{4\pi u_i}{K_i} f\right),$$

т. е.

$$p_1 = \frac{4\pi C}{K} f\left(1 - \sum_1^n \frac{K u_i}{K_i}\right) = \frac{4\pi C}{K}\left(1 - \sum_1^n u_i \eta_i\right) f \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Точно также найдемъ для токовъ переноса:

$$p_i = \frac{4\pi C_i}{K_i} f_i = \frac{4\pi C_i u_i}{K_i} f$$

и, слѣдовательно:

$$p_2 = \frac{4\pi C}{K} f \cdot \sum_1^n \frac{K C_i u_i}{K_i C} = \frac{4\pi C}{K} f \sum_1^n \delta_i u_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

гдѣ положено:

$$\delta_i = \frac{K}{K_i} \cdot \frac{C_i}{C} = \eta_i \frac{C_i}{C}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

И такъ, окончательно получимъ:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{4\pi C}{K}\left(1 + \sum_1^n (\delta_i - \eta_i) u_i\right) \cdot f$$

или

$$p = \frac{4\pi C}{K}\left(1 + \sum_1^n \gamma_i u_i\right) f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

гдѣ:

$$\gamma_i = \delta_i - \eta_i = \left(\frac{C_i}{C} - 1\right)\eta_i \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varepsilon)$$

Положимъ теперь:

$$\sum_1^n u_i \eta_i = \eta \cdot u; \quad \sum_1^n \delta_i u_i = \delta \, . \, u; \quad \sum_1^n \gamma_i u_i = \gamma \cdot u \quad . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{IV})$$

откуда:

$$\gamma = \delta - \eta \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{V})$$

Слѣдовательно, всѣ уравненія внутри средины имѣютъ прежній видъ.

Далѣе, первая система поверхностныхъ условій остается въ томъ-же видѣ и точно также вторая система пограничныхъ условій будетъ того-же вида, какъ и прежде.

Дѣйствительно, эти условія будутъ:

$$\left[P - \sum_1^n P'_i\right]_1 = \left[P - \sum_1^n P'_i\right]_2,$$

$$\left[Q - \sum_1^n Q'_i\right]_1 = \left[Q - \sum_1^n Q'_i\right]_2.$$

Но:

$$P'_i = \frac{4\pi}{K_i} f_i = \frac{4\pi u_i}{K_i} f,$$

слѣдовательно:

$$P - \sum_1^n P'_i = \frac{4\pi}{K} f - 4\pi f \sum \frac{u_i}{K_i} = \frac{4\pi}{K} f\left(1 - \sum_1^n u_i \eta_i\right) = \frac{4\pi}{K}(1 - u\eta) f.$$

Вся разница, слѣдовательно, въ томъ, что u опредѣляется уравненіемъ:

$$u = 2 - \frac{1}{1 - \sum\limits_1^n \frac{1}{2A_i - 1}}$$

или

$$\frac{1}{2}u = \frac{\sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1}}{1 + \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{VI})$$

Здѣсь:

$$2A_i - 1 = \eta_i - a'_i p^2 + b'_i p \sqrt{-1}$$

или

$$2A_i - 1 = \eta_i (1 - a_i p^2 + b_i p \sqrt{-1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

гдѣ положено:

$$a_i = \frac{a'_i}{\eta_i}, \quad b_i = \frac{b'_i}{\eta_i}$$

или

$$a_i = \frac{m_i K_i}{4\pi}, \quad b_i = \frac{k_i K_i}{4\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\nu)$$

Показавъ аналитически, что все остается въ прежнемъ видѣ и для n родовъ іонъ, т. е. для n полосъ поглощенія средины, разсмотримъ физическій смыслъ полученныхъ результатовъ.

Въ выраженіяхъ для p_1, q_1, r_1 входитъ количество:

$$\sum_1^n \frac{Ku_i}{K_i} = \sum_1^n \eta_i u_i.$$

Всегда возможно опредѣлить новое постоянное K_0 такъ, чтобы:

$$\sum_1^n \frac{u_i}{K_i} = \frac{\sum_1^n u_i}{K_0} = \frac{u}{K_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

т. е. K_0 будетъ количество *среднее физически-эквивалентное* количествамъ K_i $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Въ такомъ случаѣ для количества

$$\eta = \frac{\sum_1^n u_i \eta_i}{u}$$

получимъ:

$$\eta = \frac{K}{u} \sum_1^n \frac{u_i}{K_i} = \frac{K}{K_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

какъ разъ прежнее выраженіе для случая одного рода іоновъ.

Затѣмъ имѣемъ:

$$u\delta = \sum_1^n \frac{KC_i u_i}{K_i C} = \frac{K}{C} \sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i},$$

и опять возможно опредѣлить количество C_0, какъ *среднее физически-эквивалентное* всѣмъ C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ по формулѣ:

$$\sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i} = C_0 \sum_1^n \frac{u_i}{K_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

слѣдовательно, при помощи (a) получаемъ:

$$\sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i} = \frac{C_0 u}{K_0},$$

и, значитъ:

$$\delta = \frac{C_0}{K_0} \cdot \frac{K}{C} = \eta \frac{C_0}{C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

Наконецъ, найдемъ:

$$\gamma = \left(\frac{C_0}{C} - 1 \right) \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

Итакъ, всѣ соотношенія между коэффиціентами K_0, C_0, δ, η и γ остаются прежними.

Отсюда сдѣлаемъ общее заключеніе:

Если средина заключаетъ n различныхъ, діэлектрически-поляризующихся іоновъ, характеризуемыхъ молекюлярными постоянными K_i и C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ или, другими словами, *спектръ средины имѣетъ n по-*

лось поглощенія, то мы можемъ замѣнить такую совокупность n іоновъ одним іономъ, физически имъ эквивалентнымъ и характеризуемымъ постоянными K_0 и C_0, опредѣляемыми изъ соотношеній:

$$\frac{1}{K_0}=\frac{\sum\limits_1^n \frac{u_i}{K_i}}{\sum\limits_1^n u_i}, \qquad C_0=\frac{\sum\limits_1^n \frac{C_i u_i}{K_i}}{\sum\limits_1^n \frac{u_i}{K_i}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Въ такомъ случаѣ всѣ формулы, полученныя нами для срединъ съ съ однимъ родомъ іонъ, примѣняются и къ срединамъ съ какимъ угодно числомъ іонъ:—причемъ соотношенія:

$$\eta=\frac{K}{K_0}, \quad \gamma=\left(\frac{C_0}{C}-1\right)\eta, \quad \delta=\frac{C_0}{C}\eta \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

сохраняются, но съ той только разницей, что K_0 и C_0 имѣютъ значеніе *эквивалентныхъ среднихъ* *) изъ всѣхъ значеній K_i и C_i $(i=1, 2, \ldots n)$, относящихся къ различнымъ іонамъ и опредѣляемыхъ формулами (I).

Можно замѣтить относительно η слѣдующее.

Такъ какъ:

$$\eta=\frac{K\sum\limits_1^n L_i u_i}{\sum\limits_1^n u_i}, \qquad \text{гдѣ} \qquad L_i=\frac{1}{K_i}$$

и

$$0<K_i<1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \;(f)$$

то

$$\eta>K.$$

Точно также относительно K_0 можно замѣтить, что

$$0<K_0<1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \;(h)$$

---

*) Мы вводимъ терминъ *эквивалентное среднее* въ отличіе отъ *ариѳметическаго средняго n* данныхъ количествъ.

Дѣйствительно, K_0 не можетъ достигать значенія діэлектрической постоянной какой-нибудь средины, наименьшее-же значеніе $K = 1$ (для воздуха или, лучше, пустоты); поэтому K_0 должно заключаться между 0 и 1.

Отсюда вытекаетъ одно важное слѣдствіе. Если средина заключаетъ чрезвычайно много различныхъ родовъ іонъ, т. е. обладаетъ спектромъ съ безчисленнымъ количествомъ полосъ поглощенія или другими словами, она поглощаетъ всѣ лучи, лежащіе между длинами волнъ λ_1 и λ_2, что это K_0 будетъ ариѳметическимъ среднимъ изъ всѣхъ K_i, т. е.

$$K_0 = 0,5.$$

Такой случай мы имѣемъ въ металлахъ.

Металлы *поглощаютъ* всѣ свѣтовые лучи отъ крайнихъ красныхъ ($\lambda_1 = 0^\mu,7$, примѣрно, гдѣ $1^\mu = 0{,}001$ миллиметра) до крайнихъ фіолетовыхъ ($\lambda_2 = 0^\mu,4$), поэтому для нихъ должны получить:

$$K_0 = 0{,}5.$$

Опытъ вполнѣ подтверждаетъ такое заключеніе *).

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что

$$1 < \eta < \infty.$$

для металловъ или вообще для срединъ, поглощающихъ сплошь лучи отъ λ_1 до λ_2, должны имѣть:

$$\eta = 2K.$$

Это тоже вполнѣ подтверждается опытомъ **).

Обратимся теперь къ дисперсіонной формулѣ.

Мы имѣли:

$$\frac{1}{2}u = \frac{\sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1}}{1 + \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1}},$$

гдѣ

$$2A_i - 1 = \eta_i - a_i' p^2 + b_i' p \sqrt{-1}$$

*) Стр. 75 цитир. ст.

**) Стр. 74 и 78 цит. ст.

или

$$2A_i - 1 = \eta_i (1 - a_i p^2 = b_i p \sqrt{-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Поэтому, подставивъ значеніе A_i, получимъ по приведеніи къ одному знаменателю

$$\sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1} = \frac{f_1(p^2) + p f_2(p^2)\sqrt{-1}}{\phi_{2n}(p)},$$

$$1 + \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1} = \frac{F_1(p^2) + p F_2(p^2)\sqrt{-1}}{\phi_{2n}(p)},$$

причемъ f_1 и F_2 суть цѣлыя раціональныя функціи отъ p^2 степени $n-1$-ой съ дѣйствительными коэффиціентами; F_1 — степени n-ой, а f_2 степени $n-2$-ой, функція-же $\phi_{2n}(p)$ имѣетъ тоже видъ:

$$\phi_{2n}(p) = \phi_1(p^2) + p\phi_2(p^2)\sqrt{-1},$$

причемъ ϕ_1 — n-ой степени, а ϕ_2 — $n-1$-ой отъ p^2.

Отсюда находимъ, что

$$\frac{1}{2} n = \frac{f_1(p^2) + p f_2(p^2)\sqrt{-1}}{F_1(p^2) + p F_2(p^2)\sqrt{-1}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Дисперсіонная формула (§ 41, стр. 44) даетъ:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = \frac{1+u}{1-u} K\mu - \frac{1+\gamma u}{1-u} D\mu\sqrt{-1};$$

но:

$$1 + u = (1-u) + 2u; \qquad 1 + \gamma u = (1-u) + (\gamma+1)u,$$

слѣдовательно:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = K\mu - D\mu\sqrt{-1} + \frac{[2K\mu - D\mu(\gamma+1)\sqrt{-1}]u}{1-u} \quad . \quad . \quad (a)$$

или лучше:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = K\mu - D\mu\sqrt{-1} + \frac{[4K\mu - 2D\mu(\gamma+1)\sqrt{-1}]\frac{1}{2}u}{1-u}, \quad . \quad (b)$$

слѣдовательно, надо составить функцію:

$$Y = \frac{\frac{1}{2}u}{1-u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Но мы нашли:

$$\frac{1}{2}u = \frac{f_1(p^2) + pf_2(p^2)\sqrt{-1}}{F_1(p^2) + pF_2(p^2)\sqrt{-1}},$$

поэтому:

$$1 - u = \frac{[F_1(p^2) - 2f_1(p^2)] + p\sqrt{-1}\,[F_2(p^2) - 2f_2(p^2)]}{F_1(p^2) + pF_2(p^2)\sqrt{-1}}.$$

Итакъ, получаемъ:

$$Y = \frac{f_1(p^2) + pf_2(p)\sqrt{-1}}{\Phi_1(p^2) + p\sqrt{-1}\,.\,\Phi_2(p^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (p)$$

Здѣсь $\Phi_1(p^2)$ есть цѣлая раціональная функція p^2 степени n-ой, а $\Phi_2(p^2)$ подобная-же функція степени $n-1$-ой. Видъ этихъ функцій слѣдующій:

$$\Phi_1(p^2) = F_1(p^2) - 2f_1(p^2); \quad \Phi_2(p^2) = F_2(p^2) - 2f_2(p^2). \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Уничтожая радикалъ въ знаменателѣ, получимъ:

$$Y = Y_1 + Y_2 p\sqrt{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

гдѣ положено:

$$Y_1 = \frac{\Psi_1(p^2)}{\Psi(p^2)}, \qquad Y_2 = \frac{\Psi_2(p^2)}{\Psi(p^2)},$$

причемъ:

$$\Psi_1(p^2) = \Phi_1(p^2)\,f_1(p^2) + p^2\Phi_2(p^2)\,f_2(p^2);$$

$$\Psi_2(p^2) = \Phi_1(p^2)\,f_2(p^2) - f_1(p^2)\,\Phi_2(p^2).$$

Функція $\Psi_1(p^2)$ — $(2n-1)$-ой степени, а $\Psi_2(p^2)$ — $(2n-2)$-ой; затѣмъ:

$$\Psi(p^2) = \Phi_1^2(p^2) + p^2\Phi_2^2(p^2)$$

степени $2n$-ой.

Разложимъ теперь Y_1 и Y_2 на частныя дроби.

Пусть для простоты: $p^2 = z$, слѣдовательно:

$$Y_1 = \frac{\Psi_1(z)}{\Psi(z)}.$$

Функція $\Psi(z)$, какъ видно изъ способа ея составленія, имѣетъ $2n$ мнимыхъ, попарно сопряженныхъ корней вида:

$$z_{1i} \pm z_{2i}\sqrt{-1}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n);$$

слѣдовательно:

$$Y_1 = \sum_1^n \left[\frac{A_{1i}}{z - z_{1i} - z_{2i}\sqrt{-1}} + \frac{A_{2i}}{z - z_{1i} + z_{2i}\sqrt{-1}}\right]$$

или:

$$Y_1 = \sum_1^n \frac{(A_{1i} + A_{2i})(z - z_{1i}) + (A_{1i} - A_{2i})z_{2i}\sqrt{-1}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2} \quad . \; . \; . \; . \; (g)$$

Подобнымъ-же образомъ найдемъ:

$$Y_2 = \sum_1^n \frac{(B_{1i} + B_{2i})(z - z_{1i}) + (B_{1i} - B_{2i})z_{1i}\sqrt{-1}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2} \quad . \; . \; . \; . \; (h)$$

Но A_{1i}, A_{2i}; B_{1i}, B_{2i} комплексныя сопряженныя, слѣдовательно, можно положить:

$$A_{1i} + A_{2i} = M_i; \quad A_{1i} - A_{2i} = -N_i\sqrt{-1},$$

$$B_{1i} + B_{2i} = L_i; \quad B_{1i} - B_{2i} = -K_i\sqrt{-1},$$

причемъ M_i, N_i; L_i и K_i *дѣйствительныя* количества.

Подставляя въ Y_1 и Y_2, получимъ:

$$Y_1 = \sum_1^n \frac{M_i(z - z_{1i}) + N_i z_{2i}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2}, \qquad Y_2 = \sum_1^n \frac{L_i(z - z_{1i}) + K_i z_{2i}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2}. \quad (k)$$

Такъ какъ $\Psi_2(p^2)$ степени $2n - 2$-ой, а числитель въ Y_2 въ (k) степени $(2n - 1)$-ой, то заключаемъ, что

$$\sum_1^n L_i = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (l)$$

Положимъ теперь:

$$p_i^2 = \sqrt{z_{1i}^2 + z_{2i}^2}\,; \quad h_i^2 = 2(p_i^2 - z_{1i})\,, \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

тогда:

$$(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2 = (p_i^2 - p^2)^2 + h_i^2 p^2\,. \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

Составляя теперь функцію Y, находимъ:

$$Y = \sum_1^n \frac{[M_i(p^2 - z_{1i}) + N z_{2i}] + p\sqrt{-1}\,[L_i(p^2 - z_{1i}) + K_i z_{2i}]}{(p_i^2 - p^2)^2 + h_i^2 p^2} \ldots (p)$$

или, короче:

$$Y = \sum_1^n \frac{(M_i p^2 + D_i) + p\sqrt{-1}\,(L_i p^2 + E_i)}{(p_i^2 - p^2)^2 + h_i^2 p^2}\,, \quad \ldots\ldots \quad (q)$$

гдѣ:

$$D_i = -M_i z_{1i} + N_i z_{2i}\,; \quad E_i = -L_i z_{1i} + K_i z_{2i}\,. \quad \ldots\ldots \quad (r)$$

Пусть теперь:

$$\frac{p}{p_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \quad \ldots\ldots \quad (s)$$

гдѣ λ_i длина волны соотвѣтствующая *собственному періоду* тѣла, τ_i; такихъ періодовъ тѣло имѣетъ n и каждому соотвѣтствуетъ *опредѣленная полоса поглощенія* въ его спектрѣ.

Знаменатель можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{p_i^4}{\lambda_0^4}\,[(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2]\,,$$

гдѣ положено:

$$g_i = \frac{h_i \lambda_i}{p_i}\,. \quad \ldots\ldots \quad (t)$$

Полагая затѣмъ:

$$\left.\begin{aligned} D_i &= P'_i p_i^4\,; \quad 4\pi^2\omega_0^2 M_i = -Q'_i p_i^4\,, \\ 2\pi\omega_0 E_i &= -R'_i p_i^4\,; \quad 8\pi^3\omega_0^3 L_i = -S'_i p_i^4\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (u)$$

получимъ:

$$Y = \sum_{1}^{n} \frac{(P_i'\lambda_0^4 - Q_i'\lambda_0^2) - \sqrt{-1}\,(R_i'\lambda_0^2 + S_i')\,\lambda_0}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2} \quad \ldots\ldots (A)$$

Умножая Y на

$$4K\mu - 2D\mu(\gamma + 1)\sqrt{-1} = \alpha - \beta\lambda_0\sqrt{-1}\,,$$

гдѣ:

$$\gamma = \gamma' - \gamma''\sqrt{-1}\,, \quad \alpha = 4K\mu - D\mu\gamma''\,, \quad \beta = 4C\mu\omega_0(\gamma' + 1)\,,$$

получимъ:

$$Y(\alpha - \beta\lambda_0\sqrt{-1}) =$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{(\alpha P_i' - \beta R_i')\,\lambda_0^4 - (\alpha Q_i' + \beta S_i')\,\lambda_0^2 - \sqrt{-1}\,[\beta P_i'\lambda_0^5 + (R_i'\alpha - Q_i'\beta)\lambda_0^3 + \alpha S_i'\lambda_0]}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2}$$

или:

$$[\alpha - \beta\sqrt{-1}\,\lambda_0]\,Y = \sum_{1}^{n} \frac{(P_i\lambda_0^2 - Q_i)\,\lambda_0^2 - \sqrt{-1}\,(T_i\lambda_0^5 + R_i\lambda_0^3 + S_i\lambda_0)}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2}\,,$$

если положимъ:

$$P_i = \alpha P_i' - \beta R_i'; \quad Q_i = \alpha Q_i' + \beta S_i'; \quad T_i = \beta P_i';$$

$$R_i = \alpha R_i' - \beta Q_i'; \quad S_i = \alpha S_i'.$$

И общія формулы дисперсіи будутъ:

$$\left.\begin{aligned} n_0^2(1 - \varkappa_0^2) &= K\mu + \sum_{1}^{n} \frac{(P_i\lambda_0^2 - Q_i)\,\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2}\,, \\ 2n_0^2\varkappa_0 &= D\mu + \sum_{1}^{n} \frac{(T_i\lambda_0^4 + R_i\lambda_0^2 + S_i)\,\lambda_0}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (A)$$

Въ обычныхъ теоріяхъ дисперсіи $\beta = 0$; слѣдовательно, тогда:

$$T_i = 0; \quad P_i = \alpha P_i'; \quad Q_i = \alpha Q_i'; \quad R_i = \alpha R_i'$$

и формула для $2n_0^2\varkappa_0$ будетъ:

$$2n_0^2\varkappa_0 = \sum_1^n \frac{(R_i\lambda_0^2 + S_i)\,\lambda_0}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Къ такимъ-же результатамъ приводятъ и другія теоріи (напр. Гольдгаммера или Друде).

Е. И. фонъ-Бейеръ.

(Некрологическій очеркъ).

М. А. Тихомандрицкаго.

Въ промежутокъ между послѣднимъ бывшимъ засѣданіемъ нашего Общества и сегодняшнимъ, именно 28-го Декабря 1899 г. скончался на 80-мъ году отъ роду одинъ изъ членовъ нашего Общества съ самаго его основанія, бывшій первымъ его предсѣдателемъ, Евгеній Ильичъ фонъ-Бейеръ, занимавшій втеченіе 25-ти лѣтъ, съ 1844 г. по 1872 г. каѳедру чистой математики въ здѣшнемъ университетѣ. На мнѣ, какъ занимавшемъ вторымъ послѣ него ту же каѳедру, лежитъ обязанность помянуть своимъ словомъ полезную дѣятельность нашего покойнаго сочлена. Если-бы находился здѣсь его непосредственный преемникъ по каѳедрѣ и ученикъ, Д. М. Деларю, то конечно онъ могъ бы это сдѣлать лучше и теплѣе, обладая не однимъ офиціальнымъ матеріаломъ, но и живымъ личныхъ впечатлѣній, накопленныхъ въ продолжительныхъ личныхъ сношеніяхъ съ покойнымъ.

Евгеній Ильичъ фонъ-Бейеръ происходилъ изъ дворянъ Вологодской губ., родился въ 1820 г. Высшее образованіе получилъ въ С.-Петербургѣ, въ Главномъ Педагогическомъ Институтѣ, приготовившемъ для Россіи многихъ полезныхъ дѣятелей на педагогическомъ поприщѣ отъ начальныхъ училищъ до университетовъ, которымъ, въ томъ числѣ и Харьковскому, онъ доставилъ многихъ видныхъ профессоровъ. Е. И. поступилъ въ Институтъ на физико-математическій факультетъ, въ которомъ высшую математику преподавалъ извѣстный академикъ М. В. Остроградскій, бывшій студентъ Харьковскаго университета, образовавшій очень многихъ учениковъ, изъ которыхъ многіе занимали каѳедры математики въ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ; его ученикомъ былъ и И. Д. Соколовъ, занимавшій долгое время въ Харьковскомъ университетѣ каѳедру прикладной математики. Е. И. окончилъ курсъ въ 1841 г. съ золотою медалью и, по окончанiи курса, продолжалъ заниматься математикой подъ руководствомъ Остроградскаго, а затѣмъ въ 43—44 г. былъ командированъ для усовершенствованiя въ наукахъ за границу, гдѣ слушалъ лекцiи 1) въ Кёнигсбергѣ: *Ришело* по теорiи опредѣленныхъ интеграловъ, эллиптическихъ и ультра-эллиптическихъ функцiй; *Гессе* по аналитической геометрiи, теорiи дифференцiальныхъ уравненiй и варiацiонному исчисленiю; *Неймана* и *Мозера* по математической физикѣ; *Бесселя* по теорiи затмѣнiй и геодезiи; 2) въ Берлинѣ: *Якоби* по алгебрѣ, интегральному исчисленiю и динамикѣ; *Леженъ-Дирихлэ* по теорiи чиселъ, *Штейнера* по синтетической геометрiи; 3) въ Парижѣ въ Сорбоннѣ и въ Collège de France: *Штурма* по рацiональной механикѣ, *Бинэ* по теорiи движенiя планетъ, *Леверье* по теорiи движенiя кометъ.—Изъ этого перечня видно, что не специализируясь въ какой-либо области, Е. И. искалъ своего усовершенствованiя подъ руководствомъ знаменитыхъ ученыхъ того времени почти по всѣмъ отдѣламъ чистой и прикладной математики.

По возвращенiи изъ-за границы въ 1844 г. 19-го Сентября онъ былъ назначенъ исправляющимъ должность адъюнкта въ Харьковскомъ университетѣ. Съ момента своего назначенiя Е. И. всецѣло посвятилъ себя дѣлу преподаванiя, старательно готовясь къ лекцiямъ, любя восходить, по примѣру Лагранжа, къ самому началу каждой теорiи, слѣдя за историческимъ развитiемъ каждаго вопроса. Лекцiи его уважались слушателями; онъ пользовался, какъ я слышалъ, репутацiей прекраснаго лектора. Уходя всецѣло въ лекцiи, онъ не думалъ о своей карьерѣ и подвигался впередъ медленно по ступенямъ университетской службы. Въ 1849 г. онъ прiобрѣлъ въ здѣшнемъ университетѣ степень магистра математики, послѣ чего тотчасъ состоялось утвержденiе его въ должности адъюнкта. Въ 1853 г. онъ былъ избранъ въ секретари физико-математическаго факультета; въ 1858 г. былъ утвержденъ экстраординарнымъ профессоромъ по каѳедрѣ чистой математики; въ 1861 г. былъ назначенъ ординарнымъ профессоромъ по той же каѳедрѣ; въ 1866 г. былъ награжденъ чиномъ дѣйствительнаго статскаго совѣтника; въ 1867 г. былъ утвержденъ совѣтомъ Харьковскаго университета въ степени доктора чистой математики. Спустя пять лѣтъ, въ 1872 г. Е. И. вышелъ въ отставку и въ томъ же году былъ избранъ въ почетные члены нашего университета.

По выходѣ въ отставку онъ остался жить въ Харьковѣ, ведя уединенную жизнь и не переставая до самой кончины заниматься своимъ любимымъ предметомъ—математикою.

Когда въ 1879 г. было основано наше Общество, онъ былъ избранъ въ его предсѣдатели и первое время бывалъ на засѣданiяхъ, предложилъ многихъ новыхъ членовъ къ избранiю въ Общество, дѣлалъ сообщенія „о теоремѣ Фермата“. Къ ней онъ еще разъ вернулся въ 1883 г., поручивъ доложить свою статью Д. М. Деларю, такъ какъ около этого времени онъ снова вернулся къ уединенной жизни. Говорятъ, онъ работалъ до самой кончины и оставилъ много рукописей; въ печати же появилось лишь немного изъ его трудовъ. Не знаю, была-ли напечатана его магистерская диссертація; въ 1858 г. была напечатана его актовая рѣчь „Объ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ какимъ угодно числомъ измѣняемыхъ величинъ“. Въ этомъ сочиненіи (183 стр. in 8^0) онъ имѣлъ въ виду объединить въ одно цѣлое труды разныхъ ученыхъ, до Якоби включительно, касающіеся задачи Пфаффа. Другое сочиненіе „О разностномъ интегрированіи раціональныхъ дробей, когда это возможно“, было помѣщено въ IV и V томахъ Московскаго математическаго сборника въ 1870 г. Въ этомъ сочиненіи (160 стр. in 8^0) онъ имѣлъ въ виду сдѣлать дополненія и развитія къ одной работѣ В. Я. Буняковскаго, въ которой способъ Остроградскаго для интегрированія раціональныхъ дробей распространяется на аналогичный случай обратнаго способа конечныхъ разностей.

Покойный Е. И. отличался, повидимому, большой начитанностью въ области математики и свою библіотеку (4 ящика) оставилъ Харьковскому университету. Это очень цѣнное пожертвованіе, ибо восполнитъ многіе существующіе въ нашей фундаментальной библіотекѣ пробѣлы.

Нужно надѣяться, что въ предположенномъ проф. Багалѣемъ біографическомъ словарѣ профессоровъ Харьковскаго университета за 100 лѣтъ его существованія, появится болѣе обстоятельная біографія и оцѣнка дѣятельности Е. И. Бейера, составленная какъ на изученіи архивныхъ документовъ университета, такъ и на основаніи оставленныхъ покойнымъ рукописей и по воспоминаніямъ его учениковъ и сослуживцевъ, чѣмъ та, которую я могъ предложить здѣсь, на основаніи только двухъ имѣющихся у меня источниковъ: Исторіи Главнаго Педагогическаго Института и помѣщеннаго въ „Южномъ Краѣ“ 30-го Декабря 1899 г. некролога, составленнаго по офиціальнымъ даннымъ.

О вѣроятности a posteriori.

А. А. Маркова.

При извѣстныхъ условіяхъ вѣроятность P_k, что въ n испытаній нѣкоторое событіе появится ровно k разъ, опредѣляется по формулѣ

$$P_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}\;\frac{\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx},$$

если въ n_0 наблюденныхъ испытаній то же событіе появилось ровно k_0 разъ.

На основаніи этой формулы при помощи пріема, который былъ примѣненъ Чебышевымъ къ вѣроятности a priori, нетрудно доказать, что для любого положительнаго числа t вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n}} \leqq \frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0} \leqq +\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n}}$$

больше

$$1-\frac{1}{t^2}.$$

Для указанной цѣли прежде всего замѣтимъ, что вышеопредѣленное выраженіе P_k представляетъ коэффиціентъ при ξ^k въ разложеніи по степенямъ перемѣннаго ξ функціи

$$F(\xi) = \frac{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}(1-x+\xi x)^n\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx},$$

такъ что

$$\sum_{k=0,1,2,\ldots,n} P_k \xi^k = \frac{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}(1-x+\xi x)^n\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}.$$

Отсюда кромѣ очевиднаго равенства

$$\sum P_k = 1$$

выводимъ при помощи дифференцированія

$$F'(1) = \sum P_k k = \frac{n\int_0^1 x^{k_0+1}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx} = n\,\frac{k_0+1}{n_0+2},$$

$$F''(1) = \sum P_k k(k-1) = \frac{n(n-1)\int_0^1 x^{k_0+2}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}$$

$$= n(n-1)\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{k_0+2}{n_0+3}$$

и затѣмъ

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2$$

$$= \sum P_k\frac{k(k-1)}{n^2} + \sum P_k\frac{k}{n^2} - 2\,\frac{k_0}{n_0}\sum P_k\frac{k}{n} + \frac{k_0^2}{n_0^2}\sum P_k$$

$$= \frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{k_0+2}{n_0+3}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\,\frac{k_0+1}{n_0+2} - 2\,\frac{k_0}{n_0}\,\frac{k_0+1}{n_0+2} + \frac{k_0^2}{n_0^2}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0+1-k_0}{n_0+3} + \left(\frac{k_0+1}{n_0+2}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2 + \frac{1}{n_0+3}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0-k_0+1}{n_0+2}.$$

Съ другой стороны простое тождество

$$\left(\frac{k_0+1}{n_0+2}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2+\frac{1}{n_0+3}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0-k_0+1}{n_0+2}$$

$$=\frac{1}{4(n_0+3)}+\left(1-2\frac{k_0+1}{n_0+2}\right)^2\left\{\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{4(n_0+3)}\right\}$$

обнаруживаетъ, что сумма

$$\left(\frac{k_0+1}{n_0+2}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2+\frac{1}{n_0+3}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0-k_0+1}{n_0+2}$$

должна заключаться между количествами

$$\frac{1}{4(n_0+3)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(n_0+2)^2}\left\{1+\frac{n_0+1}{n_0+3}\right\}=\frac{2}{(n_0+2)(n_0+3)},$$

которыя оба меньше

$$\frac{1}{4n_0}.$$

Еще легче обнаружить неравенство

$$\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0+1-k_0}{n_0+3}<\frac{1}{4}.$$

Слѣдовательно

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right).$$

Остается примѣнить къ послѣднему неравенству извѣстныя разсужденія Чебышева *), и мы тотчасъ придемъ къ заключенію, что вѣроятность выполненія неравенствъ

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}}\leqq\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\leqq+\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}}$$

должна быть больше

$$1-\frac{1}{t^2}.$$

13 Апрѣля 1900 г.

---

*) См. напр. въ *Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества* (вторая серія, томъ 1) статью В. Г. Имшенецкаго „Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей“.

Къ вопросу о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности.

А. П. Пшеборскаго.

Какъ извѣстно, вопросъ о нахожденіи всѣхъ поверхностей, наложимыхъ на данную, сводится къ интегрированію уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка вида

$$Rr + Ss + Tt + N(rs - t^2) = 0\,,$$

гдѣ r, s, t вторыя частныя производныя нѣкоторой функціи по независимымъ перемѣннымъ.

Однако, нѣсколько съузивъ нашу задачу и не задаваясь цѣлью найти конечныя уравненія поверхностей, наложимыхъ на данную, мы можемъ свести вопросъ о деформаціи поверхности къ интегрированію либо системы линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка, либо къ интегрированію одного *линейнаго* уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка.

Въ разсматриваемомъ случаѣ задачу нашу можно формулировать слѣдующимъ образомъ: найти уравненія *семейства* поверхностей или ихъ частей, наложимыхъ на данную поверхность.

Положимъ, что уравненія искомаго семейства поверхностей (или ихъ частей) будутъ

$$x_t = f_1(u, v, t), \quad y_t = f_2(u, v, t), \quad z_t = f_3(u, v, t),$$

гдѣ u и v криволинейныя координаты, а t параметръ.

Пусть данная поверхность S (x, y, z) соотвѣтствуетъ значенію параметра $t = 0$.

Предполагая деформацію непрерывной, мы можемъ считать функціи f_1, f_2, f_3 непрерывными функціями параметра t, разложимыми въ степенные ряды, расположенные по степенямъ t и сходящіеся равномѣрно въ нѣкоторой области.

Другими словами, мы можемъ предположить, что x_t, y_t, z_t выражаются слѣдующимъ образомъ

$$x_t = x + tx_1 + t^2x_2 + \dots,$$
$$y_t = y + ty_1 + t^2y_2 + \dots, \tag{1}$$
$$z_t = z + tz_1 + t^2z_2 + \dots,$$

гдѣ x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... функціи перемѣнныхъ u и v, опредѣляемыя изъ условія наложимости поверхности S_t (x_t, y_t, z_t) на поверхность S (x, y, z).

Послѣднее условіе, какъ извѣстно, состоитъ въ равенствѣ линейныхъ элементовъ поверхностей S_t и S т. е. напишется слѣдующимъ образомъ:

$$dx_t^2 + dy_t^2 + dz_t^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2}$$

Это условіе должно имѣть мѣсто для всѣхъ значеній t, для которыхъ ряды (3) равномѣрно сходятся.

Поэтому, подставляя во (2) значенія dx_t, dy_t, dz_t, опредѣленныя изъ (1), и сравнивая коэффиценты при различныхъ степеняхъ t въ обѣихъ частяхъ, мы получимъ рядъ уравненій, изъ которыхъ можно послѣдовательно опредѣлить функціи x_i, y_i, z_i, а именно

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0, \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} dx\,dx_2 + dy\,dy_2 + dz\,dz_2 + \frac{1}{2}(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dx\,dx_n + dy\,dy_n + dz\,dz_n + dx_1dx_{n-1} + dy_1dy_{n-1} + dz_1dz_{n-1} + \dots = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Уравненія (3) и (4) разбиваются на рядъ линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка, а именно уравненіе (3) разбиваются на три уравненія:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0. \tag{5}$$

Что же касается уравненій (4), то каждое изъ нихъ разбивается на три уравненія вида

$$\sum \frac{dx}{du}\frac{dx_i}{du} = A_i\,,\ \ \sum\left(\frac{dx}{du}\frac{dx_i}{dv} + \frac{dx}{dv}\frac{dx_i}{du}\right) = B_i\,,\ \ \sum \frac{dx}{dv}\frac{dx_i}{dv} = C_i, \qquad (6)$$

гдѣ A_i, B_i, C_i извѣстныя функціи отъ u и v.

Какъ показалъ Cauchy, мы найдемъ рѣшенія уравненій (6) помощью квадратуръ, если будетъ найдено общее рѣшеніе уравненій (5), а потому первой ступенью въ рѣшеніи задачи о деформаціяхъ поверхности представляетъ интегрированіе системы уравненій (5) или, что то же, уравненія (3).

Задача объ интегрированіи послѣдняго уравненія носитъ названіе задачи о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности и вотъ на какомъ основаніи.

Положимъ, что мы нашли функціи x_1, y_1, z_1, удовлетворяющія уравненію (3); разсмотримъ поверхность S', которой координаты

$$x' = x + tx_1\,,\quad y' = y + ty_1\,,\quad z' = z + tz_1\,;$$

линейный элементъ этой поверхности въ силу условія (3) приметъ видъ

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2). \qquad (7)$$

Если теперь мы предположимъ, что t безконечно-малая величина, то изъ (7) увидимъ, что линейные элементы поверхностей S и S' отличаются на величину втораго порядка относительно разстоянія соотвѣтственныхъ точекъ на поверхностяхъ S и S'. Послѣднія поверхности, очевидно, не наложимы другъ на друга, но безконечно мало отличаются одна отъ другой.

При изслѣдованіи безконечно-малыхъ деформацій поверхности весьма существенную роль играютъ поверхности, связанныя другъ съ другомъ такимъ образомъ, что на нихъ соотвѣтственные линейные элементы взаимно ортогональны. Эти поверхности мы для сокращенія назовемъ *линейно-ортогональными поверхностями*.

Если черезъ S_1 обозначимъ геометрическое мѣсто точекъ (x_1, y_1, z_1), то изъ условія (3) заключимъ, что поверхности S и S_1, *линейно-ортогональны*.

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ.

Линейный элементъ поверхности (S) представимъ въ видѣ

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Черезъ D, D', D'' обозначимъ основныя величины второго порядка поверхности (S), черезъ h обозначимъ детерминантъ $EG-F^2$, черезъ K полную кривизну поверхности (S), черезъ H ея среднюю кривизну, черезъ X, Y, Z cos'ы нормали къ данной поверхности, наконецъ черезъ

$$d\sigma^2 = edu^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

линейный элементъ сферическаго изображенія поверхности (S).

Соотвѣтственные элементы поверхности (S_1) будемъ обозначать тѣми же буквами съ индексомъ 1.

Уравненія (5) мы можемъ замѣнить уравненіями вида:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varphi\sqrt{h}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\varphi\sqrt{h},$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0, \tag{8}$$

гдѣ φ нѣкоторая функція, введенная впервые Weingarten'омъ и названная имъ *характеристической функціей деформаціи.*

Съ нахожденіемъ этой функціи вопросъ объ опредѣленіи функцій x_1, y_1, z_1, сводится къ квадратурамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣляя изъ (8) частныя производныя отъ функціи $\varphi\sqrt{h}$ по u и v, мы найдемъ

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{h})}{\partial u} = \frac{D\sum X\frac{\partial x_1}{\partial v} - D'\sum X\frac{\partial x_1}{\partial u}}{\sqrt{h}},$$

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{h})}{\partial v} = \frac{D'\sum X\frac{\partial x_1}{\partial v} - D''\sum X\frac{\partial x_1}{\partial u}}{\sqrt{h}}.$$

Предполагая теперь, что $DD''-D'^2$ отлично отъ нуля, т. е. что поверхность (S) неразвертывающаяся, мы опредѣлимъ изъ этихъ уравненій суммы $\sum X\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\sum X\frac{\partial x_1}{\partial v}$. Присоединяя полученныя такимъ образомъ уравненія къ уравненіямъ (8), мы опредѣлимъ изъ нихъ частныя производныя по u и v отъ x_1, y_1, z_1, а именно

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{D\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) - D'\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{K\sqrt{h}},$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{D'\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) - D''\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{K\sqrt{h}} \tag{9}$$

и аналогичныя выраженія для $\frac{\partial y_1}{\partial u}$, $\frac{\partial y_1}{\partial v}$, $\frac{\partial z_1}{\partial u}$, $\frac{\partial z_1}{\partial v}$, гдѣ только вмѣсто X входятъ соотвѣтственно Y и Z.

Условія $\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial v \partial u}$ приводятся къ одному

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''\frac{\partial \varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{K\sqrt{h}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{D\frac{\partial \varphi}{\partial v} - D'\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{K\sqrt{h}}\right] = H\varphi. \tag{10}$$

Такимъ образомъ, найдя интегралъ φ линейнаго уравненія 2-го порядка (10), мы помощью квадратуръ опредѣлимъ функціи x_1, y_1, z_1, т. е. рѣшимъ нашу задачу о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности.

Настоящая статья имѣетъ цѣлью дать кинематическую интерпретацію безконечно-малой дифермаціи поверхности и выяснить кинематическое значеніе Weingarten'овской функціи φ.

Тому же вопросу посвящена статья Volterra, помѣщенная въ Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei за 1884 годъ; къ сожалѣнію, я не имѣлъ возможности познакомиться съ этой статьей.

Предположимъ, что точка M (x, y, z) поверхности S послѣ деформаціи переходитъ въ точку M' $(x + tx_1, y + ty_1, z + tz_1)$ поверхности S'. Величины tx_1, ty_1, tz_1 будутъ проэкціями перемѣщенія точки M на оси координатъ.

Возьмемъ на нѣкоторой кривой, проходящей черезъ точку M, безконечно-близкую къ ней точку m $(x + dx, y + dy, z + dt)$. Послѣ деформаціи точка m поверхности S перейдетъ въ точку $m'[x + dx + t(x_1 + dx_1), y + dy + t(y_1 + dy_1), z + dz + t(z_1 + dz_1)]$ поверхности S'. При этомъ перемѣщеніе точки m будетъ состоять изъ перемѣщенія tx_1, ty_1, tz_1, общаго съ точкой M и изъ относительнаго перемѣщенія, коего проэкціи на оси координатъ будутъ tdx_1, tdy_1, tdz_1.

Изслѣдованіемъ послѣдняго т. е. относительнаго перемѣщенія мы и займемся.

Для этого предварительно найдемъ нѣкоторое особое выраженіе для дифференціаловъ dx, dy, dz.

Уравненія (9) мы можемъ написать слѣдующимъ образомъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{\varphi^2}{K\sqrt{h}}\left[D\frac{\partial \xi}{\partial v} - D'\frac{\partial \xi}{\partial u}\right], \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{\varphi^2}{K\sqrt{h}}\left[D'\frac{\partial \xi}{\partial v} - D''\frac{\partial \xi}{\partial u}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

гдѣ черезъ ξ, η, ζ обозначены величины

$$\xi = \frac{X}{\varphi}, \quad \eta = \frac{Y}{\varphi}, \quad \zeta = \frac{Z}{\varphi},$$

очевидно связанныя соотношеніемъ

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\varphi^2}. \tag{12}$$

Геометрическое мѣсто точекъ (ξ, η, ζ) представить нѣкоторую поверхность Σ, радіусъ векторъ которой параллеленъ нормали къ поверхности S.

Если черезъ Ξ, H, Z обозначимъ cos'ы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности Σ съ осями, то на основаніи (11) получимъ

$$\sum \Xi \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \sum \Xi \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

откуда заключаемъ, что нормали къ поверхностямъ S_1 и Σ параллельны, т. е., что

$$\Xi = X_1, \quad H = Y_1, \quad Z = Z_1.$$

Изъ уравненій (7), присоединяя къ нимъ уравненія

$$\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

мы опредѣлимъ $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$, а именно

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\varphi \sqrt{h}}{\Delta}\left(\eta \frac{\partial z_1}{\partial u} - \zeta \frac{\partial y_1}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\varphi \sqrt{h}}{\Delta}\left(\eta \frac{\partial z_1}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right),$$

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Послѣднiй детерминантъ находится легко на основанiи (11), а именно

$$\varDelta = \frac{\varphi^4(DD''-D'^2)}{K^2h}\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

или замѣчая, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{X}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{X}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

и что

$$K = \frac{DD''-D'^2}{EG-F^2} = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

получимъ окончательно

$$\varDelta = \frac{\varphi\sqrt{eg-f^2}}{K} = \varphi\sqrt{h}.$$

Итакъ, для $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ получимъ слѣдующiя выраженiя:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta\frac{\partial z_1}{\partial u} - \zeta\frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \eta\frac{\partial z_1}{\partial v} - \zeta\frac{\partial y_1}{\partial v},$$

а слѣдовательно для dx, dy, dz найдемъ:

$$dx = \eta dz_1 - \zeta dy_1 \quad dy = \zeta dx_1 - \xi dz_1 \quad dz = \xi dy_1 - \eta dx_1. \tag{13}$$

Послѣднiя уравненiя послужатъ намъ для опредѣленiя dx_1, dy_1, dz_1.

Въ самомъ дѣлѣ, умножая второе изъ нихъ на ζ, а третье на η и вычитая изъ второго третье, получимъ

$$dx_1(\eta^2+\zeta^2) = \zeta dy - \eta dz + \xi(\eta dy_1 + \zeta dz_1);$$

придавая къ обѣимъ частямъ по $\xi^2 dz_1$ и принимая во вниманiе соотношенiе (12), получимъ

$$dx_1 = \varphi^2\zeta dy - \varphi^2\eta dz + \varphi\xi V,$$

$$dy_1 = \varphi^2\xi dz - \varphi^2\zeta dx + \varphi\eta V,$$

$$dz_1 = \varphi^2\eta dx - \varphi^2\xi dy + \varphi\zeta V,$$

гдѣ

$$V = \varphi\,(\xi dx_1 + \eta dy_1 + \zeta dz_1)$$

или на основаніи (9)

$$V = \frac{1}{K\sqrt{h}}\left[\left(D'\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)du + \left(D''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dv\right].$$

Наконецъ, замѣчая, что $\varphi\xi = X$, $\varphi\eta = Y$, $\varphi\zeta = Z$, мы получимъ

$$\begin{aligned} dx_1 &= (\varphi Z)dy - (\varphi Y)dz + XV, \\ dy_1 &= (\varphi X)dz - (\varphi Z)dx + YV, \\ dz_1 &= (\varphi Y)dx - (\varphi X)dy + ZV. \end{aligned} \tag{14}$$

Послѣднія соотношенія показываютъ, что относительное перемѣщеніе точки m при деформаціи состоитъ: 1) изъ вращенія φ вокругъ нормали N, проведенной въ точкѣ M къ поверхности S; 2) изъ перемѣщенія V вдоль этой нормали.

Послѣднее перемѣщеніе мы можетъ разсматривать какъ слѣдствіе нѣкотораго вращенія вокругъ оси, проходящей черезъ точку M перпендикулярно какъ къ элементу mM такъ и къ нормали N. Если послѣднее вращеніе обозначимъ черезъ ω, а проэкціи вращеній φ и ω на оси координатъ черезъ φ_x, φ_y, φ_z, ω_x, ω_y, ω_z, то выраженія (14) напишутся въ видѣ

$$\begin{aligned} dx_1 &= (\varphi_z + \omega_z)\,dy - (\varphi_y + \omega_y)\,dz, \\ dy_1 &= (\varphi_x + \omega_x)\,dz - (\varphi_z + \omega_z)\,dx, \\ dz_1 &= (\varphi_y + \omega_y)\,dx - (\varphi_x + \omega_x)\,dy. \end{aligned} \tag{15}$$

Наконецъ, если результирующее вращеніе обозначимъ черезъ Ω т. е. положимъ

$$\Omega^2 = \varphi^2 + \omega^2,$$

а его проэкціи на оси черезъ Ω_x, Ω_y, Ω_z, то выраженія (15) примутъ видъ

$$dx_1 = \Omega_z\,dy - \Omega_y\,dz, \quad dy_1 = \Omega_x\,dz - \Omega_z\,dx, \quad dz_1 = \Omega_y\,dx - \Omega_x\,dy. \tag{16}$$

Такимъ образомъ относительное перемѣщеніе точки m состоитъ изъ вращенія Ω вокругъ оси, проходящей черезъ точку M.

Найдемъ какъ направленіе, такъ и величину этого вращенія.

Изъ соотношеній (16) имѣемъ, что

$$\Omega_x\, dx_1 + \Omega_y\, dy_1 + \Omega_z\, dz_1 = 0$$

т. е. направленіе оси вращенія параллельно нормалямъ къ поверхностямъ S_1 и Σ.

Такъ какъ проэкція вращенія Ω на нормаль къ поверхности S есть φ, то слѣдовательно

$$\Omega_x X + \Omega_y Y + \Omega_z Z = \varphi;$$

замѣчая, что на основаніи предыдущаго

$$\Omega_x = \Omega \Xi, \quad \Omega_y = \Omega H, \quad \Omega_z = \Omega Z$$

получимъ

$$\Xi \xi + H \eta + Z \zeta = \frac{1}{\Omega}.$$

Но выраженіе $\Xi\xi + H\eta + Z\zeta$ есть ничто иное, какъ разстояніе касательной плоскости къ поверхности Σ отъ начала координатъ; обозначая его черезъ p, найдемъ, что

$$\Omega = \frac{1}{p}. \tag{17}$$

Нетрудно найти выражаніе для Ω при помощи характеристической функціи φ и ея производныхъ.

Обозначимъ черезъ ε, γ, δ коэффиціенты линейнаго элемента поверхности Σ:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \varepsilon du^2 + 2\delta\, du dv + \gamma dv^2.$$

Замѣчая, что $d\xi = \frac{1}{\varphi} dX - \frac{X}{\varphi^2} d\varphi$, получимъ

$$\varepsilon = \frac{e}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2, \quad \delta = \frac{f}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \quad \gamma = \frac{g}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2,$$

и слѣдовательно

$$\lambda = \varepsilon\gamma - \delta^2 = \frac{eg - f^2}{\varphi^6}\left[\varphi^2 + \frac{e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{eg - f^2}\right].$$

Замѣчая, что второй членъ, стоящій въ скобкахъ, представляетъ ничто иное, какъ $\Delta_1'\varphi$ т. е. дифференціальный параметръ перваго порядка относительно сферическаго изображенія поверхности S, получимъ

$$\lambda = \frac{eg - f^2}{\varphi^6}(\varphi^2 + \Delta_1'\varphi).$$

Далѣе такъ какъ

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \quad H = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right]$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right],$$

то слѣдовательно имѣемъ:

$$p = \sum \Xi\xi = \frac{\varphi^3}{\sqrt{eg - f^2}\sqrt{\varphi^2 + \Delta_1'\varphi}} \sum \xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right),$$

гдѣ Σ распространяется на всѣ круговыя перестановки изъ буквъ ξ, η, ζ.

На основаніи опредѣленій ξ, η, ζ, имѣемъ:

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left[Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right] + \frac{1}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left[Z\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial Z}{\partial v}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\varphi^2}X + \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{g}}\frac{1}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\varphi^2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{e}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u},$$

а потому

$$\sum \xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right) = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\varphi^3}.$$

Такимъ образомъ для p окончательно имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 + \Delta_1'\varphi}},$$

а отсюда на основаніи (17)

$$\Omega^2 = \varphi^2 + \Delta'\varphi,$$

слѣдовательно относительное перемѣщеніе точки m состоитъ изъ вращенія $t\varphi$ около нормали N къ поверхности S въ точкѣ M и изъ вращенія $t\sqrt{\Delta_1'\varphi}$ около оси, лежащей въ касательной плоскости къ поверхности S и проходящей черезъ ту же точку M.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

Прежде всего посмотримъ, какому значенію функціи φ будетъ соотвѣтствовать вращеніе всей поверхности вокругъ неподвижной оси.

Для этого случая $\Omega_x = a$, $\Omega_y = b$, $\Omega_z = c$ гдѣ a, b, c постоянныя, а потому

$$\varphi = aX + bY + cZ.$$

Поверхность Σ обратится въ плоскость

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 1;$$

точно такъ же въ плоскость

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = k$$

обратится и поверхность S_1.

Посмотримъ, когда возможно положить $\varphi = \mathrm{const}$ т. е. другими словами, когда поверхность можетъ быть такъ деформируема, чтобы относительное перемѣщеніе безконечно-близкихъ точекъ ея одной относительно другой состояло въ постоянномъ вращеніи вокругъ нормали.

Такъ какъ φ есть интегралъ уравненія (10), то слѣдовательно это возможно лишь при условіи

$$H = 0$$

т. е. для поверхностей minima.

Нетрудно видѣть, что при подобной деформаціи поверхность S_1 тоже будетъ поверхностью minima.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что для поверхности S_1 величины E_1, F_1, G_1 выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$E_1 = \frac{1}{eg - f^2}\left[D^2\varphi^2 g + D'^2\varphi^2 e - 2DD'\varphi^2 f + \left(D'\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right],$$

$$G_1 = \frac{1}{eg - f^2}\left[D'^2\varphi^2 g + D''^2\varphi^2 e - 2D'D''\varphi^2 f + \left(D''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right],$$

$$F_1 = \frac{1}{eg - f^2}\left[DD'g\varphi^2 + D'D''e\varphi^2 - (D'^2 + D''D)\varphi^2 f + \right.$$

$$\left. + \left(D'\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\left(D''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right],$$

найдемъ, что

$$\sqrt{EG-F^2}=\pm\frac{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}},$$

а потому на основанiи (8) имѣемъ

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}=0\,,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}=0\,,$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{-1}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}}\sqrt{E_1G_1-F^2},\ \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}=+\frac{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}},$$

откуда заключаемъ, что характеристической функцiей для поверхности S_1 служитъ функцiя

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}},$$

поэтому при $\varphi=\text{const}$ имѣемъ и $\psi=\text{const}$, откуда по предыдущему заключаемъ, что поверхность S_1 тоже поверхность minima.

Обращеніе въ нуль θ-функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Извѣстно, что функція

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}}) \tag{1}$$

p независимыхъ перемѣнныхъ u_h, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I}} = u_h, \quad (h = 1, 2, \dots p) \tag{2}$$

обращается въ нуль, когда или 1) одна или нѣсколько изъ точекъ $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ приходятъ въ точку (ξ, y_ξ), или 2) когда эти точки $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ приходятъ на присоединенную кривую перваго рода:

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0, \tag{3}$$

причемъ въ послѣднемъ случаѣ, — случаѣ неопредѣленности, когда $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ не опредѣляются по даннымъ значеніямъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ изъ (2), это обращеніе въ нуль есть тождественное, т. е. при всякомъ значеніи (ξ, y_ξ). При опредѣленіи Θ-функціи равенствомъ:

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}}) = e^{\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} | \xi)}, \tag{4}$$

гдѣ

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}|\xi) = \int \sum_{k=1}^{p} [C_h + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k]\, du + C, \tag{5}$$

а $J(u_h)_k$ есть трансцендентная второго рода:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II_k}} \tag{6}$$

обращающаяся въ ∞^1, когда одна изъ точекъ $(\overset{p}{x_i, \underset{1}{}} y_i)$ приходитъ въ фундаментальную точку $(a_k\,.\,b_k)$, эти свойства Θ-функцiи должны вытекать изъ свойствъ трансцендентныхъ 2-го рода. Показать это—цѣль настоящей замѣтки.

1. Аргументы функцiй J въ (5) опредѣляются по аргументамъ (2) на основанiи теоремы Абеля. Означая чрезъ $(\overset{p}{\alpha_i, \underset{1}{}} y_{\alpha_i})$ новые верхнiе предѣлы интеграловъ перваго и втораго рода, мы будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_k}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}}; \qquad (h=1,2,\ldots p) \tag{7}$$

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{II_k}}, \tag{8}$$

причемъ $(a_k\,,\,b_k)$, $(\overset{p}{x_i, \underset{1}{}} y_i)$ суть безконечности, а $(\xi\,,\,y_\xi)$, $(\overset{p}{\alpha_i, \underset{1}{}} y_{\alpha_i})$ нули „главной функцiи" независимой перемѣнной $(z\,,\,y_z)$:

$$P_{z\xi}(a_k\,,\,b_k;\, \overset{p}{x_i, \underset{1}{}} y_i). \tag{9}$$

Интегралы въ (8) въ разсматриваемомъ случаѣ не могутъ быть выражены чрезъ интегралы въ (6), такъ какъ уравненiе, выражающее теорему Абеля для интеграловъ втораго рода дѣлается иллюзуарнымъ, когда одинъ изъ предѣловъ совпадаетъ съ параметромъ такого интеграла; поэтому вмѣсто функцiи (9) мы возьмемъ сперва въ основанiе функцiю:

$$P_{z\xi}(x', y';\, \overset{p}{x_i, \underset{1}{}} y_i), \tag{10}$$

гдѣ (x', y') обозначаетъ точку, лежащую вблизи (a_k, b_k), но не совпадающую съ нею. Въ этомъ случаѣ теорема Абеля даетъ слѣдующія уравненія:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{x'}{\underset{\xi}{I_h}}, \qquad (h=1,2,\ldots p) \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{II_k}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II_h}} + \overset{x'}{\underset{\xi}{II_k}} - D_{a_k} \log [P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})]. \tag{12}$$

Такъ какъ вблизи (a_k, b_k) имѣемъ:

$$\overset{x'}{\underset{\xi}{II_k}} = \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} + \mathbf{P}(x' - a_k), \tag{13}$$

если

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \tag{14}$$

фундаментальное уравненіе, а жирное $\mathbf{P}$ означаетъ рядъ расположенный по положительнымъ степенямъ своего аргумента,—и

$$P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = -\frac{\dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}}{x' - a_k} + \mathbf{P}_1(x' - a_k), \tag{15}$$

слѣдовательно

$$D_{a_k} P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = -\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k} \cdot \dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}}{(x' - a_k)^2} + \mathbf{P}_2(x' - a_k), \tag{16}$$

а потому:

$$D_{a_k} \log [P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})] = \frac{\dfrac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} - \dfrac{x' - a_k}{\dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}} \mathbf{P}_2(x' - a_k)}{1 - \dfrac{x' - a_k}{\dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}} \mathbf{P}_1(x' - a_k)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} + \mathbf{P}_3(x' - a_k); \tag{17}$$

то въ (12) члены, обращающіеся при $x' - a_k = 0$ въ безконечность, сократятся, и для суммы интеграловъ 2-го рода лѣвой части (12) получится конечное опредѣленное значеніе. Итакъ функція (8) имѣетъ конечное опредѣленное значеніе, пока ни одна изъ точекъ $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ не приходитъ въ точку (ξ, y_ξ), или пока онѣ не приходятъ на кривую $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0$. Чтобы изслѣдовать, что будетъ имѣть мѣсто въ этихъ послѣднихъ случаяхъ, намъ нужно прежде дать новую форму главной функціи (10).

2. Для ясности мы будемъ теперь писать послѣ независимой перемѣнной всѣ нули функціи, сперва произвольно-задаваемые, потомъ опредѣляемые по нимъ, (непроизвольные), отдѣляя послѣдніе отъ первыхъ вертикальною чертою. Независимую перемѣнную будемъ обозначать чрезъ (z, y_z). Такимъ образомъ

$$\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, \overset{p-1}{\underset{1}{y_i}} \,|\, x'_i, y'_i) \tag{18}$$

будетъ обозначать присоединенную функцію 1-го рода, обращающуюся въ 0^1 въ $p-1$ произвольно-назначенныхъ мѣстахъ $(x_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y_i)$ и въ другихъ $p-1$ мѣстахъ $(x'_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y'_i)$, по нимъ вполнѣ опредѣляемымъ. Если бы за произвольные нули функціи мы выбрали $(x'_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y'_i)$, то непроизвольными стали бы $(x_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y_i)$. Если мы составимъ теперь произведеніе изъ функцій (10) и (18), то получимъ присоединенную функцію, (ибо таковъ второй множитель), которая будетъ обращаться въ безконечность ∞^1 въ двухъ мѣстахъ (x', y') и (x_p, y_p), и въ нуль въ мѣстахъ $(x'_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y'_i)$, (ξ, y_ξ) и $(\alpha_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\alpha_i})$. Это будетъ, слѣдовательно, присоединенная функція 3-го рода съ произвольными нулями въ мѣстахъ $(x'_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y'_i)$, (ξ, y_ξ) и непроизвольными въ мѣстахъ $(\alpha_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} y_{\alpha_i})$. Въ самомъ дѣлѣ, непроизвольные нули будутъ эти самые потому, что они опредѣляются по тѣмъ же даннымъ (ξ, y_ξ), (x', y'), $(x_i, \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$, только теперь чрезъ посредство $(x'_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y'_i)$, которые вполнѣ и однозначно опредѣляются по $(x_i, \overset{p-1}{\underset{1}{,}} y_i)$. Мы получаемъ слѣдовательно такое равенство:

$$P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})\,\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}} \mid x_i', y_i') =$$

$$= P_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}), \tag{19}$$

откуда будемъ имѣть:

$$P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = \frac{P_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}}; \xi, y_\xi \mid \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}} \mid x_i', y_i')}. \tag{20}$$

Это и есть та новая форма для главной функціи, которую мы желали вывести. Такихъ формъ будетъ всего p; онѣ получатся, если будемъ передавать роль точки (x_p, y_p) каждой изъ прочихъ безконечностей $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ главной функціи. Достаточно разсмотрѣть одну, здѣсь выведенную, чтобы имѣть представленіе о томъ, что будетъ имѣть мѣсто въ остальныхъ подобныхъ случаяхъ.

3. Предположимъ теперь, что точка (x_p, y_p) приходитъ въ точку (ξ, y_ξ); тогда функція P_{x', x_p} приведется къ присоединенной функціи перваго рода, что случится отъ того, что *одинъ изъ непроизвольныхъ нулей функціи* $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ *придетъ въ точку* (x', y'); такимъ образомъ каждая изъ безконечностей функціи будетъ поглощена однимъ нулемъ. Иначе получилась бы присоединенная функція съ одною безконечностью, каковой нѣтъ. Это предложеніе доказано еще Клебшемъ и Горданомъ въ ихъ „Theorie der Abel'schen Functionen", и слѣдуетъ также, равно какъ и то, что сейчасъ скажемъ, изъ формулы (14) на стр. 97 нашихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Харьковъ, 1895 года". Такъ какъ произвольные нули разсматриваемой функціи, $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}})$ и (ξ, y_ξ), всѣ равноправны, то тоже случится и тогда, когда точка (x_p, y_p) придетъ въ совпаденіе съ одною изъ точекъ $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}})$, т. е. когда всѣ безконечности главной функціи $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ окажутся на присоединенной кривой перваго рода: *въ этомъ случаѣ* точно также *одинъ изъ непроизвольныхъ нулей* $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ *придетъ въ точку* (x', y'). И это будетъ имѣть мѣсто какъ бы близка ни была точка (x', y') къ точкѣ (a_k, b_k), а также и тогда, когда она придетъ съ нею въ совпа-

деніе: въ обоихъ сказанныхъ случаяхъ одинъ изъ непроизвольныхъ нулей $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ функціи придетъ въ точку (a_k, b_k). А это влечетъ за собою обращеніе въ безконечность ∞^1 соотвѣтственнаго члена въ правой части равенства (8), т. е. въ этихъ случаяхъ функція $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k$ обратится въ безконечность ∞^1, и при этомъ во второмъ случаѣ, т. е. когда $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ приходятъ на присоединенную кривую перваго рода, при всякихъ значеніяхъ (ξ, y_ξ) и $p-1$ изъ этихъ паръ, т. е. тождественно.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$, опредѣляясь по величинамъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, неопредѣляемымъ вполнѣ по значеніямъ независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, остаются тоже способными принимать безчисленное множество значеній, и даже по двумъ причинамъ, *за исключеніемъ одной изъ этихъ величинъ* $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$, *которая обязательно переходитъ въ* (a_k, b_k), влѣдствіе чего вся сумма $\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\Pi_k}}$, повторяемъ, обращается въ безконечность ∞^1. А это послѣднее обстоятельство и есть, какъ увидимъ, причина обращенія въ нуль Θ-функціи въ сказанныхъ случаяхъ, притомъ во второмъ тождественно.

Въ I случаѣ функція

$$P_{x',x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}}; \xi, y_\xi \,|\, \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}) \tag{21}$$

переходитъ въ присоединенную функцію 1-го рода:

$$\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i', y_i' \,\Big|\, \overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}), ^{*)} \tag{22}$$

причемъ дѣлаются

$$(\alpha_i, y_{\alpha_i}) \overset{p-1}{\underset{1}{=}} (x_i, y_i), \tag{23}$$

ибо $p-1$ нулей такой функціи однозначно опредѣляютъ остальные $p-1$ ея нули; во II случаѣ она переходитъ въ присоединенную функцію 1-го рода:

*) Мы предполагаемъ для простоты, что (α_p, y_{α_p}) приходитъ въ (x', y').

$$\varphi(z, y_z; \overset{p-2}{\underset{1}{x_i}}, y_i; \xi, y_\xi | \overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i}}, y_{\alpha_i}), \tag{24}$$

причемъ равенство (23) уже не будетъ имѣть мѣста.

Въ I случаѣ равенство (12) обращается въ тождество. Чтобы извлечь изъ него то, что намъ нужно, слѣдуетъ прибѣгнуть къ методу предѣловъ.

4. Показать, что въ первомъ изъ этихъ случаевъ Θ-функція дѣйствительно обращается въ нуль, можно двоякимъ образомъ, исходя изъ равенства (12), смотря по тому, какую изъ двухъ формъ главной функціи мы предпочтемъ, ту ли, которая представляется формулою (20) этой статьи, или ту, которая получается изъ формулы (3) § 58 нашихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ“, стр. 103, чрезъ перестановку $(\overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)$ съ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i}}, \beta_i)$, перемѣну затѣмъ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i}}, \beta_i)$ на $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$, (x, y) на (x', y'), и представляетъ по перенесеніи суммы $\sum$ въ другую часть разложеніе главной функціи напростые элементы (по Hermite'у), именно:

$$P_{\xi\eta}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i) = P_{\xi\eta}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i) -$$

$$-\sum_{j=1}^{p} P_{\xi\eta}(x_j, y_j; \overset{p}{\underset{1}{a_i}}, b_i)\, \varphi_j(\overset{m-2}{x'}, \overset{n-2}{y'}; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i), \tag{25}$$

послѣ предварительнаго разложенія $P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$ на двѣ функціи по формулѣ:

$$P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i) = P_{a_k\eta}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i) - P_{\xi\eta}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i). \tag{26}$$

При этомъ можно сразу изслѣдовать случай, когда λ изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$ приходятъ въ точку (ξ, y_ξ). Вычисленія будутъ очень похожи на таковыя конца § 1; поэтому мы предоставляемъ ихъ читателю. Избирая форму (20) нашей функціи можно было бы тоже сразу изслѣдовать этотъ общій случай: для этого стоило бы только взять среднюю ариѳметическую изъ всѣхъ формъ, построенныхъ подобно (20) для всѣхъ точекъ изъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i}}, y_i)$, имѣющихъ придти въ точку (ξ, y_ξ); для простоты мы ограничимся однако только разсмотрѣніемъ случая, когда только одна точка (x_p, y_p) приходитъ въ точку (ξ, y_ξ).

Для значеній (x', y') близкихъ къ (a_k, b_k), и (x_p, y_p) близкихъ къ (ξ, y_ξ) мы будемъ имѣть (опуская непроизвольные нули):

$$P_{x',x_p}(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) = -\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'} + \mathbf{P}_1(a_k - x') +$$

$$+ \frac{\dfrac{\partial F(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi} \varphi_p(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \mathbf{P}_2(x_p - \xi), \tag{27}$$

причемъ принято во вниманіе, что

$$\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} = \frac{\partial F(x_p, y_p)}{\partial y_p} + (x_p - \xi)\,\mathbf{P}_3(x_p - \xi) \tag{28}$$

и что

$$\varphi_p(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) =$$

$$= \varphi_p(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; x_p, y_p) + (x_p - \xi)\,\mathbf{P}_4(x_p - \xi), \tag{29}$$

а также, что вообще

$$\varphi(a_k, b_k; x_i, y_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x'_i, y'_i) = \varphi(a_k, b_k; x'_i, y'_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x_i, y_i), \tag{30}$$

ибо (x_p, y_p) не нуль, а точка, гдѣ $\varphi_p = 1$

Совершая операцію D_{a_k} надъ обѣими частями равенства (27), будемъ имѣть:

$$D_{a_k} P_{x',x_p}(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) =$$

$$= \left(\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'}\right)^2 - \frac{D_{a_k}\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'} + \mathbf{P}'_1(a_k - x') + \tag{31}$$

$$+ \frac{\dfrac{\partial F(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi} D_{a_k}\varphi(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \mathbf{P}'_2(x_p - \xi);$$

(гдѣ $\mathbf{P}_1'$ и $\mathbf{P}_2'$ новые ряды, получающіеся послѣ этой операціи). Дѣля (31) на (27) и вычитая результатъ послѣ сокращенія его на $-\dfrac{\dfrac{\partial F(a_k\,,\,b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'}$, изъ (13), мы будемъ имѣть послѣ положенія $x' = a_k$, $y' = b_k$, такой результатъ:

$$\text{пред.}\left(\overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi}}{}_k - D_{a_k} \log P_{x', x_p}(a_k\,,\, b_k\,;\, \overset{p-1}{\underset{1}{x_i'}}\,,\, y_i'\,;\, \xi\,,\, y_\xi \,|\, \overset{p}{\alpha_i}\,,\, y_{\alpha_i})\right)_{x'=a_k\,,\,y'=b_k} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F(x_p\,,\,y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\, \varphi_p(\overset{m-2}{a_k}\,,\, \overset{n-2}{b_k}\,;\, \overset{p}{\underset{1}{x_i}}\,,\, y_i) + \mathbf{P}(x_p - \xi). \tag{32}$$

Имѣя въ виду, что $D_{a_k} \log \varphi(\overset{m-2}{a_k}\,,\, \overset{n-2}{b_k}\,;\, x_i\,,\, y_i \,\overset{p-1}{\underset{1}{|}}\, x_i'\,,\, y_i')$ есть конечная величина, мы можемъ теперь написать:

$$C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I}}{}_h)_k = \frac{\dfrac{\partial F(x_p\,,\,y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\, \varphi(\overset{m-2}{a_k}\,,\, \overset{n-2}{b_k}\,;\, \overset{p}{\underset{1}{x_i}}\,,\, y_i) + K_k\,, \tag{33}$$

означая чрезъ K_k совокупность членовъ, несодержащихъ отрицательныхъ степеней $x_p - \xi$. Помножая это на du_k и суммируя по k отъ 1 до p, мы получимъ, имѣя въ виду, что по формулѣ (10) § 97 нашего выше цитированнаго сочиненія:

$$dx_p = \frac{\partial F(x_p\,,\,y_p)}{\partial y_p} \sum_{k=1}^{p} \varphi_p(a_k\,,\, b_k\,;\, \overset{p}{\underset{1}{x_i}}\,,\, y_i)\, du_k\,, \tag{34}$$

слѣдующее:

$$\sum_{k=1}^{p} (C_k + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I}}{}_h)_k)\, du_k = \frac{dx_p}{x_p - \xi} + \sum_{k=1}^{p} K_k\, du_k\,, \tag{35}$$

откуда, интегрируя, на основаніи (5) получимъ:

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \,|\, \xi) = \log(x_p - \xi) + L\,, \tag{36}$$

гдѣ L не содержитъ отрицательныхъ степеней $x_p - \xi$, и слѣдовательно по (4)

$$\Theta(u_h - \sum_1^p \int_{x_0}^{\xi} I_k) = (x_p - \xi) e^L, \tag{37}$$

что обращается въ нуль при $x_p = \xi$, $y_p = y_\xi$.

5. Второй случай приводится къ первому. Въ этомъ случаѣ функція

$$\frac{P_{x',x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi | \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, y_i | \overset{p-2}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})} \tag{38}$$

по замѣчанію въ концѣ § 3 обратится въ такую:

$$\frac{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-2}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}, \xi, y_\xi | \overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, y_i | \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})}, \tag{39}$$

которая будетъ имѣть p нулей: (ξ, y_ξ). $(\overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$, и p безконечностей: $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, (такъ какъ мы предположили, что $x_p = x'_{p-1}$, $y_p = y'_{p-1}$). Поэтому на основаніи теоремы Абеля для интеграловъ 1-го рода мы будемъ имѣть:

$$0 = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_i}^{\alpha_i} I_h + \int_{x_p}^{\xi} I_h; \tag{40}$$

складывая это съ равенствомъ:

$$u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{x_i} I_h + \int_{a_p}^{x_p} I_h, \tag{41}$$

опредѣляющимъ по (2) перемѣнныя u_h, мы будемъ имѣть:

$$u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{\alpha_i} I_h + \int_{a_p}^{\xi} I_h, \tag{42}$$

такъ что аргументамъ трансцендентныхъ второго рода $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \int_{\xi}^{a_k} I_h)_k$ можно въ этомъ случаѣ дать такой видъ:

$$u_h + \int_{\xi}^{a_k} I_h = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{a_i}^{\alpha_i} I_h + \int_{a_p}^{\xi} I_h + \int_{\xi}^{a_k} I_h = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i}^{\alpha_i} I_h + \int_{\xi}^{a_k} I_h, \tag{43}$$

при условіи $\alpha_p = \xi$, $y_{\alpha_p} = y_\xi$, совершенно какъ въ первомъ случаѣ. Отсюда слѣдуетъ, что и въ этомъ 2-мъ случаѣ Θ-функція тоже обратится въ нуль и притомъ тождественно, ибо этотъ результатъ независитъ отъ значеній (ξ, y_ξ) и $(x_i, y_i)_1^{p-1}$.

Этой статьей я желалъ бы замѣнить § 112 своихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ", гдѣ вслѣдствіе случившейся раньше (стр. 73) по недосмотру погрѣшности, дано не надлежащее объясненіе этому важному моменту теоріи Абелевыхъ интеграловъ. В. П. Ермаковъ далъ въ своей „Теоріи Абелевыхъ функцій безъ Римановыхъ поверхностей", Кіевъ, 1897 г. вѣрное, но не прямое объясненіе; второй случай сводится имъ на первый, также какъ и въ моей книгѣ.

49

Нѣкоторыя приложенія теоріи линейчатыхъ конгруэнцій.

А. П. Пшеборскаго.

Введеніе.

Начало теоріи линейчатыхъ конгруэнцій т. е. системъ прямыхъ въ пространствѣ, уравненіе которыхъ зависитъ отъ двухъ параметровъ, положено Monge'емъ въ 1781 году въ Mémoires de l'Académie des sciences.

Дальнѣйшее развитіе этой теоріи въ случаѣ, когда прямыя конгруэнціи представляютъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности, мы находимъ въ знаменитомъ трудѣ этого геометра Application de l'Analyse à la Géométrie и въ его Théorie des déblais et des remblais.

Изученіе этого частнаго вида линейчатыхъ конгруэнцій тѣсно связано у Monge'а съ ученіемъ о кривизнѣ поверхностей т. е. съ вопросомъ первостепенной важности въ теоріи поверхностей.

Совершенно съ другой точки зрѣнія разсматриваютъ конгруэнціи нормалей Malus и Dupin [1]).

Къ изслѣдованію этихъ конгруэнцій эти геометры пришли при разсмотрѣніи вопроса о распространеніи свѣта въ изотропныхъ средахъ и, главнымъ, образомъ, при изученіи преломленія и отраженія свѣта.

Результатомъ ихъ изслѣдованій явился цѣлый рядъ теоремъ, играющихъ весьма важную роль въ геометрической оптикѣ. Главнѣйшія изъ этихъ теоремъ читатель найдетъ въ первой главѣ настоящаго сочиненія.

Особенно важной является теорема, носящая названіе *теоремы Malus-Dupin'a*; сущность ея состоитъ въ томъ, что системы лучей,

[1]) Malus. Optique. Journal de l'Ecole Polytechnique XIV Cahier 1807.

Dupin. Sur les routes snivies par la lumière et par les corps élastiques, en général daus les phénomènes de la réflection et de la réfraction (Application de géométrie et de méchanique à la marine, aux ponts et chaussées etc., Paris. 1822).

нормальныхъ къ нѣкоторой поверхности, остаются конгруэнціями нормалей послѣ какого угодно числа преломленій и отраженій въ изотропныхъ средахъ.

Благодаря этому свойству лучей при разсмотрѣніи вопроса о распространеніи свѣта въ изотропныхъ средахъ можно ограничиваться разсмотрѣніемъ конгруэнцій нормалей, какъ это и дѣлаютъ Malus и Dupin.

Только при переходѣ къ изслѣдованію преломленія свѣта въ кристаллахъ данъ былъ толчекъ къ изученію болѣе общихъ линейчатыхъ конгруэнцій.

Дѣйствительно, какъ показалъ опытъ, всякая система лучей, послѣ преломленія въ кристаллахъ разбивается на двѣ: на систему лучей *обыкновенныхъ* и *необыкновенныхъ*.

Въ то время какъ первые лучи подчиняются тѣмъ же законамъ преломленія, что и лучи въ изотропныхъ средахъ, вторые этимъ законамъ не подчиняются; между прочимъ они не подчиняются теоремѣ Malus-Dupin'а т. е. перестаютъ быть конгруэнціями нормалей къ нѣкоторой поверхности.

Первымъ трудомъ, посвященнымъ теоріи необыкновенныхъ лучей, былъ мемуаръ Hamilton'а Theory of Systems of Rays [1]); особенно подробно развита эта теорія въ дополненіи къ этому мемуару, помѣщенномъ въ XVI томѣ упомянутаго журнала.

Въ основу своихъ изслѣдованій Hamilton кладетъ принципъ наименьшаго дѣйствія, хотя главной своей цѣлью онъ ставитъ изученіе геометрическихъ свойствъ разсматриваемыхъ имъ лучей.

Изслѣдованія Hamilton'а, значительно подвинувшія впередъ теорію линейчатыхъ конгруэнцій, все таки не относятся къ наиболѣе общимъ конгруэнціямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы видѣли, изслѣдованія эти относятся къ свѣтовымъ лучамъ; что касается послѣднихъ, то они обладаютъ одной характеристической особенностью, а именно: ихъ направленіе связано для каждой однородной среды нѣкоторой постоянной зависимостью съ направленіемъ соотвѣтствующихъ касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ волны, т. е. къ нѣкоторымъ, опредѣленнымъ для каждой однородной среды, поверхностямъ.

Общую теорію какихъ-угодно линейчатыхъ конгруэнцій мы находимъ впервые въ знаменитомъ мемуарѣ Kummer'а Allgemeine Theorie der gradelinigen Strahlensysteme, помѣщенномъ въ LVII томѣ Journal de Crelle за 1859 годъ.

Въ этомъ мемуарѣ Kummer, основываясь на однозначномъ соотвѣтствіи между точками какой-угодно поверхности и прямыми какой-

---

[1]) Transaction of the Irisch Academy. T. XV. 1830.

угодно конгруэнціи и пользуясь методами дифференціальной геометріи, находить всѣ главнѣйшія свойства самыхъ общихъ линейчатыхъ конгруэнцій.

Такимъ образомъ съ появленіемъ упомянутаго мемуара, можно сказать, была установлена полная общая теорія линейчатыхъ конгруэнцій.

Дальнѣйшія работы въ этой области, если не считать работъ Plücker'a и нѣкоторыхъ нѣмецкихъ геометровъ, были посвящены главнымъ образомъ различнымъ приложеніямъ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій къ оптикѣ и теоріи поверхностей.

Такъ сравнительно вскорѣ послѣ опубликованія мемуара Kummer'a вышло въ свѣтъ сочиненіе Meibauer'a Theorie der gradelinigen Strahlensysteme des Lichtes. Berlin 1864, въ которомъ даются приложенія Kummer'овской теоріи къ оптикѣ.

Болѣе самостоятельнымъ является сочиненіе Levistal'я Recherches d'optiques géométriques, появившееся въ 1867, въ Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure t. IV.

Мы упомянули выше объ изслѣдованіяхъ Plücker'a.

Знаменитый творецъ линейчатой геометріи, въ которой за пространственный элементъ принята прямая, само собою разумѣется долженъ былъ разсматривать системы прямыхъ, зависящихъ отъ двухъ параметровъ, т. е. линейчатыя конгруэнціи. Въ классическомъ сочиненіи знаменитаго геометра Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig $186^8/_9$ мы находимъ общее изслѣдованіе линейчатыхъ конгруэнцій 1-ой и 2-ой степени.

Такимъ образомъ было положено начало изслѣдованіямъ алгебраическихъ конгруэнцій —изслѣдованіямъ, которыми занимались Kummer, Schumacher и, въ послѣднее время, Rudolf Sturm и другіе германскіе геометры.

Сочиненіе Sturm'a Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Lipzig $189^2/_3$, представляетъ обстоятельное изслѣдованіе по теоріи линейчатыхъ конгруэнцій 1-ой и 2-ой степени въ духѣ синтетической геометріи.

Въ то время, какъ нѣмецкіе геометры, слѣдуя Kummer'y и Plücker'y развивали и развиваютъ теорію линейчатыхъ конгруэнцій, такъ сказать, an und für sich, французскіе математики занимаются приложеніемъ этой теоріи къ теоріи поверхностей, являясь такимъ образомъ прямыми послѣдователями Monge'a.

Насколько намъ извѣстно, первымъ обширнымъ трудомъ въ этомъ направленіи является извѣстный мемуаръ Ribaucour'a Etude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle [1]).

[1]) Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. XLIV. 1881.

Въ этомъ блестящемъ мемуарѣ Ribaucour сводитъ изученіе поверхностей minima къ изученію изотропныхъ конгруэнцій т. е. конгруэнцій, фокальныя плоскости которыхъ касаются круга на безконечности.

Цѣлый рядъ новыхъ, весьма важныхъ, результатовъ, масса поставленныхъ и намѣченныхъ задачъ, которые мы находимъ въ этомъ мемуарѣ, являются убѣдительнымъ доказательствомъ важности и плодотворности изученія линейчатыхъ конгруэнцій.

Разсматриваемый мемуаръ представляетъ интересъ и съ другой стороны: въ немъ Ribaucour систематически пользуется методомъ, извѣстнымъ подъ названіемъ *периморфіи*, методомъ, важность котораго еще раньше была доказана работами O. Bonnet, Codazzi, Laguerre'a, Lamé.

Сущность этого метода заключается въ томъ, что мы относимъ точки пространства не къ неподвижной системѣ координатъ, а къ нѣкоторому подвижному тріэдру, связанному опредѣленнымъ образомъ съ какой-либо *координатной* поверхностью.

Тѣмъ же методомъ пользуется Ribaucour и въ другомъ своемъ замѣчательномъ мемуарѣ, написанномъ еще въ 1876 году, но напечатанномъ только въ 1891 въ Journal de mathématiques pures et appliquées; мы говоримъ о мемуарѣ Mémoire sur la théorie des surfaces courbes.

Здѣсь мы встрѣчаемся съ систематическимъ изложеніемъ свойствъ линейчатыхъ конгруэнцій, различнымъ образомъ связанныхъ съ какой-либо поверхностью.

По тѣмъ либо другимъ свойствамъ конгруэнцій, опредѣленнымъ образомъ связанныхъ съ поверхностью, выводится цѣлый рядъ свойствъ, характеризующихъ самую поверхность. Кромѣ того теорія конгруэнцій даетъ здѣсь возможность изслѣдовать рядъ вопросовъ, касающихся различныхъ соотвѣтствій между поверхностями, какъ напримѣръ, соотношенія, когда касательныя плоскости въ соотвѣтственныхъ точкахъ двухъ поверхностей параллельны; соотношенія, когда всѣ соотвѣтственныя кривыя на двухъ поверхностяхъ взаимно ортогональны и т. п.

Далѣе Ribaucour прилагаетъ полученные результаты къ теоріи тройно-ортогональныхъ системъ, къ теоріи изгибанія поверхностей, къ вопросу о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности и еще ко многимъ другимъ.

Мы не можемъ остановиться подробно на разсмотрѣніи того богатаго матеріала, съ которымъ встрѣчаемся въ этомъ мемуарѣ; достаточно сказать, что этотъ мемуаръ явился источникомъ обширныхъ изслѣдованій Darboux, Guichard'a, Cosserat, Bianchi, при чемъ еще и до сихъ поръ много въ высшой степени важныхъ и интересныхъ идей Ribaucour'a, заключающихся въ этомъ мемуарѣ и въ вышеупомянутомъ мемуарѣ Sur les élassoïdes, не получили надлежащаго развитія.

Большинство результатовъ, полученныхъ Ribaucour'омъ, мы находимъ въ извѣстномъ сочиненiи Darboux: Leçons sur la théorie générale des surfaces и въ лекцiяхъ Bianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie.

Изъ трудовъ Cosserat упомянемъ о двухъ обширныхъ мемуарахъ, помѣщенныхъ въ VII и VIII томахъ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse.

Первый изъ нихъ—Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces имѣетъ цѣлью дальнѣйшее развитiе главы вышеупомянутаго мемуара Ribaucour'a, посвященной конгруэнцiямъ прямыхъ, параллельныхъ нормалямъ нѣкоторой поверхности.

Между вопросами, тѣсно связанными съ теорiей этихъ конгруэнцiй и разсмотрѣнными Cosserat, отмѣтимъ вопросъ о сферическомъ изображенiи поверхностей, о деформацiяхъ поверхностей съ сохраненiемъ системы сопряженныхъ линiй и въ частности линiй кривизны (задача O. Bonnet), наконецъ, вопросъ о безконечно-малыхъ деформацiяхъ поверхностей.

Послѣднему изъ этихъ вопросовъ посвященъ другой изъ упомянутыхъ мемуаровъ—Sur la déformation infinitésimale d'une surface flé-xible et inextensible et sur les congruences des droites.

Въ этомъ мемуарѣ мы находимъ дальнѣйшее развитiе идей Ribaucour'a, касающихся измѣненiя Гауссовской кривизны поверхности при переходѣ къ поверхности безконечно-близкой.

Исходя изъ разсмотрѣнiя нѣкоторой линейчатой конгруэнцiи, Cosserat изслѣдуетъ безконечно-малыя деформацiи поверхности и даетъ рѣшенiе извѣстной задачи Christofell'я о конформномъ изображенiи одной поверхности на другой.

Мы не будемъ останавливаться на работахъ Guichard'a, посвященныхъ линейчатымъ конгруэнцiямъ вообще, и такъ называемымъ W конгруэнцiямъ въ частности, при чемъ подъ W конгруэнцiями подразумѣваются такiя, у которыхъ ассимптотическимъ линiямъ одной фокальной поверхности соотвѣтствуютъ ассимптотическiя линiи другой [1]).

Подробное изложенiе этихъ работъ Cosserat и Guichard'a читатель найдетъ у Darboux въ IV томѣ его Théorie des surfaces и у Bianchi въ уже упомянутыхъ Vorlesungen.

Не можемъ еще не упомянуть объ интересномъ мемуарѣ Thybaut Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent [2]).

---

[1]) Guichard. Surfaces rapportées à leurs lignes assymptotiques et congruences rapportées à leurs dévelopables (Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure 3 série. T. VI.

Guichard. Détermination des congruences telles que les lignes assymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale (Comptes rendus. T. CX).

[2]) Annales Scientifiques de l'Ecole normale supérieure 3 série. T. XIV.

Исходя изъ разсмотрѣнія нѣкоторой линейчатой конгруэнціи, Thybaut даетъ доказательство интересной теоремы Weingarten'а, касающейся вопроса о нахожденіи поверхностей, наложимыхъ на данную [1]), далѣе находитъ связь между задачей о деформаціи параболоидовъ и задачей объ отысканіи изотермическихъ поверхностей; при этомъ онъ изслѣдуетъ одну весьма интересную W конгруэнцію, фокальныя поверхности которой поверхности minima.

Уже изъ этого, далеко неполнаго, перечня вопросовъ, къ рѣшенію которыхъ прилагается теорія линейчатыхъ конгруэнцій, мнѣ кажется, яснымъ значеніе этой теоріи въ теоріи поверхностей; съ нѣкоторымъ рискомъ можно утверждать, что, собственно говоря, всю теорію поверхностей можно разсматривать какъ рядъ частныхъ задачъ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій.

Мы не будемъ болѣе перечислять работъ, посвященныхъ тѣмъ либо инымъ приложеніямъ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій, а перейдемъ къ тѣмъ сочиненіямъ, которыя находятся въ тѣсной связи съ нашимъ изслѣдованіемъ.

Въ 1870 году въ Comptes rendus появилась небольшая замѣтка Ribaucour'a Sur la déformation des surfaces, въ которой между прочимъ приведена слѣдующая теорема: *если дана поверхность S съ постоянной кривизной* $-\frac{1}{a^2}$, *то круги C радіуса a, проведенные въ касательныхъ плоскостяхъ къ поверхности S и имѣющіе центры въ точкахъ касанія, ортогональны къ нѣкоторому семейству поверхностей S_1. Всѣ послѣднія поверхности имѣютъ ту же постоянную кривизну* $-\frac{1}{a^2}$.

Эта теорема, на которую ни самъ Ribaucour, ни другіе математики не обратили тогда особеннаго вниманія, была вновь найдена Bianchi въ 1879 г. [2]) и послужила началомъ такъ называемой теоріи преобразованія поверхностей съ постоянной Гауссовской кривизной.

Результаты, полученные Bianchi были тотчасъ же обобщены Lie въ замѣткѣ Ueber Flächen deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind [3]).

Комбинируя преобразованія Bianchi и Lie, мы приходимъ къ нѣкоторому новому преобразованію поверхностей съ постоянной кривиз-

---

[1]) Weingarten. Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (Comptes rendus. T. CXII).

Weingarten. Sur la déformation des surfaces (Acta mathematica. T. XX).

[2]) Bianchi. Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi (Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa 1879).

Bianchi. Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung (Mathematische Annalen. T. XVI. 1880).

[3]) Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. T. IV. 1879.

ной, найденному Baecklund'омъ независимо отъ упомянутыхъ изслѣдованій Bianchi и Lie [1]).

Къ преобразованію Baecklund'a мы приходимъ при рѣшеніи слѣдующей задачи теоріи линейчатыхъ конгруэнцій: *найти конгруэнцію прямыхъ, у которыхъ разстояніе между фокальными точками и уголъ между фокальными плоскостями постоянны и равны соотвѣтственно* m и $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Оказывается, что фокальныя поверхности подобной конгруэнціи имѣютъ постоянную кривизну, равную $-\frac{\cos^2\sigma}{m^2}$, при чемъ, если мы знаемъ одну фокальную поверхность Σ, то при помощи квадратуръ найдемъ и другую Σ_1.

Переходъ отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_1 и представляетъ преобразованіе Baecklund'a; это преобразованіе, характеризуемое постоянной σ (при данной кривизнѣ поверхности Σ), символически обозначается черезъ B_σ.

Ясно, что величины σ и m будутъ одновременно дѣйствительными лишь въ томъ случаѣ, когда кривизна поверхности Σ *отрицательна*.

Такимъ образомъ преобразованія Baecklund'a приводятъ насъ къ дѣйствительнымъ поверхностямъ только при примѣненіи ихъ къ поверхностямъ съ постоянной отрицательной кривизной.

Само собою явился вопросъ, нельзя ли скомбинировать такимъ образомъ два послѣдовательныхъ преобразованія Baecklund'a, чтобы они дали нѣкоторое дѣйствительное преобразованіе поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной.

Всѣ попытки геометровъ, занимавшихся этимъ вопросомъ, а главнымъ образомъ Bianchi, оставались тщетными до недавняго времени.

Въ 1899 году въ Comptes rendus (23 janvier) появляются безъ доказательства двѣ въ высшей степени интересныя теоремы Guichard'a [2]); теоремы эти являются отвѣтомъ на слѣдующій вопросъ: *найти условія, при которыхъ линейчатая конгруэнція, неизмѣнно связанная съ нѣкоторой поверхностью S, остается при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S конгруэнціей нормалей къ поверхностямъ minima или поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной.*

Въ частности, когда разсматриваемая конгруэнція касается поверхности S вопросъ этотъ былъ рѣшенъ еще раньше Weingarten'омъ [3]);

---

[1]) Baecklund. Om ytor med konstant negativ Krökning (Lunds Univ. Arsskrift. 1913 d. 1883).

[2]) Guichard. Sur la déformation des quadriques de révolution.

[3]) Weingarten. Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungs halbmesser eine Function des anderen ist (Crelle's Journal. 1862).

Darboux. Théorie des surfaces. T. III.

это то изслѣдованіе Weingarten'а и послужило источникомъ теоремъ Guichard'а.

Доказательства теоремъ Guichard'а при помощи двухъ совершенно различныхъ методовъ появились почти одновременно; одно изъ нихъ принадлежитъ Bianchi и помѣщено въ Atti della R. Accademia dei Lincei (vol. VIII fasc. 4, 1899), что касается второго, то оно дано Darboux въ CXXVIII томѣ Comptes rendus (séances du 27 mars 1899).

Тѣмъ же теоремамъ и слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ нихъ, посвящено еще нѣсколько замѣтокъ обоихъ знаменитыхъ геометровъ; всѣ эти отдѣльныя замѣтки резюмированы въ двухъ большихъ мемуарахъ, а именно въ мемуарѣ Bianchi: Sulla teoria delle transformazioni delle superficie a curvatura costante [1]) и въ мемуарѣ Darboux: Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante [2]).

Однимъ изъ наиболѣе важныхъ и интересныхъ слѣдствій теоремъ Guichard'а является то, что зная одну изъ поверхностей minima или поверхностей съ постоянной кривизной, нормальныхъ къ конгруэнціи Guichard'а, мы тѣмъ самымъ будемъ знать и другую подобную поверхность.

Такимъ образомъ теорема Guichard'а приводитъ насъ къ нѣкоторому *дѣйствительному* преобразованію поверхностей minima и поверхностей съ постоянной, положительной или отрицательной кривизной.

Естественно было задаться вопросомъ, нельзя ли свести эти преобразованія послѣднихъ поверхностей къ уже извѣстнымъ преобразованіямъ Baecklund'а; на этотъ вопросъ пришлось отвѣтить утвердительно, а именно оказалось, что разсматриваемое преобразованіе можетъ быть разбито на два послѣдовательныхъ *мнимыхъ* преобразованія Baecklund'а.

Такимъ образомъ окольнымъ путемъ пришли къ частному рѣшенію вопроса о *дѣйствительныхъ* преобразованіяхъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной—рѣшенію, которое, какъ мы видѣли, такъ долго ускользало отъ Bianchi и другихъ геометровъ.

Указаннымъ обстоятельствомъ однако не исчерпывается все значеніе теоремъ Guichard'а: дѣйствительно, теоремы эти привели къ нѣкоторому преобразованію Weingarten'овскихъ тройно-ортогональныхъ системъ [3]), наконецъ эти теоремы указали на весьма интересную связь, существующую между преобразованіями поверхностей съ постоянной кривизной и вопросомъ о деформаціяхъ поверхностей 2-го порядка.

---

[1]) Annali di Matematica. Serie 3, t. III. 1899.

[2]) Annales Scientifiques de l'Ecole normale supérieure 3 série, t. XVI, 1899.

[3]) См. упомянутый выше мемуаръ Bianchi.

Именно оказалось, что геометрическимъ мѣстомъ точекъ пересѣченія соотвѣтственныхъ нормалей къ двумъ поверхностямъ постоянной кривизны, изъ которыхъ одна является какъ результатъ послѣдовательнаго примѣненія къ другой двухъ опредѣленнымъ образомъ связанныхъ между собою преобразованій Baecklund'a, будетъ поверхность, наложимая на нѣкоторую поверхность вращенія 2-го порядка.

Интересъ, представляемый теоремами Guichard'a, побудилъ меня еще въ 1899 году, до ознакомленія съ работами Darboux и Bianchi, заняться ихъ доказательствомъ.

При выводѣ этихъ теоремъ я употребилъ методъ периморфіи такъ, что мое доказательство разнится отъ доказательствъ Darboux и Bianchi.

Какъ оказывается, лучи конгруэнціи Guichard'a лежатъ въ плоскостяхъ кривизны геодезическихъ линій нѣкоторыхъ поверхностей, наложимыхъ на поверхности вращенія; при чемъ эти геодезическія линіи представляютъ изгибанія меридiановъ.

Какъ извѣстно изъ теоремы Weingarten'a, упомянутой нами немного выше, эти плоскости касаются нѣкоторой другой поверхности, наложимой тоже на поверхность вращенія.

Такимъ образомъ, я естественно натолкнулся на слѣдующую задачу: *найти условія, при которыхъ конгруэнція прямыхъ, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ къ нѣкоторой поверхности* S_0 *и неизмѣнно съ этими плоскостями связанныхъ, остается конгруэнціей нормалей къ поверхностямъ тіпіта или постоянной кривизны при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности* S_0; *при этомъ само собою разумѣется, что касательныя плоскости къ* S_0 *въ свою очередь неизмѣнно связаны съ поверхностью* S_0.

Полученное мною рѣшеніе этого вопроса было доложено Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 27 октября 1900 г.

Черезъ нѣсколько дней послѣ этого въ Харьковѣ былъ полученъ номеръ Atti della R. Accademia dei Lincei (Volume IX fasc. 6), въ которомъ приведены безъ доказательства аналогичныя теоремы въ замѣткѣ Bianchi: Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili; доказательствъ этихъ теоремъ Bianchi до сихъ поръ не опубликовалъ.

Хотя, какъ я уже сказалъ, теоремы эти были мнѣ извѣстны раньше, чѣмъ ихъ опубликовалъ Bianchi, тѣмъ не менѣе я называю ихъ *теоремами Bianchi;* эти теоремы читатель найдетъ въ 4-ой главѣ настоящаго изслѣдованія.

Доказательство теоремъ, обратныхъ теоремамъ Guichard'a и дающихъ съ одной стороны преобразованія поверхностей съ постоянной кривизной, а съ другой, поверхности, наложимыя на поверхности 2-го порядка, мы находимъ въ упомянутомъ мемуарѣ Bianchi. Выводъ основныхъ уравненій, рѣшающихъ вопросъ, у Bianchi довольно сложенъ, при чемъ преобразованія ихъ являются совершенно искусственными.

Употребленный мною методъ периморфіи значительно упрощаетъ самый выводъ уравненій, при чемъ эти уравненія сразу получаются въ той формѣ, къ которой Bianchi приводитъ ихъ искусственнымъ путемъ.

Доказательствъ теоремъ, обратныхъ теоремамъ Bianchi, въ упомянутомъ его мемуарѣ, само собою разумѣется, нѣтъ; теоремы эти безъ доказательствъ мы находимъ въ замѣткѣ Bianchi, помѣщенной въ IX томѣ Atti dela Acad. dei Lincei.

Въ ней же дано указаніе на выводъ второй изъ этихъ теоремъ, выводъ, къ которому я не могъ прійти самостоятельно.

Въ заключеніе приведу краткое содержаніе настоящаго изслѣдованія.

Глава первая посвящена выводу основныхъ свойствъ линейчатыхъ конгруэнцій; въ ней же разсмотрѣнъ рядъ частныхъ задачъ, играющихъ существенную роль въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи. Кромѣ того здѣсь я останавливаюсь нѣсколько подробнѣе на теоріи оптическихъ осей, разсмотрѣнныхъ впервые Darboux, при чемъ изслѣдую случай, когда эти оси представляютъ конгруэнціи нормалей—случай, насколько мнѣ извѣстно, не затронутый другими авторами.

Во второй главѣ изслѣдуются подробно фокальныя поверхности конгруэнцій; между прочимъ я вывожу извѣстную теорему Weingarten'а. Бо́льшая часть главы посвящена вопросу о преобразованіяхъ поверхностей съ постоянной кривизной. Доказавши *перемѣстительный законъ* Bianchi для поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной, я при помощи его прихожу *прямымъ путемъ* къ нѣкоторому дѣйствительному преобразованію поверхностей съ постоянной положительной кривизной.

При выводѣ перемѣстительнаго закона Bianchi, я ставлю болѣе общую задачу, а именно ищу, какимъ условіямъ должны подчиняться четыре постоянныхъ σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, чтобы послѣдовательное примѣненіе преобразованій B_{σ_1}, B_{σ_2} приводило къ той же поверхности, что и послѣдовательное примѣненіе преобразованій B_{σ_3}, B_{σ_4}. Оказывается, что это возможно лишь въ случаѣ, когда $\sigma_3 = \sigma_2$ и $\sigma_4 = \sigma_1$ т. е. въ случаѣ разсмотрѣнномъ Bianchi.

Третья глава посвящена выводу теоремъ Guichard'а, при чемъ въ ней я указываю на связь между конгруэнціей Guichard'а и нѣкоторой циклической конгруэнціей; связь эта играетъ весьма важную роль при выводѣ теоремъ, обратныхъ теоремамъ Bianchi.

Въ четвертой главѣ я даю доказательство теоремъ Bianchi.

Пятая глава посвящена доказательству теоремъ, обратныхъ теоремамъ Guichard'а и Bianchi для случая поверхностей minima; здѣсь я нахожу интересное преобразованіе поверхностей minima и указываю на связь между этимъ преобразованіемъ и преобразованіемъ Thybaut, разсмотрѣннымъ имъ въ упомянутомъ выше мемуарѣ Sur la déformation du paraboloïde etc. Кромѣ того я даю новый выводъ извѣстной теоремы Bonnet о присоединенныхъ поверхностяхъ minima. Преобразованіе основныхъ уравненій, рѣшающихъ поставленные въ началѣ этой главы вопросы, къ системѣ линейныхъ уравненій находится при помощи свойствъ конгруэнціи круговъ, разсмотрѣнной въ третьей главѣ.

Въ шестой и седьмой главахъ разсмотрѣны теоремы, обратныя теоремамъ Guichard'а и Bianchi, относящіяся къ поверхностямъ съ постоянной кривизной. Пользуясь результатами 2-й главы я показываю, какимъ образомъ полученныя преобразованія этихъ поверхностей сводятся къ преобразованіямъ Baecklund'а.

Теперь позволю себѣ сказать нѣсколько словъ о томъ методѣ, которымъ я пользуюсь въ настоящемъ изслѣдованіи, а именно о методѣ *периморфіи*.

Какъ мнѣ кажется, преимущество его зиждется на томъ обстоятельствѣ, что въ немъ система координатъ тѣсно и непосредственно связана съ изучаемой поверхностью или конгруэнціей, между тѣмъ, какъ всякая неподвижная система координатъ представляетъ нѣчто паразитарное, ничѣмъ не связанное съ данной пространственной фигурой.

Далѣе, при употребленіи подвижнаго тріэдра роль поверхности сводится къ роли точки (начала координатъ), что и должно имѣть мѣсто въ дифференціальной геометріи.

Что касается упрековъ методу периморфіи, касающихся введенія кинематики въ геометрію, то вопросъ этотъ въ достаточной степени выясненъ профессоромъ Г. К. Сусловымъ въ недавно появившейся статьѣ „Частныя геометрическія производныя отъ векторъ-функціи двухъ аргументовъ" [1]), къ которой и отсылаю читателя.

Скажемъ только, что въ методѣ периморфіи кинематика входитъ въ геометрію постольку, поскольку геометрія входитъ въ анализъ, когда мы говоримъ о движеніи перемѣнной по плоскости, кривой и т. д.; другими словами, здѣсь мы пользуемся только терминами кинаматики.

Однако можно обойтись и безъ этого, какъ это дѣлаетъ Ribaucour въ своихъ мемуарахъ или, въ послѣднее время, Cesaro въ своихъ Lezioni di geometria intrinseca [2]).

---

[1]) Отчеты и протоколы физико-математическаго общества при Университетѣ св. Владиміра за 1900 годъ.

[2]) См. также Laurent. Traité d'analyse, t. VII.

Что касается понятія о перемѣщеніи (внѣ зависимости отъ времени), то это понятіе, какъ показали изслѣдованія новѣйшихъ геометровъ Helmholtz'a, Lie, Poincaré и другихъ, тѣсно связано съ нашими пространственными представленіями; да къ тому же безконечно-малыя перемѣщенія мы постоянно изслѣдуемъ въ дифференціальной геометріи; чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только вникнуть глубже хотя бы въ теорію кривизны линій и поверхностей.

Въ заключеніе считаю своимъ долгомъ выразить искреннюю благодарность Харьковскому Математическому Обществу, давшему мнѣ возможность напечатать настоящее сочиненіе.

Замѣчу слѣдующее сокращеніе, которымъ я пользуюсь во всемъ сочиненіи: при ссылкахъ на Théorie générale des surfaces Darboux и на Vorlesungen über Differentialgeometrie Bianchi я пишу просто Darboux, Bianchi.

ГЛАВА I.

Общія основанія теоріи линейчатыхъ конгруэнцій.

§ 1. Подъ именемъ *линейчатой конгруэнціи* мы будемъ подразумѣвать систему прямыхъ въ пространствѣ, уравненіе которыхъ зависитъ отъ двухъ произвольныхъ параметровъ; прямыя, принадлежащія данной линейчатой конгруэнціи, назовемъ ея *лучами*.

Такъ какъ координаты точекъ любой поверхности могутъ быть выражены какъ функціи двухъ независимыхъ параметровъ, то мы всегда можемъ предположить, что между точками любой поверхности S и лучами любой линейчатой конгруэнціи D существуетъ *однозначная* зависимость, т. е. что каждой точкѣ поверхности S соотвѣтствуетъ одна прямая конгруэнціи D и, наоборотъ, каждой прямой конгруэнціи соотвѣтствуетъ одна точка поверхности S.

Устанавливая произвольную зависимость между параметрами, мы получимъ на поверхности S нѣкоторую кривую; этой кривой будетъ соотвѣтствовать система прямыхъ конгруэнціи D, зависящая отъ одного параметра, т. е. нѣкоторая *линейчатая поверхность*.

Такимъ образомъ, всякой кривой поверхности S соотвѣтствуетъ одна линейчатая поверхность, образованная лучами конгруэнціи D и наоборотъ; линейчатую поверхность, образованную лучами конгруэнціи D, будемъ называть просто *поверхностью конгруэнціи* D.

Въ числѣ этихъ поверхностей конгруэнціи, очевидно, могутъ быть и развертывающіяся поверхности. Кривыя, соотвѣтствующія на поверхности S развертывающимся поверхностямъ конгруэнціи D, назовемъ *главными кривыми поверхности S по отношенію къ конгруэнціи D*.

Если мы будемъ имѣть въ виду *опредѣленную* поверхность S и *опредѣленную* конгруэнцію D, то эти кривыя мы будемъ называть просто *главными кривыми*.

Докажемъ теперь, что всякая линейчатая конгруэнція имѣетъ только двѣ, дѣйствительныя или мнимыя, системы развертывающихся поверхностей или, другими словами, что на любой поверхности S существуютъ двѣ, и только двѣ, системы главныхъ кривыхъ по отношенію къ какой угодно линейчатой конгруэнціи.

Не нарушая общности, мы можемъ предположить, что однозначное соотвѣтствіе между лучами конгруэнціи D и точками поверхности S таково, что каждой точкѣ поверхности S соотвѣтствуетъ опредѣленный, проходящій черезъ нее, лучъ конгруэнціи D. Конгруэнцію лучей, связанныхъ подобнымъ образомъ съ поверхностью S, назовемъ конгруэнціей лучей, *падающихъ* на поверхность S.

Каждой системѣ падающихъ лучей D, будетъ соотвѣтствовать система лучей *отраженныхъ* D'; подъ послѣдними мы будемъ подразумѣвать лучи, симметричные съ D по отношенію къ соотвѣтственнымъ касательнымъ плоскостямъ къ поверхности S.

Въ нашемъ изслѣдованіи мы будемъ постоянно пользоваться подвижной системой прямоугольныхъ координатъ (T), плоскость xy которыхъ совпадаетъ съ касательными плоскостями къ нѣкоторой поверхности, а начало съ соотвѣтственной точкой касанія.

Положеніе такой системы координатъ зависитъ отъ двухъ параметровъ u, v.

Слѣдуя Darboux, обозначимъ черезъ ξ, η проэкціи перемѣщеній начала координатъ (T) соотвѣтственно на оси $x^{\text{-овъ}}$ и $y^{\text{-овъ}}$ тѣхъ же координатъ въ предположеніи, что измѣняется одинъ параметръ u, проэкціи соотвѣтственнаго вращенія на оси $x^{\text{-овъ}}$, $y^{\text{-овъ}}$ и $z^{\text{-овъ}}$ обозначимъ черезъ p, q, r. Тѣ же величины, соотвѣтствующія измѣняемости одного параметра v, обозначимъ черезъ ξ_1, η_1, p_1, q_1, r_1.

Введенныя функціи не произвольны, а удовлетворяютъ шести уравненіямъ Codazzi-Mainardi:

$$\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u}=qr_1-q_1r,\quad \frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}=\eta r_1-\eta_1 r,$$

$$\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u}=rp_1-r_1p,\quad \frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{\partial \eta_1}{\partial u}=r\xi_1-r_1\xi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=pq_1-p_1q,\quad p\eta_1-p_1\eta=q\xi_1-q_1\xi.$$

Всѣ соотвѣтственныя формулы читатель найдетъ во II-мъ томѣ „Leçons sur la théorie générale des surfaces“ Darboux pp. 382—386.

Свяжемъ теперь опредѣленнымъ образомъ подобную систему координатъ съ упомянутой нами поверхностью S.

Уравненіе соотвѣтствующаго падающаго луча конгруэнціи D по отношенію къ осямъ (T) будетъ

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma},$$

а слѣдовательно координаты любой его точки выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x=\varrho\cos\alpha,\quad y=\varrho\cos\beta,\quad z=\varrho\cos\gamma.$$

Предположимъ, что мы отъ опредѣленной точки M (u, v) поверхности S перешли въ точку M' $(u+du,\ v+dv)$ вдоль по *главной кривой;* тогда точка нашего луча, представляющая точку ребра возврата соотвѣтствующей развертывающейся поверхности, должна перемѣститься вдоль самого луча.

Проэкціи перемѣщенія любой точки луча на оси T, какъ извѣстно будутъ

$$\delta x=\xi du+\xi_1 dv+\varrho d\cos\alpha+\cos\alpha d\varrho+(qdu+q_1dv)\varrho\cos\gamma-(rdu+r_1dv)\varrho\cos\beta$$

$$\delta y=\eta du+\eta_1 dv+\varrho d\cos\beta+\cos\beta d\varrho+(rdu+r_1dv)\varrho\cos\alpha-(pdu+p_1dv)\varrho\cos\gamma$$

$$\delta z=\varrho d\cos\gamma+\cos\gamma d\varrho+(pdu+p_1dv)\varrho\cos\beta-(qdu+q_1dv)\varrho\cos\alpha.$$

Для точки, соотвѣтствующей ребру возврата разсматриваемой развертывающейся поверхности, перемѣщенія эти должны удовлетворять соотношеніямъ

$$\delta x-\cos\alpha\delta\lambda=0,\quad \delta y-\cos\beta\delta\lambda=0,\quad \delta z-\cos\gamma\delta\lambda=0,\tag{1}$$

гдѣ $\delta\lambda$ коэффиціентъ пропорціональности.

Исключая изъ этихъ уравненій ϱ и $d\varrho-\delta\lambda$, мы получимъ очевидно дифференціальное уравненіе *главныхъ кривыхъ*; оно будетъ вида

$$\begin{vmatrix} \xi du+\xi_1 dv, & \cos\alpha, & d\cos\alpha+(qdu+q_1dv)\cos\gamma-(rdu+r_1dv)\cos\beta \\ \eta du+\eta_1 dv, & \cos\beta, & d\cos\beta+(rdu+r_1dv)\cos\alpha-(pdu+p_1dv)\cos\gamma \\ o & ,\cos\gamma, & d\cos\gamma+(pdu+p_1dv)\cos\beta-(qdu+p_1dv)\cos\alpha \end{vmatrix}=0\tag{2}$$

Уравненіе это второй степени относительно $\frac{du}{dv}$, откуда, и заключаемъ, что черезъ данную точку поверхности проходитъ двѣ, дѣйствительныя или мнимыя, главныя кривыя.

Этимъ двумъ главнымъ кривымъ соотвѣтствуютъ двѣ развертывающіяся поверхности нашей конгруэнціи.

Чтобы найти координаты ихъ точекъ возврата, намъ нужно изъ уравненій (1) исключить du, dv и $d\varrho-\delta\lambda$; тогда получимъ слѣдующее квадратное уравненіе для опредѣленія ϱ

$$\begin{vmatrix} \xi+\varrho\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial u}+q\cos\gamma-r\cos\beta\right), & \xi_1+\varrho\left(\frac{\partial\cos\alpha}{\partial v}+q_1\cos\gamma-r_1\cos\beta\right), & \cos\alpha \\ \eta+\varrho\left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial u}+r\cos\alpha-p\cos\gamma\right), & \eta_1+\varrho\left(\frac{\partial\cos\beta}{\partial v}+r_1\cos\alpha-p_1\cos\gamma\right), & \cos\beta \\ \varrho\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial u}+p\cos\beta-q\cos\alpha\right), & \varrho\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial v}+p_1\cos\beta-q_1\cos\alpha\right), & \cos\gamma \end{vmatrix}=0 \quad (3)$$

Точки, принадлежащія ребрамъ возврата нашихъ развертывающихся поверхностей, носятъ названіе *фокальныхъ точекъ* даннаго луча, при чемъ изъ предыдущаго видно, что на каждомъ лучѣ существуютъ двѣ дѣйствительныя или мнимыя фокальныя точки.

Касательныя плоскости къ соотвѣтственнымъ развертывающимся поверхностямъ называются *фокальными плоскостями*

Наконецъ, геометрическое мѣсто фокальныхъ точекъ носитъ названіе *фокальныхъ поверхностей;* такихъ поверхностей для каждой конгруэнціи будетъ двѣ. Фокальныя поверхности мы можемъ еще разсматривать какъ геометрическое мѣсто реберъ возврата развертывающихся поверхностей конгруэнціи.

Изъ самаго опредѣленія фокальныхъ поверхностей явствуетъ, что всѣ лучи конгруэнціи касаются фокальныхъ поверхностей.

Какъ нетрудно видѣть, все изложенное является обобщеніемъ извѣстныхъ свойствъ нормалей къ поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что конгруэнція D состоитъ изъ нормалей къ поверхности S, т. е. что $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=o$, то уравненіе (2) представитъ дифференціальное уравненіе линій кривизны; уравненіе (3) дастъ намъ радіусы кривизны поверхности S. Фокальными плоскостями въ этомъ случаѣ будутъ плоскости главныхъ сѣченій, а фокальными поверхностями эволюты поверхности S.

§ 2. Посмотримъ теперь, когда лучи нашей конгруэнціи D будутъ представлять систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ.

Для того, чтобы послѣднее обстоятельство имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы на каждомъ лучѣ существовала такая точка, перемѣщенія которой при всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ (u, v) были бы ортогональны къ соотвѣтствующему лучу.

Другими словами, если черезъ δx, δy, δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній этой точки на оси (T), то для всевозможныхъ значеній (du, dv) должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$\delta x\cos\alpha+\delta y\cos\beta+\delta z\cos\gamma=0. \quad (4)$$

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя частныя предположенія относительно осей (T) и координатныхъ линій u, v, а именно предположимъ, что за линіи $v = \text{const}$ приняты кривыя, касательныя къ проэкціямъ лучей нашей конгруэнціи на соотвѣтственныя касательныя плоскости къ поверхности S; эти проэкціи мы вмѣстѣ съ тѣмъ примемъ за оси $x^{\text{-овъ}}$ координатъ (T). За кривыя $u = \text{const}$ примемъ кривыя, ортогональныя къ кривымъ $v = \text{const}$; касательныя къ нимъ будутъ осями $y^{\text{-овъ}}$ нашей системы (T).

Къ этому случаю мы перейдемъ, полагая въ формулахъ предыдущаго параграфа

$$\xi_1 = \eta = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

При послѣднихъ предположеніяхъ соотношеніе (4) приметъ видъ

$$d\varrho + \xi \cos\alpha \, du = 0. \tag{5}$$

Такъ какъ это соотношеніе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ (du, dv), то отсюда заключаемъ, что искомое условіе будетъ

$$\frac{\partial (\xi \cos\alpha)}{dv} = 0. \tag{6}$$

Прежде всего мы видимъ, что оно останется справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда мы замѣнимъ α черезъ $-\alpha$ и $\cos\alpha$ черезъ $k\cos\alpha$, гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Но измѣняя α на $-\alpha$, мы, очевидно, переходимъ отъ *падающихъ* лучей къ лучамъ *отраженнымъ*, замѣняя же $\cos\alpha$ черезъ $k\cos\alpha$, мы переходимъ отъ *падающихъ* лучей къ *преломленнымъ;* отсюда мы приходимъ къ знаменитой теоремѣ, найденной впервые для отраженныхъ лучей Malus'омъ, а для преломленныхъ Dupin'омъ и носящей названіе *теоремы Malus—Dupin'а: конгруэнція лучей, представляющая систему нормалей нѣкоторой поверхности, остается конгруэнціей нормалей послѣ какого-угодно числа отраженій и преломленій.*

Обращаясь еще къ условію (6), мы видимъ, что въ него входятъ только уголъ α и коэффиціентъ линейнаго элемента поверхности S.

Допустимъ теперь, что конгруэнція D *неизмѣнно связана* съ поверхностью S; если теперь мы будемъ какъ угодно деформировать поверхность S, то конгруэнція D при этомъ будетъ принимать различныя положенія D', D''.... Такъ какъ для всѣхъ этихъ конгруэнцій условіе (6) будетъ выполнено, то всѣ онѣ будутъ конгруэнціями нормалей.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей *теоремѣ Beltrami: если нѣкоторая линейчатая конгруэнція падающихъ лучей, неизмѣнно* *связанная съ нѣкоторой поверхностью S, представляетъ конгруэнцію нормалей, то она останется такой же при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S.*

§ 3. Займемся теперь разсмотрѣніемъ слѣдующаго вопроса: когда главныя кривыя поверхности S по отношенію къ конгруэнціи падающихъ лучей D представляютъ систему сопряженныхъ кривыхъ.

Иначе тотъ же вопросъ можетъ быть формулированъ и такимъ образомъ: когда развертывающіяся поверхности конгруэнціи D соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S.

Уравненіе сопряженныхъ линій, какъ извѣстно, будетъ

$$-q\xi du\delta u + p_1\eta_1 dv\delta v + p\eta_1 (du\delta v + dv\delta u) = 0;$$

уравненіе главныхъ кривыхъ въ данномъ случаѣ мы получимъ изъ (2), полагая $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\xi_1 = \eta = 0$; оно приметъ видъ

$$\xi \sin\alpha\,(r\cos\alpha - p\sin\alpha)\,du^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} - q_1\right) dv^2 +$$

$$+ (\xi r_1 \cos\alpha \sin\alpha - \xi p_1 \sin^2\alpha + \eta_1 \frac{\partial\alpha}{\partial u} - q_1\eta)\,du\,dv = 0. \tag{7}$$

Поэтому искомое условіе, очевидно, будетъ

$$\sin\alpha\cos\alpha\,(p_1 r - p r_1) + q_1 \frac{\partial\alpha}{\partial u} - q\frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0. \tag{8}$$

Оно не измѣняется при замѣнѣ α черезъ $-\alpha$ т. е. при переходѣ отъ падающихъ къ отраженнымъ лучамъ.

Итакъ: *если развертывающіяся поверхности падающихъ лучей соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ отражающей поверхности S, то и развертывающіяся поверхности отраженныхъ лучей будутъ соотвѣтствовать сопряженнымъ кривымъ поверхности S.*

Доказанная нами теорема принадлежитъ Malus'у.

§ 4. Главныя кривыя, соотвѣтствующія конгруэнціямъ падающихъ и отраженныхъ лучей, вообще говоря, различны. Посмотримъ, при какихъ условіяхъ онѣ совпадаютъ.

Дифференціальное уравненіе главныхъ кривыхъ отраженныхъ лучей мы получимъ, измѣняя въ (7) α на $-\alpha$; такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\xi \sin\alpha\,(p\sin\alpha + r\cos\alpha)\,du^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1\right) dv^2 +$$

$$+ (\xi r_1 \cos\alpha \sin\alpha + \xi p_1 \sin^2\alpha + \eta_1 \frac{\partial\alpha}{\partial u} + q\eta_1)\,du dv = 0. \tag{9}$$

Предположимъ сперва, что функціи p и q_1 отличны отъ нуля т. е., что кривыя (u, v) не представляютъ линій кривизны поверхности S.

Чтобы уравненія (7) и (9) были тождественны, необходимо и достаточно, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$\frac{r\cos\alpha - p\sin\alpha}{r\cos\alpha + p\sin\alpha} = \frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} - q_1}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} + q_1} = \frac{\xi r_1 \cos\alpha\sin\alpha - \xi p_1 \sin^2\alpha + \eta_1\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} - \eta_1 q}{\xi r_1\cos\alpha\sin\alpha + \xi p_1\sin^2\alpha + \eta_1\dfrac{\partial\alpha}{\partial u} + \eta_1 q}$$

или

$$\frac{p\sin\alpha}{r\cos\alpha} = \frac{q_1}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}} = \frac{\xi p_1\sin^2\alpha + \eta_1 q}{\xi r_1\cos\alpha\sin\alpha + \eta_1\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}}. \tag{10}$$

Умножая числителя и знаменателя перваго отношенія на $\xi p_1 \sin\alpha$, второго на $-q\xi$ и третьяго на $-p$ и складывая полученныхъ числителей, найдемъ въ результатѣ нуль; отсюда заключаемъ, что и сумма полученныхъ знаменателей тоже равна нулю, т. е.

$$\xi\sin\alpha\cos\alpha\,(p_1 r - p r_1) - q\xi\frac{\partial\alpha}{\partial v} - p\eta_1\frac{\partial\alpha}{\partial u} = 0\,, \tag{11}$$

а это ничто иное, какъ наше условіе (8).

Комбинируя теперь два первыхъ отношенія въ выраженіи (10), мы получимъ

$$\eta_1 p\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v} - q_1\eta_1 r\cos\alpha = 0$$

или на основаніи формулъ Codazzi-Mainardi:

$$\frac{\partial\,(\xi\cos\alpha)}{\partial v} = 0\,, \tag{12}$$

а это условіе показываетъ, что разсматриваемыя конгруэнціи представляютъ конгруэнціи нормалей.

Итакъ имѣемъ слѣдующую теорему.

Имѣемъ нѣкоторую конгруэнцію падающихъ лучей, плоскости паденія которыхъ не совпадаютъ съ главными сѣченіями отражающей поверхности S. Если развертывающіяся поверхности конгруэнцій падающихъ и отраженныхъ лучей соотвѣтствуютъ другъ другу, то 1) *какъ падающіе, такъ и отраженные лучи составляютъ конгруэнціи нормалей къ нѣкоторымъ поверхностямъ и* 2) *развертывающіяся поверхности ихъ соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S.*

Нетрудно показать, что справедлива и обратная теорема, а именно, что при соблюденіи двухъ послѣднихъ условій, развертывающіяся поверхности конгруэнцій падающихъ и отраженныхъ лучей соотвѣтствуютъ другъ другу.

Дѣйствительно, указанныя условія выражаются аналитически соотношеніями (11) и (12).

Изъ послѣдняго имѣемъ

$$\frac{r\cos\alpha}{p\sin\alpha} = \frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial v}}{q_1}.$$

Умножая числителя и знаменателя перваго отношенія на $\xi p_1 \sin\alpha$, а второго на $-q\xi$, составляя производную пропорцію и принимая во вниманіе соотношеніе (11), мы легко прійдемъ къ условію (10).

§ 5. Мы оставили въ сторонѣ случай, когда плоскости паденія нашихъ лучей совпадаютъ съ главными сѣченіями отражающей поверхности S, т. е. случай, когда

$$p = q_1 = 0.$$

При послѣднихъ предположеніяхъ условія (10) приводятся къ одному

$$\xi p_1 \sin^2\alpha + \eta_1 q = 0. \tag{13}$$

Обозначая черезъ R_1 и R_2 радіусы кривизны нашей поверхности и замѣчая, что

$$R_1 = -\frac{\xi}{q}, \quad R_2 = \frac{\eta_1}{p_1},$$

мы находимъ для угла α слѣдующее выраженіе

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \tag{14}$$

Очевидно, одинъ знакъ будетъ соотвѣтствовать падающимъ лучамъ, а другой отраженнымъ.

Легко видѣть, что лучи разсматриваемой конгруэнціи будутъ дѣйствительны лишь въ случаѣ, когда R_1 и R_2 одного знака т. е. когда Гауссовская кривизна поверхности въ данной точкѣ будетъ положительной; при томъ еще необходимо должно удовлетворяться условіе

$$|\,R_2\,| < |\,R_1\,|.$$

При выполненіи этихъ условій мы будемъ имѣть двѣ системы прямыхъ

$$y = 0, \quad z = \tan\alpha x; \quad y = 0, \quad z = -\tan\alpha x,$$

развертывающіяся поверхности которыхъ соотвѣтствуютъ другъ другу.

Если мы разсмотримъ конгруэнціи, составленныя изъ аналогичныхъ лучей, лежащихъ въ плоскости другого главнаго сѣченія поверхности S, то получимъ опять двѣ системы прямыхъ, удовлетворяющихъ поставленнымъ условіямъ, а именно

$$x=0, \quad z=\operatorname{tang}\beta y, \quad x=0, \quad z=-\operatorname{tang}\beta y,$$

гдѣ

$$\sin\beta=\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Эти прямыя будутъ дѣйствительны при условіи, что Гауссовская кривизна поверхности S положительна и что $|R_1|<|R_2|$.

Мы видимъ, что второе условіе дѣйствительности послѣднихъ прямыхъ противорѣчитъ второму условію дѣйствительности прямыхъ, раньше разсмотрѣнныхъ нами.

Полученныя нами конгруэнціи впервые изслѣдованы Darboux и названы имъ конгруэнціями *оптическихъ осей поверхности* S.

Изъ предыдущаго заключаемъ, что каждая поверхность имѣетъ *четыре* системы оптическихъ осей.

Въ точкахъ поверхности, въ которыхъ кривизна ея положительна, двѣ оптическія оси, лежащія въ одной плоскости, дѣйствительны, а двѣ мнимы; въ точкахъ же, гдѣ Гауссовская кривизна отрицательна, всѣ четыре оптическія оси мнимы.

Для построенія оптическихъ осей въ данной точкѣ поверхности, въ которой Гауссовская кривизна положительна, поступимъ слѣдующимъ образомъ: найдемъ уравненіе прямого круглаго цилиндра, имѣющаго своей осью одну изъ оптическихъ осей и направляющій кругъ произвольнаго радіуса a; уравненіе подобнаго цилиндра будетъ

$$\cos^2\alpha\,(z-\operatorname{tang}\alpha x)^2+y^2=a^2.$$

Уравненіе пересѣченія этого цилиндра съ касательной плоскостью къ S будетъ, очевидно,

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=\frac{a^2}{R_2}, \quad z=0.$$

а это эллипсъ, подобный Dupin'овской индикатрисѣ данной точки.

Такимъ образомъ *оптическая ось въ данной точкѣ поверхности, въ которой Гауссовская кривизна положительна, представляетъ ось круглаго цилиндра, пересѣкающаго соотвѣтственную касательную плоскость по индикатрисѣ Dupin'а, соотвѣтствующей точкѣ касанія.*

Послѣднюю теорему можно представить нѣсколько въ иной формѣ.

Уравненіе эллипса, представляющаго Dupin'овскую индикатрису, будетъ

$$\frac{x^2}{R_1}+\frac{y^2}{R_2}=\pm 1,$$

уравненіе фокальной съ нимъ гиперболы

$$y=0,\quad \frac{x^2}{R_1-R_2}-\frac{z^2}{R_2}=\pm 1.$$

Ассимптоты этой послѣдней, очевидно, дадутся уравненіемъ

$$y=0,\quad z=\pm\sqrt{\frac{R_2}{R_1-R_2}}\,x,$$

а это ничто иное, какъ уравненіе нашихъ оптическихъ осей, откуда заключаемъ, что *дѣйствительныя оптическія оси представляютъ ассимптоты фокальныхъ гиперболъ индикатрисы Dupin'а.*

§ 6. Хотя въ дальнѣйшемъ изложеніи намъ и не прійдется встрѣтиться съ оптическими осями, однако мы позволимъ себѣ остановиться нѣсколько на ихъ теоріи.

Дѣлаемъ мы это въ виду того, что эта интересная теорія, намѣченная только Darboux, насколько намъ извѣстно, до сихъ поръ не получила дальнѣйшаго развитія.

Вопросъ, которому мы посвятимъ настоящій параграфъ, заключается въ разсмотрѣніи условій, при которыхъ конгруэнція оптическихъ осей нѣкоторой поверхности представляетъ конгруэнцію нормалей.

Замѣчая, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\xi=-qR_1,\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{R_1-R_2}{R_1}}$$

мы можемъ представить условіе (6) въ видѣ

$$\frac{\partial(q\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_1-R_2})}{\partial v}=0$$

или еще

$$\frac{\partial\log(q\sqrt{R_1}\cdot\sqrt{R_1-R_2})}{\partial v}=0.$$

Пользуясь соотношеніемъ, вытекающимъ изъ формулъ Codazzi-Mainardi

$$\frac{\partial\log q}{\partial v}=\frac{1}{R_2-R_1}\,\frac{\partial R_1}{\partial v},$$

мы преобразуемъ это условіе въ слѣдующее:

$$\frac{1}{2R_1(R_2-R_1)}\frac{\partial(R_1R_2)}{\partial v}=\frac{1}{2R_1(R_2-R_1)}\frac{\partial\left(\frac{1}{K}\right)}{\partial v}=0,$$

гдѣ черезъ K мы обозначаемъ Гауссовскую кривизну поверхности S.

Отсюда заключаемъ, что K есть функція одного параметра u, другими словами, поверхность S такова, что вдоль линій кривизны, ортогональныхъ къ разсматриваемымъ оптическимъ осямъ, Гауссовская кривизна остается постоянной.

Для того, чтобы всѣ оптическія оси представляли конгруэнціи нормалей, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы кривизна K удовлетворяла условіямъ

$$\frac{\partial K}{\partial u}=0\,,\quad \frac{\partial K}{\partial v}=0$$

т. е. чтобы кривизна K была постоянна.

Итакъ *только для поверхностей постоянной кривизны всѣ конгруэнціи оптическихъ осей представляютъ конгруэнціи нормалей.*

Укажемъ еще на одну характерную особенность оптическихъ осей, представляющихъ конгруэнціи нормалей.

Обращаясь къ уравненіямъ, которымъ удовлетворяетъ въ этомъ случаѣ функція α, а именно къ уравненіямъ

$$\frac{\partial(\xi\cos\alpha)}{\partial v}=0,\quad \xi p_1\sin^2\alpha+\eta_1 q=0,$$

мы преобразуемъ первое изъ нихъ слѣдующимъ образомъ.

Если раскроемъ его, потомъ умножимъ на $p_1\sin\alpha$ и примемъ во вниманіе второе уравненіе, то прійдемъ къ слѣдующему соотношенію:

$$rp_1\cos\alpha-q\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}=0,$$

а это ничто иное, какъ условіе (8) третьяго параграфа, показывающее, что развертывающіяся поверхности нашей конгруэнціи соотвѣствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S.

Такимъ образомъ мы пришли къ слѣдующей теоремѣ: *если конгруэнція оптическихъ осей нѣкоторой поверхности S представляетъ конгруэнцію нормалей, то развертывающіяся поверхности ея соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S.*

§ 7. Обратимся теперь опять къ изслѣдованіямъ § 3-го, а именно къ тому случаю, когда главныя кривыя на поверхности S, соотвѣтствующія нѣкоторой конгруэнціи D, представляютъ системы сопряженныхъ линій.

Допустимъ, что лучи конгруэнціи D неизмѣнно связаны съ поверхностью S; предположимъ далѣе, что поверхность S деформируется какъ угодно, тогда конгруэнція D обращается въ конгруэнціи D', D''...

Посмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ главныя кривыя соотвѣтствующихъ поверхностей S', S''... будутъ оставаться сопряженными кривыми.

Здѣсь черезъ S', S''... мы обозначаемъ различныя изгибанія поверхности S.

Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію поставленнаго вопроса, остановимся нѣсколько на общихъ разсужденіяхъ, играющихъ существенную роль въ нашемъ изслѣдованіи.

Какъ извѣстно, опредѣленіе всѣхъ поверхностей, имѣющихъ данный линейный элементъ или представляющихъ всевозможныя деформаціи нѣкоторой данной поверхности S приводится къ интегрированію уравненій Codazzi-Mainardi.

Общій интегралъ этихъ уравненій, очевидно, заключаетъ *двѣ* произвольныхъ функціи.

Пусть теперь для нѣкоторой поверхности S существуетъ опредѣленная зависимость между функціями p, q, p_1, q_1

$$f(p, q, p_1, q_1) = 0.$$

Пользуясь уравненіями Codazzi-Mainardi, мы всегда можемъ исключить изъ этой зависимости двѣ какихъ либо функціи, положимъ p, q, и представить ее въ видѣ

$$F(p_1, q_1) = 0.$$

Предположимъ теперь, что послѣдняя зависимость должна имѣть мѣсто при *всевозможныхъ* деформаціяхъ поверхности S. Нетрудно показать, что это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда эта зависимость удовлетворяется *тождественно*.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивши противное, мы изъ даннаго соотношенія опредѣлимъ одну изъ функцій p_1, q_1 черезъ другую; для опредѣленія же послѣдней функціи мы будемъ имѣть *два* уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Допуская даже, что эти уравненія сведутся къ одному, мы и тогда получимъ, что при *всевозможныхъ* деформаціяхъ поверхности S функціи p, q, p_1, q_1 зависятъ отъ *одной* произвольной функціи — результатъ, очевидно, невѣрный.

Послѣ этихъ замѣчаній перейдемъ къ рѣшенію нашей задачи.

Исключая изъ соотношенія (8) p и q помощью уравненій Codazzi-Mainardi

$$q_1\xi + p\eta_1 = 0, \quad \xi\eta_1 K = pq_1 - p_1 q,$$

гдѣ K кривизна поверхности, мы приведемъ это соотношеніе къ виду

$$p_1 r\sin\alpha\cos\alpha + q_1\left(\frac{r_1\xi}{\eta_1}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial u}\right) + \frac{\xi\eta_1 K}{p_1}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\xi}{\eta_1}\frac{q_1{}^2}{p_1}\frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0.$$

Въ силу соображеній, приведенныхъ выше, это соотношеніе должно удовлетворяться тождественно, независимо отъ значенія функцій p_1, q_1.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ уравненіямъ

$$r\sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad r_1\xi\cos\alpha\sin\alpha + \eta_1\frac{\partial\alpha}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0. \tag{15}$$

Исключая очевидныя рѣшенія $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$, т. е. случаи, когда наша конгруэнція представляетъ либо конгруэнцію нормалей къ S, либо конгруэнцію касательныхъ къ ней, мы найдемъ слѣдующія рѣшенія, выбравъ при этомъ соотвѣтственнымъ образомъ параметры u, v:

$$\xi = 1, \quad \alpha = \varphi(u), \quad \eta_1 = k\mathrm{cotang}\alpha = k\omega(u), \tag{16}$$

гдѣ φ и ω произвольныя функціи, а k постоянная величина.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ линейный элементъ поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = du^2 + k^2\omega^2(u)\,dv^2$$

т. е. поверхность S наложима на поверхность вращенія.

Если мы черезъ r_0 обозначимъ радіусъ параллели соотвѣтствующей поверхности вращенія, для которой $r_0 = \eta_1$, то на основаніи послѣдняго изъ соотношеній (16), мы видимъ, что уголъ α, составляемый лучомъ нашей конгруэнціи съ касательной къ меридіану, проходящему черезъ соотвѣтствующую точку паденія луча, связанъ съ радіусомъ параллели, проходящей черезъ ту же точку, соотношеніемъ

$$r_0\mathrm{tang}\alpha = k = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Такимъ образомъ находимъ слѣдующую теорему:

Черезъ каждую точку нѣкоторой поверхности вращенія проводимъ въ плоскостяхъ меридіановъ прямыя, составляющія съ соотвѣтственными касательными къ меридіанамъ углы α; послѣдніе углы опредѣляются изъ соотношенія (17), въ которомъ r_0 представляетъ радіусъ параллели, проходящей черезъ соотвѣтственную точку поверхности S. Предположимъ, что полученная такимъ образомъ конгруэнція D неизмѣнно связана съ поверхностью S. Если теперь будемъ деформировать какъ угодно поверхность S, то главныя линіи поверхностей S по отношенію къ конгруэнціямъ, получаемымъ изъ D, будутъ сопряженными линіями. Тѣмъ же *свойствомъ будутъ обладать конгруэнціи D', полученныя изъ конгруэнцій D путемъ отраженія отъ соотвѣтствующихъ поверхностей S.*

Справедливость послѣдняго утвержденія явствуетъ изъ того, что уголъ β, составленный отраженнымъ лучемъ съ соотвѣтственной касательной къ меридіану, равенъ $-\alpha$, а слѣдовательно и для него имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$r_0 \operatorname{tang} \beta = -k = \text{const}.$$

§ 8. Въ заключеніе этой главы рѣшимъ еще одну частную задачу, весьма важную для послѣдующаго изслѣдованія.

Положимъ, что нѣкоторая конгруэнція лучей D, падающихъ на нѣкоторую поверхность S и неизмѣнно съ нею связанныхъ, представляетъ систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ.

Какъ мы видѣли въ § 2, въ такомъ случаѣ отраженные лучи D' будутъ нормальны къ нѣкоторой поверхности Σ_1.

Изъ результатовъ, полученныхъ въ томъ же §-ѣ слѣдуетъ, что всѣ конгруэнціи, получаемыя изъ D и D' при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S, будутъ системами нормалей нѣкоторыхъ поверхностей.

Пусть для нѣкоторой формы поверхности S, поверхности Σ и Σ_1 связаны между собою такой зависимостью, что ассимптотическимъ линіямъ одной соотвѣтствуютъ ассимптотическія линіи другой.

Является вопросъ, когда подобное соотвѣтствіе между поверхностями Σ и Σ_1 сохранится при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S.

Прежде всего выведемъ дифференціальныя уравненія ассимптотическихъ линій поверхностей Σ и Σ_1, исходя изъ извѣстнаго свойства этихъ кривыхъ, заключающагося въ томъ, что онѣ ортогональны къ своимъ сферическимъ изображеніямъ.

Координаты соотвѣтственной точки поверхности Σ будутъ

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = 0, \quad z = \varrho \sin\alpha,$$

гдѣ на основаніи § 2 функціи ϱ и α удовлетворяются уравненіемъ

$$\frac{d\varrho}{du} + \xi \cos\alpha = 0, \quad \frac{\partial\,(\xi \cos\alpha)}{\partial v} = 0. \tag{18}$$

Координаты соотвѣтственной точки поверхности Σ_1 получимъ, измѣняя α на $-\alpha$.

Возьмемъ теперь нѣкоторую произвольную неподвижную точку O и въ ней помѣстимъ начало подвижной системы координатъ (T'), оси которой остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ системы (T)

Координаты сферическаго изображенія соотвѣтственной точки поверхности Σ по отношенію къ осямъ (T') будутъ

$$x_1 = \cos\alpha, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \sin\alpha.$$

Если приращенія (du, dv) соотвѣтствуютъ перемѣщенію по поверхности Σ вдоль ассимптотической линіи и если черезъ δx, δy, δz, δx_1, δy_1, δz_1 обозначимъ проэкціи на оси (T) или (T') перемѣщеній соотвѣтственной точки поверхности Σ и ея сферическаго изображенія, то по свойству ассимптотическихъ линій

$$\delta x \, \delta x_1 + \delta y \, \delta y_1 + \delta z \, \delta z_1 = 0. \tag{19}$$

Ясно, что послѣднее уравненіе и представитъ дифференціальное уравненіе искомыхъ ассимптотическихъ линій поверхности Σ.

Дифференціальное уравненіе тѣхъ же линій для поверхности Σ_1, получимъ изъ (19), замѣняя вездѣ α черезъ $-\alpha$.

Замѣчая, что

$$\delta x = \xi du + \cos\alpha d\varrho - \varrho \sin\alpha \, (d\alpha - q du - q_1 dv),$$

$$\delta y = \eta_1 dv + \varrho[(r du + r_1 dv)\cos\alpha - (p du + p_1 dv)\sin\alpha],$$

$$\delta z = \sin\alpha d\varrho + \varrho\cos\alpha \, (d\alpha - q du - q_1 dv)$$

и что

$$\delta x_1 = -\sin\alpha \, (d\alpha - q du - q_1 dv),$$

$$\delta y_1 = (r du + r_1 dv)\cos\alpha - (p du + p_1 dv)\sin\alpha,$$

$$\delta z_1 = \cos\alpha \, (d\alpha - q du - q_1 dv),$$

мы послѣ несложныхъ вычисленій приведемъ уравненіе (19) къ виду

$$(M \pm N)\, du^2 + (M_1 \pm N_1)\, dv^2 + (M_2 \pm N_2)\, du dv = 0,$$

гдѣ M, M_1, M_2 четныя, а N, N_1, N_2 нечетныя функціи отъ α, а именно

$$M = -\xi \sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \varrho \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 + \varrho q^2 + \varrho r^2 \cos^2\alpha + \varrho p^2 \sin^2\alpha,$$

$$N = \xi q \sin\alpha - 2\varrho q \frac{\partial \alpha}{\partial u} - 2\varrho r p \cos\alpha \sin\alpha,$$

$$M_1 = \eta_1 r_1 \cos\alpha + \varrho \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 + \varrho q_1{}^2 + \varrho r_1{}^2 \cos^2\alpha + \varrho p_1{}^2 \sin^2\alpha,$$

$$N_1 = -\eta_1 p_1 \sin\alpha - 2\varrho q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial v} - 2\varrho r_1 p_1 \cos\alpha \sin\alpha,$$

$$M_2 = -\xi\sin\alpha\frac{d\alpha}{dv} + 2\varrho\frac{d\alpha}{du}\frac{d\alpha}{dv} + 2\varrho q q_1 + \eta_1 r\cos\alpha + 2\varrho r r_1\cos^2\alpha + 2\varrho p p_1\sin^2\alpha,$$

$$N_2 = \xi q_1\sin\alpha - 2\varrho q_1\frac{d\alpha}{du} - 2\varrho q\frac{d\alpha}{dv} - \eta_1 p\sin\alpha - 2\varrho r p_1\cos\alpha\sin\alpha - 2\varrho r_1 p\cos\alpha\sin\alpha.$$

Нижнимъ знакамъ соотвѣтствуетъ уравненіе ассимптотическихъ кривыхъ поверхности Σ_1.

Ясно, что условія соотвѣтствія ассимптотическихъ линій на поверхностяхъ Σ и Σ_1 будутъ вида

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1} = \frac{M_2}{N_2}$$

и представляютъ два квадратныхъ уравненія относительно функціи ϱ.

Самихъ уравненій вслѣдствіе ихъ сложности мы выписывать не будемъ.

Исключая изъ этихъ уравненій помощью уравненій Codazzi-Mainardi функціи p и p_1, замѣчая, что въ силу разсужденій § 7 полученныя уравненія должны удовлетворяться независимо отъ значеній функцій q и q_1, мы прійдемъ къ слѣдующимъ условіямъ

$$\frac{d\alpha}{dv} = 0\,, \quad r = 0\,, \quad \xi r_1\cos\alpha\sin\alpha + \eta_1\frac{d\alpha}{du} = 0,$$

$$2\varrho^2\left[r_1\cos\alpha\left(\frac{d\alpha}{du}\right)^2 + \xi\eta_1 K\sin\alpha\frac{d\alpha}{du}\right] - \varrho\xi\sin\alpha\left(3r_1\cos\alpha\frac{d\alpha}{du} + \xi\eta_1 K\sin\alpha\right) -$$

$$-\xi\eta_1\sin\alpha\frac{d\alpha}{du} = 0\,; \tag{20}$$

здѣсь черезъ K обозначена Гауссовская кривизна поверхности S.

Къ этимъ уравненіямъ мы должны присоединить еще уравненія (18).

На основаніи перваго изъ условій (20), выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u, можемъ положить

$$\alpha = u.$$

Второе изъ этихъ условій, а именно $r = 0$, показываетъ, что ξ есть функція одного параметра u и что слѣдовательно линіи $v = \text{const}$ *геодезическія*.

Пользуясь третьимъ условіемъ, находимъ, что при соотвѣтственномъ выборѣ параметра v можемъ положить

$$\eta_1 = k\,\text{cotang}\,u,$$

гдѣ k постоянная.

Отсюда заключаемъ, что поверхности S наложимы на поверхности вращенія.

Послѣднее изъ условій (20) даетъ намъ для ϱ два значенія

$$\varrho_1 = \frac{\xi \sin u}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{\xi^2 \cos u}{\frac{d\xi}{du} + 3\xi \operatorname{cotang} u}. \tag{21}$$

Разсмотримъ оба эти случая отдѣльно.

Для опредѣленія функціи ξ можетъ служить первое изъ уравненій (18).

Въ первомъ случаѣ уравненіе это принимаетъ видъ

$$\frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{du} + 3\frac{\cos u}{\sin u} = 0,$$

откуда для ξ находимъ выраженіе

$$\xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

гдѣ a постоянная.

Итакъ въ этомъ случаѣ линейный элементъ поверхности S будетъ вида

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^6 u} du^2 + k^2 \operatorname{cotang}^2 u \, dv^2.$$

Какъ увидимъ впослѣдствіи, поверхность S наложима на *параболоидъ вращенія.*

Во второмъ случаѣ для опредѣленія ξ поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Опредѣляя изъ перваго изъ уравненій (18) $\cos u$ и вставляя его значеніе въ уравненіе (21), получимъ

$$\frac{d \log(\varrho\xi)}{du} = -3 \operatorname{cotang} u,$$

откуда

$$\varrho\xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная.

Подставляя полученное значеніе ξ въ первое изъ уравненій (18), мы приведемъ его къ виду

$$\varrho\frac{d\varrho}{du} + \frac{a\cos u}{\sin^3 u} = 0,$$

откуда легко найдемъ, что

$$\varrho^2 = \frac{a}{\sin^2 u} + m\,,$$

гдѣ m новая постоянная.

Зная теперь ϱ, мы найдемъ выраженіе для ξ, а именно

$$\xi = \frac{a}{\sin^2 u \sqrt{a + m \sin^2 u}}\,.$$

Такимъ образомъ линейный элементъ поверхности S будетъ

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^4 u\,(a + m \sin^2 u)}\,du^2 + k^2 \mathrm{cotang}^2 u\, dv^2.$$

Въ дальнѣйшемъ мы увидимъ, что соотвѣтственныя поверхности въ зависимости отъ значеній постоянныхъ m и a будутъ наложимы на пять различныхъ поверхностей вращенія, а именно: 1) при $m > 0$ и $a > 0$ поверхность S наложима на *двуполый гиперболоидъ вращенія;* 2) при $m > 0$ и $a < 0$ на *эллипсоидъ вращенія около большой оси;* 3) при $m > 0$ и $a > -m > 0$ — на *гиперболическій синусоидъ вращенія*, уравненіе котораго

$$x^2 + y^2 = (a + m) \sinh^2 \frac{z}{\sqrt{-m}}\,;$$

4) при $m < 0$ и $0 < a < -m$ на *укороченный или удлиненный катеноидъ*, уравненіе котораго

$$x^2 + y^2 = -(m + a) \cosh^2 \frac{z}{\sqrt{-m}}$$

и, наконецъ, 5) при $m < 0$ и $a = -m$ — на *логариѳмическую поверхность вращенія*, уравненіе которой

$$2z = \sqrt{-m} \log (x^2 + y^2)\,.$$

Эти поверхности вмѣстѣ съ параболоидомъ вращенія мы будемъ называть *основными поверхностями вращенія.*

Конгруэнціи падающихъ и отраженныхъ лучей, разсмотрѣнныя нами въ этомъ параграфѣ, мы назовемъ *присоединенными къ нимъ конгруэнціями.*

Резюмируя результаты, полученные нами въ этомъ параграфѣ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *если предположимъ, что при всевозможныхъ деформаціяхъ одной изъ основныхъ поверхностей вращенія S съ нею неизмѣнно связаны присоединенныя конгруэнціи падающихъ и отраженныхъ лучей D и D', то на поверхностяхъ Σ и Σ_1, ортогональныхъ соотвѣтственно къ лучамъ конгруэнцій D и D' ассимптотическія линіи соотвѣтствуютъ другъ другу.*

ГЛАВА II.

Фокальныя поверхности линейчатой конгруэнціи. Теорема Weingarten'a. Преобразованія поверхностей постоянной кривизны.

§ 1. Въ предыдущей главѣ мы опредѣлили фокальныя поверхности какъ геометрическое мѣсто реберъ возврата всѣхъ развертывающихся поверхностей конгруэнціи.

Въ настоящей главѣ мы познакомимся ближе съ нѣкоторыми свойствами этихъ фокальныхъ поверхностей.

Изъ самого ихъ опредѣленія слѣдуетъ, что всѣ лучи конгруэнціи касаются своихъ фокальныхъ поверхностей.

Примемъ одну изъ этихъ поверхностей за поверхность S предыдущей главы; согласно принятымъ тамъ условіямъ, лучи нашей конгруэнціи совпадутъ съ осями $x^{\text{овъ}}$ подвижной системы координатъ (T).

Найдемъ фокальныя точки нашей конгруэнціи и соотвѣтствующія ей главныя кривыя поверхности S.

Выберемъ опредѣленную точку O поверхности S; если теперь мы дадимъ параметрамъ u, v приращенія du, dv, соотвѣтствующія перемѣщенію точки O по одной изъ главныхъ кривыхъ, то перемѣщеніе соотвѣтствующей фокальной точки разсматриваемаго луча нашей конгруэнціи, по самому опредѣленію фокальныхъ точекъ, будетъ направлено вдоль луча т. е. вдоль оси $x^{\text{овъ}}$; другими словами, проэкціи ея перемѣщенія на оси $y^{\text{овъ}}$ и $z^{\text{овъ}}$ будутъ равны нулю.

Если (x, o, o) будутъ координаты соотвѣтственной фокальной точки, а δx, δy, δz проэкціи ея перемѣщеній на оси (T), то въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\delta y = \eta_1 dv + (r du + r_1 dv)\, x = 0, \quad \delta z = -(q du + q_1 dv)\, x = 0.$$

Отсюда находимъ два значенія для x:

$$x = 0, \quad x = \frac{q\eta_1}{rq_1 - r_1 q}; \tag{1}$$

что касается дифференціальныхъ уравненій двухъ соотвѣтствующихъ главныхъ кривыхъ, то они будутъ

$$dv = 0, \quad q du + q_1 dv = 0. \tag{2}$$

Первое рѣшеніе для x, даетъ точку O поверхности S, второе— точку O_1 второй фокальной поверхности, которую мы будемъ обозначать черезъ S_1.

Обѣ эти поверхности совпадутъ, когда q будетъ равно нулю т. е. когда линіи $v = \text{const}$ будутъ *ассимптотическими линіями*.

Этотъ случай мы оставимъ въ сторонѣ.

Замѣчая теперь, что уравненіе сопряженныхъ линій на поверхности S

$$q\xi du\delta u + p_1\eta_1 dv\delta v + p\eta_1 (du\delta v + dv\delta u) = 0$$

удовлетворится тождественно, если положимъ въ немъ

$$dv = 0, \quad q\delta u + q_1\delta v = 0,$$

мы приходимъ къ заключенію, что на *фокальныхъ поверхностяхъ главныя кривыя представляютъ сопряженныя линіи.*

Къ тому же результату мы могли бы прійти прямо, замѣтивъ, что уравненіе (8) предыдущей главы удовлетворяется при α равномъ нулю.

§ 2. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію *фокальныхъ плоскостей* нашей конгруэнціи.

Возьмемъ на оси $x^{\text{овъ}}$ нѣкоторую точку (x, o, o); касательная плоскость въ этой точкѣ къ линейчатой поверхности, которую опишетъ ось x при измѣненіи параметровъ (u, v) на величины du, dv, соотвѣтствующія перемѣщенію начала координатъ вдоль опредѣленной кривой, будетъ

$$z = \operatorname{tang}\theta y,$$

гдѣ $\operatorname{tang}\theta$ опредѣляется изъ условія

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-x(qdu + q_1 dv)}{\eta_1 dv + x(rdu + r_1 dv)}.$$

Полагая, что начало координатъ перемѣстилось вдоль одной изъ главныхъ кривыхъ (2) или, что то же, что ось x описала развертывающуюся поверхность, мы получимъ, что при $qdu + q_1 dv = 0$ и $dv = 0$ значенія $\operatorname{tang}\theta$ будутъ соотвѣтственно

$$\operatorname{tang}\theta_1 = 0, \quad \operatorname{tang}\theta_2 = -\frac{q}{r},$$

а слѣдовательно уравненія соотвѣственныхъ фокальныхъ плоскостей будутъ

$$z = 0, \quad qy + rz = 0. \tag{3}$$

Отсюда видимъ, что первая фокальная плоскость касается поверхности S.

Обозначая черезъ δx, δy, δz проэкціи перемѣщеній второй фокальной точки, легко найдемъ, что для всевозможныхъ значеній du, dv имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$q\delta y + r\delta z = 0$$

т. е. что вторая фокальная плоскость касается второй фокальной поверхности.

Такимъ образомъ фокальныя поверхности мы можемъ разсматривать какъ обертки фокальныхъ плоскостей.

Положимъ теперь, что наша конгруэнція представляетъ конгруэнцію нормалей къ нѣкоторой поверхности Σ т. е., что на каждомъ лучѣ ея существуетъ такая точка (x, o, o), перемѣщенія которой ортогональны къ соотвѣтственному лучу при какихъ угодно безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ u, v.

Условіе, что проэкціи перемѣщеній этой точки на ось x-овъ равны нулю, будетъ

$$dx + \xi du = 0, \tag{4}$$

откуда находимъ, что

$$\frac{d\xi}{dv} = -\eta_1 r = 0; \tag{5}$$

послѣднее условіе показываетъ, что кривыя $v = \text{const}$ *геодезическія кривыя* поверхности S, которая представляетъ, очевидно, одну изъ полъ эволюты поверхности Σ

Итакъ *конгруэнціи нормалей представляютъ касательныя къ геодезическимъ линіямъ своихъ фокальныхъ поверхностей.*

Обращаясь къ уравненіямъ фокальныхъ плоскостей и исключая случай $q = 0$, находимъ, что *для конгруэнціи нормалей* $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ *т. е. фокальныя плоскости взаимно перпендикулярны.*

Координаты соотвѣтственной точки второй фокальной поверхности будутъ въ этомъ случаѣ

$$x = -\frac{\eta_1}{r_1}, \quad y = 0, \quad z = 0. \tag{6}$$

Обращаясь къ исключенному нами случаю, когда $q = 0$, мы видимъ, что тогда кривыя $v = \text{const}$ обратятся въ прямыя, такъ какъ онѣ должны быть одновременно и геодезическими и ассимптотическими линіями поверхности S.

Послѣдняя поверхность будетъ линейчатой; ея прямолинейныя образующія $v = \text{const}$ будутъ представлять лучи нашей конгруэнціи.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ линейчатая конгруэнція дегенерируетъ въ линейчатую поверхность.

Легко показать, что поверхность Σ, нормальная къ лучамъ конгруэнціи обратится въ кривую линію.

Въ самомъ дѣлѣ, проэкціи перемѣщеній ея соотвѣтственной точки (x, o, o) будутъ

$$\delta x = 0, \quad \delta y = (\eta_1 + r_1 x)\, dv, \quad \delta z = -q_1 x dv,$$

откуда видимъ, что при $v = \text{const}$ имѣемъ $\delta x = \delta y = \delta z = 0$.

Изъ послѣдняго обстоятельства и слѣдуетъ, что Σ обратится въ кривую линію.

Этотъ случай мы совершенно исключаемъ изъ нашего изслѣдованія.

§ 3. Какъ извѣстно, Weingarten первый обратилъ вниманіе на весьма интересный классъ поверхностей, характеризуемыхъ тѣмъ, что между ихъ радіусами кривизны въ каждой точкѣ существуетъ нѣкоторая зависимость съ постоянными коэффиціентами [1]).

Поверхности эти обыкновенно называютъ поверхностями W.

Если черезъ R_1 и R_2 обозначимъ радіусы кривизны какой-либо поверхности, то условіе, что она принадлежитъ къ классу поверхностей W, аналитически выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial R_2}{\partial u} = 0. \tag{7}$$

Положимъ теперь, что разсмотрѣнная нами въ предыдущихъ параграфахъ конгруэнція представляетъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности W.

Посмотримъ, какимъ условіямъ будетъ подчиняться при этомъ фокальная поверхность S.

Въ силу условія $\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$ мы можемъ всегда положить функцію ξ равной единицѣ.

Обозначимъ черезъ x_1 абсциссу соотвѣтственной точки нашей поверхности W; она опредѣлится изъ уравненія (4) предыдущаго параграфа, а именно:

$$x_1 = -(u + c),$$

гдѣ c произвольная постоянная.

---

[1]) Weingarten. Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist (Journal de Crelle t. LXII).

Не нарушая общности, мы можемъ положить $c=0$, такъ какъ различнымъ значеніямъ c будутъ соотвѣтствовать параллельныя между собою поверхности W.

Если по предыдущему черезъ R_1 и R_2 обозначимъ радіусы кривизны разсматриваемой поверхности W, а черезъ ϱ_1 и ϱ_2 абсциссы фокальныхъ точекъ луча, то на основаніи (6) будемъ имѣть

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = -\frac{\eta_1}{r_1} = -\frac{\eta_1}{\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u}},$$

а слѣдовательно для R_1 и R_2 найдемъ слѣдующія выраженія

$$R_1 = x_1 - \varrho_1 = -u, \quad R_2 = x_1 - \varrho_2 = -u + \frac{\eta_1}{\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u}}.$$

При этихъ значеніяхъ R_1 и R_2 условіе (7) приметъ видъ:

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} = 0,$$

или слѣдовательно

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \eta_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ для η_1 слѣдующее выраженіе

$$\eta_1 = UV,$$

гдѣ U функція одного параметра u, а V — одного параметра v.

Выбравши приличнымъ образомъ параметръ v, мы можемъ положить функцію V равной единицѣ.

Итакъ линейный элементъ поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2 \tag{8}$$

т. е. поверхность S наложима на поверхность вращенія. Такимъ образомъ мы пришли къ *теоремѣ Weingarten'a*.

Теорема Weingarten'a. Эволюты поверхностей W наложимы на поверхности вращенія.

Нетрудно доказать и обратную теорему, а именно: *если поверхность S наложима на поверхность вращенія, то касательныя къ кривымъ, являющимся изгибаніями меридіановъ поверхности вращенія, представляютъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности W; это обстоятельство имѣетъ мѣсто при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S.*

Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что линейный элементъ поверхности S приведенъ къ формѣ (8), мы непосредственно убѣждаемся, что касательныя къ кривымъ $v = \text{const}$ представляютъ систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ.

Радіусы кривизны этой поверхности дадутся выраженіями

$$R_1 = -u, \quad R_2 = -u + \frac{U}{U'}. \tag{9}$$

Исключая изъ этихъ выраженій параметръ u, найдемъ опредѣленную зависимость съ постоянными коэффиціентъ между R_1 и R_2.

Такъ какъ эта зависимость вполнѣ опредѣляется видомъ функціи U, представляющей коэффиціентъ линейнаго элемента поверхности S, то она останется неизмѣнной при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S.

§ 4. Итакъ мы видимъ, что зная нѣкоторую поверхность съ линейнымъ элементомъ (8), мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ соотвѣтственную поверхность W.

Наоборотъ, если будетъ имѣть нѣкоторую опредѣленную поверхность W, то тѣмъ самымъ опредѣлимъ поверхность вращенія, на которую наложима эволюта данной поверхности W.

Въ самомъ дѣлѣ, если радіусы кривизны R_1 и R_2 поверхности W связаны соотношеніемъ

$$f(R_1, R_2) = 0,$$

то исключая R_1, R_2 изъ этого соотношенія и соотношеній (9), мы найдемъ дифференціальное уравненіе перваго порядка для опредѣленія U.

Разберемъ здѣсь два простыхъ примѣра.

Положимъ, что данная поверхность W поверхность minima, т. е., что между ея радіусами кривизны имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$R_1 + R_2 = 0.$$

Для опредѣленія U, получимъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{2u},$$

откуда $U = k\sqrt{u}$, гдѣ k постоянная.

Линейный элементъ поверхности S будетъ

$$ds^2 = du^2 + k^2 u dv^2,$$

а это, какъ извѣстно, линейный элементъ поверхности, наложимой на *эволюту катеноида*.

Положимъ теперь, что поверхность W —поверхность съ постоянной кривизной $\frac{1}{m}$, тогда

$$R_1 R_2 = m.$$

Для опредѣленія функціи U имѣемъ уравненіе

$$\frac{U'}{U} = \frac{u}{u^2 - m},$$

откуда

$$U = \sqrt{u^2 - m}.$$

Линейный элементъ поверхности S будетъ вида

$$ds^2 = du^2 + (u^2 - m)\,dv^2.$$

Если $m < 0$, т. е. если соотвѣтственная поверхность W имѣетъ отрицательную кривизну, то, какъ это легко видѣть, поверхность S наложима на катеноидъ.

Въ случаѣ $m > 0$ она наложима на поверхность вращенія

$$z = \int \frac{(1 - k^2) r^2 + mk^4}{\sqrt{(k^2 r^2 - mk^4)\left[(1 - k^2) r^2 + mk^4\right]}}\,dr,$$

гдѣ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 5. Перейдемъ ко второй фокальной поверхности S_1.

Нетрудно показать, что и она, какъ это впрочемъ ясно и à priori, наложима на поверхность вращенія.

Координаты ея соотвѣтственной точки будутъ

$$x = -\frac{\eta_1}{\frac{d\eta_1}{du}}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

при чемъ здѣсь $\eta_1 = U$.

Проэкціи ея перемѣщеній на оси (T), очевидно, будутъ

$$\delta x = -\frac{\eta_1 \frac{d^2\eta_1}{du^2}}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2}\,du, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \frac{\eta_1}{\frac{d\eta_1}{du}}(q\,du + q_1\,dv),$$

а слѣдовательно ея линейный элементъ имѣетъ форму

$$ds_1^2 = \frac{\eta_1^2 \left(\frac{d^2\eta_1}{du^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^4}\,du^2 + \frac{\eta_1^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2}(q\,du + q_1\,dv)^2.$$

Легко теперь показать, что въ данномъ случаѣ выраженіе $\eta_1(qdu + q_1 dv)$ представляетъ полный дифференціалъ нѣкоторой функціи w; въ самомъ дѣлѣ условіе полнаго дифференціала

$$\frac{\partial(\eta_1 q)}{\partial v} = \frac{\partial(\eta_1 q_1)}{\partial u}$$

обращается въ слѣдующее

$$q + \eta_1 p = 0,$$

а это одно изъ уравненій Codazzi-Mainardi.

Такимъ образомъ линейный элементъ поверхности S_1 можетъ быть представленъ въ видѣ

$$ds_1^2 = \frac{\eta_1^2 \left(\frac{d^2\eta_1}{du^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^4} du^2 + \frac{dw^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2}. \tag{10}$$

Такъ какъ здѣсь η_1 функція только одного параметра u, то отсюда слѣдуетъ, что поверхность S_1 наложима на поверхность вращенія.

Двѣ поверхности S и S_1, наложимыя на поверхности вращенія и представляющія двѣ полы эволюты нѣкоторой поверхности W, носятъ названіе *дополнительныхъ* другъ къ другу поверхностей.

§ 6. Сдѣлаемъ теперь небольшое отступленіе и выведемъ формулы, которыми намъ прійдется часто пользоваться.

Пусть имѣемъ нѣкоторую подвижную систему прямоугольныхъ координатъ (T), положеніе которой зависитъ отъ двухъ параметровъ u, v.

Проэкціи перемѣщенія начала этихъ координатъ на ихъ оси въ предположеніи, что измѣняется одинъ параметръ u, обозначимъ черезъ ξ, η, ζ; проэкціи на тѣ же оси соотвѣтственнаго вращенія обозначимъ черезъ p, q, r. Тѣ же величины, относящіяся къ измѣняемости одного параметра v, обозначимъ черезъ ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1.

Выберемъ опредѣленное положеніе осей (T) и затѣмъ дадимъ параметрамъ u, v приращенія du, dv.

Оси (T) при этомъ примутъ новое положеніе, которое мы обозначимъ черезъ (T').

Найдемъ теперь зависимость между координатами (x, y, z) какой-либо точки по отношенію къ (T) и ея координатами (x', y', z') по отношенію къ (T').

Возьмемъ произвольную неподвижную точку пространства M; условіе ея неподвижности выразится тѣмъ, что проэкціи ея перемѣщеній δx, δy, δz при всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ u, v будутъ равны нулю т. е.

$$\delta x = dx + \xi du + \xi_1 dv + (q du + q_1 dv) z - (r du + r_1 dv) y = 0,$$

$$\delta y = dy + \eta du + \eta_1 dv + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z = 0,$$

$$\delta z = dz + \zeta du + \zeta_1 dv + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x = 0.$$

Здѣсь dx, dy, dz проэкціи перемѣщеній нашей точки по отношенію къ осямъ координатъ т. е. до безконечно-малыхъ высшихъ порядковъ они представляютъ величины $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$.

Отсюда мы и получаемъ искомыя формулы преобразованія:

$$\begin{aligned} x' &= x - (\xi du + \xi_1 dv) - (q du + q_1 dv) z + (r du + r_1 dv) y, \\ y' &= y - (\eta du + \eta_1 dv) - (r du + r_1 dv) x + (p du + p_1 dv) z, \qquad (11) \\ z' &= z - (\zeta du + \zeta_1 dv) - (p du + p_1 dv) y + (q du + q_1 dv) x. \end{aligned}$$

§ 7. Послѣ этого отступленія перейдемъ къ выводу дифференціальнаго уравненія сопряженныхъ кривыхъ на поверхности S_1, дополнительной къ поверхности S съ линейнымъ элементомъ (8).

Возьмемъ на поверхности S нѣкоторую точку O; соотвѣтственная точка дополнительной поверхности S_1 пусть будетъ O_1.

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1 получимъ, полагая $r = 0$ во второмъ изъ уравненій (3); оно будетъ,

$$y = 0.$$

Перейдемъ теперь по нѣкоторой кривой изъ точки O въ точку O', этому переходу будутъ соотвѣтствовать приращенія параметровъ du, dv; точку, соотвѣтствующую на поверхности S_1, точкѣ O', обозначимъ черезъ O_1'.

Оси (T) примутъ положеніе (T'); по отношенію къ этимъ послѣднимъ осямъ уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1', очевидно, будетъ

$$y' = 0,$$

а слѣдовательно на основаніи формулъ предыдущаго §-а уравненіе ея по отношенію къ осямъ (T) имѣетъ видъ

$$y - r_1 dv x + (p du + p_1 dv) z - \eta_1 dv = 0.$$

Предѣльное положеніе прямой пересѣченія этой плоскости съ плоскостью $y = 0$ представляетъ, какъ извѣстно, касательную къ кривой, сопряженной съ кривой $O_1 O_1'$.

Уравненія этой прямой таковы:

$$y = 0, \quad r_1 dvx - (pdu + p_1 dv) z + \eta_1 dv = 0.$$

Обозначимъ теперь черезъ $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ проэкціи перемѣщенія точки O_1 по поверхности S_1 въ направленіи, сопряженномъ съ $O_1 O_1'$; соотвѣтственныя приращенія параметровъ обозначимъ черезъ δu, δv; тогда дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности S_1 будетъ

$$r_1 dv \delta_1 x - (pdu + p_1 dv) \delta_1 z = 0$$

или слѣдовательно

$$q\xi du \delta u - p_1 \eta_1 dv \delta v - p\eta_1 (du \delta v + dv \delta u) = 0, \tag{12}$$

а это уравненіе сопряженныхъ кривыхъ поверхности S.

Итакъ: *дополнительныя поверхности связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ одной соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ другой.*

Иначе эту теорему можно выразить такимъ образомъ: *на двухъ дополнительныхъ поверхностяхъ ассимптотическія линіи соотвѣтствуютъ другъ другу.*

Послѣднее слѣдуетъ изъ того, что мы получимъ дифференціальное уравненіе ассимптотическихъ линій на поверхности S_1, полагая въ уравненіи (12) $du = \delta u$, $dv = \delta v$; полученное такимъ образомъ уравненіе тождественно съ уравненіемъ ассимптотическихъ кривыхъ поверхности S.

§ 8. Разсмотримъ теперь одну частную задачу, играющую весьма важную роль въ теоріи поверхностей съ постоянной Гауссовской кривизной.

Предположимъ, что поверхность S, представляющая одну изъ фокальныхъ поверхностей нѣкоторой конгруэнціи нормалей, дѣйствительна.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ разстояніе между соотвѣтственными точками поверхности S и другой фокальной поверхности S_1 той же конгруэнціи будетъ величиной постоянной m.

Величинѣ m будемъ приписывать какъ дѣйствительныя, такъ и комплексныя значенія, т. е. будемъ предполагать, что поверхность S_1 дѣйствительная или мнимая.

Такъ какъ на основаніи (6) координаты соотвѣтственной точки поверхности S_1 будутъ

$$x = -\frac{\eta_1}{r_1}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

то, полагая $\xi = 1$, для опредѣленія η_1 въ данномъ случаѣ имѣемъ дифференціальное уравненіе

$$m\frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \eta_1 = 0,$$

откуда, выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ v, найдемъ, что

$$\eta_1 = e^{-\frac{u}{m}} \tag{13}$$

Итакъ линейный элементъ поверхности S выражается слѣдующимъ образомъ:

$$ds^2 = du^2 + e^{-\frac{2u}{m}} dv^2,$$

откуда заключаемъ, что поверхность S имѣетъ постоянную Гауссовскую кривизну $-\frac{1}{m^2}$.

Такъ какъ мы предполагаемъ, что S поверхность дѣйствительная, то число $\frac{1}{m^2}$ должно быть числомъ дѣйствительнымъ, а это возможно лишь тогда, когда m будетъ дѣйствительнымъ либо чисто мнимымъ.

Въ первомъ случаѣ поверхность S будетъ имѣть отрицательную, а во второмъ—положительную кривизну.

Такимъ образомъ видимъ, что только въ случаѣ, когда кривизна поверхности S отрицательна, вторая фокальная поверхность S_1 будетъ дѣйствительной.

Такъ какъ поверхность S наложима на поверхность вращенія и такъ какъ кривыя $v = \text{const}$ представляютъ изгибанія меридіановъ, то по теоремѣ Weingarten'а, разсматриваемая нами конгруэнція нормалей представляетъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности W.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что поверхности S и S_1 *дополнительныя.*

Поэтому линейный элементъ поверхности S_1 получимъ изъ (10), полагая $\eta_1 = e^{-\frac{u}{m}}$; онъ будетъ

$$ds_1^2 = du^2 + m^2 e^{\frac{2u}{m}} dv^2,$$

а это тоже линейный элементъ поверхности съ постоянной кривизной $-\frac{1}{m^2}$.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *если конгруэнція нормалей такова, что разстояніе между фокальными точками каждаго луча равно постоянной m, то 1) лучи конгруэнціи нормальны къ нѣкоторой поверхности W и 2) Гауссовская кривизна ея фокальныхъ поверхностей равна постоянной $-\frac{1}{m^2}$.*

Переходъ отъ поверхности постоянной кривизны къ ея дополнительной въ случаѣ, разсмотрѣнномъ нами, носитъ названіе *преобразованія Bianchi или дополнительнаго преобразованія.*

Не останавливаясь на этомъ преобразованіи, перейдемъ къ болѣе общему преобразованію поверхностей, указанному впервые Bäcklund'омъ для поверхностей постоянной отрицательной кривизны [1]).

Къ этому преобразованію приводитъ насъ рѣшеніе задачи, являющейся обобщеніемъ задачи, рѣшенной нами въ настоящемъ параграфѣ.

§ 9. Задачу предыдущаго параграфа мы можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ: изслѣдовать свойства фокальныхъ поверхностей нѣкоторой конгруэнціи при условіи, что 1) разстояніе между соотвѣтственными точками обѣихъ фокальныхъ поверхностей величина постоянная m и 2) что уголъ между фокальными плоскостями равенъ $\frac{\pi}{2}$.

Обобщеніе, которое мы сдѣлаемъ, относится ко второму изъ указанныхъ условій, а именно: мы предположимъ, что уголъ между фокальными плоскостями равенъ нѣкоторой постоянной $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

По предыдущему постояннымъ m и σ будемъ давать какъ дѣйствительныя, такъ и комплексныя значенія.

Замѣчая, что на основаніи (1) разстояніе между соотвѣтственными точками поверхностей S и S_1 равно $\frac{q\eta_1}{rq_1 - qr_1}$ и что уравненія фокальныхъ плоскостей разсматриваемой конгруэнціи

$$z = 0, \quad qy + rz = 0,$$

мы выразимъ аналитически наши условія слѣдующимъ образомъ

$$q = -r\operatorname{cotang}\sigma, \quad \eta_1 q = m(rq_1 - qr_1). \tag{14}$$

Рѣшая эти уравненія относительно q и q_1, получимъ

$$q = -r\operatorname{cotang}\sigma, \quad q_1 = -\operatorname{cotang}\sigma\left(r_1 + \frac{\eta_1}{m}\right),$$

откуда, пользуясь формулами Codazzi-Mainardi, легко найдемъ, что

$$\frac{pq_1 - p_1 q}{\sin^2\sigma} = -\frac{\xi\eta_1\operatorname{cotang}^2\sigma}{m^2}.$$

---

[1]) Bäcklund. Om ytor med konstant negativ kröking (Lunds Univ Arsskrift, 19. Bd. 1883).

Такъ какъ выраженіе $\frac{pq_1 - p_1 q}{\xi\eta_1}$ представляетъ Гауссовскую кривизну K поверхности S, то послѣднее соотношеніе можетъ быть написано въ слѣдующей формѣ

$$K = -\frac{\cos^2\sigma}{m^2} = \text{const}. \tag{15}$$

Итакъ и въ этомъ случаѣ кривизна фокальной поверхности S *постоянна*.

Найдемъ Гауссовскую кривизну второй фокальной поверхности S_1. Для этого поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе нормали къ поверхности S_1 въ соотвѣтственной точкѣ, какъ легко видѣть, будетъ

$$x = m, \quad y\sin\sigma + z\cos\sigma = 0.$$

Координаты центровъ кривизны поверхности S_1 будутъ

$$x = m, \quad y = \varrho\cos\sigma, \quad z = -\varrho\sin\sigma,$$

гдѣ ϱ опредѣлится изъ условія, что перемѣщеніе соотвѣтствующаго центра кривизны будетъ направлено вдоль нормали, когда мы дадимъ параметрамъ u, v приращенія du, dv, соотвѣтствующія какой-либо линіи кривизны поверхности S_1.

Такимъ образомъ для подобныхъ приращеній имѣемъ:

$$\delta x = 0, \quad \sin\sigma\delta y + \cos\sigma\delta z = 0. \tag{16}$$

Исключая изъ этихъ соотношеній отношеніе $\frac{du}{dv}$, найдемъ квадратное уравненіе относительно ϱ, корнями котораго будутъ значенія радіусовъ кривизны поверхности S_1 въ соотвѣтственной точкѣ.

Уравненіе это будетъ

$$\frac{p\eta_1\cos\sigma}{m}\varrho^2 - (p_1\xi - r\eta_1\operatorname{cotang}\sigma)\varrho - \frac{mp\eta_1}{\cos\sigma} = 0.$$

Такъ какъ Гауссовская кривизна поверхности S_1 равна $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$, гдѣ ϱ_1 и ϱ_2 корни послѣдняго уравненія, то для нея найдемъ выраженіе

$$K_1 = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{\cos^2\sigma}{m^2} = K;$$

отсюда видимъ, что кривизна поверхности S_1 тоже постоянна и равна кривизнѣ поверхности S.

Итакъ: *если конгруэнція лучей такова, что разстояніе между фокальными точками каждаго луча и уголъ между фокальными плоскостя-*

ми постоянны, то ея фокальныя поверхности имѣютъ одну и ту же постоянную кривизну.

Изъ выраженія (15) видимъ, что постоянныя m и σ могутъ быть одновременно дѣйствительными лишь въ томъ случаѣ, когда кривизна фокальныхъ поверхностей отрицательна.

Переходъ отъ поверхности постоянной *отрицательной* кривизны S къ поверхности S_1, составляющей съ нею другую фокальную поверхность разсмотрѣнной нами конгруэнціи, носитъ названіе *преобразованія Bäcklund'а*.

Сами линейчатыя конгруэнціи въ этомъ случаѣ называются *псевдосферическими конгруэнціями*.

§ 10. Исключая ϱ изъ уравненій (16), мы, очевидно, получимъ дифференціальное уравненіе линій кривизны поверхности S_1.

Уравненіе это въ силу соотношеній (14) будетъ:

$$\begin{vmatrix} \xi du, & \dfrac{\eta_1 \cos\sigma}{m} dv \\ \dfrac{m}{\sin\sigma}(rdu + r_1 dv) + \dfrac{\eta_1 dv}{\sin\sigma}, & pdu + p_1 dv \end{vmatrix} = 0$$

или, наконецъ,

$$p\xi du^2 + (p_1\xi + q\eta_1)\, dudv + q_1\eta_1 dv^2 = 0,$$

а это дифференціальное уравненіе линій кривизны на поверхности S.

Итакъ: *если разстояніе между фокальными точками лучей нѣкоторой линейчатой конгруэнціи и уголъ между ея фокальными плоскостями постоянны, то на фокальныхъ поверхностяхъ конгруэнціи линіи кривизны соотвѣтствуютъ другъ другу.*

§ 11. Въ § 7 мы доказали болѣе общую теорему, относящуюся къ дополнительнымъ поверхностямъ, а именно, что каждой системѣ сопряженныхъ кривыхъ одной поверхности соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ другой.

Посмотримъ, не имѣетъ ли мѣста эта теорема для разсматриваемыхъ нами теперь конгруэнцій.

При выводѣ дифференціальнаго уравненія сопряженныхъ кривыхъ поверхности S_1 будемъ пользоваться тѣмъ же методомъ, который мы употребили въ § 7.

Возьмемъ опять двѣ соотвѣтственныя точки поверхностей S и S_1; первую изъ нихъ обозначимъ черезъ O, вторую черезъ O_1.

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1 будетъ

$$z = \operatorname{cotang}\sigma y.$$

Давая параметрамъ u, v приращенія du, dv мы передвинимся изъ точки O въ точку O', при чемъ точка O_1 перейдетъ по поверхности S_1 въ точку O_1'.

Оси (T) примутъ при этомъ положеніе (T'); уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O'_1 по отношенію къ послѣднимъ осямъ будетъ

$$z' = \operatorname{cotang}\sigma \cdot y'.$$

То же уравненіе по отношенію къ (T) имѣетъ видъ [1])

$$z-(pdu+p_1dv)y+(qdu+q_1dv)x = \operatorname{cotang}\sigma[y-(rdu+r_1dv)x+(pdu+pdv_1)z].$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ (T) и параллельной касательной къ кривой, сопряженной съ кривой $O_1\ O_1'$, будетъ

$$[(qdu+q_1dv)+\operatorname{cotang}\sigma(rdu+r_1dv)]x-(pdu+p_1dv)y-\operatorname{cotang}\sigma(pdu+p_1dv)z=0,$$

$$z = \operatorname{cotang}\sigma \cdot y;$$

поэтому, если черезъ δ_1x, δ_1y, δ_1z обозначимъ проэкціи перемѣщеній по поверхности S_1 въ направленіи, сопряженномъ съ направленіемъ O_1O_1', то искомое дифференціальное уравненіе сопряженныхъ линій получимъ, подставляя въ первое уравненіе δ_1x, δ_1y, δ_1z вмѣсто x, y, z.

Обозначая соотвѣтственныя приращенія параметровъ черезъ δu, δv, замѣчая, что

$$\delta_1x = \xi\delta u, \quad \delta_1y = \eta_1\delta v + (r\delta u + r_1\delta v)\,m, \quad \delta_1z = -(q\delta u + q_1\delta v)\,m$$

и воспользовавшись уравненіями Codazzi-Mainardi и соотношеніями (14), мы приведемъ это уравненіе къ виду

$$pqdu\delta u + p_1q_1dv\delta v + pq_1\,(du\delta v + dv\delta u) = 0.$$

Послѣднее уравненіе представляетъ дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ поверхности S.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если фокальныя разстоянія лучей нѣкоторой конгруэнціи и уголъ между ея фокальными плоскостями постоянны, то каждой системѣ сопряженныхъ кривыхъ одной фокальной поверхности соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ другой.

Иначе ту же теорему можно формулировать и такъ: *на фокальныхъ поверхностяхъ разсматриваемыхъ конгруэнцій ассимптотическія линіи соотвѣтствуютъ другъ другу.*

---

[1]) См. § 6 этой главы.

§ 12. Перейдемъ теперь къ болѣе подробному разсмотрѣнію Bäcklund'овскаго преобразованія.

Для этой цѣли воспользуемся нѣсколько иной системой координатъ, а именно на поверхности S, кривизну которой, не нарушая общности, положимъ равной -1, за координатныя кривыя примемъ линіи кривизны $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Координаты (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы оси x и y касались соотвѣтственно кривыхъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$

Какъ извѣстно [1]), въ этомъ случаѣ мы можемъ положить

$$\xi = \cos\omega, \quad \eta_1 = \sin\omega, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = \cos\omega, \quad q = \sin\omega$$

$$r = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha};$$

здѣсь функція ω удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{17}$$

Послѣднее условіе представляетъ ничто иное, какъ условіе, что кривизна поверхности S равна -1.

Разсмотримъ конгруэнцію касательныхъ къ поверхности S, составляющихъ съ осью $x^{\text{-овъ}}$ уголъ θ; уравненіе такой касательной по отношенію къ (T) будетъ

$$z = 0, \quad x\sin\theta - y\cos\theta = 0. \tag{18}$$

Уголъ θ постараемся подобрать такимъ образомъ, чтобы выбранная нами конгруэнція прямыхъ (18) удовлетворяла двумъ условіямъ: 1) разстояніе между ея фокальными точками m должно быть постоянно и 2) уголъ $\frac{\pi}{2} - \sigma$ между ея фокальными плоскостями тоже долженъ быть постояннымъ.

Очевидно, одной изъ фокальныхъ поверхностей нашей конгруэнціи будетъ поверхность S, что же касается координатъ соотвѣтственной точки O_1 другой фокальной поверхности S_1, то онѣ будутъ

$$x = m\cos\theta, \quad y = m\sin\theta, \quad z = 0.$$

Дадимъ параметрамъ α, β приращенія $d\alpha$, $d\beta$, соотвѣтствующія перемѣщенію по поверхности S вдоль одной изъ главныхъ кривыхъ ея по отношенію къ разсматриваемой конгруэнціи.

---

[1]) Darboux. Théorie des surfaces t. III pp. 377—378.

Выберемъ ту изъ главныхъ кривыхъ, которой соотвѣтствуетъ перемѣщеніе точки O_1 вдоль прямой (18); если черезъ δx, δy, δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній точки O_1, то разсматриваемое перемѣщеніе будетъ характеризоваться двумя соотношеніями

$$\sin\theta\delta x - \cos\theta\delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

которыя должны быть совмѣстны.

Замѣчая, что

$$\delta x = \cos\omega d\alpha - m\sin\theta d\theta - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\beta\right)m\sin\theta,$$

$$\delta y = \sin\omega d\beta + m\cos\theta d\theta + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\beta\right)m\cos\theta, \tag{19}$$

$$\delta z = m(\cos\omega\,\sin\theta d\beta - \sin\omega\,\cos\theta d\alpha),$$

мы приведемъ эти соотношенія къ виду

$$\left[m\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right) - \sin\theta\cos\omega\right]d\alpha + \left[m\left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right) + \cos\theta\sin\omega\right]d\beta = 0,$$

$$\sin\omega\,\cos\theta d\alpha - \cos\omega\,\sin\theta\,d\beta = 0.$$

Условіемъ ихъ совмѣстности будетъ, очевидно, уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка относительно функціи θ:

$$\left[m\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right) - \cos\omega\sin\theta\right]\cos\omega\,\sin\theta +$$

$$+\left[m\left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right) + \sin\omega\cos\theta\right]\sin\omega\cos\theta = 0. \tag{20}$$

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Уравненіе всякой плоскости, проходящей черезъ прямую (18), будетъ вида

$$\sin\theta x - \cos\theta y + kz = 0,$$

гдѣ k произвольный множитель.

Опредѣлимъ k такимъ образомъ, чтобы сотвѣтственная плоскость представляла фокальную плоскость нашей конгруэнціи.

На прямой (18) возьмемъ произвольную точку P съ координатами

$$x = \varrho\cos\theta, \quad y = \varrho\sin\theta, \quad z = 0.$$

Дадимъ параметрамъ (α, β) приращенія $d\alpha$, $d\beta$, тогда прямая (18) опишетъ нѣкоторую линейчатую поверхность; точка P при этомъ, очевидно, перемѣстится въ касательной плоскости къ этой поверхности, проведенной въ точкѣ P.

Поэтому для опредѣленія множителя k, соотвѣтствующаго послѣдней плоскости, имѣемъ соотношеніе

$$\sin\theta\,\delta x - \cos\theta\,\delta y + k\,\delta z = 0,$$

откуда, подставляя вмѣсто δx, δy, δz ихъ значенія, получимъ

$$k = \frac{\varrho\left(d\theta + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) - \sin\theta\cos\omega\,d\alpha + \cos\theta\sin\omega\,d\beta}{\varrho\,(\cos\omega\sin\theta\,d\beta - \sin\omega\cos\theta\,d\alpha)}.$$

Предположимъ теперь, что приращенія $d\alpha$, $d\beta$ соотвѣтствуютъ передвиженію начала координатъ (T) вдоль главной кривой т. е., другими словами, положимъ, что при этомъ измѣненіи параметровъ прямая (18) описываетъ развертывающуюся поверхность.

Какъ извѣстно, касательная плоскость къ развертывающейся поверхности будетъ одна и та же вдоль всей образующей; слѣдовательно въ этомъ случаѣ коэффиціентъ k не долженъ зависѣть отъ значенія ϱ.

Отсюда для фокальной плоскости имѣемъ слѣдующія условія

$$d\theta + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta - k\,(\cos\omega\sin\theta\,d\beta - \sin\omega\cos\theta\,d\alpha) = 0,$$

$$\sin\theta\cos\omega\,d\alpha - \cos\theta\sin\omega\,d\beta = 0.$$

Эти условія будутъ совмѣстны, когда θ будетъ удовлетворять уравненію

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} + k\cos\theta\sin\omega\right]\cos\theta\sin\omega +$$
$$+\left[\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - k\sin\theta\cos\omega\right]\sin\theta\cos\omega = 0. \tag{21}$$

Постоянная k представляетъ, какъ это легко видѣть, cotang угла, составляемаго разсматриваемой фокальной плоскостью съ плоскостью $z = 0$ т. е. въ данномъ случаѣ $k = \operatorname{tang}\sigma$.

Въ § 9 мы видѣли, что при данной кривизнѣ поверхности S между угломъ σ и постоянной m существуетъ соотношеніе (15). Въ данномъ случаѣ это соотношеніе приметъ форму

$$m^2 = \cos^2\sigma;$$

слѣдовательно, обозначая черезъ μ постоянную, связанную съ m соотношеніемъ

$$\mu^2 + m^2 = 1, \tag{22}$$

мы можемъ представить k въ видѣ $\frac{\mu}{m}$.

Рѣшая теперь уравненія (19) и (20) относительно производныхъ $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\theta}{\partial\beta}$, прійдемъ къ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=-\frac{\mu\cos\theta\sin\omega}{m}+\frac{\sin\theta\cos\omega}{m},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta}+\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=\frac{\mu\sin\theta\cos\omega}{m}-\frac{\cos\theta\sin\omega}{m}. \tag{23}$$

Легко показать, что эти уравненія будутъ совмѣстны.

Для упрощенія вычисленій введемъ вмѣсто параметровъ α, β параметры u, v

$$u=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad v=\frac{\alpha-\beta}{2};$$

какъ нетрудно замѣтить, кривыя $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ представляютъ ассимптотическія линіи поверхности S.

При этой замѣнѣ перемѣнныхъ уравненія (23) преобразуются въ слѣдующія:

$$\frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial u}=\frac{1+\mu}{m}\sin(\theta-\omega),\quad \frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial v}=\frac{1-\mu}{m}\sin(\theta+\omega); \tag{24}$$

что касается уравненія (17), которому удовлетворяетъ функція ω, то оно обратится въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v}=\sin\omega\cos\omega. \tag{25}$$

Теперь уже простымъ дифференцированіемъ убѣдимся, что условіемъ совмѣстности уравненій (24) будетъ уравненіе (25).

Если изъ (24) исключимъ ω, то получимъ для θ уравненіе

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=\sin\theta\cos\theta,$$

или въ прежнихъ параметрахъ α, β

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}=\sin\theta\cos\theta. \tag{26}$$

Принимая во вниманіе соотношенія (23), мы найдемъ слѣдующія выраженія для проэкцій перемѣщенія точки O_1 поверхности S_1:

$$\delta x=\cos\theta(\cos\theta\cos\omega+\mu\sin\theta\sin\omega)\,d\alpha+\sin\theta[\cos\theta\sin\omega-\mu\sin\theta\cos\omega]\,d\beta,$$

$$\delta y=\cos\theta(\sin\theta\cos\omega-\mu\cos\theta\sin\omega)\,d\alpha+\sin\theta(\sin\theta\sin\omega+\mu\cos\theta\cos\omega)\,d\beta, \tag{27}$$

$$\delta z=-m\cos\theta\sin\omega\,d\alpha+m\sin\theta\cos\omega\,d\beta.$$

Поэтому, если обратимъ вниманіе на соотношеніе (22), то для линейнаго элемента поверхности S_1 получимъ выраженіе

$$ds_1^2 = \cos^2\theta d\alpha^2 + \sin^2\theta d\beta^2. \tag{28}$$

При этой формѣ линейнаго элемента условіе (26) показываетъ, что Гауссовская кривизна поверхности S_1 равна -1.

Такъ какъ на основаніи теоремы § 10 кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ представляютъ линіи кривизны поверхности S_1, то изъ формы линейнаго элемента (28) и изъ того же уравненія (26) видно, что функція θ играетъ для поверхности S_1 ту же роль, что функція ω для поверхности S.

Если мы въ полученныхъ соотношеніяхъ положимъ $\sigma = 0$, а слѣдовательно $m = 1$, $\mu = 0$, то найдемъ формулы для *преобразованія Bianchi*.

§ 13. Займемся теперь доказательствомъ замѣчательной теоремы Bianchi, названной имъ *перемѣстительнымъ закономъ*.

Сущность этой теоремы заключается въ слѣдующемъ.

Какъ мы видѣли въ предыдущихъ параграфахъ, всякое преобразованіе Bäcklund'а характеризуется нѣкоторой постоянной σ.

Будемъ обозначать символически черезъ B_σ Bäcklund'овское преобразованіе, помощью котораго мы переходимъ отъ одной поверхности постоянной отрицательной кривизны къ другой, при чемъ характеристической постоянной этого преобразованія будетъ σ.

Возьмемъ теперь двѣ какихъ угодно постоянныхъ σ_1 и σ_2.

Теорема Bianchi состоитъ въ томъ, что примѣняя послѣдовательно къ нѣкоторой поверхности постоянной отрицательной кривизны S два преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2}, мы прійдемъ къ той же поверхности, къ которой приводятъ тѣ же преобразованія, но примѣненныя въ обратномъ порядкѣ.

Символически теорему Bianchi можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_2} B_{\sigma_1}.$$

Мы поставимъ себѣ болѣе общую задачу, а именно посмотримъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять четыре Bäcklund'овскихъ преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2}, B_{σ_3}, B_{σ_4}, чтобы послѣдовательное примѣненіе къ нѣкоторой поверхности S постоянной отрицательной кривизны двухъ преобразованій B_{σ_1}, B_{σ_2}, приводило къ той же поверхности S_2, что и послѣдовательное примѣненіе къ S преобразованій B_{σ_3}, B_{σ_4}.

Другими словами, рѣшимъ вопросъ, когда возможно символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4}.$$

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ. Черезъ S_1 обозначимъ поверхность, къ которой мы перейдемъ отъ данной поверхности S при помощи преобразованія B_{σ_1}; черезъ S_3 обозначимъ поверхность, получаемую изъ S помощью преобразованія B_{σ_3}.

Наконецъ черезъ S_2 обозначимъ ту поверхность, къ которой перейдемъ отъ S_1 помощью преобразованія B_{σ_1}, либо отъ S_3 помощью преобразованія B_{σ_4}.

Мы пока допускаемъ существованіе подобной поверхности S_2, а потомъ выведемъ условія, при которыхъ она на самомъ дѣлѣ существуетъ.

Линейные элементы поверхностей S_1, S_3, S_2, отнесенныхъ къ линіямъ кривизны, пусть будутъ соотвѣтственно

$$ds_1^2 = \cos^2\theta_1 d\alpha^2 + \sin^2\theta_1 d\beta^2, \quad ds_3^2 = \cos^2\theta_3 d\alpha^2 + \sin^2\theta_3 d\beta^2,$$

$$ds_2^2 = \cos^2\Omega d\alpha^2 + \sin^2\Omega d\beta^2.$$

Функціи θ_1, θ_3, Ω, по предыдущему, должны удовлетворять уравненію вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sin f \cos f,$$

гдѣ

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Наконецъ положимъ, что

$$m_h = \cos\sigma_h, \quad \mu_h = \sin\sigma_h,$$

гдѣ h принимаетъ значенія 1, 2, 3, 4.

Найдемъ координаты по отношенію къ (T) соотвѣтственной точки поверхности S_2.

Замѣтимъ прежде всего, что cos'ы угловъ a, b, c и a', b', c', составляемыхъ касательными къ кривымъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ въ соотвѣтственныхъ точкахъ поверхности S_1 съ осями координатъ (T), будутъ имѣть на основаніи (27) слѣдующій видъ: для касательныхъ къ кривымъ $\beta = \text{const}$

$$\cos a = \cos\omega \cos\theta_1 + \mu_1 \sin\omega \sin\theta_1, \quad \cos b = \cos\omega \sin\theta_1 - \mu_1 \sin\omega \cos\theta_1,$$

$$\cos c = -m_1 \sin\omega,$$

для касательныхъ къ кривымъ $\alpha = \text{const}$:

$$\cos a_1 = \sin\omega \cos\theta_1 - \mu_1 \cos\omega \sin\theta_1, \quad \cos b_1 = \sin\omega \sin\theta_1 + \mu_1 \cos\omega \cos\theta_1,$$

$$\cos c_1 = m_1 \cos\omega.$$

Для касательныхъ къ тѣмъ же кривымъ, проведеннымъ на поверхности S_3 будемъ имѣть аналогичныя выраженія, въ которыхъ только индексъ 1 долженъ быть замѣненъ индексомъ 3.

Проэкціи радіуса вектора, соединяющаго соотвѣтственныя точки поверхностей S_1 и S_2 на касательныя къ линіямъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности S_1, будутъ $m_2 \cos\Omega$ и $m_2 \sin\Omega$; поэтому искомыя координаты соотвѣтственной точки поверхности S_2 будутъ

$$
\begin{aligned}
x_2 &= m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_1 \cos(\Omega - \omega) - \mu_1 m_2 \sin\theta_1 \sin(\Omega - \omega),\\
y_2 &= m_1 \sin\theta_1 + m_2 \sin\theta_1 \cos(\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 \cos\theta_1 \sin(\Omega - \omega), \qquad (29)\\
z_2 &= m_1 m_2 \sin(\Omega - \omega).
\end{aligned}
$$

Если будемъ разсматривать S_2 какъ результатъ послѣдовательнаго примѣненія преобразованій B_{σ_3}, B_{σ_4}, то тѣ же координаты должны быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$
\begin{aligned}
x_2 &= m_3 \cos\theta_3 + m_4 \cos\theta_3 \cos(\Omega - \omega) - \mu_3 m_4 \sin\theta_3 \sin(\Omega - \omega),\\
y_2 &= m_3 \sin\theta_3 + m_4 \sin\theta_3 \cos(\Omega - \omega) + \mu_3 m_4 \cos\theta_3 \sin(\Omega - \omega), \qquad (30)\\
z_2 &= m_3 m_4 \sin(\Omega - \omega).
\end{aligned}
$$

Сравнивая выраженія (29) и (30), мы получимъ прежде всего, что

$$m_1 m_2 = m_3 m_4; \qquad (31)$$

кромѣ того найдемъ слѣдующія уравненія для опредѣленія функціи Ω:

$$
\begin{aligned}
(m_2 \cos\theta_1 - m_4 \cos\theta_3) \cos(\Omega - \omega) + (\mu_3 m_4 \sin\theta_3 - \mu_1 m_2 \sin\theta_1) \sin(\Omega - \omega) &=\\
= m_3 \cos\theta_3 - m_1 \cos\theta_1,&\\
(m_2 \sin\theta_1 - m_4 \sin\theta_3) \cos(\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \cos\theta_1 - \mu_3 m_4 \cos\theta_3) \sin(\Omega - \omega) &=\\
= m_3 \sin\theta_3 - m_1 \sin\theta_1.&
\end{aligned}
$$

Послѣднія два уравненія будутъ совмѣстны, если опредѣленныя изъ нихъ функціи $\sin(\Omega - \omega)$ и $\cos(\Omega - \omega)$ будутъ удовлетворять соотношенію

$$\sin^2(\Omega - \omega) + \cos^2(\Omega - \omega) = 1.$$

Выраженія для $\sin(\Omega - \omega)$ и $\cos(\Omega - \omega)$, какъ легко видѣть, таковы:

$$
\begin{aligned}
\sin(\Omega - \omega) &= \frac{m_3(\mu_3 - \mu_1)\sin(\theta_1 - \theta_3)}{m_2(1 - \mu_1\mu_3) - m_1 m_2 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)},\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (32)\\
\cos(\Omega - \omega) &= \frac{m_3(1 - \mu_1\mu_3)\cos(\theta_1 - \theta_3) - m_1 m_3^2}{m_2(1 - \mu_1\mu_3) - m_1 m_2 m_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}.
\end{aligned}
$$

Возводя обѣ части этихъ выраженій въ квадратъ и складывая полученныя выраженія, мы должны въ суммѣ получить единицу; послѣднее условіе ведетъ къ соотношенію

$$m_3^2(\mu_3-\mu_1)^2+m_1^2m_3^4-2m_1m_3^3(1-\mu_1\mu_3)\cos(\theta_1-\theta_3)+$$
$$+m_3^2[(1-\mu_1\mu_3)^2-(\mu_3-\mu_1)^2]\cos^2(\theta_1-\theta_3)=$$
$$=m_2^2(1-\mu_1\mu_3)^2-2m_1m_2^2m_3(1-\mu_1\mu_3)\cos(\theta_1-\theta_3)+m_1^2m_2^2m_3^2\cos^2(\theta_1-\theta_3);$$

это соотношеніе должно быть простымъ тождествомъ.

Отсюда мы приходимъ къ единственному условію

$$m_3^2=m_2^2. \tag{33}$$

Сопоставляя это условіе съ (31), мы приходимъ къ слѣдующимъ зависимостямъ:

$$m_4=\pm m_1,\quad m_3=\pm m_2$$

Такъ какъ между постоянными μ_h и m_h существуетъ соотношеніе $m_h^2+\mu_h^2=1$, то отсюда заключаемъ, что

$$\mu_4=\pm\mu_1,\quad \mu_3=\pm\mu_2; \tag{34}$$

знаки здѣсь должны быть взяты такимъ образомъ, чтобы функція Ω, опредѣленная изъ выраженій (32), удовлетворяла уравненіямъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Omega+\theta_1)}{\partial u}&=\frac{1+\mu_2}{m_2}\sin(\Omega-\theta_1), & \frac{\partial(\Omega-\theta_1)}{\partial v}&=\frac{1-\mu_2}{m_2}\sin(\Omega+\theta_1),\\ \frac{\partial(\Omega+\theta_3)}{\partial u}&=\frac{1+\mu_4}{m_4}\sin(\Omega-\theta_3), & \frac{\partial(\Omega-\theta_3)}{\partial v}&=\frac{1-\mu_4}{m_4}\sin(\Omega+\theta_3),\end{aligned} \tag{35}$$

въ силу однихъ только уравненій

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\theta_1+\omega)}{\partial u}&=\frac{1+\mu_1}{m_1}\sin(\theta_1-\omega), & \frac{\partial(\theta_1-\omega)}{\partial v}&=\frac{1-\mu_1}{m_1}\sin(\theta_1+\omega),\\ \frac{\partial(\theta_3+\omega)}{\partial u}&=\frac{1+\mu_3}{m_3}\sin(\theta_3-\omega), & \frac{\partial(\theta_3-\omega)}{\partial v}&=\frac{1-\mu_3}{m_3}\sin(\theta_3+\omega).\end{aligned} \tag{36}$$

Положимъ, сперва, что $m_4=m_1$, $m_3=m_2$; тогда нетрудно показать, что

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega-\omega}{2}=\frac{\mu_3-\mu_1}{1-\mu_1\mu_3-m_1m_3}\operatorname{tang}\frac{\theta_1-\theta_3}{2}. \tag{37}$$

Опредѣляя отсюда $\dfrac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u}$, $\dfrac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}$, подставляя ихъ значенія въ (35) и принимая въ соображеніе уравненія (36), мы увидимъ, что уравненія (35) удовлетворяются тождественно лишь при условіи, что

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1. \tag{38}$$

Допустимъ теперь, что $m_3 = -m_2$ и $m_4 = -m_1$; тогда получимъ

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{1 - \mu_1 \mu_3 + m_1 m_3} \operatorname{cotang} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}. \tag{39}$$

И въ этомъ случаѣ непосредственной подстановкой убѣдимся, что уравненія (35) удовлетворяются при условіи

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Нетрудно свести второй изъ этихъ случаевъ къ первому; въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно будетъ вмѣсто функціи θ_3 ввести функцію

$$\theta_3' = \theta_3 + \pi.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для того, чтобы имѣло мѣсто символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4},$$

постоянныя m_h и μ_h, характеризующія каждое изъ преобразованій B_{σ_h}, должны быть связаны соотношеніями

$$m_3 = m_2, \quad m_4 = m_1, \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Замѣчая, что $m_h = \cos\sigma_h$, $\mu_h = \sin\sigma_h$, мы видимъ, что послѣднія соотношенія можно замѣнить слѣдующими:

$$\sigma_4 = \sigma_1, \quad \sigma_3 = \sigma_2.$$

Выраженіе (37) при этомъ приметъ видъ

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\cos \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}{\sin \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}} \operatorname{tang} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \tag{40}$$

Резюмируя все сказанное, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ. *Для того, чтобы два послѣдовательно примѣненныхъ Bäcklund'овскихъ преобразованія B_{σ_3}, B_{σ_4} привели къ той же поверхности, что и два послѣдовательныхъ преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2}, необходимо и достаточно, чтобы постоянныя σ, характеризующія каждое изъ этихъ преобразованій, были связаны соотношеніями*

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

Символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_2} B_{\sigma_1},$$

къ которому мы приходимъ такимъ образомъ, и представляетъ перемѣстительный законъ Bianchi.

Теоремѣ Bianchi можно дать слѣдующую геометрическую интерпретацію.

Возьмемъ четыреугольникъ, вершины котораго лежатъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ поверхностей постоянной отрицательной кривизны -1, и коего двѣ противоположныхъ стороны равны постоянной $\sin\sigma_1$, а двѣ другія постоянной $\sin\sigma_2$.

Полученный четыреугольникъ можетъ двигаться въ пространствѣ такимъ образомъ, что его стороны останутся неизмѣнной длины въ то время, какъ его вершины будутъ описывать четыре псевдосферическихъ поверхности съ кривизной -1; при этомъ каждыя двѣ его стороны опредѣлятъ касательную плоскость къ поверхности, описываемой точкой ихъ пересѣченія, проведенную въ этой точкѣ.

§ 14. Во всѣхъ нашихъ разсужденіяхъ мы не налагали никакого ограниченія на постоянныя σ, другими словами, эти постоянныя могли принимать какъ дѣйствительныя, такъ и комплексныя значенія.

Въ послѣднемъ случаѣ, очевидно, функціи θ, Ω будутъ, вообще говоря, вида $\varphi + i\psi$, гдѣ φ и ψ функціи дѣйствительныхъ перемѣнныхъ; вмѣстѣ съ тѣмъ поверхности S_h, получаемые при этихъ преобразованіяхъ будутъ мнимыми.

Нетрудно однако показать, основываясь на теоремѣ Bianchi, что въ случаѣ, когда постоянныя σ_1 и σ_2 будутъ комплексными сопряженными, поверхность S_2 можетъ быть дѣйствительной при соотвѣтственномъ выборѣ постоянныхъ въ интегралахъ уравненій (36).

Въ самомъ дѣлѣ, подобравъ соотвѣтственнымъ образомъ эти постоянныя, мы всегда можемъ предположить, что функціи θ_1 и θ_3 комплексныя сопряженныя т. е., что

$$\theta_1 = \varphi + i\psi, \quad \theta_3 = \varphi - i\psi.$$

Полагая кромѣ того $\sigma_1 = a + bi$, а слѣдовательно $\sigma_2 = a - bi$, мы изъ (40) найдемъ для опредѣленія Ω выраженіе

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega - \omega}{2} = -\frac{\cos a}{\sinh b}\operatorname{tangh}\psi,$$

откуда видимъ, что при ω дѣйствительномъ будетъ дѣйствительной и функція Ω.

Въ силу нашихъ условій постоянныя m_1 и m_2, μ_1 и μ_2 будутъ комплексными сопряженными.

Пользуясь теоремой Bianchi, мы можемъ представить координаты поверхности S_2 въ видѣ

$$x_2 = \frac{m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_3}{2} +$$

$$+ \cos(\Omega - \omega) \frac{m_2 \cos\theta_1 + m_1 \cos\theta_3}{2} - \sin(\Omega - \omega) \frac{\mu_1 m_2 \sin\theta_1 + \mu_2 m_1 \sin\theta_3}{2},$$

$$y_2 = \frac{m_1 \sin\theta_1 + m_2 \sin\theta_3}{2} +$$

$$+ \cos(\Omega - \omega) \frac{m_2 \sin\theta_1 + m_1 \sin\theta_3}{2} + \sin(\Omega - \omega) \frac{\mu_1 m_2 \cos\theta_1 + \mu_2 m_1 \cos\theta_3}{2},$$

$$z_2 = m_1 m_2 \sin(\Omega - \omega),$$

а это все величины дѣйствительныя.

Итакъ, *послѣдовательное примѣненіе двухъ комплексныхъ сопряженныхъ преобразованій Bäcklund'а приводитъ къ нѣкоторой дѣйствительной поверхности.*

§ 15. Обратимся теперь къ болѣе детальному разсмотрѣнію преобразованій поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной. Опять, не нарушая общности, можемъ положить эту кривизну равной $+1$.

Отнесемъ разсматриваемую поверхность S къ линіямъ кривизны $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, при чемъ оси координатъ (T), аналогично предыдущему, выберемъ такъ, чтобы ось x-овъ касалась кривыхъ $\beta = \text{const}$, а ось y-овъ — кривыхъ $\alpha = \text{const}$. При этомъ выборѣ координатъ, основныя величины, характеризующія нашу поверхность, будутъ [1])

$$\xi = \cosh\omega, \quad \eta_1 = \sinh\omega, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = -\cosh\omega, \quad q = \sinh\omega,$$

$$r = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha},$$

при чемъ функція ω представляетъ интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} + \sinh\omega \cosh\omega = 0. \tag{41}$$

Послѣднее уравненіе представляетъ ничто иное, какъ условіе, что кривизна нашей поверхности равна $+1$.

Разсмотримъ, какъ и въ § 12, конгруэнцію касательныхъ, составляющихъ съ осью x-овъ уголъ $i\theta$; уравненіе такой касательной по отношенію къ соотвѣтствующимъ осямъ (T) будетъ, очевидно,

$$z = 0, \quad xi\sinh\theta - y\cosh\theta = 0. \tag{42}$$

---

[1]) Darboux, t. III, p. 385.

Снова постараемся подобрать уголъ $i\theta$ такимъ образомъ, чтобы 1) разстояніе между фокальными точками нашей конгруэнціи было величиной постоянной, равной mi и 2) чтобы уголъ $\frac{\pi}{2} - \sigma$ между ея фокальными плоскостями былъ тоже постояненъ.

Одной изъ фокальныхъ поверхностей нашей конгруэнціи будетъ поверхность S, что же касается другой S_1, то координаты ея точекъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ

$$x = mi\cosh\theta, \quad y = -m\sinh\theta, \quad z = 0.$$

Мы не будемъ приводить здѣсь всѣхъ разсужденій, необходимыхъ для вывода дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяетъ функція θ, такъ какъ это было бы простымъ повтореніемъ разсужденій § 12.

Поэтому приведемъ здѣсь только окончательные результаты.

Замѣтимъ, что, какъ мы видѣли въ § 9, постоянная m и уголъ σ связаны зависимостью

$$m^2 = \cos^2\sigma.$$

Если теперь черезъ μ обозначимъ постоянную, удовлетворяющую условію

$$\mu^2 + m^2 = 1, \tag{43}$$

то для опредѣленія функціи θ получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} &= \frac{\mu i \sinh\omega\cosh\theta}{m} - \frac{i\cosh\omega\sinh\theta}{m}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\beta} - i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} &= -\frac{\mu\cosh\omega\sinh\theta}{m} + \frac{\sinh\omega\cosh\theta}{m}. \end{aligned} \tag{44}$$

Нетрудно показать, что эти уравненія совмѣстны; для упрощенія вычисленій введемъ новые параметры

$$u = \frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - i\beta}{2};$$

тогда уравненіе (41), которому удовлетворяетъ функція ω, преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\partial v} + \sinh\omega\cosh\omega = 0. \tag{45}$$

Что касается уравненій, служащихъ для опредѣленія функціи θ, то они будутъ

$$\frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial u} = i\frac{\mu - 1}{m}\sinh(\theta + \omega), \quad \frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial v} = -i\frac{1 + \mu}{\partial v}\sinh(\theta - \omega). \tag{46}$$

Теперь уже простымъ дифференцированіемъ убѣдимся, что уравненія эти совмѣстны въ силу условія (45).

Кромѣ того, исключая изъ нихъ функцію ω, мы приходимъ къ уравненію, которому удовлетворяетъ функція θ, а именно

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} + \sinh\theta \cosh\theta = 0. \tag{47}$$

Принимая во вниманіе уравненія (44), мы найдемъ для проэкцій перемѣщеній соотвѣтственной точки поверхности S_1 слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned}
\delta x &= \cosh\theta\,(\cosh\omega\cosh\theta - \mu\sinh\omega\sinh\theta)\,d\alpha + \\
&\quad + i\sinh\theta\,[\sinh\omega\cosh\theta - \mu\cosh\omega\sinh\theta]\,d\beta, \\
\delta y &= i\cosh\theta\,(\cosh\omega\sinh\theta - \mu\sinh\omega\cosh\theta)\,d\alpha + \\
&\quad + \sinh\theta\,[\mu\cosh\omega\cosh\theta - \sinh\omega\sinh\theta]\,d\beta, \\
\delta z &= -\,mi\cosh\theta\sinh\omega d\alpha + m\sinh\theta\cosh\omega d\beta;
\end{aligned} \tag{48}$$

отсюда видимъ, что линейный элементъ поверхности S_1 будетъ вида

$$ds_1^2 = \cosh^2\theta d\alpha^2 + \sinh^2\theta d\beta^2.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (47), которому удовлетворяетъ функція θ и помня, что кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ линіи кривизны поверхности S_1, мы видимъ, что эта функція играетъ ту же роль для поверхности S_1, что функція ω для поверхности S.

§ 16. Перейдемъ теперь къ доказательству *закона перемѣстительности Bainchi* для поверхностей съ постоянной положительной Гаусcовской кривизной.

Опять будемъ обозначать черезъ B_σ преобразованіе, аналогичное Bäcklund'овскому, и характеризуемое постоянной σ.

Займемся рѣшеніемъ вопроса, когда возможно символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4},$$

т. е. когда можно перейти отъ нѣкоторой поверхности постоянной положительной кривизны S къ такой же поверхности S_2 путемъ послѣдовательнаго примѣненія двухъ преобразованій B_{σ_1}, B_{σ_2} или двухъ преобразованій B_{σ_3}, B_{σ_4}.

Обозначимъ черезъ S_1, S_3 поверхности, къ которымъ мы переходимъ отъ поверхности S путемъ соотвѣтственныхъ преобразованій B_{σ_1}, B_{σ_3}; линейные элементы ихъ пусть будутъ

$$ds_1^2 = \cosh^2\theta_1 d\alpha^2 + \sinh^2\theta_1 d\beta^2, \quad ds_3^2 = \cosh^2\theta_3 d\alpha^2 + \sinh^2\theta_3 d\beta^2.$$

Линейный элементъ поверхности S_2, къ которой мы приходимъ отъ поверхности S_1 путемъ преобразованія B_{σ_2}, или отъ S_3 путемъ преобразованія B_{σ_4}, обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$$ds_2^2 = \cosh^2\Omega d\alpha^2 + \sinh^2\Omega d\beta^2.$$

Функціи θ_1, θ_3, Ω будутъ интегралами уравненія вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \sinh f \cosh f = 0.$$

Мы предположимъ сперва à priori существованіе поверхности S_2, а потомъ выведемъ условія, при которыхъ она дѣйствительно существуетъ.

Путемъ тѣхъ же разсужденій, что и въ § 13, мы найдемъ для координатъ соотвѣтственной точки поверхности S_2, разсматриваемой, какъ преобразованіе поверхности S_1, слѣдующія выраженія:

$$
\begin{gathered}
x_2 = m_1 i\cosh\theta_1 + m_2 i\cosh\theta_1\cosh(\Omega-\omega) + \mu_1 m_2 i\sinh\theta_1\sinh(\Omega-\omega),\\
y_2 = -m_1\sinh\theta_1 - m_2\sinh\theta_1\cosh(\Omega-\omega) - \mu_1 m_2\cosh\theta_1\sinh(\Omega-\omega), \qquad (49)\\
z_2 = -m_1 m_2 \sinh(\Omega-\omega).
\end{gathered}
$$

Координаты той же точки въ предположеніи, что S_2 преобразованіе поверхности S_3, будутъ такого же вида, но только вездѣ прійдется при этомъ замѣнить m_1, m_2, θ_1 соотвѣтственно черезъ m_3, m_4, θ_3.

Сравнивая полученныя такимъ образомъ выраженія, прійдемъ къ слѣдующимъ условіямъ:

$$m_1 m_2 = m_3 m_4 \qquad (50)$$

и

$$
\begin{aligned}
(m_2\cosh\theta_1 - m_4\cosh\theta_3)\cosh(\Omega-\omega) + (\mu_1 m_2\sinh\theta_1 - \mu_3 m_4\sinh\theta_3)\sinh(\Omega-\omega) &=\\
= m_3\cosh\theta_3 - m_1\cosh\theta_1, & \qquad (51)\\
(m_2\sinh\theta_1 - m_4\sinh\theta_3)\cosh(\Omega-\omega) + (\mu_1 m_2\cosh\theta_1 - \mu_3 m_4\cosh\theta_3)\sinh(\Omega-\omega) &=\\
= m_3\sinh\theta_3 - m_1\sinh\theta_1. &
\end{aligned}
$$

Опредѣленныя отсюда функціи $\cosh(\Omega-\omega)$ и $\sinh(\Omega-\omega)$ должны удовлетворять соотношенію

$$\cosh^2(\Omega-\omega) - \sinh^2(\Omega-\omega) = 1. \qquad (52)$$

Рѣшая уравненія (51) относительно $\cosh(\Omega-\omega)$ и $\sinh(\Omega-\omega)$, найдемъ, что

$$\begin{aligned}
\cosh(\Omega-\omega) &= \frac{m_3\left[(1-\mu_1\mu_3)\cosh(\theta_1-\theta_3)-m_1m_3\right]}{m_2\left[1-\mu_1\mu_3-m_1m_3\cosh(\theta_1-\theta_3)\right]}\,,\\
\sinh(\Omega-\omega) &= \frac{m_3(\mu_3-\mu_1)\sinh(\theta_1-\theta_3)}{m_2\left[1-\mu_1\mu_3-m_1m_3\cosh(\theta_1-\theta_3)\right]}\,;
\end{aligned}\tag{53}$$

подставляя эти значенія въ условіе (52), мы должны получить простое тождество; произведя несложныя вычисленія, мы прійдемъ къ заключенію, что условіе (52) удовлетворится тождественно, если положимъ

$$m_2^2=m_3^2\,,$$

или слѣдовательно

$$m_3=\pm m_2\,,\quad m_4=\pm m_1\,. \tag{54}$$

Если черезъ μ_h обозначимъ такія величины, которыя связаны съ соотвѣтственной величиной m_h соотношеніемъ

$$\mu_h^2+m_h^2=1\,,$$

то изъ условій (54), заключаемъ, что

$$\mu_3=\pm\mu_2\,,\quad \mu_4=\pm\mu_1\,, \tag{55}$$

при чемъ каждой комбинаціи (54) можетъ соотвѣтствовать четыре комбинаціи (55).

Посмотримъ теперь, какіе же знаки въ условіяхъ (54) и (55) будутъ соотвѣтствовать нашему вопросу. Эти знаки должны быть такъ подобраны, чтобы уравненія, служащія для опредѣленія функціи Ω

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\Omega-\theta_1)}{\partial u} &= i\frac{\mu_2-1}{m_2}\sinh(\Omega+\theta_1), & \frac{\partial(\Omega-\theta_3)}{\partial u} &= i\frac{\mu_4-1}{m_4}\sinh(\Omega+\theta_3),\\
\frac{\partial(\Omega+\theta_1)}{\partial v} &= -i\frac{\mu_2+1}{m_2}\sinh(\Omega-\theta_1), & \frac{\partial(\Omega+\theta_3)}{\partial v} &= i\frac{\mu_4+1}{m_4}\sinh(\Omega-\theta_3),
\end{aligned}\tag{56}$$

удовлетворялись въ силу одних только уравненій

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\theta_1-\omega)}{\partial u} &= i\frac{\mu_1-1}{m_1}\sinh(\theta_1+\omega), & \frac{\partial(\theta_3-\omega)}{\partial u} &= i\frac{\mu_3-1}{m_3}\sinh(\theta_3+\omega),\\
\frac{\partial(\theta_1+\omega)}{\partial v} &= -i\frac{\mu_1+1}{m_1}\sinh(\theta_1-\omega), & \frac{\partial(\theta_3+\omega)}{\partial v} &= -i\frac{\mu_3+1}{m_3}\sinh(\theta_3-\omega).
\end{aligned}\tag{57}$$

Положимъ сперва, что $m_3=m_2$, $m_4=m_1$, тогда изъ (53) найдемъ, что

$$\operatorname{tangh}\frac{\Omega-\omega}{2}=\frac{\mu_3-\mu_1}{1-m_1m_3-\mu_1\mu_3}\operatorname{tangh}\frac{\theta_1-\theta_3}{2}\,. \tag{58}$$

Опредѣляя отсюда производныя $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u}$, $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}$, подставляя ихъ значенія въ (56) и принимая во вниманіе уравненія (57), мы найдемъ, что уравненія (56) удовлетворяются тождественно лишь при условіи

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1. \tag{59}$$

Допустимъ теперь, что $m_3 = -m_2$, $m_4 = -m_1$; тогда изъ (53) получимъ, что

$$\operatorname{tangh}\frac{\Omega-\omega}{2} = \frac{\mu_3-\mu_1}{1-\mu_1\mu_3+m_1m_3}\operatorname{cotangh}\frac{\theta_1-\theta_3}{2}. \tag{60}$$

И въ этомъ случаѣ, непосредственной подстановкой убѣждаемся, что между постоянными μ_h должны существовать соотношенія

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Послѣдній случай легко сведемъ къ первому, если вмѣсто функціи θ_3 будемъ разсматривать функцію

$$\theta_3' = \theta_3 + \pi i.$$

Такимъ образомъ видимъ, что для того, чтобы символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4}$$

имѣло мѣсто необходимо и достаточно, чтобы постоянныя σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 были связаны соотношеніями

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

Итакъ *для того, чтобы два послѣдовательно примѣненныхъ преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2} приводили къ той же поверхности, что и два послѣдовательно примѣненныхъ преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2}, необходимо и достаточно, чтобы постоянныя σ, характеризующія каждое изъ этихъ преобразованій, были связаны соотношеніями*

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

§ 17. Изслѣдованія предыдущаго параграфа представляютъ особый интересъ въ томъ отношеніи, что даютъ возможность найти *дѣйствительное* преобразованіе поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной—преобразованіе, для отысканія котораго дѣлалась масса тщетныхъ попытокъ и къ частному случаю котораго, какъ мы увидимъ впослѣдствіи, пришли окольнымъ путемъ.

Въ настоящемъ параграфѣ мы попытаемся найти подобныя преобразованія, исходя при этомъ изъ доказанной нами теоремы Bianchi.

Допустимъ, что существуютъ два такихъ преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2}, что примѣняя ихъ послѣдовательно къ нѣкоторой дѣйствительной поверхности S, мы прійдемъ къ дѣйствительной же поверхности S_2.

Принимая во вниманіе теорему Bianchi и выраженія (49), мы можемъ представить координаты соотвѣтственной точки поверхности S_2 въ видѣ

$$x_2 = \frac{i(m_1 \cosh\theta_1 + m_3 \cosh\theta_3)}{2} + \frac{i(m_2 \cosh\theta_1 + m_4 \cosh\theta_3)}{2} \cosh(\Omega - \omega) + \\ + \frac{i(\mu_1 m_2 \sinh\theta_1 + \mu_3 m_4 \sinh\theta_3)}{2} \sinh(\Omega - \omega),$$

$$y_2 = -\frac{m_1 \sinh\theta_1 + m_3 \sinh\theta_3}{2} - \frac{m_2 \sinh\theta_1 + m_4 \sinh\theta_3}{2} \cosh(\Omega - \omega) - \quad (61) \\ - \frac{\mu_1 m_2 \cosh\theta_1 + \mu_3 m_4 \cosh\theta_3}{2} \sinh(\Omega - \omega),$$

$$z_2 = -m_1 m_2 \sinh(\Omega - \omega),$$

при чемъ здѣсь

$$m_3 = m_2, \quad m_4 = m_1, \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Мы предполагаемъ à priori, что функція $\Omega - \omega$ и всѣ координаты x_2, y_2, z_2 дѣйствительны.

Отсюда заключаемъ, что между постоянными m_1, m_2 существуетъ слѣдующая зависимость, что если

$$m_1 = a + bi,$$

то $m_2 = \mp a \pm bi$.

Введемъ здѣсь слѣдующія обозначенія:

$$\cosh\theta_1 = A + Bi, \quad \sinh\theta_1 = L + Mi, \quad \mu_4 = \mu_1 = h + ik,$$
$$\cosh\theta_3 = A_3 + B_3 i, \quad \sinh\theta_3 = L_3 + M_3 i, \quad \mu_3 = \mu_2 = h_3 + ik_3.$$

По нашему условію координаты x_2, y_2, z_2 дѣйствительны, а потому мы можемъ предположить, что функціи

$$m_1 \cosh\theta_1 + m_2 \cosh\theta_3, \quad m_2 \cosh\theta_1 + m_1 \cosh\theta_3, \quad \mu_1 m_2 \sinh\theta_1 + \mu_2 m_1 \sinh\theta_3$$

чисто-мнимыя, а функціи

$$m_1 \sinh\theta_1 + m_2 \sinh\theta_3, \quad m_2 \sinh\theta_1 + m_1 \sinh\theta_3, \quad \mu_1 m_2 \cosh\theta_1 + \mu_2 m_1 \cosh\theta_3$$

дѣйствительны.

Отсюда уже нетрудно заключить, что онѣ удовлетворятъ этимъ условіямъ, если положимъ

$$A_3 = \pm A, \quad B_3 = \mp B, \quad L_3 = \mp L, \quad M_3 = \pm M, \quad h_3 = -h, \quad k_3 = k;$$

такимъ образомъ мы можемъ составить слѣдующую табличку:

$$\cosh\theta_1 = A + Bi, \quad \sinh\theta_1 = L + Mi, \quad m_1 = a + bi, \quad \mu_1 = h + ik, \tag{62}$$
$$\cosh\theta_3 = \pm A \mp Bi, \quad \sinh\theta_3 = \mp L \pm Mi, \quad m_3 = \mp a \pm bi, \quad \mu_3 = -h + ik.$$

Если положимъ теперь, что

$$\theta_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \quad \theta_3 = \varphi_3 + i\psi_3$$

и замѣтимъ, что

$$\cosh\theta = \cosh(\varphi + i\psi) = \cosh\varphi\cos\psi + i\sinh\varphi\sin\psi,$$
$$\sinh\theta = \sinh(\varphi + i\psi) = \sinh\varphi\cos\psi + i\cosh\varphi\sin\psi,$$

то первые два столбца нашей таблички дадутъ намъ слѣдующія зависимости:

$$\begin{aligned} \cosh\varphi_3\cos\psi_3 &= \pm\cosh\varphi_1\cos\psi_1, & \sinh\varphi_3\sin\psi_3 &= \mp\sinh\varphi_1\sin\psi_1, \\ \sinh\varphi_3\cos\psi_3 &= \mp\sinh\varphi_1\cos\psi_1, & \cosh\varphi_3\sin\psi_3 &= \pm\cosh\varphi_1\sin\psi_1, \end{aligned} \tag{63}$$

откуда для верхнихъ знаковъ имѣемъ

$$\varphi_3 = -\varphi_1, \quad \psi_3 = \psi_1, \tag{64}$$

а для нижнихъ

$$\varphi_3 = -\varphi_1, \quad \psi_3 = \psi_1 + \pi. \tag{65}$$

Посмотримъ, даютъ ли эти значенія φ_3 и ψ_3 рѣшеніе нашей задачи.

Прежде всего покажемъ, что если при выбранныхъ нами значеніяхъ m_1, μ_1 функція $\theta_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ представляетъ интегралъ уравненій (44), то функція $\theta_3 = \varphi_3 + i\psi_3$ будетъ интеграломъ уравненій того же вида, въ которыхъ мы только замѣнимъ m_1, μ_1 черезъ m_3 и μ_3, при чемъ этимъ послѣднимъ постояннымъ припишемъ значенія (62).

Подставляя въ уравненія (44) вмѣсто m_1, μ_1 ихъ значенія (62) и отдѣляя дѣйствительныя и мнимыя части, мы прійдемъ къ слѣдующимъ тождествамъ, если вставимъ въ эти уравненія вмѣсто θ значеніе θ_1

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}(a^2 + b^2) = (bh - ka)\sinh\omega\cosh\varphi_1\cos\psi_1 -$$
$$-(ah + bk)\sinh\varphi_1\sin\psi_1\sinh\omega - b\cosh\omega\sinh\varphi_1\cos\psi_1 + a\cosh\omega\sin\psi_1\cosh\varphi_1,$$

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)(a^2 + b^2) = (ah - bk)\sinh\omega\cosh\varphi_1\cos\psi_1 +$$
$$+(bh - ak)\sinh\varphi_1\sin\psi_1\sinh\omega - a\cosh\omega\sinh\varphi_1\cos\psi_1 - b\sin\psi_1\cosh\varphi_1\cosh\omega,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}(a^2+b^2)=-(ah+bk)\cosh\omega\sinh\varphi_1\cos\psi_1+$$

$$+(ak-bh)\cosh\omega\sin\psi_1\cosh\varphi_1+a\sinh\omega\cosh\varphi_1\cos\psi_1+b\sinh\omega\sinh\varphi_1\sin\psi_1,$$

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}-\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\right)(a^2+b^2)=(bh-ak)\cosh\omega\sinh\varphi_1\cos\psi_1-$$

$$-(ah+bk)\cosh\omega\sin\psi_1\cosh\varphi_1+a\sinh\omega\sinh\varphi_1\sin\psi_1-b\sinh\omega\cosh\varphi_1\cos\psi_1.$$

Теперь уже легко видѣть, что эти равенства останутся тождествами при соотвѣтственной замѣнѣ φ_1, ψ_1, a, b, h, k черезъ $-\varphi_1$, ψ_1, $-a$, b, $-h$, k либо черезъ $-\varphi_1$, $\psi_1+\pi$, a, $-b$, $-h$, k.

Теперь намъ остается только посмотрѣть, будетъ ли при этихъ условіяхъ функція Ω дѣйствительной.

Обращаясь къ выраженію (58), мы при первомъ предположеніи найдемъ, что

$$\operatorname{tangh}\frac{\Omega-\omega}{2}=\frac{-2h}{1+a^2+b^2+h^2+k^2}\operatorname{tangh}\varphi_1.$$

Если вспомнимъ, что $m_1=\cos\sigma_1$, $\mu_1=\sin\sigma_1$, и положимъ $\sigma_1=\alpha+\beta i$, то, легко найдемъ, что

$$\operatorname{tangh}\frac{\Omega-\omega}{2}=-\frac{\sin\alpha}{\cosh\beta}\operatorname{tangh}\varphi_1.$$

Такъ какъ модуль обоихъ множителей правой части меньше единицы, то отсюда заключаемъ, что $\frac{\Omega-\omega}{2}$ дѣйствительныя функція.

Обращаясь ко второму случаю, мы точно также найдемъ, что

$$\operatorname{tangh}\frac{\Omega-\omega}{2}=-\frac{\cosh\beta}{\sin\alpha}\operatorname{cotangh}\varphi_1.$$

Такъ какъ модули обоихъ множителей правой части больше единицы, то въ этомъ случаѣ мы приходимъ къ противорѣчію съ нашимъ предположеніемъ о дѣйствительности функціи $\Omega-\omega$.

Наконецъ, если теперь, черезъ $\bar{\sigma}_1$ обозначимъ величину, сопряженную съ σ_1 и замѣтимъ, что $m_1=\cos\sigma_1$, $\mu_1=\sin\sigma_1$, $m_2=\cos\sigma_2$, $\mu_2=\sin\sigma_2$, то прійдемъ къ слѣдующей теоремѣ.

Два послѣдовательно примѣненныхъ преобразованія B_{σ_1} и $B_{\pi+\bar{\sigma}_1}$ даютъ намъ дѣйствительное преобразованіе поверхностей съ постоянной положительной кривизной.

ГЛАВА III.

Теоремы Guichard'a.

§ 1. Въ § 3 предыдущей главы мы вывели замѣчательную теорему Weingarten'a, сущность которой заключается въ слѣдующемъ.

Если имѣемъ нѣкоторую поверхность S, представляющую изгибаніе поверхности вращенія, то касательныя къ кривымъ, являющимся изгибаніемъ меридіановъ, будутъ нормальны къ нѣкоторой опредѣленной поверхности W.

Такъ какъ характеръ зависимости между радіусами кривизны послѣдней поверхности вполнѣ опредѣляется формой линейнаго элемента поверхности вращенія, на которую наложима поверхность S, то при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S, касательныя къ изгибаніямъ меридіановъ будутъ нормалями поверхностей W *одного и того же* класса.

Въ 1899 году Guichard далъ безъ доказательства теоремы, являющіяся обобщеніемъ теоремы Weingarten'a для двухъ частныхъ случаевъ [1]).

Задача, поставленная Guichard'омъ, можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ.

Имѣемъ нѣкоторую поверхность S и неизмѣнно съ нею связанную конгруэнцію падающихъ лучей D, представляющую систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ.

Допустимъ, что поверхность Σ принадлежитъ къ поверхностямъ W т. е., что ея радіусы кривизны связаны опредѣленной зависимостью

$$f(R_1,\ R_2) = 0 \tag{1}$$

съ постоянными коэффиціентами.

Спрашивается, какимъ условіямъ должны удовлетворять отражающая поверхность S и конгруэнція D, чтобы при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S лучи конгруэнціи D оставались нормальными къ поверхностямъ Σ, радіусы кривизны которыхъ связаны между собою тѣмъ же соотношеніемъ (1).

---

[1]) Comptes rendus de l'académie des sciences 1899 (23 janvier).

Къ рѣшенію этой задачи въ случаяхъ, разсмотрѣнныхъ Guichard'омъ, когда упомянутыя поверхности Σ представляютъ поверхности minima или поверхности съ постоянной Гауссовской кривизной т. е. когда соотношеніе (1) имѣетъ одну изъ двухъ формъ

$$R_1 + R_2 = 0, \quad R_1 R_2 = m = \text{const},$$

мы и приступимъ.

По прежнему будемъ пользоваться подвижной системой координатъ (T), связанной опредѣленнымъ образомъ съ поверхностью S.

За плоскость xy примемъ касательную плоскость къ поверхности S, за плоскость xz плоскость паденія лучей конгруэнціи D.

За кривыя $v = \text{const}$ примемъ кривыя, касательныя къ нашимъ осямъ x-овъ, а за кривыя $u = \text{const}$ ихъ ортогональныя траэкторіи.

Въ этихъ предположеніяхъ уравненіе луча конгруэнціи D по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будетъ

$$y = 0, \quad \sin\alpha x - \cos\alpha z = 0;$$

координаты любой точки этого луча будутъ

$$x = \varrho\cos\alpha, \quad y = 0, \quad z = \varrho\sin\alpha,$$

а слѣдовательно проэкціи ея перемѣщеній на оси (T) таковы:

$$\delta x = \xi du + d(\varrho\cos\alpha) + (q du + q_1 dv)\varrho\sin\alpha,$$

$$\delta y = \eta_1 dv + (r du + r_1 dv)\varrho\cos\alpha - (p du + p_1 dv)\varrho\sin\alpha,$$

$$\delta z = d(\varrho\sin\alpha) - (q du + q_1 dv)\varrho\cos\alpha.$$

Чтобы наши лучи были нормальны къ нѣкоторой поверхности Σ, небходимо и достаточно, какъ это мы видѣли въ первой главѣ, чтобы всевозможныя перемѣщенія нѣкоторой точки M $(l\cos\alpha,\ 0,\ l\sin\alpha)$ удовлетворяли соотношенію

$$\cos\alpha\delta x + \sin\alpha\delta z = 0,$$

или

$$dl + \xi\cos\alpha du = 0. \tag{2}$$

Изъ послѣдняго соотношенія, слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial(\xi\cos\alpha)}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Разстояніе фокальныхъ точекъ лучей нашей конгруэнціи отъ начала координатъ (T) получимъ, исключая du и dv изъ соотношеній

$$\delta y = 0, \quad \sin\alpha\delta x - \cos\alpha\delta z = 0;$$

уравненіе, корнями котораго будутъ указанныя разстоянія, имѣетъ форму:

$$\varrho^2\left[-r_1\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}+r_1q\cos\alpha+p_1\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}-p_1q\sin\alpha+r\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\right.$$
$$\left.-p\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}-rq_1\cos\alpha+pq_1\sin\alpha\right]+\varrho\left[\xi r_1\sin\alpha\cos\alpha-\xi p_1\sin^2\alpha-\eta_1\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\eta_1 q\right]+$$
$$+\xi\eta_1\sin\alpha=0. \tag{4}$$

Если черезъ ϱ_1 и ϱ_2 обозначимъ корни этого уравненія, а черезъ l разстояніе отъ начала координатъ (T) соотвѣтственной точки M поверхности Σ, нормальной къ лучамъ D, то радіусы кривизны поверхности Σ, очевидно, дадутся выраженіями

$$R_1=l-\varrho_1,\quad R_2=l-\varrho_2. \tag{5}$$

§ 2. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію задачи Guichard'а въ случаѣ, когда поверхность Σ — поверхность minima т. е. когда радіусы кривизны ея связаны соотношеніемъ

$$R_1+R_2=0.$$

На основаніи (5) это соотношеніе приметъ видъ

$$2l-(\varrho_1+\varrho_2)=0, \tag{6}$$

гдѣ l опредѣляется изъ уравненія (2).

Опредѣляя изъ (4) сумму корней $\varrho_1+\varrho_2$ и исключая изъ соотношенія (6) при помощи уравненій Codazzi-Mainardi функціи p, q, мы дадимъ этому соотношенію слѣдующую форму:

$$-2lr_1\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}+2l\xi\eta_1K\sin\alpha+\xi r_1\sin\alpha-\eta_1\frac{\partial\alpha}{\partial u}+2lr\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}-$$
$$-\frac{1}{p_1}\left[2lr_1\xi\eta_1K\cos\alpha+\xi\eta_1^2K\right]-\frac{q_1^2}{p_1}\left[2lr_1\frac{\xi}{\eta_1}\cos\alpha+\xi\right]+$$
$$+p_1\left[2l\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\xi\sin^2\alpha\right]+q_1\left[2l\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\xi}{\eta_1}-2lr\cos\alpha\right]=0;$$

здѣсь черезъ K мы обозначили Гауссовскую кривизну поверхности S.

Послѣднее соотношеніе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S; но такъ какъ оно представляетъ нѣкоторую зависимость между функціями p_1, q_1, то на основаніи разсужденій, приведенныхъ нами въ § 7 главы I, оно должно удовлетворяться тождественно при всевозможныхъ значеніяхъ p_1, q_1.

Такимъ образомъ, если поставленная нами задача допускаетъ рѣшенія, то функціи ξ, η_1, α, l должны удовлетворять слѣдующимъ уравненіямъ:

$$-2lr_1\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}+2l\xi\eta_1 K\sin\alpha+\xi r_1\sin\alpha-\eta_1\frac{\partial\alpha}{\partial u}+2lr\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}=0, \tag{7}$$

$$\xi\eta_1 K[2lr_1\cos\alpha+\eta_1]=0, \tag{8}$$

$$\frac{\xi}{\eta_1}[2lr_1\cos\alpha+\eta_1]=0, \tag{9}$$

$$\sin\alpha\left[2l\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\xi\sin\alpha\right]=0, \tag{10}$$

$$\frac{2l}{\eta_1}\left[\xi\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}-r\eta_1\cos\alpha\right]=0; \tag{11}$$

къ этимъ уравненіямъ мы должны еще присоединить уравненія (2) и (3) предыдущаго §-а, а именно:

$$dl+\xi\cos\alpha du=0,\quad \frac{\partial(\xi\cos\alpha)}{\partial v}=0.$$

Всю совокупность уравненій (2), (3) и (7) — (11) назовемъ для краткости уравненіями (E).

Мы видимъ, что уравненія (8) и (9) тождественны, а потому мы будемъ имѣть шесть уравненій (E).

Исключимъ пока случай $\alpha=\text{const}$.

Обращаясь къ уравненіямъ (3) и (11), получимъ, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=0;$$

первое изъ этихъ уравненій показываетъ, что кривыя $v=\text{const}$ геодезическія; что касается второго, то выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u, мы на основаніи его можемъ положить

$$\alpha=u. \tag{12}$$

Исключая изъ уравненій (2) и (10) функцію l, получимъ уравненіе для опредѣленія ξ, а именно:

$$\frac{d\xi}{\xi}=-\frac{3\cos u du}{\sin u},$$

откуда, интегрируя, найдемъ

$$\xi=\frac{a}{\sin^3 u}, \tag{13}$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная.

Обращаясь теперь къ уравненію (10), мы получимъ изъ него слѣдующее выраженіе для l:

$$2l = \frac{a}{\sin^2 u}. \tag{14}$$

Если подставимъ въ уравненіе (9) вмѣсто α, ξ, l найденныя для нихъ значенія и замѣтимъ, что $r_1 = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \eta_1}{\partial u}$, то для опредѣленія η_1 получимъ дифференціальное уравненіе

$$\sin u \cos u \frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \eta_1 = 0.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ, что

$$\eta_1 = M(v)\,\mathrm{cotang}\, u,$$

гдѣ $M(v)$ произвольная функція параметра v; нетрудно видѣть, что, выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ v, мы можемъ положить функцію $M(v)$ равной постоянной величинѣ k.

Подставляя всѣ полученныя значенія функцій ξ, η_1, α, l въ уравненіе (7), увидимъ, что оно тождественно удовлетворяется.

Такимъ образомъ видимъ, что наша задача допускаетъ опредѣленное рѣшеніе.

Линейный элементъ поверхности S имѣетъ видъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \mathrm{cotang}^2 u dv^2; \tag{15}$$

отсюда заключаемъ, что поверхность S наложима на нѣкоторую поверхность вращенія.

Чтобы найти уравненіе соотвѣтствующей поверхности вращенія, мы должны, какъ извѣстно, привести линейный элементъ (15) къ виду

$$ds^2 = [1 + (\varphi'(r_0))^2]\, dr_0^2 + r_0^2 dv_1^2, \tag{16}$$

тогда уравненіе искомой поверхности вращенія будетъ

$$z = \varphi(r_0),$$

при чемъ, конечно, за ось $z^{\text{овъ}}$ принята ось вращенія, а r_0^2 равно $x^2 + y^2$.

Сравнивая выраженія (15) и (16), мы можемъ положить

$$v_1 = \frac{kv}{a} \quad r_0^2 = a^2 \mathrm{cotang}^2 u,$$

а отсюда уже, замѣчая, что $dr_0 = -\dfrac{adu}{\sin^2 u}$, найдемъ, что

$$1 + [\varphi'(r_0)]^2 = \frac{1}{\sin^2 u} = 1 + \frac{r_0^2}{a^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ, что искомая поверхность вращенія представляетъ *параболоидъ*, уравненіе котораго

$$z = \frac{r_0^2}{2a} = \frac{x^2 + y^2}{2a}. \tag{17}$$

Примемъ этотъ параболоидъ вращенія за начальную форму поверхности S; какъ легко видѣть, плоскостями паденія лучей соотвѣтственной конгруэнціи D будутъ плоскости меридіановъ.

По самому своему опредѣленію уголъ $\alpha = u$ представляетъ уголъ, составляемый лучами нашей конгруэнціи съ касательными къ меридіанамъ, проведенными въ соотвѣтственныхъ точкахъ паденія лучей.

Съ другой стороны, изъ соотношенія

$$r_0 = a \operatorname{cotang} u, \tag{18}$$

легко заключить, что u есть уголъ касательной къ меридіану съ фокуснымъ радіусомъ векторомъ точки касанія.

Отсюда ясно, что для выбранной нами начальной формы поверхности S всѣ лучи соотвѣтственной конгруэнціи D проходятъ черезъ фокусъ параболоида вращенія.

Выраженіе (14) для разстоянія между соотвѣтственными точками поверхностей S и Σ будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$l = \frac{a^2 + r_0^2}{2a}. \tag{19}$$

Обращаясь къ уравненіямъ (E), мы замѣчаемъ, что всѣ они не измѣнятся при замѣнѣ α черезъ $-\alpha$ т. е. при переходѣ отъ конгруэнціи падающихъ лучей D къ конгруэнціи отраженныхъ лучей D_1; поверхность minima, связанную съ конгруэнціей D_1 такъ, какъ Σ связана съ D, будемъ обозначать черезъ Σ_1.

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ *первой теоремѣ Guichard'a*.

Соединимъ всѣ точки параболоида вращенія

$$2az = x^2 + y^2 = r_0^2$$

съ фокусомъ; полученная конгруэнція прямыхъ D представитъ систе-

му нормалей нѣкоторой поверхности minima Σ. *Разстояніе соотвѣтственныхъ точекъ параболоида и поверхности* Σ *будетъ*

$$l = \frac{a^2 + r_0^2}{2a}.$$

Если теперь мы будемъ какъ угодно деформировать разсматриваемый параболоидъ и неизмѣнно съ нимъ связанную конгруэнцію D, *то послѣдняя будетъ нормальна къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ minima* Σ *во все время деформаціи. Подобнымъ же свойствомъ будетъ обладать конгруэнція* D_1, *неизмѣнно связанная съ деформирующейся поверхностью и представляющая систему отраженныхъ отъ нея лучей, если за падающіе лучи примемъ лучи конгруэнціи* D. *Точки поверхности minima* Σ_1, *нормальной къ лучамъ конгруэнціи* D_1, *симметричны съ точками* Σ *относительно касательныхъ плоскостей поверхности* S, *проведенныхъ въ точкахъ паденія соотвѣтственныхъ лучей. Черезъ* S *обозначены изгибанія нашего параболоида.*

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе, указывающее на интересную зависимость, которая существуетъ между поверхностями minima Σ и Σ_1, нормальными соотвѣтственно къ лучамъ конгруэнцій D и D_1.

Уравненіе касательной плоскости въ соотвѣтственныхъ точкахъ этихъ поверхностей будетъ

$$x\cos\alpha \pm y\sin\alpha - l = 0,$$

гдѣ верхній знакъ относится къ поверхности Σ, а нижній къ поверхности Σ_1.

Принимая во вниманіе полученныя нами значенія α и l, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ;

Разстояніе точекъ одной изъ поверхностей minima Σ *и* Σ_1, *соотвѣтственно нормальныхъ къ лучамъ конгруэнцій* D *и* D_1, *отъ касательной плоскости, проведенной къ другой поверхности въ соотвѣтственной точкѣ, равно постоянной* $|a|$.

Мы исключили пока изъ нашего изслѣдованія случай $\alpha = \text{const}$.

Обращаясь къ уравненіямъ (E), видимъ, что въ этомъ случаѣ можно положить $\xi = 1$; далѣе изъ уравненія (10) имѣемъ, что $\sin\alpha = 0$, т. е. $\alpha = 0$, другими словами лучи нашей конгруэнціи касаются поверхности S, а это случай, разсмотрѣнный Weingarten'омъ и разобранный нами въ § 4 предыдущей главы.

§ 3. Перейдемъ теперь къ случаю, когда конгруэнція падающихъ лучей D остается нормальной къ поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной $\frac{1}{m}$ при всевозможныхъ деформаціяхъ отражающей поверхности S.

На основаніи выраженій (5) соотношеніе $R_1 R_2 = m$ приметъ видъ

$$(l^2 - m) - l(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1 \varrho_2 = 0;$$

на основаніи уравненія (4) и уравненій Codazzi-Mainardi мы послѣ исключенія изъ него функцій p_1, q_1 приведемъ его къ виду:

$$-\frac{\partial \alpha}{\partial u}\left[(l^2 - m) r_1 \cos\alpha + l\eta_1\right] + (l^2 - m)\xi\eta_1 K \sin\alpha +$$

$$+ (l^2 - m) r \cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} + l\xi r_1 \cos\alpha \sin\alpha + \xi\eta_1 \sin\alpha - \frac{1}{p_1}\left[(l^2 - m) r_1 \xi\eta_1 K \cos\alpha +\right.$$

$$\left. + l\xi\eta_1^2 K\right] - \frac{q_1^2}{p_1}\left[(l^2 - m)\frac{\xi r_1 \cos\alpha}{\eta_1} + \xi l\right] + p_1\left[(l^2 - m)\sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi l \sin^2\alpha\right] +$$

$$+ q_1^2\left[(l^2 - m)\frac{\xi \sin\alpha}{\eta_1}\frac{\partial \alpha}{\partial v} - (l^2 - m) r \cos\alpha\right] = 0.$$

Здѣсь по предыдущему K обозначаетъ Гауссовскую кривизну поверхности S.

Это выраженіе должно представлять изъ себя тождество, справедливое для всевозможныхъ значеній p_1, q_1; поэтому функціи ξ, η_1, α, l должны удовлетворять уравненіямъ

$$(l^2 - m)\xi\eta_1 K \sin\alpha + (l^2 - m) r \cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} + l r_1 \xi \sin\alpha \cos\alpha + \xi\eta_1 \sin\alpha = 0, \quad (20)$$

$$\xi\eta_1 K\left[(l^2 - m) r_1 \cos\alpha + l\eta_1\right] = 0, \quad (21)$$

$$\sin\alpha\left[(l^2 - m)\frac{\partial \alpha}{\partial u} - l\xi \sin\alpha\right] = 0, \quad (22)$$

$$(l^2 - m)\left[\sin\alpha \frac{\xi}{\eta_1}\frac{\partial \alpha}{\partial v} - r \cos\alpha\right] = 0; \quad (23)$$

къ этимъ уравненіямъ мы опять должны присоединить уравненія (2) и (3) настоящей главы т. е. уравненія

$$dl + \xi \cos\alpha\, du = 0, \quad \frac{\partial(\xi \cos\alpha)}{\partial v} = 0.$$

По предыдущему совокупность уравненій (2), (3) и (20) — (23) будемъ называть уравненіями (E).

Оставляя въ сторонѣ случай $\alpha = \text{const}$ и обращаясь къ уравненіямъ (3) и (23), найдемъ, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

Изъ перваго заключаемъ, что кривыя $v = \text{const}$ геодезическія на поверхности S; далѣе, подобравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u, мы на основаніи второго изъ этихъ уравненій можемъ положить

$$\alpha = u. \tag{24}$$

Опредѣляя изъ (22) функцію ξ и подставляя ея значеніе въ уравненіе (2), получимъ для опредѣленія функціи l слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{ldl}{l^2 - m} + \frac{\cos u du}{\sin u} = 0;$$

интегрируя его, найдемъ, что

$$l^2 - m = \frac{a}{\sin^2 u}, \tag{25}$$

гдѣ черезъ a обозначена постоянная интеграціи.

Изъ послѣдняго выраженія имѣемъ, что

$$l = \frac{\sqrt{a + m\sin^2 u}}{\sin u},$$

а потому для дѣйствительныхъ поверхностей Σ должно имѣть мѣсто неравенство

$$a + m\sin^2 u > 0. \tag{26}$$

Зная выраженіе для l, легко найдемъ значеніе ξ, а именно:

$$\xi = \frac{a}{\sin^2 u \sqrt{a + m\sin^2 u}}. \tag{27}$$

Обращаясь къ уравненію (21), мы при помощи (22) и найденныхъ нами значеній ξ, l, α, приведемъ его къ виду

$$\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sin u \cos u};$$

отсюда, выбравши приличнымъ образомъ параметръ v, придемъ къ слѣдующему выраженію для функціи η_1:

$$\eta_1 = k \operatorname{cotang} u,$$

гдѣ k постоянная.

Подставляя полученныя нами значенія функцій ξ, η_1, α, l въ уравненіе (20), увидимъ, что оно удовлетворяется тождественно.

Для линейнаго элемента поверхности S въ данномъ случаѣ, мы получили выраженіе

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a + m\sin^2 u)} + k^2 \mathrm{cotang}^2 u dv^2, \tag{29}$$

откуда заключаемъ, что поверхность S наложима на поверхность вращенія.

Найдемъ уравненіе одной изъ соотвѣтственныхъ поверхностей вращенія, при чемъ замѣтимъ, что давая постоянной k какія угодно значенія, мы будемъ получать различныя поверхности вращенія, наложимыя одна на другую.

При рѣшеніи послѣдняго вопроса намъ прійдется разсмотрѣть два случая: 1) когда кривизна поверхности Σ положительна и 2) когда она отрицательна.

Разсмотримъ первый случай т. е. случай, когда $m = n^2 > 0$.

При этомъ мы можемъ сдѣлать относительно постоянной a два предположенія, а именно мы можемъ положить $a > 0$ и $a < 0$.

Въ случаѣ $a > 0$ неравенство (26) удовлетворяется при всевозможныхъ значеніяхъ a.

Сравнимъ теперь выраженіе (29) для линейнаго элемента поверхности S съ общимъ выраженіемъ для линейнаго элемента поверхности вращенія

$$ds^2 = [1 + (\varphi'(r_0))^2]\, dr_0^2 + r_0^2 dv_1^2;$$

какъ легко видѣть, мы можемъ положить

$$v = v_1, \quad r_0 = k\mathrm{cotang} u,$$

откуда найдемъ, что

$$1 + [\varphi'(r_0)]^2 = \frac{a^2 r_0^2 + a^2 k^2}{k^2 [a r_0^2 + k^2 (a + n^2)]},$$

или, рѣшая относительно $[\varphi'(r_0)]^2$

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{(a^2 - k^2 a)\, r_0^2 + k^2 [a^2 - k^2 (a + n^2)]}{k^2 [a r_0^2 + k^2 (a + n^2)]}.$$

Замѣчая, что при условіи $a > 0$ величина $a + n^2$ всегда положительна, мы можемъ положить

$$k^2 = \frac{a^2}{a + n^2}$$

и тогда выраженіе для $[\varphi'(r_0)]^2$ приметъ видъ

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2 r_0^2}{a(r_0^2 + a)}.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, мы получимъ уравненіе искомой поверхности вращенія

$$\frac{z^2}{n^2} - \frac{x^2 + y^2}{a} = 1,$$

откуда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ поверхность S *наложима на двуполый гиперболоидъ вращенія.*

Перейдемъ ко второму случаю, когда при $m = n^2 > 0$ постоянная a отрицательна.

Въ силу неравенства (26) по абсолютной величинѣ a должно быть меньше m т. е.

$$a + n^2 > 0. \tag{30}$$

Разсуждая совершенно аналогично, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы можемъ опредѣлить постоянную k^2 слѣдующимъ образомъ:

$$k^2 = \frac{a^2}{a + n^2},$$

а тогда для опредѣленія соотвѣтственной функціи $\varphi(r_0)$ получимъ дифференціальное уравненіе

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2 r_0^2}{-a(-a - r_0^2)}.$$

Полагая $-a = b^2 > 0$, легко получимъ уравненіе искомой поверхности вращенія

$$\frac{z^2}{n^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

а это эллипсоидъ вращенія.

Итакъ поверхность S во второмъ случаѣ наложима *на эллипсоидъ вращенія.*

Такъ какъ въ силу неравенства (30) величина n^2 больше величины b^2, то *ось вращенія совпадаетъ съ большой осью эллипса.*

Изъ соотношенія $r_0 = k \operatorname{cotang} u$, имѣющаго мѣсто въ обоихъ случаяхъ, подставляя вмѣсто k его значеніе, легко заключить, что u есть уголъ касательной къ меридіану съ фокуснымъ радіусомъ векторомъ точки касанія. Съ другой стороны $u = \alpha$ представляетъ уголъ, составляемый съ той же касательной лучемъ соотвѣтственной конгруэнціи D, проведеннымъ черезъ точку касанія.

Поэтому, если предположимъ, что начальной формой поверхности S служитъ одна изъ полученныхъ нами поверхностей вращенія 2-го порядка, то изъ предыдущаго заключаемъ, что всѣ лучи соотвѣтственной конгруэнціи D будутъ проходить черезъ одинъ какой либо изъ фокусовъ соотвѣтственной поверхности 2-го порядка.

Обращаясь къ выраженію для разстоянія l соотвѣтственныхъ точекъ поверхностей S и Σ, найдемъ для него слѣдующее выраженіе:

$$l^2 = (a + n^2)\frac{r_0^2}{a} + (a + n^2)$$

или слѣдовательно

$$l^2 = \frac{z^2(a + n^2)}{n^2}.$$

Замѣчая, что величина радіуса вектора меридіана будетъ

$$d^2 = \left(n \pm \frac{\sqrt{n^2 + a}}{n} z\right)^2,$$

мы видимъ, что

$$d = \pm(l \pm n),$$

при чемъ верхній знакъ передъ скобками соотвѣтствуетъ эллипсу, нижній гиперболѣ.

Отсюда заключаемъ, что разстояніе соотвѣтственной точки поверхности Σ отъ фокуса поверхности 2-го порядка, лежащаго на нормали къ Σ, величина постоянная, равная n, если кривизну поверхности Σ обозначимъ черезъ $\frac{1}{n^2}$.

Обращаясь къ уравненіямъ (E), замѣтимъ, что они не измѣнятся при замѣнѣ a черезъ $-a$, т. е. при переходѣ отъ конгруэнціи падающихъ лучей D къ конгруэнціи отраженныхъ лучей D_1.

По прежнему поверхность, связанную съ послѣдней конгруэнціей такъ, какъ Σ связана съ D, будемъ обозначать черезъ Σ_1.

Резюмируя все сказанное, приходимъ ко *второй теоремѣ Guichard'a*.

Имѣемъ двуполый гиперболоидъ вращенія съ дѣйствительной осью равной $2n$, или эллипсоидъ вращенія около большей оси, длина которой равна $2n$. Соединимъ всѣ точки разсматриваемой поверхности съ однимъ изъ ея фокусовъ; полученная такимъ образомъ линейчатая конгруэнція D будетъ нормальна къ нѣкоторой поверхности Σ съ постоянной Гауссовской кривизной $\frac{1}{n^2}$. Если теперь будемъ какъ угодно деформировать дан-

ную поверхность вращенія, при чемъ предположимъ, что лучи конгруэнціи D неизмѣнно съ нею связаны, то эти лучи во все время деформаціи будутъ нормальны къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ Σ постоянной кривизны $\frac{1}{n^2}$. Другую подобную конгруэнцію D_1 получимъ, соединяя точки нашихъ поверхностей вращенія съ другимъ фокусомъ. Какъ легко видѣть, точки соотвѣтствующихъ ей поверхностей Σ_1 будутъ симметричны съ точками поверхностей Σ относительно касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ S, проведенныхъ въ точкахъ паденія соотвѣтствующихъ лучей. Черезъ S мы обозначаемъ изгибанія нашихъ поверхностей вращенія 2-го порядка. Если теперь мы будемъ разсматривать поверхности, образованныя точками лучей D, которыя совпадаютъ съ фокусомъ соотвѣтственной поверхности вращенія, то на основаніи извѣстной теоремы Bonnet [1]), онѣ, какъ параллельныя къ поверхностямъ Σ постоянной Гауссовской кривизны $\frac{1}{n^2}$, будутъ имѣть постоянную среднюю кривизну, равную $\frac{1}{n}$. Тѣмъ же свойствомъ будутъ обладать поверхности, точки которыхъ симметричны съ точками разсматриваемыхъ поверхностей относительно касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ S.

§ 4. Обратимся теперь къ случаю, когда кривизна поверхностей Σ отрицательна, т. е. къ случаю, когда

$$m = -n^2 < 0.$$

Выраженіе для разстоянія между соотвѣтственными точками поверхностей S и Σ будетъ въ настоящемъ случаѣ

$$l = \frac{\sqrt{a - n^2 \sin^2 u}}{\sin u},$$

а потому для дѣйствительныхъ поверхностей Σ должно имѣть мѣсто неравенство

$$a - n^2 \sin^2 u > 0. \tag{31}$$

Изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что постоянная a должна быть *положительной;* относительно нея мы можемъ сдѣлать три предположенія

$$a > n^2, \quad a < n^2, \quad a = n^2.$$

Разсмотримъ всѣ эти три случая отдѣльно.

---

[1]) Bonnet. Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (Journal de l'Ecole Polytechnique XLII cahier p. 77).

Выраженіе для $[\varphi'(r_0)]^2$ будетъ, по прежнему, вида

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{(a^2 - k^2 a)\, r_0^2 + k^2 (a^2 - k^2 a) + h^4 n^2}{k^2 [a (r_0^2 + k^2) - n^2 k^2]}. \tag{32}$$

Въ первомъ случаѣ, т. е. когда $a > n^2$, если бы мы пожелали выбрать k подобно предыдущему такимъ образомъ, чтобы независящій отъ r_0 членъ въ числителѣ обратился въ нуль, то мы бы нашли для $[\varphi'(r_0)]^2$ выраженіе вида

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{-n^2}{a (r_0^2 + a^2)} < 0\,,$$

т. е. получили бы мнимую поверхность вращенія 2-го порядка.

Что касается двухъ послѣднихъ случаевъ, то во второмъ изъ нихъ мы должны были бы положить $k^2 = 0$, что невозможно, а въ первомъ мы нашли бы для k^2 выраженіе

$$k^2 = \frac{a^2}{a - n^2} < 0;$$

величина k была бы мнимой и мы опять пришли бы къ мнимымъ поверхностямъ 2-го порядка.

Поэтому выберемъ k^2 такъ, чтобы въ выраженіи (32) для $[\varphi'(r_0)]^2$ коэффиціентъ при r_0^2 въ числителѣ обратился въ нуль.

При этомъ условіи для k^2 найдемъ значеніе

$$k^2 = a > 0,$$

а потому выраженіе для $[\varphi'(r_0)]^2$ приведется къ виду

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2}{r_0^2 + a - n^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\text{при } a > n^2, \quad r_0 = \sqrt{a - n^2}\, \frac{e^{\frac{z}{n}} - e^{-\frac{z}{n}}}{2} = \sqrt{a - n^2}\, \sinh \frac{z}{n},$$

$$\text{при } a < n^2, \quad r_0 = \sqrt{n^2 - a}\, \frac{e^{\frac{z}{n}} + e^{-\frac{z}{n}}}{2} = \sqrt{n^2 - a}\, \cosh \frac{z}{n},$$

$$\text{при } a = n^2, \quad r_0 = e^{\frac{z}{n}}.$$

Въ послѣднемъ случаѣ меридіаномъ искомой поверхности вращенія будетъ служить логариѳмика, ассимптота которой совпадаетъ съ осью вращенія; во второмъ меридіаномъ служитъ укороченная или удлиненная (въ зависимости отъ того будетъ ли $\sqrt{n^2 - a} \lesseqgtr 1$) цѣпная линія.

Въ упомянутомъ нами въ введеніи мемуарѣ Bianchi называетъ полученныя поверхности вращенія соотвѣтственно *гиперболическимъ синусоидомъ, укороченнымъ или удлиненнымъ катеноидомъ и логариѳмической поверхностью вращенія.*

Итакъ мы приходимъ къ *третьей теоремѣ Guichard'a.*

Имѣемъ одну изъ поверхностей вращенія, уравненія которыхъ

$$x^2 + y^2 = (a - n^2)\sinh^2\frac{z}{n}, \quad x^2 + y^2 = (n^2 - a)\cosh^2\frac{z}{n}, \quad x^2 + y^2 = e^{\frac{2z}{n}}.$$

Въ плоскостяхъ меридіановъ черезъ каждую точку этихъ поверхностей проведемъ прямыя, составляющія съ касательными къ меридіанамъ, построеннымъ въ тѣхъ же точкахъ, уголъ u, cotang котораго слѣдующимъ образомъ выражается черезъ координаты точки касанія

$$\text{cotang}\, u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a}}.$$

Полученная такимъ образомъ конгруэнція прямыхъ D представитъ систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ съ постоянной Гауссовской кривизной $-\frac{1}{n^2}$. Если теперь будемъ какъ угодно деформировать нашу поверхность вращенія, при чемъ предположимъ, что лучи конгруэнціи D неизмѣнно съ нею связаны, то эти лучи во все время деформаціи будутъ нормальны къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ Σ съ постоянной отрицательной кривизной $-\frac{1}{n^2}$. Подобнымъ же свойствомъ будутъ обладать конгруэнціи лучей D_1, отраженныхъ отъ деформирующейся поверхности. Точки соотвѣтствующей имъ поверхности Σ_1 постоянной кривизны будутъ симметричны съ точками поверхностей Σ относительно касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ поверхностямъ S въ точкахъ паденія соотвѣтственныхъ лучей. Черезъ S мы обозначаемъ изгибанія данныхъ поверхностей вращенія.

Выраженіе для разстоянія l между соотвѣтственными точками S и Σ будетъ, какъ легко видѣть,

$$l = \sqrt{r_0^2 + a - n^2}.$$

Въ случаѣ, когда $a = n^2$ найдемъ слѣдующее интересное построеніе.

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ $l = r_0$; далѣе изъ уравненія меридіана $z = n\log r_0$ и соотношенія $r_0 = k\cot\text{ang}\,u = n\cot\text{ang}\,u$ находимъ, что $\frac{dz}{dr_0} = \tan g\,u$, откуда заключаемъ, что радіусы параллелей совпадаютъ съ лучами конгруэнціи D. Что касается поверхности Σ, то нетрудно убѣдиться, что въ случаѣ, когда поверхность S представляетъ логариѳмическую поверхность вращенія, она представляетъ ничто иное, какъ геометрическое мѣсто центровъ параллелей т. е. ось вращенія.

Такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующую теорему.

Будемъ какъ угодно деформировать логариѳмическую поверхность вращенія

$$2z = n\log(x^2 + y^2),$$

при чемъ предположимъ, что съ нею неизмѣнно связана конгруэнція лучей D, совпадающихъ съ радіусами параллелей. Въ такомъ случаѣ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, совпадавшихъ вначалѣ съ осью вращенія, будутъ поверхности Σ съ постоянной Гауссовской кривизной $-\frac{1}{n^2}$, ортогональныя къ лучамъ соотвѣтственной конгруэнціи D.

Намъ остается только разсмотрѣть оставленный пока въ сторонѣ случай, когда $\alpha = \text{const}$.

Изъ уравненій (E) находимъ, что при l отличномъ отъ нуля, (случай, который предполагаемъ à priori) α равно 0, а это указываетъ на то, что прямыя конгруэнціи D касаются поверхности S.

Такимъ образомъ приходимъ къ Weingarten'овскому случаю, разсмотрѣнному нами въ § 4 предыдущей главы.

§ 5. Изъ предыдущаго видимъ, что для всѣхъ поверхностей вращенія, на которыя наложимы наши поверхности S, между угломъ α, составляемымъ лучами конгруэнцій D съ касательными, проведенными къ меридіанамъ въ точкѣ паденія луча, и радіусомъ параллели, проходящей черезъ ту же точку, существуетъ соотношеніе

$$r_0 \tan g\,\alpha = k = \text{const}.$$

Обращаясь къ результатамъ § 7 главы I, видимъ, что въ этомъ случаѣ главныя кривыя поверхности S по отношенію къ конгруэнціямъ D и D_1 будутъ сопряженными кривыми, при чемъ онѣ останутся сопряженными при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S.

Далѣе, такъ какъ конгруэнціи D и D_1 представляютъ конгруэнціи нормалей, то въ силу разсужденій § 4 той же I главы, главныя кривыя поверхности S по отношенію къ конгруэнціямъ D и D_1 совпадаютъ.

Наконецъ, изъ самого опредѣленія главныхъ линій явствуетъ, что онѣ въ данномъ случаѣ соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны поверхностей Σ и Σ_1, нормальныхъ соотвѣтственно къ лучамъ конгруэнцій D и D_1.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, имѣющей фундаментальное значеніе при доказательствѣ теоремъ, обратныхъ теоремамъ Guichard'а.

Линіи кривизны поверхностей Σ и Σ_1, нормальныхъ соотвѣтственно къ падающимъ и отраженнымъ лучамъ D и D_1, разсматриваемымъ въ теоремахъ Guichard'а, соотвѣтствуютъ другъ другу и нѣкоторой системѣ сопряженныхъ кривыхъ на соотвѣтственной отражающей поверхности S.

§ 6. Замѣчая, что линейные элементы поверхностей S приводятся къ двумъ формамъ

$$ds^2 = \frac{a^2du^2}{\sin^6 u} + k^2\mathrm{cotang}^2 u dv^2, \quad ds^2 = \frac{a^2du^2}{\sin^4 u(a + m\sin^2 u)} + k^2\mathrm{cotang}^2 u dv^2,$$

мы видимъ, что всѣ наши поверхности вращенія S представляютъ *основныя поверхности вращенія*, съ которыми мы встрѣтились въ § 8 главы I, при чемъ конгруэнціи D и D_1 будутъ *присоединенными къ нимъ конгруэнціями.*

Въ виду этого мы можемъ высказать слѣдующую теорему.

Ассимптотическія линіи на поверхностяхъ Σ и Σ_1, разсматриваемыхъ въ теоремахъ Guichard'а, соотвѣтствуютъ другъ другу.

§ 7. Укажемъ теперь на интересную связь, существующую между разсмотрѣнной нами задачей Guichard'а и нахожденіемъ нѣкоторой циклической линейчатой конгруэнціи т. е. конгруэнціи, составленной изъ осей круговъ, нормальныхъ къ безчисленному множеству поверхностей.

Изъ разсужденій настоящей главы ясно, что существуетъ система круговъ, ортогональныхъ къ поверхностямъ Σ и Σ_1 и имѣющихъ центры въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ поверхности S.

Координаты точекъ какого либо изъ этихъ круговъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ

$$x = x_0 + r_0\cos t, \quad y = 0, \quad z = r_0\sin t,$$

гдѣ

$$x_0 = \frac{\cos u}{l}, \quad r_0 = l\,\mathrm{tang}\,u, \tag{33}$$

а t уголъ, составляемый соотвѣтственнымъ радіусомъ круга съ положительнымъ направленіемъ оси x-овъ.

Если какая либо точка M этого круга описываетъ поверхность, ортогональную къ разсматриваемой конгруэнціи круговъ, то проэкціи ея перемѣщеній на оси (T) должны удовлетворять соотношенію

$$\sin t\delta x - \cos t\delta z = 0$$

при какихъ угодно значеніяхъ du, dv.

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ x_0 и r_0 функціи одного параметра u, то послѣднее соотношеніе приведется къ виду

$$Udu + Vdv + Tdt = 0, \tag{34}$$

гдѣ

$$U = qr_0 + qx_0\cos t + \left(\xi + \frac{dx_0}{du}\right)\sin t,$$

$$V = q_1(r_0 + x_0\cos t),$$

$$T = -r_0.$$

Какъ извѣстно, соотношеніе (34) будетъ удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ du, dv, если будетъ тождественно удовлетворяться соотношеніе

$$U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) + T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) = 0,$$

которое въ настоящемъ случаѣ приводится къ виду

$$A\sin t + B\cos t + C = 0,$$

при чемъ

$$A = 0,\ \ B = -q_1\left[r_0\xi + x_0\frac{dr_0}{du} + \frac{r_0x_0r_1\xi}{\eta_1}\right],\ \ C = -q_1\left[x_0\left(\xi + \frac{dx_0}{du}\right) + \frac{r_0^2r_1\xi}{\eta_1}\right].$$

Чтобы наши круги были ортогональны къ безчисленному множеству поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы функціи A, B, C обращались тождественно въ нуль [1]), т. е. чтобы удовлетворялись уравненія

$$r_0\xi\eta_1 + x_0\eta_1\frac{dr_0}{du} + r_0x_0r_1\xi = 0,\quad \eta_1x_0\xi + \eta_1x_0\frac{dx_0}{du} + r_0^2r_1\xi = 0. \tag{35}$$

Подставляя сюда значенія ξ, η_1, r_0, x_0 для каждаго изъ разсмотрѣнныхъ нами въ этой главѣ случаевъ, увидимъ, что во всѣхъ этихъ случаяхъ уравненія (35) удовлетворятся. Если кромѣ того замѣтимъ, что условія (35) не зависятъ отъ функцій p, q, p_1, q_1, то прійдемъ къ слѣдующей интересной теоремѣ.

Со всякой поверхностью S, наложимой на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія, неизмѣнно связана нѣкоторая циклическая конгруэнція, остающаяся циклической при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S.

---

[1]) См. Bianchi p. 341.

ГЛАВА IV.

Теоремы Bianchi.

§ 1. Въ предыдущей главѣ мы показали, что, если черезъ точки какой либо поверхности S, наложимой на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія, проведемъ соотвѣтственнымъ образомъ прямыя, то получимъ конгруэнцію нормалей къ нѣкоторой поверхности minima или къ нѣкоторой поверхности съ постоянной Гауссовской кривизной.

Лучи разсматриваемой конгруэнціи, неизмѣнно связанные съ поверхностью S и остающіеся нормальными къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ minima или поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S, лежатъ въ плоскостяхъ кривизны опредѣленной системы геодезическихъ кривыхъ G поверхности S, представляющихъ изгибанія меридіановъ. Но изъ общей теоріи фокальныхъ поверхностей мы знаемъ, что послѣднія плоскости касаются поверхности S_0, *дополнительной* къ S, т. е. поверхности, которая вмѣстѣ съ S представляетъ двѣ фокальныя поверхности конгруэнціи касательныхъ къ геодезическимъ кривымъ G.

Такимъ образомъ лучи конгруэнціи, разсмотрѣнной въ предыдущей главѣ, мы можемъ разсматривать какъ прямыя, лежащія въ касательныхъ плоскостяхъ поверхности S_0.

Отсюда естественно задать себѣ вопросъ, при какихъ условіяхъ лучи нѣкоторой конгруэнціи D, лежащіе въ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 и неизмѣнно связанные съ этими плоскостями, будутъ нормальны къ поверхностямъ minima или поверхностямъ постоянной кривизны при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S_0; при этомъ мы предполагаемъ, что касательныя плоскости къ S_0 неизмѣнно связаны съ самой поверхностью S_0.

Очевидно, мы получимъ одно изъ рѣшеній нашего вопроса, разсматривая поверхности S_0, дополнительныя къ поверхностямъ S, наложимымъ на основныя поверхности вращенія.

Исчерпаются-ли этимъ путемъ всѣ рѣшенія поставленнаго вопроса? Дальнѣйшее изслѣдованіе покажетъ, что нѣтъ.

Итакъ мы приходимъ къ разсмотрѣнію конгруэнцій, составленныхъ изъ прямыхъ, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0.

Подобныя конгруэнціи были впервые изслѣдованы Ribaucour'омъ въ его извѣстномъ мемуарѣ „Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes“ [1]).

Въ этомъ мемуарѣ онъ разсматриваетъ деформаціи поверхностей, при которыхъ касательныя плоскости къ этимъ поверхностямъ предполагаются неизмѣнно съ ними связанными; подобныя деформаціи, съ которыми намъ прійдется постоянно встрѣчаться въ настоящей главѣ, мы для краткости будемъ называть *деформаціями Ribaucour'a*, или *деформаціями* (R).

На поверхности S_0 выберемъ координатныя линіи слѣдующимъ образомъ: за линіи $v = \text{const}$ примемъ кривыя, касательныя къ которымъ параллельны соотвѣтственнымъ лучамъ нашей конгруэнціи D; за кривыя $u = \text{const}$ примемъ кривыя, ортогональныя къ линіямъ $v = \text{const}$.

Оси (T) выберемъ такъ, чтобы ось $x^{\text{-овъ}}$ касалась кривыхъ $v = \text{const}$, ось $y^{\text{-овъ}}$ — кривыхъ $u = \text{const}$.

При этихъ предположеніяхъ уравненіе какого либо луча разсматриваемой конгруэнціи D по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будетъ

$$y = h,$$

гдѣ h нѣкоторая функція отъ u, v.

Проэкціи перемѣщенія какой либо точки $M\,(x, h, o)$ нашего луча на соотвѣтственныя оси будутъ

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi du + dx - (r du + r_1 dv)\,h, \\ \delta y &= \eta_1 dv + dh + (r du + r_1 dv)\,x, \\ \delta z &= (p du + p_1 dv)\,h - (q du + q_1 dv)\,x. \end{aligned} \tag{1}$$

Если точка M описываетъ поверхность, ортогональную къ лучамъ D, то при всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ u, v проэкціи ея перемѣщеній на ось $x^{\text{-овъ}}$ равны нулю.

Такимъ образомъ для подобной точки должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$\delta x = dx + \xi du - (r du + r_1 dv)\,h = 0 \tag{2}$$

каковы бы ни были значенія du, dv.

---

[1]) Journal de mathématiques pures et appliquées 4 série t. 7.

Отсюда видимъ, что функціи ξ, h, r, r_1 должны удовлетворять соотношенію

$$\frac{\partial(rh-\xi)}{\partial v}=\frac{\partial(r_1 h)}{\partial u}. \tag{3}$$

Въ условіе это, необходимое и достаточное для того, чтобы конгруэнція D представляла конгруэнцію нормалей, не входятъ функціи p, q, p_1, q_1, а потому оно будетъ имѣть мѣсто при всевозможныхъ деформаціяхъ нашей поверхности S_0, если только предположимъ, что лучи D неизмѣнно связаны съ соотвѣтственными касательными плоскостями поверхности S_0.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей *теоремѣ Ribaucour'a. Если лучи нѣкоторой конгруэнціи D, лежащіе въ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 и неизмѣнно съ ними связанные, представляютъ конгруэнцію нормалей, то они сохранятъ послѣднее свойство при всевозможныхъ деформаціяхъ* (R) *поверхности* S_0.

Найдемъ теперь фокальныя точки нашихъ конгруэнцій. Мы опредѣлимъ ихъ изъ того условія, что если параметрамъ u, v дадимъ приращенія du, dv, соотвѣтствующія главнымъ кривымъ поверхности S_0 по отношенію къ конгруэнціи D, то перемѣщеніе соотвѣтственной фокальной точки будетъ направлено вдоль самого луча; другими словами, проэкціи этого перемѣщенія на оси y и z будутъ равны нулю.

Обозначая черезъ ϱ абсциссу соотвѣтственной фокальной точки, мы на основаніи (1) выразимъ наши условія слѣдующимъ образомъ:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}+r\varrho\right)du+\left(\frac{\partial h}{\partial v}+r_1\varrho+\eta_1\right)dv=0,$$

$$(ph-q\varrho)\,du+(p_1h-q_1\varrho)\,dv=0.$$

Исключая изъ послѣднихъ уравненій ϱ, получимъ дифференціальное уравненіе главныхъ кривыхъ; исключая же du, dv, найдемъ квадратное уравненіе для опредѣленія абсциссъ фокальныхъ точекъ; послѣднее уравненіе очевидно будетъ вида:

$$\begin{aligned}\varrho^2(q_1r-qr_1)+\varrho\left[r_1ph-q\left(\frac{\partial h}{\partial v}+\eta_1\right)-rp_1h+q_1\frac{\partial h}{\partial u}\right]+\\ +ph\left(\frac{\partial h}{\partial v}+\eta_1\right)-p_1h\frac{\partial h}{\partial u}=0.\end{aligned} \tag{4}$$

§ 2. Перейдемъ теперь къ выводу условій, при которыхъ наша конгруэнція D будетъ представлять систему нормалей къ поверхностямъ minima или къ поверхностямъ постоянной Гауссовской кривизны, какимъ бы деформаціямъ Ribaucour'a мы ни подвергали поверхность S_0.

Начнемъ съ разсмотрѣнія перваго случая, т. е. случая, когда конгруэнція D нормальна къ поверхностямъ minima Σ.

Если абсциссу соотвѣтствующей точки этой послѣдней поверхности обозначимъ черезъ x, а ея радіусы кривизны черезъ R_1 и R_2, то найдемъ для R_1 и R_2 слѣдующія выраженія:

$$R_1 = x - \varrho_1, \quad R_2 = x - \varrho_2,$$

гдѣ ϱ_1, ϱ_2 корни уравненія (4).

Условіе, что поверхность Σ поверхность minima, очевидно, будетъ вида:

$$R_1 + R_2 = 2x - (\varrho_1 + \varrho_2) = 0,$$

или на основаніи (4), послѣ исключенія при помощи уравненій Codazzi-Mainardi функцій p, q:

$$q_1 \left[2xr + \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi r_1 h}{\eta_1} \right] - p_1 rh + \frac{\xi \eta_1 K}{p_1} \left[2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right] +$$
$$+ \frac{\xi q_1^2}{p_1} \left[2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right] = 0;$$

здѣсь черезъ K обозначена Гауссовская кривизна поверхности S_0.

Такъ какъ послѣднее условіе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ деформаціяхъ (R) поверхности S_0, то оно, какъ мы уже видѣли раньше, должно удовлетворяться независимо отъ значеній функцій p_1, q_1.

Отсюда находимъ слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять функціи ξ, η_1, x, h:

$$2xr + \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi r_1 h}{\eta_1} = 0, \tag{5}$$

$$2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 = 0, \tag{6}$$

$$hr = 0. \tag{7}$$

Къ этимъ уравненіямъ мы должны присоединить уравненія (3) и (2), а именно:

$$\frac{\partial (rh - \xi)}{\partial v} = \frac{\partial (r_1 h)}{\partial u}, \quad dx = (rh - \xi)\, du + r_1 h dv.$$

Оставляя въ сторонѣ случай, когда $h = 0$, т. е. случай Weingarten'a, когда лучи конгруэнціи касаются поверхности S_0, мы имѣемъ, что

$$r = 0,$$

т. е., что кривыя $v = \text{const}$ геодезическія; при соотвѣтственномъ выборѣ параметра u можемъ положить

$$\xi = a = \text{const}, \tag{8}$$

гдѣ a какая угодно напередъ заданная постоянная.

Принимая во вниманіе послѣднее обстоятельство, мы приведемъ уравненіе (3) къ виду:

$$\frac{\partial (r_1 h)}{\partial u} = 0,$$

откуда заключаемъ, что

$$r_1 h = \frac{\omega^{\prime}(v)}{2}, \tag{9}$$

гдѣ $\omega(v)$ неизвѣстная пока функція.

Обращаясь къ уравненію (5), мы видимъ, что при $r = 0$ оно обращается въ

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial u};$$

выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ v, мы можемъ положить

$$h = \eta_1. \tag{10}$$

Подставляя это значеніе h въ уравненіе (9) и интегрируя его, легко найдемъ слѣдующее выраженіе для η_1:

$$\eta_1^2 = a\left[\omega'(v)\, u + \omega_1(v)\right], \tag{11}$$

гдѣ $\omega_1(v)$ опять пока неизвѣстная функція отъ v.

Принимая во вниманіе выраженія (8) и (9) и интегрируя уравненіе (2), мы приходимъ къ слѣдующему выраженію для x:

$$x = -au + \frac{\omega(v)}{2} + k, \tag{12}$$

гдѣ k постоянная.

Если теперь подставимъ въ уравненіе (6) найденныя нами значенія ξ, η_1, h, x, то получимъ слѣдующее выраженіе:

$$au\omega''(v) + \omega'(v)\,\omega(v) + 2k\omega'(v) + a\omega_1'(v) + 2a\omega_1(v) = 0;$$

послѣднее соотношеніе должно представлять простое тождество, а потому мы получаемъ слѣдующія уравненія для опредѣленія функцій ω и ω_1:

$$\omega''(v) = 0, \quad \omega'(v)\,\omega(v) + 2k\omega'(v) + a\omega_1'(v) + 2a\omega_1(v) = 0.$$

Интегрируя первое изъ нихъ, найдемъ, что

$$\omega(v) = mv + n,$$

гдѣ m и n постоянныя.

Подставляя это значеніе $\omega(v)$ во второе изъ полученныхъ уравненій, найдемъ линейное дифференціальное уравненіе 1-го порядка относительно ω_1, интеграломъ котораго будетъ служить функція

$$\omega_1(v) = ge^{-2v} - \frac{m^2}{2a}v + \frac{m^2}{4a} - \frac{mn + 2km}{2a};$$

здѣсь g новая постоянная.

Такимъ образомъ для η_1^2 мы найдемъ слѣдующее значеніе:

$$\eta_1^2 = a\left[mu - \frac{m^2}{2a}v + ge^{-2v} + \frac{m^2}{4a} - \frac{mn + 2km}{2a}\right].$$

Постоянной a, какъ мы видѣли раньше, можетъ быть приписано какое угодно значеніе; выберемъ ее такъ, чтобы имѣло мѣсто соотношеніе $\frac{m^2}{2a} = m$, т. е. положимъ

$$2a = m,$$

тогда, вводя вмѣсто v параметръ $v_1 = -v$, мы приведемъ линейный элементъ нашей поверхности къ виду

$$ds^2 = a^2du^2 + a^2[2(u + v_1) + ge^{2v_1} + 2c]\,dv^2,$$

гдѣ

$$2c = a - n - 2k.$$

Наконецъ, если вмѣсто u введемъ параметръ $u_1 = u + c$, то для линейнаго элемента поверхности S_0 найдемъ окончательно слѣдующее выраженіе:

$$ds^2 = a^2\{du_1^2 + [2(u_1 + v_1) + ge^{2v_1}]\,dv^2\}.$$

Обращаясь къ выраженіямъ для функцій ω, x, h, мы найдемъ для нихъ слѣдующія значенія въ параметрахъ u_1, v_1:

$$\omega(v) = -2av_1 + n,\ x = -a(u_1 + v_1) + \frac{a}{2},\ h = a\sqrt{2(u_1 + v_1) + ge^{2v_1}}. \quad (13)$$

Поверхность S_0 принадлежитъ къ классу поверхностей, найденныхъ впервые Weingarten'омъ [1]) и характеризуемыхъ линейнымъ элементомъ вида

$$ds^2 = du_1^2 + 2[u_1 + \psi'(v_1)]\,dv_1^2.$$

[1]) Comptes rendus t. CXII p. 607, 706; Darboux t. IV pp. 308—337.

Если извѣстна одна поверхность съ этимъ линейнымъ элементомъ, то опредѣленіе всѣхъ поверхностей, наложимыхъ на нее, сводится къ опредѣленію поверхности, обладающей тѣмъ свойствомъ, что радіусы кривизны ея ϱ', ϱ'' въ любой точкѣ и разстояніе p начала координатъ отъ касательной плоскости въ той же точкѣ связаны соотношеніемъ

$$\varrho' + \varrho'' = -2p - \psi''(p).$$

Такимъ образомъ приходимъ къ *первой теоремѣ Bianchi*.

Если линейчатая конгруэнція D, составленная изъ лучей, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 и неизмѣнно съ этими плоскостями связанныхъ, остается нормальной къ поверхностямъ тіпіта при всевозможныхъ деформаціяхъ (R) поверхности S_0, то послѣдняя наложима на поверхность Weingarten'a съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = a^2\{du_1^2 + [2(u_1+v_1) + ge^{2v_1}]\,dv_1^2\}.$$

Прямыя конгруэнціи D параллельны касательнымъ къ кривымъ $v = \text{const}$, при чемъ разстояніе h каждаго луча D отъ соотвѣтственной касательной таково:

$$h = a\sqrt{2(u_1+v_1) + ge^{2v_1}}.$$

Въ нашемъ изслѣдованіи мы предполагали, что всѣ постоянныя интеграціи m, n, g отличны отъ нуля.

Легко видѣть, что обращеніе въ нуль постоянной n не будетъ представлять никакого интереса.

Посмотримъ теперь, какое вліяніе окажетъ на наши результаты обращеніе въ нуль постоянной g.

Линейный элементъ поверхности S_0 приметъ въ этомъ случаѣ слѣдующую форму:

$$ds^2 = a^2[du_1^2 + 2(u_1+v_1)\,dv_1^2].$$

Легко видѣть, что наша поверхность S_0 наложима на поверхность вращенія, при чемъ кривыя $u_1 + v_1 = \text{const}$ соотвѣтствуютъ параллелямъ поверхности вращенія, а ихъ ортогональныя траекторіи меридіанамъ [1]).

---

[1]) Справедливость нашего утвержденія явствуетъ изъ того, что всѣ поверхности съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = f(au+bv)\,du^2 + \varphi(au+bv)\,dv^2,$$

гдѣ a и b постоянныя, наложимы на поверхности вращенія. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ, какъ кривизна K, такъ и дифференціальные параметры $\Delta_1 K$ и $\Delta_2 K$ будутъ функціями отъ $au+bv$, а слѣдовательно $\Delta_1 K = \omega(K)$, $\Delta_2 K = \omega_1(K)$, а это имѣетъ мѣсто для поверхностей, наложимыхъ на поверхности вращенія. Далѣе, такъ какъ кривыя $K = \text{const}$ представляютъ изгибанія параллелей и такъ какъ $K = F(au+bv)$, то отсюда слѣдуетъ, что кривыя $au+bv = \text{const}$ соотвѣтствуютъ параллелямъ.

Постараемся поэтому привести нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = a^2 [M(\lambda)\, d\lambda^2 + N(\lambda)\, d\varphi^2],$$

гдѣ

$$\lambda = 2(u_1 + v_1). \tag{14}$$

Кривыя $\varphi = \mathrm{const}$ представляютъ ортогональныя траэкторіи кривыхъ $\lambda = \mathrm{const}$, поэтому мы найдемъ ихъ уравненіе, интегрируя уравненіе

$$\nabla(\lambda, \varphi) = 0,$$

гдѣ ∇ извѣстный смѣшанный инваріантъ.

Интегрированіе послѣдняго уравненія приводится къ интегрированію линейнаго уравненія

$$\frac{du_1}{dv_1} - 2u_1 = 2v_1,$$

а потому для φ мы получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\varphi = [2(u_1 + v_1) + 1]\, e^{-2v_1} = (\lambda + 1)\, e^{-2v_1}. \tag{15}$$

Опредѣляя изъ (14) и (15) u_1, v_1 какъ функціи λ и φ, мы приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = a^2 \left[\frac{\lambda d\lambda^2}{4(\lambda + 1)} + (1 + \lambda) \frac{d\varphi^2}{4\varphi^2}\right]. \tag{16}$$

Найдемъ теперь линейный элементъ поверхности S, дополнительной къ данной поверхности S_0 относительно конгруэнціи касательныхъ къ геодезическимъ кривымъ $\varphi = \mathrm{const}$.

Въ § 5 главы II мы видѣли, что если линейный элементъ нѣкоторой поверхности можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

то линейный элементъ дополнительной поверхности будетъ вида

$$ds_1^2 = \frac{\left[U \dfrac{d^2 U}{du^2}\right]^2}{\left[\dfrac{dU}{du}\right]^4} du^2 + \frac{dw^2}{\left[\dfrac{dU}{du}\right]^2}.$$

При этомъ если координаты точекъ первой поверхности будутъ x, y, z, то координаты соотвѣтственныхъ точекъ второй поверхности будутъ

$$x_1 = x - \alpha \frac{U}{U'}, \quad y = y_1 - \alpha' \frac{U}{U'}, \quad z = z_1 - \alpha'' \frac{z}{z'},$$

гдѣ α, α', α'' cos'ы угловъ, составляемыхъ касательными къ кривымъ $v = \text{const}$, проведеннымъ на первой поверхности, съ осями координатъ.

Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$du^2 = a^2 \frac{\lambda d\lambda^2}{4(\lambda+1)}, \quad U^2 = a^2(\lambda+1),$$

а потому для дополнительной поверхности найдемъ

$$ds_1^2 = a^2 \left[\frac{\lambda+1}{4\lambda} d\lambda^2 + \frac{\lambda}{4} dw^2\right].$$

Сравнивая это выраженіе для линейнаго элемента съ общимъ выраженіемъ линейнаго элемента поверхностей вращенія

$$ds_1^2 = [1 + (f'(r_0))^2]\, dr_0^2 + r_0^2 dv^2,$$

найдемъ, что

$$v = \frac{w}{2}, \quad r_0^2 = a^2\lambda,$$

а потому для опредѣленія $f(r_0)$ будемъ имѣть дифференціальное уравненіе

$$[f'(r_0)]^2 = \frac{r_0^2}{a^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ уравненіе искомой поверхности вращенія

$$z = f(r_0) = \frac{x^2+y^2}{2a},$$

а это параболоидъ вращенія.

Итакъ дополнительная поверхность S къ нашей поверхности S_0 представляетъ поверхность, наложимую на параболоидъ вращенія.

Покажемъ теперь, что лучи нашей конгруэнціи D проходятъ черезъ соотвѣтственныя точки поверхности S, т. е., что наша конгруэнція *присоединенная* конгруэнція поверхности S.

Замѣтимъ, что cos' угла θ, составляемаго кривыми $\varphi = \text{const}$ съ кривыми $u_1 = \text{const}$, т. е. съ осями $y^{\text{-овъ}}$ нашей системы подвижныхъ координатъ (T) будетъ

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2(u_1+v_1)+1}},$$

кромѣ того разстояніе соотвѣтственныхъ точекъ поверхностей S_0 и S, равное $\frac{U}{U'}$, будетъ

$$\delta = a\sqrt{2(u_1+v_1)+1}\cdot\sqrt{2(u_1+v_1)}.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что ордината соотвѣтственной точки поверхности S будетъ

$$y = \delta\cos\theta = a\sqrt{2(u_1 + v_1)} = h,$$

откуда видимъ, что эта точка лежитъ на соотвѣтственномъ лучѣ конгруэнціи D.

Обратимся наконецъ къ тому случаю, когда $m = 0$; тогда будемъ имѣть слѣдующія значенія для функцій $\omega(v)$ и $\omega_1(v)$:

$$\omega(v) = n, \quad \omega_1(v) = ge^{-2v}.$$

Положимъ постоянную a равной единицѣ, тогда для функцій ξ, η_1, h, x найдемъ, какъ легко видѣть, слѣдующія выраженія:

$$\xi = 1, \quad \eta_1 = \sqrt{g}e^{-v}, \quad x = -u + \frac{n + 2k}{2}, \quad h = \sqrt{g}e^{-v},$$

откуда заключаемъ, что линейный элементъ поверхности S_0 будетъ вида:

$$ds^2 = du^2 + ge^{-2v}dv^2,$$

т. е. поверхность S_0 *развертывающаяся.*

Проэкціи перемѣщеній соотвѣтственной точки поверхности Σ на основаніи выраженій (1) будутъ:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = (pdu + p_1dv)h - (qdu + q_1dv)x,$$

откуда заключаемъ, что въ этомъ случаѣ поверхность Σ обращается въ кривую, представляющую ортогональную траэкторію касательныхъ плоскостей нашей развертывающейся поверхности S_0.

§ 3. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію условій, при которыхъ лучи нашей конгруэнціи D при всевозможныхъ деформаціяхъ (R) поверхности S_0 остаются нормальными къ поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной $\frac{1}{m}$.

Придерживаясь обозначеній двухъ предыдущихъ параграфовъ, мы приходимъ къ слѣдующему условію:

$$R_1R_2 = (x - \varrho_1)(x - \varrho_2) = m,$$

гдѣ ϱ_1, ϱ_2 корни уравненія (4), а x абсцисса соотвѣтственной точки поверхности Σ.

На основаніи уравненія (4) и уравненій Codazzi-Mainardi, при помощи которыхъ мы можемъ исключить функціи p, q, мы приведемъ наше условіе къ слѣдующему виду:

$$q_1\left[(x^2-m)\,r+x\frac{\partial h}{\partial u}-\frac{\xi h}{\eta_1}\left(r_1x+\frac{\partial h}{\partial v}+\eta_1\right)\right]-p_1h\left(rx+\frac{\partial h}{\partial u}\right)+$$

$$+\left(\frac{\xi\eta_1K}{p_1}+\frac{\xi}{\eta_1}\frac{q_1^2}{p_1}\right)\left[r_1(x^2-m)+x\frac{\partial h}{\partial v}+x\eta_1\right]=0;$$

здѣсь по прежнему черезъ K обозначена Гауссовская кривизна поверхности S_0.

Послѣднее соотношеніе должно, по условію нашей задачи, удовлетворяться независимо отъ значеній функцій p_1, q_1; поэтому оно разбивается на рядъ слѣдующихъ уравненій:

$$r(x^2-m)+x\frac{\partial h}{\partial u}-\frac{\xi h}{\eta_1}\left(r_1x+\frac{\partial h}{\partial v}+\eta_1\right)=0, \tag{17}$$

$$r_1(x^2-m)+x\frac{\partial h}{\partial v}+x\eta_1=0, \tag{18}$$

$$h\left(rx+\frac{\partial h}{\partial u}\right)=0, \tag{19}$$

къ которымъ мы должны присоединить уравненія (2) и (3), а именно:

$$dx=(rh-\xi)\,du+r_1h\,dv,\qquad \frac{\partial(rh-\xi)}{\partial v}=\frac{\partial(r_1h)}{\partial u}.$$

Предполагая, что h не равно нулю, т. е., что лучи нашей конгруэнціи не касаются поверхности S_0, мы на основаніи (19) приведемъ уравненіе (17) къ виду:

$$rm+\frac{\xi h}{\eta_1}\left(r_1x+\frac{\partial h}{\partial v}+\eta_1\right)=0; \tag{20}$$

въ силу же послѣдняго уравненія уравненіе (18) обратится въ слѣдующее:

$$r\eta_1x+r_1\xi h=0. \tag{21}$$

Такимъ образомъ рѣшеніе нашего вопроса сводится къ интегрированію системы уравненій (2), (3), (19), (20), (21).

Комбинируя уравненія (19) и (21), найдемъ, что

$$\eta_1\frac{\partial h}{\partial u}=h\frac{\partial\eta_1}{\partial u},$$

откуда при соотвѣтственномъ выборѣ параметра v имѣемъ

$$h=\eta_1. \tag{22}$$

Если примемъ во вниманіе это значеніе h, то уравненіе (19) обратится въ слѣдующее:

$$r = -\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{1}{x}\frac{\partial \eta_1}{\partial u}; \tag{23}$$

отсюда легко найдемъ, что

$$\frac{\partial x}{\partial u} = rh - \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 h = \frac{\eta_1}{\xi}\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \frac{x}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v}. \tag{24}$$

Подставимъ эти значенія въ уравненіе (3), при чемъ для краткости положимъ

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \omega,$$

тогда послѣднее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$x\frac{\partial \omega}{\partial u} + \xi\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0. \tag{25}$$

Полученное отсюда значеніе x должно удовлетворять уравненію (2), или что то же, уравненіямъ (24).

Подставляя вмѣсто x полученное нами значеніе во второе изъ уравненій (24), найдемъ, что функція ω должна удовлетворять дифференціальному уравненію вида

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial v}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}\right] = 0;$$

выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u, мы можемъ всегда положить, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ для ω слѣдующее выраженіе:

$$\omega = \frac{1}{\xi}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \varphi'(v - u), \tag{26}$$

гдѣ φ пока неизвѣстная функція.

Кромѣ того изъ (25) заключаемъ, что при нашемъ выборѣ параметра u

$$x = \xi. \tag{27}$$

Если теперь проинтегрируемъ уравненіе (26), то для ξ найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$\xi = e^{\varphi(v-u)+\psi(u)}; \tag{28}$$

функція $\psi(u)$ опредѣлится изъ условія:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = rh - \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi,$$

которое въ данномъ случаѣ приводится къ виду

$$\psi'(u) = -1.$$

Отсюда находимъ, что

$$\psi(u) = -u + k,$$

гдѣ k произвольная постоянная.

Намъ остается опредѣлить только функціи η_1 и φ.

Обращаясь къ уравненію (21), мы напишемъ его въ слѣдующей формѣ:

$$\eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

или принимая во вниманіе значеніе ξ

$$\frac{\partial (\eta_1^2)}{\partial u} = 2\varphi'(v-u)\, e^{2\varphi(v-u)-2u+2k};$$

интегрируя это уравненіе, мы найдемъ, что

$$\eta_1^2 = \gamma(v) + 2\int \varphi'(v-u)\, e^{2[\varphi(v-u)-u+k]} du, \tag{29}$$

гдѣ $\gamma(v)$ нѣкоторая, пока неизвѣстная, функція отъ v.

Подставивъ теперь всѣ полученныя нами значенія функцій ξ, η_1, x, h въ уравненіе (20), мы приведемъ его къ виду:

$$\begin{gathered}(e^{2[\varphi(v-u)-u+k]} - m)\,\varphi'(v-u) + \gamma(v) + \frac{\gamma'(v)}{2} + \\ + \int [2\varphi'^2(v-u) + \varphi''(v-u) + 2\varphi'(v-u)]\, e^{2\varphi(v-u)-2u+2k} du = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе по u получимъ:

$$m\varphi''(v-u) = 0,$$

откуда, такъ какъ m отлично отъ нуля (кривизну поверхности Σ мы предполагаемъ конечной), найдемъ:

$$\varphi(v-u) = n(v-u) + n_1, \tag{31}$$

при чемъ, какъ легко видѣть, не нарушая общности, можемъ положить $n_1 = 0$.

Если подставимъ это значенiе функцiи φ въ уравненiе (30), то оно, послѣ простыхъ вычисленiй, приведется къ виду:

$$\gamma'(v) + 2\gamma(v) - mn = 0.$$

Интегрируя послѣднее линейное уравненiе, найдемъ слѣдующее выраженiе для функцiи $\gamma(v)$:

$$\gamma(v) = mn + be^{-2v},$$

гдѣ b постоянная.

Зная φ и γ мы легко найдемъ изъ (29) значенiе η_1, а именно:

$$\eta_1^2 = mn + be^{-2v} - \frac{n}{n+1} e^{2nv - 2(n+1)u + 2k};$$

что касается функцiи ξ, то она на основанiи (28) имѣетъ слѣдующее значенiе:

$$\xi = e^{nv - (n+1)u + k}.$$

Такимъ образомъ линейный элементъ нашей поверхности S_0 будетъ слѣдующаго вида:

$$ds^2 = e^{2nv - 2(n+1)u + 2k} du^2 + \left[be^{-2v} - \frac{n}{n+1} e^{2nv - 2(n+1)u + 2k} + mn \right] dv^2. \quad (32)$$

Вводя вмѣсто v параметръ v_1, при чемъ

$$v_1 = v + \frac{k}{n},$$

мы приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = e^{2\tau} du^2 + \left[ge^{-2v_1} - \frac{n}{n+1} e^{2\tau} + mn \right] dv_1^2, \quad (33)$$

гдѣ

$$\tau = nv_1 - (n+1)u. \quad (34)$$

Наше выраженiе для ds^2 становится иллюзорнымъ, если мы постоянной n дадимъ значенiе -1; поэтому этотъ случай требуетъ болѣе детальнаго разсмотрѣнiя.

Если $n = -1$, т. е. если функцiя $\varphi(v-u)$ имѣетъ значенiе

$$\varphi(v-u) = u - v,$$

то подставляя это значеніе $\varphi(v-u)$ въ уравненіе (30), мы получимъ для опредѣленія γ слѣдующее линейное уравненіе:

$$\gamma'(v)+2\gamma(v)+2(m-e^{-2v+2k})=0\,.$$

Интегрируя его, найдемъ для $\gamma(v)$ выраженіе

$$\gamma(v)=2ve^{-2(v-k)}+be^{-2(v-k)}-m\,,$$

гдѣ b постоянная интеграціи.

Зная φ и γ, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ η_1 и ξ, а именно:

$$\eta_1^2=2(v-u)e^{-2(v-k)}+be^{-2(v-k)}-m$$

и

$$\xi=e^{-v+k}\,,$$

а потому линейный элементъ нашей поверхности S_0 въ этомъ случаѣ будетъ вида:

$$ds^2=e^{-2(v-k)}du^2+[2(v-u)e^{-2(v-k)}+be^{-2(v-k)}-m]\,dv^2\,. \tag{35}$$

Если введемъ новый параметръ v_1, при чемъ

$$v=v_1+k\,,$$

то нашъ линейный элементъ приведется къ виду:

$$ds^2=e^{-2v_1}du^2+[2(v_1-u)e^{-2v_1}+ge^{-2v_1}-m]\,dv^2\,. \tag{36}$$

Здѣсь черезъ g мы обозначили постоянную $2k+b$.

Поверхности, имѣющія линейный элементъ послѣдняго типа, играютъ весьма важную роль въ теоріи тройно-ортогональныхъ системъ Weingarten'a [1]).

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если нѣкоторая линейчатая конгруэнція D, лучи которой лежатъ въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 и при томъ неизмѣнно связаны съ этими плоскостями, остается нормальной къ поверхностямъ Σ постоянной кривизны $\frac{1}{m}$ при всевозможныхъ деформаціяхъ (R) поверхности S_0, то линейный элементъ поверхности S_0 можетъ быть приведенъ къ одному изъ видовъ (33) *и* (36). *Координаты соотвѣтственныхъ точекъ поверхности Σ по отношенію къ выбраннымъ нами осямъ (T) будутъ*

$$x=\xi,\quad y=h=\eta_1,$$

[1]) См. Bianchi Кар. 20.

если черезъ ξ^2 *и* η_1^2 *обозначимъ коэффиціенты линейнаго элемента* (36) *поверхности* S_0.

Намъ остается разсмотрѣть случай, когда поверхность S_0 наложима на поверхность вращенія, и показать, что тогда она представляетъ поверхность, дополнительную къ одной изъ основныхъ поверхностей съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a + m\sin^2 u)} + k^2 \mathrm{cotang}^2 u\, dv^2.$$

Поверхность S_0 будетъ, очевидно, наложима на поверхность вращенія въ случаѣ, когда постоянную g, входящую въ выраженіе (33), положимъ равной нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ коэффиціенты линейнаго элемента S_0 будутъ функціями τ, которое въ свою очередь представляетъ линейную функцію параметровъ u, v.

Кривыя $\tau = \mathrm{const}$ будутъ изгибаніями параллелей, а ихъ ортогональныя траэкторіи $\varphi = \mathrm{const}$ изгибаніями меридіановъ.

Положимъ

$$\frac{e^{2\tau}}{m(n+1) - e^{2\tau}} = \lambda,$$

тогда дифференціальное уравненіе ортогональныхъ траэкторій къ кривымъ $\tau = \mathrm{const}$ приметъ видъ:

$$\lambda du + dv = 0,$$

или

$$dv - \frac{d\lambda}{2(1+\lambda)(n\lambda + n + 1)} = 0.$$

Отсюда получаемъ уравненіе ортогональныхъ траэкторій въ конечномъ видѣ, а именно:

$$\varphi = v - \int \frac{d\lambda}{2(1+\lambda)(n\lambda + n + 1)} = c.$$

Примемъ за координатныя линіи на поверхности S_0 кривыя $\lambda = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$.

Какъ легко видѣть, линейный элементъ нашей поверхности приведется къ виду:

$$ds^2 = \frac{m\, d\lambda^2}{\lambda(1+\lambda)(n\lambda + n + 1)} + \frac{mn(n\lambda + n + 1)}{(n+1)(1+\lambda)} d\varphi^2.$$

На основаніи выраженія (10) главы II, линейный элементъ поверхности S, составляющей вторую фокальную поверхность касательныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, будетъ:

$$ds_1^2 = \frac{m\,(n\lambda + n + 1)}{4\lambda^3\,(1+\lambda)}\,d\lambda^2 + \frac{m}{\lambda}\,dw^2.$$

Если теперь положимъ

$$\lambda = \frac{n+1}{n}\,\text{tang}^2\theta,$$

то приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = \frac{mnd\theta^2}{\sin^4\theta\,[n + \sin^2\theta]} + k^2 \text{cotang}^2\theta dw^2,$$

гдѣ k постоянная.

Отсюда заключаемъ, что поверхность S наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія.

Опредѣляя, какъ въ концѣ § 2, ординату соотвѣтственной точки поверхности S, найдемъ, что она равна h, т. е., что лучи нашей конгруэнціи проходятъ черезъ соотвѣтственныя точки поверхности S; другими словами наша конгруэнція представляетъ изъ себя конгруэнцію, *присоединенную къ одной изъ поверхностей, наложимыхъ на опредѣленную основную поверхность вращенія.*

Если постоянной n дадимъ значеніе нуль, то, какъ нетрудно видѣть, поверхность S_0 будетъ развертывающейся, а поверхность Σ дегенерируетъ въ кривую линію, ортогональную къ касательнымъ плоскостямъ поверхности S_0.

ГЛАВА V.

Теорема, обратная первой теоремѣ Guichard'а. Одно преобразованіе поверхностей minima. Теорема, обратная первой теоремѣ Bianchi.

§ 1. Въ третьей главѣ мы видѣли, что, зная поверхность S, наложимую на параболоидъ вращенія и имѣющую линейный элементъ вида

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \text{cotang}^2 u dv^2, \tag{1}$$

гдѣ a и k постоянныя, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ двѣ поверхности minima Σ и Σ_1.

Поверхности эти будутъ соотвѣтственно нормальны къ системамъ падающихъ и отраженныхъ лучей D и D_1, представляющихъ конгруэнціи, *присоединенныя* къ S. Лучи конгруэнцій D и D_1 лежатъ въ плоскостяхъ кривизны кривыхъ $v = \text{const}$ и составляютъ съ касательными къ этимъ кривымъ, проведенными въ соотвѣтственныхъ точкахъ паденія лучей, углы u и $-u$.

Разстоянія l точекъ поверхностей Σ и Σ_1 отъ соотвѣтственныхъ точекъ поверхности S выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ углы u:

$$2l = \frac{a}{\sin^2 u}. \tag{2}$$

Линіи кривизны поверхностей Σ и Σ_1 соотвѣтствуютъ одной и той же системѣ сопряженныхъ кривыхъ, проведенныхъ на поверхности S.

Положимъ теперь, что имѣемъ нѣкоторую поверхность minima Σ.

Въ настоящей главѣ мы покажемъ, что можно всегда найти на нормаляхъ къ Σ такія точки M, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ будетъ поверхность S съ линейнымъ элементомъ (1), т. е. поверхность, наложимая на параболоидъ вращенія; для этой поверхности S система нормалей къ Σ представляетъ присоединенную конгруэнцію.

Разъ будетъ найдена поверхность S, то тѣмъ самымъ мы опредѣлимъ вторую поверхность minima Σ_1, которую мы можемъ считать нѣкоторымъ *преобразованіемъ* поверхности Σ.

Такимъ образомъ вопросъ о нахожденіи поверхности S, представляющій, очевидно, вопросъ обратный задачѣ Guichard'a, тѣсно связанъ съ вопросомъ о нѣкоторомъ преобразованіи поверхностей minima.

Далѣе, въ четвертой главѣ, мы видѣли, что зная нѣкоторую поверхность S_0 Weingarten'овскаго типа съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = du^2 + [2(u+v) + ge^{2v}]\,dv^2,$$

гдѣ g постоянная, мы найдемъ нѣкоторую поверхность minima Σ, нормальную къ конгруэнціи прямыхъ, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ поверхности S_0 и параллельныхъ соотвѣтственнымъ касательнымъ къ кривымъ $v = \text{const}$.

Представляетъ извѣстный интересъ обратный вопросъ, а именно, можно-ли найти для каждой поверхности minima Σ соотвѣтственную Weingarten'овскую поверхность, связанную съ Σ такимъ соотношеніемъ, какъ упомянутая поверхность S_0.

Рѣшеніемъ этихъ двухъ вопросовъ, т. е. вопросовъ, обратныхъ задачамъ Guichard'a и Bianchi, мы и займемся въ настоящей главѣ.

§ 2. Итакъ предположимъ, что имѣемъ нѣкоторую поверхность minima Σ.

Отнесемъ ее къ линіямъ кривизны $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$; оси (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы ось $x^{\text{овъ}}$ касалась кривыхъ $\beta = \text{const}$, а ось $y^{\text{овъ}}$ кривыхъ $\alpha = \text{const}$.

Какъ извѣстно [1]), линейный элементъ поверхности Σ въ этомъ случаѣ можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = \frac{\omega^2}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2); \tag{3}$$

основныя величины, характеризующія нашу поверхность, будутъ

$$\xi = \eta_1 = -\frac{\omega}{2}, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = q = \frac{1}{\omega}, \quad r = -\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha},$$

при чемъ ω интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial^2 \log\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\omega}{\partial\beta^2} = \frac{1}{\omega^2}. \tag{4}$$

Возьмемъ на нормали къ Σ какую либо точку $M(o, o, l)$; проэкціи ея перемѣщеній на оси (T) будутъ

$$\delta x = \frac{2l - \omega^2}{2\omega}\, d\alpha, \quad \delta y = -\frac{2l + \omega^2}{2\omega}\, d\beta, \quad \delta z = dl. \tag{5}$$

---

[1]) Darboux. t. III p. 321.

Посмотримъ, нельзя-ли выбрать точку M такъ, чтобы она описала въ пространствѣ поверхность S, наложимую на параболоидъ вращенія, и при томъ такую, чтобы нормали къ Σ представляли конгруэнцію, присоединенную къ S.

Для опредѣленія l имѣемъ два условія: первое—это зависимость (2) между l и угломъ u, составляемымъ нормалью къ Σ съ соотвѣтственной касательной плоскостью къ поверхности S; второе—то, что линіи кривизны поверхности Σ соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S.

Выразимъ аналитически эти два условія и покажемъ, что они всегда совмѣстны.

Уравненіе касательной плоскости къ S по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будетъ:

$$Mx + Ny + z - l = 0; \tag{6}$$

коэффиціенты M и N опредѣлятся изъ условія

$$M\delta x + N\delta y + \delta z = 0,$$

гдѣ δx, δy, δz представляютъ проэкціи перемѣщеній разсматриваемой точки.

Такъ какъ послѣднее соотношеніе имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$, то отсюда имѣемъ:

$$M = -\frac{2\omega}{2l - \omega^2}\frac{\partial l}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{2\omega}{2l + \omega^2}\frac{\partial l}{\partial \beta}. \tag{7}$$

Если черезъ u обозначимъ уголъ, составляемый нормалью къ Σ съ плоскостью (6), тогда очевидно найдемъ, что

$$\sin^2 u = \frac{1}{M^2 + N^2 + 1}.$$

Подставляя это значеніе $\sin^2 u$ въ соотношеніе (2), получимъ искомое первое условіе, служащее для опредѣленія функціи l

$$M^2 + N^2 = \frac{2l - a}{a}. \tag{I}$$

Условіе (I) представляетъ дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 1-го порядка относительно l.

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Черезъ нѣкоторую неподвижную точку P пространства, принятую за начало подвижной системы координатъ (T_1), оси которой постоянно параллельны соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T), проведемъ плоскость, параллельную плоскости (6); уравненіе ея относительно (T_1) будетъ

$$Mx + Ny + z = 0. \tag{8}$$

Дадимъ параметру α приращеніе $d\alpha$; оси (T_1) при этомъ примутъ положеніе (T_1'), точка M поверхности S передвинется вдоль кривой $\beta = \text{const}$ въ нѣкоторую точку M'; уравненіе плоскости, проходящей черезъ нашу точку P и параллельной касательной плоскости къ S въ точкѣ M', по отношенію къ осямъ (T_1') будетъ, очевидно

$$M'x' + N'y' + z' = 0; \tag{9}$$

гдѣ

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial \alpha} d\alpha, \quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Пересѣченіе плоскостей (8) и (9) дастъ намъ въ предѣлѣ направленіе, сопряженное съ кривой $\alpha = \text{const}$ на поверхности S.

Уравненіе плоскости (9) по отношенію къ осямъ (T_1) получимъ, полагая [1])

$$x' = x - \left(\frac{y}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{z}{\omega}\right) d\alpha, \quad y' = y + \frac{x}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha, \quad z' = z + \frac{x}{\omega} d\alpha,$$

а потому по отношенію къ осямъ (T_1) предѣльная прямая пересѣченія плоскостей (8) и (9) будетъ дана уравненіемъ (8) и уравненіемъ

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{1}{\omega}\right) x + \left(\frac{\partial N}{\partial \alpha} - \frac{M}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right) y - \frac{Mz}{\omega} = 0.$$

Если кривыя $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ сопряженныя на поверхности S, то послѣдняя прямая должна быть параллельна перемѣщенію нашей точки M вдоль кривой $\alpha = \text{const}$.

Написавши это условіе, приходимъ къ уравненію

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{M}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{MN}{\omega}; \tag{II}$$

уравненіе это въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно l; въ раскрытой формѣ оно будетъ

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{2l + \omega^2}{2l - \omega^2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\frac{\partial l}{\partial \alpha} - \frac{2l - \omega^2}{2l + \omega^2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial l}{\partial \beta} + \frac{8l}{(2l - \omega^2)(2l + \omega^2)}\frac{\partial l}{\partial \alpha}\frac{\partial l}{\partial \beta}.$$

---

[1]) См. формулы (11) § 6 гл. II.

Уравненіе (II) мы можемъ представить въ нѣсколько иной формѣ, а именно, пользуясь выраженіями (7) для M и N, можемъ привести это уравненіе къ виду

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = \frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{MN}{\omega}. \tag{III}$$

§ 3. Дальнѣйшая задача сводится къ доказательству совмѣстности уравненій (I) и (II) или, что то же, уравненій (I) и (III).

Предположимъ, что послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто; въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравненіе (I) по α и вставимъ въ полученное уравненіе вмѣсто $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ его значеніе (II), тогда найдемъ, что

$$M\left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{N^2}{\omega} + \frac{2l - \omega^2}{2a\omega}\right] = 0.$$

Исключая пока случай $M = 0$, получимъ, что

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = -\frac{N}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{N^2}{\omega} - \frac{2l - \omega^2}{2a\omega}. \tag{IV}$$

Наконецъ дифференцируя уравненіе (I) по β, пользуясь выраженіемъ (III) для $\frac{\partial M}{\partial \beta}$ и исключая случай $N = 0$, найдемъ еще слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -\frac{M}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{M^2}{\omega} + \frac{2l + \omega^2}{2a\omega} \tag{V}$$

Итакъ, если наши уравненія (I) и (II) совмѣстны, то должны быть совмѣстны уравненія (II)—(V), т. е. должны удовлетворяться тождественно соотношенія

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Въ справедливости послѣднихъ тождествъ легко убѣдиться простымъ дифференцированіемъ выраженій (II—V), если при томъ примемъ во вниманіе соотношеніе (I) и вспомнимъ, что ω интегралъ уравненія

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Если теперь, перенесемъ всѣ члены въ уравненіи (I) въ лѣвую часть и обозначимъ полученную лѣвую часть, черезъ L, то въ силу уравненій (II)—(V), будемъ имѣть, что производная $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что $L = \text{const}$.

Для совмѣстности уравненій (II)—(V) эта постоянная должна равняться нулю.

Уравненія (II)—(V) представляютъ *три* уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно l; если они совмѣстны, то они имѣютъ въ извѣстной области голоморфный интегралъ, опредѣляемый начальными значеніями функцій l, $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Для совмѣстности уравненій (II)—(V) эти начальныя значенія должны удовлетворять соотношенію $L_0 = 0$, гдѣ черезъ L_0 обозначимъ значеніе функціи L, когда вставимъ въ нее вмѣсто функцій l, $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ ихъ начальныя значенія.

Принимая теперь во вниманіе, что постоянная a выбрана нами произвольно видимъ, что въ наше выраженіе для l будетъ входить *три* произвольныхъ постоянныхъ a, l_0, $\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)_0$, а потому поверхностей S, удовлетворяющихъ двумъ нашимъ условіямъ будетъ ∞^3.

§ 4. Покажемъ теперь, что всѣ найденныя нами поверхности S наложимы на параболоидъ вращенія.

Обращаясь къ выраженіямъ (5) проэкцій перемѣщеній точки M поверхности S, мы получимъ для линейнаго элемента этой поверхности слѣдующее выраженіе:

$$ds_0^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \left[\frac{(2l - \omega^2)^2}{4\omega^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)^2\right] d\alpha^2 +$$

$$+ 2 \frac{\partial l}{\partial \alpha} \frac{\partial l}{\partial \beta} d\alpha d\beta + \left[\frac{(2l + \omega^2)^2}{4\omega^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial \beta}\right)^2\right] d\beta^2.$$

Если поверхность S представляетъ одну изъ искомыхъ поверхностей, наложимыхъ на параболоидъ вращенія, то на ней кривыя $l = \text{const}$ должны быть геодезическими параллелями, т. е. дифференціальный параметръ $\Delta_1(l)$, относительно линейнаго элемента ds_0^2 долженъ быть функціей одного l [1]).

Составляя этотъ параметръ, найдемъ, что

$$\Delta_1(l) = \frac{2l - a}{2l}.$$

[1]) Bianchi. p. 159.

Какъ извѣстно [1]), дифференціалъ дуги геодезическихъ линій, ортогональныхъ къ кривымъ $l = \text{const}$, будетъ

$$d\theta = \sqrt{\frac{2l}{2l-a}}\, dl;$$

линейный же элементъ поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2 du^2.$$

Для опредѣленія функціи σ, найдемъ выраженіе для геодезической кривизны линій $l = \text{const}$, пользуясь извѣстной формулой Bonnet:

$$\frac{1}{\varrho_{gl}} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{F\dfrac{\partial l}{\partial\beta} - G\dfrac{\partial l}{\partial\alpha}}{H} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{F\dfrac{\partial l}{\partial\alpha} - E\dfrac{\partial l}{\partial\beta}}{H}\right\},$$

гдѣ

$$H = \sqrt{E\left(\frac{\partial l}{\partial\alpha}\right)^2 - 2F\frac{\partial l}{\partial\alpha}\frac{\partial l}{\partial\beta} + G\left(\frac{\partial l}{\partial\beta}\right)^2},$$

а E, F, G коэффиціенты линейнаго элемента разсматриваемой поверхности S.

Воспользовавшись уравненіями (I)—(V) и вводя вмѣсто l перемѣнное u по формулѣ

$$2l = \frac{a}{\sin^2 u},$$

мы послѣ всѣхъ вычисленій приходимъ къ уравненію

$$-\frac{1}{\varrho_{gl}} = \frac{\partial \log\sigma}{\partial u} = -\frac{1}{\sin u \cos u},$$

откуда найдемъ, что

$$\sigma = k \operatorname{cotang} u,$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Замѣчая, что

$$d\theta = \sqrt{\frac{2l}{2l-a}}\, dl = -\frac{a\,du}{\sin^3 u},$$

представимъ линейный элементъ нашей поверхности S въ видѣ

---

[1]) Bianchi. p. 160.

$$ds_0^2 = \frac{a^2du^2}{\sin^6 u} + k^2\text{cotang}^2 u dw^2,$$

откуда заключаемъ, что эта поверхность наложима на параболоидъ вращенія.

Чтобы доказать, что конгруэнція нормалей къ Σ представляетъ конгруэнцію, присоединенную къ S, намъ остается доказать, что на поверхности S кривыя $l = \text{const}$ ортогональны къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ S и Σ.

Уравненіе какой-либо изъ этихъ плоскостей по отношенію къ соотвѣтственной системѣ координатъ (T), будетъ очевидно

$$Nx - My = 0.$$

Проэкціи перемѣщеній точки M поверхности S вдоль кривой $l = \text{const}$ будутъ

$$\delta x = \frac{2l - \omega^2}{2\omega} d\alpha, \quad \delta y = \frac{2l + \omega^2}{2\omega} \frac{\frac{\partial l}{\partial \alpha}}{\frac{\partial l}{\partial \beta}} d\beta, \quad \delta z = 0,$$

или на основаніи (7)

$$\delta x = \frac{2l - \omega^2}{2\omega} d\alpha, \quad \delta y = -\frac{2l - \omega^2}{2\omega} \frac{M}{N}, \quad \delta z = 0,$$

откуда имѣемъ

$$-\frac{M}{\delta y} = \frac{N}{\delta x},$$

а это и есть требуемое условіе.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности типа Σ соотвѣтствуетъ ∞^3 поверхностей S, наложимыхъ на параболоидъ вращенія, при чемъ нормали къ Σ составляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S.

§ 5. Мы исключили изъ нашего изслѣдованія случай, когда $M = 0$ или $N = 0$; разсмотримъ его подробнѣе.

Положимъ сперва, что $M = 0$; обращаясь къ уравненію (III), видимъ, что въ этомъ случаѣ либо $N = 0$, либо $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$.

Первое предположеніе не даетъ намъ рѣшенія задачи, ибо тогда мы найдемъ, что $l = \text{const}$ и $u = \text{const}$, а такого рѣшенія задача Guichard'а очевидно не допускаетъ. Что касается второго предположенія, то оно показываетъ, что въ этомъ случаѣ поверхность Σ — поверхность вращенія, а такъ какъ она еще и поверхность minima, то слѣдовательно она представляетъ *катеноидъ*.

Всѣ уравненія (I)—(V) сводятся къ одному уравненію (I), которое въ данномъ случаѣ будетъ обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ 1-го порядка.

Интегралъ его заключаетъ *одну* произвольную постоянную; если присоединимъ къ ней еще произвольную постоянную α, то увидимъ, что поверхностей S, удовлетворяющихъ нашимъ условіямъ будетъ ∞^2.

Линейный элементъ этихъ поверхностей будетъ вида:

$$ds_0^2 = \frac{(2l-\omega^2)^2}{4\omega^2}\,d\alpha^2 + \left[\frac{(2l+\omega^2)^2}{4\omega^2} + \left(\frac{dl}{d\beta}\right)^2\right] d\beta^2.$$

Такъ какъ l и ω функціи одного параметра β, то уже изъ самой формы линейнаго элемента видимъ, что поверхность S наложима на поверхность вращенія. При помощи того же анализа, что и въ предыдущемъ параграфѣ, мы убѣдимся, что поверхность S наложима на параболоидъ вращенія.

Далѣе помощью весьма простыхъ разсужденій можно показать, что поверхность S будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ поверхностью вращенія.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ разстояніе l между соотвѣтственными точками поверхностей S и Σ функція одного параметра β, то оно не мѣняется при перемѣщеніяхъ по этимъ поверхностямъ вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$; другими словами, перемѣщенія вдоль какой-либо кривой $\beta = \text{const}$ на поверхностяхъ S и Σ будутъ параллельны между собою.

Но такъ какъ на катеноидѣ Σ кривыя $\beta = \text{const}$, какъ параллели, представляютъ окружности, то и на поверхности S онѣ будутъ окружностями.

Наконецъ, такъ какъ онѣ представляютъ на послѣдней поверхности изгибанія параллелей, то отсюда уже ясно, что поверхность S въ этомъ случаѣ *поверхность вращенія*.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякому катеноиду Σ соотвѣтствуетъ ∞^2 поверхностей вращенія S, наложимыхъ на параболоидъ вращенія, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ поверхностямъ S.

§ 6. Изъ первой теоремы Guichard'а мы знаемъ, что геометрическимъ мѣстомъ точекъ, симметричныхъ съ точками поверхности Σ относительно соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхности S, будетъ нѣкоторая поверхность minima Σ_1.

Покажемъ теперь это, не прибѣгая къ теоремѣ Guichard'а.

Разсмотримъ геометрическое мѣсто Σ_1 точекъ, симметричныхъ съ точками поверхности Σ относительно касательныхъ плоскостей къ S т. е. относительно плоскостей

$$Mx + Ny + z - l = 0.$$

Координаты разсматриваемой точки будутъ, очевидно,

$$x = \frac{2lM}{M^2 + N^2 + 1}, \quad y = \frac{2lN}{M^2 + N^2 + 1}, \quad z = \frac{2l}{M^2 + N^2 + 1},$$

или, на основанiи соотношенiя (I)

$$x = aM, \quad y = aN, \quad z = a. \tag{10}$$

Отсюда заключаемъ, что *разстоянiе точекъ поверхности Σ_1 отъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ поверхности Σ въ соотвѣтственныхъ точкахъ, величина постоянная.*

Найдемъ выраженiе для линейнаго элемента поверхности Σ_1. Проэкцiи перемѣщенiй точки (10) на соотвѣтственныя оси (T) будутъ:

$$\delta x = -\frac{\omega}{2} d\alpha + a dM + \frac{a}{\omega} d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) aN,$$

$$\delta y = -\frac{\omega}{2} d\beta + a dN + \left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) aM - \frac{a}{\omega} d\beta,$$

$$\delta z = \frac{a}{\omega}(N d\beta - M d\alpha),$$

или на основанiи уравненiй (II)—(V)

$$\delta x = \frac{1}{\omega}(aN^2 + a - l)\, d\alpha + \frac{aMN}{\omega} d\beta,$$

$$\delta y = -\frac{aMN}{\omega} d\alpha + \frac{1}{\omega}(l - a - aM^2)\, d\beta, \tag{11}$$

$$\delta z = -\frac{aM}{\omega} d\alpha + \frac{aN}{\omega} d\beta.$$

Если теперь примемъ во вниманiе соотношенiе (I), то для линейнаго элемента поверхности Σ_1 найдемъ слѣдующее выраженiе:

$$ds_1^2 = \frac{\omega_1^2}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{12}$$

гдѣ черезъ ω_1 мы обозначили функцію, опредѣляемую выраженіемъ

$$\frac{\omega_1^2}{4}=\frac{l^2}{\omega^2}. \tag{13}$$

Уравненіе касательной плоскости къ нашей поверхности Σ_1, какъ легко видѣть, будетъ

$$aM(x-aM)+aN(y-aN)+(a-l)(z-a)=0,$$

или на основаніи соотношенія (I)

$$aMx+aNy+(a-l)z-al=0; \tag{14}$$

отсюда видимъ, что разстояніе соотвѣтственной точки поверхности Σ отъ плоскости (14) равно

$$\delta=\frac{|al|}{+\sqrt{a^2M^2+a^2N^2+(a-l)^2}}=|a|,$$

т. е. равно той же постоянной величинѣ $|a|$, которая представляетъ разстояніе соотвѣтственной точки поверхности Σ_1 отъ касательной плоскости къ Σ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что соотношеніе между поверхностями Σ и Σ_1 взаимное.

Остается намъ показать, что поверхность Σ_1 поверхность minima и что ассимптотическія линіи и линіи кривизны поверхности Σ_1 соотвѣтствуютъ ассимптотическимъ линіямъ и линіямъ кривизны поверхности Σ.

Для доказательства этихъ положеній воспользуемся методомъ, которымъ мы уже пользовались не разъ и которымъ намъ прійдется еще часто пользоваться.

Примемъ нѣкоторую неподвижную точку P за начало координатъ (T_1), оси которыхъ остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T). Черезъ точку P проведемъ плоскость, параллельную касательной плоскости (14) къ поверхности Σ_1; уравненіе этой плоскости по отношенію къ (T_1) таково:

$$aMx+aNy+(a-l)z=0. \tag{15}$$

Дадимъ параметрамъ α, β приращенія $d\alpha$, $d\beta$; тогда оси (T_1) примутъ положеніе (T_1'); по отношенію къ (T_1') уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку P и параллельной соотвѣтственной касательной плоскости къ Σ_1, будетъ

$$aM'x'+aN'y'+(a-l')z'=0,$$

гдѣ

$$M' = M + dM, \quad N' = N + dN, \quad l' = l + dl.$$

Уравненіе той же плоскости по отношенію къ (T_1) въ силу извѣстныхъ формулъ преобразованія координатъ [1]), будетъ:

$$Hx + Ky + Lz = 0, \tag{16}$$

гдѣ

$$H = \left(a N^2 + a - 2l + \frac{\omega^2}{2}\right) d\alpha + aMNd\beta,$$

$$K = -aMNd\alpha + \left(\frac{\omega^2}{2} - a + 2l - aM^2\right) d\beta,$$

$$L = a\left(l - a - \frac{\omega^2}{2}\right) d\alpha + a\left(a - l - \frac{\omega^2}{2}\right) d\beta.$$

Прямая пересѣченія плоскостей (15) и (16) параллельна направленію, сопряженному на поверхности Σ_1 съ тѣмъ, которое характеризуется измѣненіемъ параметровъ α, β на величины $d\alpha$, $d\beta$.

Если черезъ $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ обозначимъ проэкціи перемѣщенія по кривой, сопряженной съ кривой $(d\alpha, d\beta)$, то отсюда заключаемъ, что условіе

$$H\delta_1 x + K\delta_1 y + L\delta_1 z = 0, \tag{17}$$

представляетъ, какъ легко видѣть, ничто иное, какъ дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ, проведенныхъ на поверхности Σ_1.

Если теперь, черезъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ обозначимъ приращенія параметровъ, соотвѣтствующія перемѣщенію $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$, то на основаніи уравненія (I) приведемъ уравненіе (17) къ виду:

$$d\alpha\delta\alpha - d\beta\delta\beta = 0. \tag{18}$$

Послѣднее уравненіе вмѣстѣ съ тѣмъ представляетъ уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на данной поверхности Σ; такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что *всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ_1 и наоборотъ.*

Эту же теорему можно выразить нѣсколько иначе, а именно: *ассимптотическія линіи поверхностей Σ и Σ_1 соотвѣтствуютъ другъ другу.*

Наконецъ, легко видѣть, что уравненіе (18) удовлетворяется при $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$; но такъ какъ эти кривыя ортогональны на Σ_1, то слѣдовательно онѣ представляютъ на ней линіи кривизны.

[1]) См. § 6 гл. II.

Итакъ *линіи кривизны на поверхностяхъ* Σ *и* Σ_1 *соотвѣтствуютъ другъ другу.*

Уравненіе ассимптотическихъ линій на поверхностяхъ Σ и Σ_1 будетъ:

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0,$$

а потому, полагая

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

мы напишемъ уравненіе ассимптотическихъ линій въ видѣ

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}.$$

Примемъ за координатныя линіи на поверхности Σ_1 послѣднія кривыя; тогда линейный элементъ нашей поверхности приведется къ формѣ:

$$ds_1^2 = \frac{\omega_1^2}{4}(du^2 + dv^2);$$

отсюда видно, что ассимптотическія линіи на поверхности Σ_1 ортогональны, а слѣдовательно *поверхность* Σ_1 *поверхность minima.*

Итакъ *интегрированіе уравненій* (I)—(V) *приводитъ къ преобразованію поверхности minima* Σ *въ другую поверхность minima* Σ_1. *Поверхности* Σ *и* Σ_1 *связаны между собою такимъ образомъ, что разстояніе точекъ одной изъ нихъ отъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ къ другой, постоянно. Кромѣ того линіямъ кривизны и ассимптотическимъ линіямъ одной поверхности соотвѣтствуютъ линіи кривизны и ассимптотическія линіи другой.*

§ 7. Какъ показалъ Bonnet [1]), со всякой поверхностью minima связана опредѣленнымъ образомъ нѣкоторая другая поверхность minima, называемая *присоединенной* (surface adjointe) къ первой.

Между двумя *присоединенными* поверхностями minima существуютъ слѣдующія соотношенія: 1) онѣ наложимы другъ на друга; 2) касательныя плоскости къ нимъ, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ параллельны, и 3) касательныя къ соотвѣтственнымъ кривымъ, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ, взаимно перпендикулярны.

Обозначимъ черезъ Σ^0, Σ_1^0 двѣ поверхности minima, присоединенныя соотвѣтственно къ поверхностямъ Σ и Σ_1 предыдущаго параграфа.

Посмотримъ, какое соотношеніе существуетъ между этими поверхностями Σ^0 и Σ_1^0.

---

[1]) Note sur la théorie générale des surfaces (Comptes rendus t. XXXVII p. 529—532); см. также Darboux. t. I p. 322.

Предварительно однако разсмотримъ поверхности, связанныя съ какой-либо поверхностью minima Σ такимъ образомъ, что касательныя плоскости въ соотвѣтственныхъ точкахъ этихъ поверхностей и поверхности Σ параллельны между собою, а касательныя, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ къ соотвѣтственнымъ кривымъ на искомыхъ поверхностяхъ и на поверхности Σ, взаимно ортогональны.

Покажемъ, что всѣ искомыя поверхности будутъ поверхностями minima и что въ числѣ ихъ будутъ присоединенныя къ Σ поверхности.

Выберемъ произвольную неподвижную точку P за начало подвижныхъ координатъ (T_1), оси которыхъ остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T); послѣднія оси связаны съ поверхностью Σ такимъ образомъ, какъ мы условились въ § 1-мъ настоящей главы.

Искомыя поверхности будутъ представлять обертки плоскостей, уравненія которыхъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ вида:

$$z = z_0\,, \tag{19}$$

гдѣ z_0 нѣкоторая функція отъ α и β.

Нормали къ искомымъ поверхностямъ представляютъ линейчатыя конгруэнціи, лучи которыхъ параллельны соотвѣтственнымъ осямъ z-овъ координатъ (T_1); уравненіе какого-либо луча по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T_1) будетъ

$$x = x_0\,, \quad y = y_0\,,$$

гдѣ x_0, y_0 нѣкоторыя функціи отъ α, β.

Постараемся опредѣлить изъ поставленныхъ нами условій функціи x_0, y_0, z_0.

Сохраняя всѣ обозначенія предыдущихъ параграфовъ, мы найдемъ слѣдующія выраженія для проэкцій перемѣщеній какой-либо точки (x, y, z) на оси (T_1):

$$\begin{aligned}
\delta x &= dx + \frac{z}{\omega}\,d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) y\,,\\
\delta y &= dy + \left(-\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) x - \frac{z}{\omega}\,d\beta\,,\\
\delta z &= dz + \frac{y}{\omega}\,d\beta - \frac{x}{\omega}\,d\alpha\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Такъ какъ перемѣщенія точки (x_0, y_0, z_0), принадлежащей искомой обертке плоскостей (19), при какихъ угодно безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β происходятъ въ плоскости (19), то слѣдовательно для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$ проэкціи этихъ перемѣщеній на ось $z^{\text{овъ}}$ равны нулю, т. е.

$$dz_0 + \frac{y_0}{\omega} d\beta - \frac{x_0}{\omega} d\alpha = 0,$$

откуда заключаемъ, что

$$x_0 = \omega \frac{\partial z_0}{\partial \alpha}, \quad y_0 = -\omega \frac{\partial z_0}{\partial \beta}. \tag{21}$$

Обратимся теперь ко второму условію; мы можемъ выразить его слѣдующимъ образомъ: перемѣщенія вдоль соотвѣтственныхъ кривыхъ, проведенныхъ на искомой оберткѣ и на поверхности Σ взаимно ортогональны.

Такъ какъ проэкціи перемѣщеній соотвѣтственной точки поверхности Σ на оси (T_1), очевидно, будутъ

$$\delta x = -\frac{\omega}{2} d\alpha, \quad \delta y = -\frac{\omega}{2} d\beta, \quad \delta z = 0,$$

то второе изъ нашихъ условій приведется къ тремъ слѣдующимъ:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + \frac{z_0}{\omega} + \frac{\partial \log\omega}{\partial \beta} y_0 = 0, \\
\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log\omega}{\partial \alpha} y_0 + \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log\omega}{\partial \beta} x_0 = 0, \\
\frac{\partial y_0}{\partial \beta} + \frac{\partial \log\omega}{\partial \alpha} x_0 - \frac{z_0}{\omega} = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Второе изъ условій (22) удовлетворяется тождественно въ силу соотношеній (21); что же касается перваго и послѣдняго условій (22), то въ силу тѣхъ же соотношеній (21) они обратятся въ слѣдующія:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial \log\omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log\omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} - \frac{z_0}{\omega^2}, \\
\frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \log\omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log\omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} - \frac{z_0}{\omega^2}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Такимъ образомъ видимъ, что искомыя поверхности будутъ существовать, если уравненія (23) будутъ совмѣстны.

Докажемъ поэтому, что эти уравненія совмѣстны; дифференцируя первое изъ нихъ по β и принимая во вниманіе, что ω интегралъ уравненія

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2},$$

легко найдемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial z_0}{\partial \beta}\right] = 0.$$

Точно также, дифференцируя второе изъ уравненій (23) по α, получимъ, что

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial z_0}{\partial \beta}\right] = 0,$$

откуда заключаемъ, что если наши уравненія (23) совмѣстны, то z_0 удовлетворяетъ и уравненію

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \beta}\frac{\partial z_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha}\frac{\partial z_0}{\partial \beta} + \frac{k}{2}, \tag{24}$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Теперь уже простымъ дифференцированіемъ убѣждаемся, что уравненія (23) и (24) совмѣстны при какихъ угодно значеніяхъ постоянной k, такъ какъ значенія, получаемыя для $\frac{\partial^3 z_0}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$ и $\frac{\partial^3 z_0}{\partial \alpha \partial \beta^2}$ изъ этихъ уравненій, одинаковы.

Обращаясь къ выраженіямъ (21), легко найдемъ, что уравненіе (24) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0 = -\frac{\partial y_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} x_0 = \frac{k\omega}{2}. \tag{25}$$

Замѣчая теперь, что въ силу условій (22) проэкціи перемѣщеній точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ на оси (T_1) будутъ

$$\delta x = \left(\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0\right) d\beta, \quad \delta y = -\left(\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0\right) d\alpha, \quad \delta z = 0,$$

мы для линейнаго элемента нашей обертки найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds_0^2 = \frac{k^2\omega^2}{4}(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

откуда заключаемъ, что всѣ поверхности, которыя мы получимъ, давая k всевозможныя значенія, будутъ *гомотетичны* съ поверхностью Σ. Въ случаѣ, когда k равно ± 1, найдемъ нѣкоторыя поверхности Σ^0, *наложимыя* на поверхность Σ.

Найдемъ радіусы кривизны и линіи кривизны полученныхъ нами поверхностей, которыя для краткости будемъ обозначать черезъ Σ_k.

На основаніи уравненій (22) и (25) проэкціи перемѣщеній любой точки, лежащей на лучѣ $x = x_0$, $y = y_0$ или, что то же, точки на нормали къ Σ_k, будутъ

$$\delta x = \frac{z - z_0}{\omega} d\alpha + \frac{k\omega}{2} d\beta, \quad \delta y = -\frac{k\omega}{2} d\alpha + \frac{z_0 - z}{\omega} d\beta, \quad \delta z = d(z - z_0).$$

Если приращенія параметровъ ($d\alpha$, $d\beta$) соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны поверхности Σ_k, то перемѣщеніе соотвѣтственнаго центра кривизны этой поверхности будетъ направлено вдоль нормали къ Σ_k; другими словами, для разсматриваемаго перемѣщенія центра кривизны имѣемъ:

$$\delta x = \frac{z - z_0}{\omega} d\alpha + \frac{k\omega}{2} d\beta = 0, \quad \delta y = -\frac{k\omega}{2} d\alpha + \frac{z_0 - z}{\omega} d\beta = 0. \quad (26)$$

Исключая отсюда z, найдемъ дифференціальное уравненіе линій кривизны поверхности Σ_k; оно будетъ вида:

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0,$$

откуда заключаемъ, что *линіямъ кривизны поверхности* Σ_k *соотвѣтствуютъ ассимптотическія линіи поверхности* Σ.

Замѣчая далѣе, что $z - z_0$ въ данномъ случаѣ представляетъ величину соотвѣтственнаго радіуса кривизны поверхности Σ_k и исключая изъ (26) отношеніе $\frac{d\alpha}{d\beta}$, найдемъ, что

$$(z - z_0)^2 = \frac{k^2\omega^4}{4};$$

отсюда заключаемъ, что поверхность Σ_k представляетъ поверхность minima, а слѣдовательно, если положимъ $k = \pm 1$, то соотвѣтственныя поверхности Σ^0 будутъ *присоединенными* поверхностями данной поверхности Σ.

Резюмируя полученныя нами результаты, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *поверхности* Σ_k, *связанныя съ нѣкоторой поверхностью minima* Σ *такимъ образомъ, что касательныя плоскости, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ поверхностей* Σ *и* Σ_k, *параллельны между собою, а касательныя къ соотвѣтственнымъ кривымъ, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ, взаимно ортогональны, представляютъ поверхности minima, гомотетическія съ* Σ; *линіи кривизны поверхностей* Σ_k *соотвѣтствуютъ ассимптотическимъ линіямъ поверхности* Σ. *Если* *коэффиціентъ подобія k равенъ ± 1, то соотвѣтствующія поверхности Σ_k представляютъ поверхности присоединенныя къ Σ.*

§ 8. Въ предыдущемъ параграфѣ мы доказали, что для каждой поверхности minima существуютъ присоединенныя поверхности minima, т. е. поверхности, связанныя опредѣленнымъ образомъ съ данной поверхностью.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію поверхностей Σ^0 и Σ_1^0, соотвѣтственно присоединенныхъ къ поверхностямъ Σ и Σ_1, разсмотрѣннымъ нами въ § 6-мъ этой главы.

Координаты соотвѣтственной точки M поверхности Σ^0 по отношенію къ осямъ (T_1), на основаніи предыдущаго, будутъ:

$$x_0 = \omega \frac{\partial z_0}{\partial \alpha}, \quad y_0 = -\omega \frac{\partial z_0}{\partial \beta}, \quad z_0, \tag{27}$$

гдѣ z_0 удовлетворяетъ уравненіямъ (23) и (24), при чемъ въ послѣднемъ постоянной k приписано значеніе ± 1.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ представляетъ соотвѣтственную точку поверхности Σ_1^0, присоединенной къ поверхности Σ_1, при чемъ (x_1, y_1, z_1) координаты ея по отношенію къ тѣмъ же осямъ (T_1).

Поверхность Σ_1^0 характеризуется тѣмъ, что 1) ея касательная плоскость имѣетъ слѣдующее уравненіе:

$$aM(x - x_1) + aN(y - y_1) + (a - l)(z - z_1) = 0, \tag{28}$$

гдѣ M, N, l извѣстныя намъ функціи; 2) если черезъ δx, δy, δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній точки поверхности Σ_1, соотвѣтствующей точкѣ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ поверхности Σ_1^0, то для всевозможныхъ значеній $(d\alpha, d\beta)$ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$\delta x \delta x_1 + \delta y \delta y_1 + \delta z \delta z_1 = 0 \tag{29}$$

и, наконецъ, 3) линейный элементъ поверхности Σ_1^0 равенъ [1])

$$ds_1^2 = \frac{l^2}{\omega^2}(d\alpha^2 + d\beta^2). \tag{30}$$

Кромѣ того, какъ мы знаемъ, линіямъ кривизны поверхности Σ_1^0 будутъ соотвѣтствовать ассимптотическія кривыя поверхности Σ_1, т. е. кривыя

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{const}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{const}$$

[1]) См. § 6 выр. (12) и (13).

Постараемся, исходя изъ этихъ условій, опредѣлить координаты точки (x_1, y_1, z_1) поверхности Σ_1^0.

Проэкціи перемѣщеній нашей точки таковы:

$$\delta x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{z_1}{\omega} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} y_1\right) d\alpha + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_1\right) d\beta = A_1 d\alpha + B_1 d\beta,$$

$$\delta y_1 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} x_1\right) d\alpha + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} x_1 - \frac{z_1}{\omega}\right) d\beta = A_2 d\alpha + B_2 d\beta, \quad (31)$$

$$\delta z_1 = \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{x_1}{\omega}\right) d\alpha + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta} + \frac{y_1}{\omega}\right) d\beta = A_3 d\alpha + B_3 d\beta.$$

Здѣсь для краткости черезъ A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 мы обозначаемъ коэффиціенты при $d\alpha$ и $d\beta$ въ выраженіяхъ для δx_1, δy_1, δz_1.

Такъ какъ перемѣщенія точки (x_1, y_1, z_1) при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β происходятъ въ плоскости (27), то отсюда имѣемъ два условія:

$$\begin{aligned} &aMA_1 + aNA_2 + (a - l) A_3 = 0, \\ &aMB_1 + aNB_2 + (a - l) B_3 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Если примемъ во вниманіе выраженія (11), то тогда условіе (29) разобьется на три слѣдующихъ условія:

$$A_1 (l - aM^2) - A_2 aMN - A_3 aM = 0,$$

$$B_1 aMN + B_2 (aN^2 - l) + B_3 aN = 0,$$

$$A_1 aMN + A_2 (aN^2 - l) + A_3 aN + B_1 (l - aM^2) - B_2 aMN - B_3 aM = 0.$$

Пользуясь уравненіями (32), мы приведемъ послѣднія соотношенія къ виду:

$$A_1 - MA_3 = 0, \quad B_2 - NB_3 = 0, \quad A_2 - NA_3 - B_1 + MB_3 = 0. \quad (33)$$

Теперь уже нетрудно привести наши соотношенія (32) и (33) къ виду:

$$\begin{aligned} &A_1 - MA_3 = 0, \quad A_2 - \frac{aN^2 - l}{aN} A_3 = 0, \quad B_1 - \frac{aM^2 - l}{aM} B_3 = 0, \\ &B_2 - NB_3 = 0, \quad MA_3 - NB_3 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Изъ уравненій (34) прежде всего имѣемъ, что

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = 0,$$

т. е., что кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ на поверхности Σ_1^0 ортогональны; далѣе на основаніи (34) и послѣдняго изъ нашихъ условій относительно поверхности Σ_1^0 имѣемъ, что

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \frac{l^2}{a^2N^2} A_3^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = \frac{l^2}{a^2M^2} B_3^2 = \frac{l^2}{\omega^2},$$

откуда заключаемъ, что

$$A_3 = \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{x_1}{\omega} = \pm \frac{aN}{\omega}, \quad B_3 = \frac{\partial z_1}{\partial \beta} + \frac{y_1}{\omega} = \pm \frac{aM}{\omega}.$$

Изъ послѣднихъ соотношеній находимъ, что

$$x_1 = \omega \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \mp aN, \quad y_1 = -\omega \frac{\partial z_1}{\partial \beta} \pm aM. \tag{35}$$

Подставляя эти значенія x_1, y_1 въ уравненія (34), при чемъ воспользуемся нашими основными уравненіями (I)—(V), получимъ слѣдующія уравненія, которымъ должна удовлетворять функція z_1:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \frac{z_1}{\omega^2},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} \pm \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \frac{z_1}{\omega^2}.$$

Мы видимъ, что уравненія, которымъ удовлетворяетъ функція z_1, тождественны съ уравненіями (23) и (24), которымъ удовлетворяетъ функція z_0, а потому соотвѣтственнымъ образомъ подобравши постоянныя интеграціи, мы можемъ положить

$$z_1 = z_0,$$

а тогда сравнивая выраженія (27) и (35), имѣемъ:

$$x_0 - x_1 = \pm aN, \quad y_0 - y_1 = \mp aM, \quad z_0 - z_1 = 0,$$

откуда находимъ, что

$$aM(x_0 - x_1) + aN(y_0 - y_1) + (a - l)(z_0 - z_1) = 0,$$

другими словами, точка (x_0, y_0, z_0) поверхности Σ^0 лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности Σ_1^0 въ то время, какъ точка (x_1, y_1, z_1)

поверхности Σ_1^0 лежитъ въ касательной плоскости $z = z_0$ къ поверхности Σ^0.

Отсюда заключаемъ, что прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки поверхностей Σ^0 и Σ_1^0, касаются этихъ поверхностей. Иначе то же обстоятельство можно выразить слѣдующимъ образомъ: *поверхности Σ^0 и Σ_1^0 представляютъ фокальныя поверхности нѣкоторой линейчатой конгруэнціи.*

Какъ мы видѣли, поверхности эти — поверхности minima, на которыхъ кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ представляютъ ассимптотическія линіи.

Такимъ образомъ мы пришли къ линейчатымъ конгруэнціямъ, характеризуемымъ тѣмъ что ассимптотическія линіи на ихъ фокальныхъ поверхностяхъ соотвѣтствуютъ другъ другу; такія конгруэнціи носятъ названіе *конгруэнцій W* по аналогіи съ конгруэнціями нормалей къ какой-либо поверхности W, между фокальными поверхностями которыхъ, какъ мы видѣли [1]), существуетъ подобное соотвѣтствіе.

Случай, когда фокальныя поверхности конгруэнціи W представляютъ поверхности minima, т. е. случай, только что разсмотрѣнный нами, впервые подробно изслѣдованъ Thybaut въ интересномъ мемуарѣ Sur la déformation du paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent [2]), при чемъ Thybaut пришелъ къ этимъ конгруэнціямъ совершенно другимъ путемъ.

Мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности относительно этихъ конгруэнцій, отсылая читателя къ упомянутому мемуару Thybaut; замѣтимъ только, что разсмотрѣннымъ нами путемъ приходятъ къ самымъ общимъ конгруэнціямъ, изслѣдованнымъ Thybaut.

Такъ какъ неподвижная точка P, служащая началомъ координатъ (T_1), выбрана нами совершенно произвольно, то отсюда заключаемъ, что поверхности minima, присоединенныя къ данной, опредѣляются въ пространствѣ до нѣкотораго поступательнаго перемѣщенія. Поэтому мы можемъ формулировать полученныя нами результаты слѣдующимъ образомъ: *присоединенныя къ поверхностямъ Σ и Σ_1 поверхности Σ^0 и Σ_1^0 могутъ быть путемъ поступательнаго перемѣщенія приведены въ такое положеніе, что онѣ будутъ фокальными поверхностями нѣкоторой конгруэнціи Thybaut.* Само собою разумѣется мы предполагаемъ, что поверхности Σ и Σ_1 связаны между собою такимъ образомъ, какъ въ § 6-мъ настоящей главы.

§ 9. Въ III главѣ нашего изслѣдованія мы видѣли, что наши поверхности minima Σ и Σ_1 нормальны къ нѣкоторой системѣ круговъ (K),

---

[1]) См. гл. II § 7.

[2]) Annales de l'École normale supérieure. 1897 №№ 2, 3.

центры которыхъ лежатъ въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ къ нѣкоторой опредѣленной поверхности S, наложимой на параболоидъ вращенія [1]).

Эти круги (K) въ то же время ортогональны къ безчисленному множеству поверхностей.

Послѣднее обстоятельство даетъ намъ возможность преобразовать уравненія (I)—(V) такимъ образомъ, что рѣшеніе задачъ, обратныхъ задачамъ Guichard'a и Bianchi, сведется къ интегрированію нѣкоторой системы *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядковъ.

Къ интегрированію подобной системы уравненій рѣшеніе первой изъ упомянутыхъ задачъ сведено впервые Bianchi въ рядѣ замѣтокъ въ Atti della Reale Accademia dei Lincei за 1899 годъ и въ его мемуарѣ Sulla teoria delle transformazioni delle superficie a curvatura costante [2]).

При выводѣ этихъ уравненій знаменитый геометръ пользуется только аналитическими преобразованіями, хотя въ примѣчаніи къ упомянутому мемуару и указываетъ на связь между этими преобразованіями и упомянутымъ свойствомъ системы круговъ (K).

Въ дальнѣйшемъ мы и воспользуемся этимъ свойствомъ круговъ (K).

Центръ C одного изъ разсматриваемыхъ круговъ (K) представляетъ, какъ легко видѣть, точку пересѣченія трехъ соотвѣтственныхъ плоскостей: 1) плоскости касательной къ поверхности Σ, 2) плоскости касательной къ поверхности S и 3) плоскости, проходящей черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ Σ, Σ_1 и S.

Уравненія этихъ плоскостей по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ, какъ мы видѣли,

$$z=0, \quad Mx+Ny+z-l=0, \quad Nx-My=0,$$

а потому координаты центра (C) разсматриваемаго круга (K) будутъ:

$$x_0=\frac{Ml}{M^2+N^2}=\frac{aMl}{2l-a}, \quad y_0=\frac{Nl}{M^2+N^2}=\frac{aNl}{2l-a}, \quad z_0=0,$$

а радіусъ его

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{\sqrt{a}\,l}{\sqrt{2l-a}}. \tag{36}$$

---

[1]) См. гл. III § 7.

[2]) Annali di matematica. 1899.

Обозначимъ черезъ γ уголъ, составляемый отрѣзкомъ OC (черезъ O обозначено начало координатъ T, т. е. точка поверхности Σ) съ осью x-овъ нашей системы (T), тогда

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a}\,M}{\sqrt{2l-a}}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a}\,N}{\sqrt{2l-a}}. \tag{37}$$

Координаты соотвѣтственныхъ точекъ разсматриваемой окружности будутъ, очевидно,

$$x = x_0 - r_0\cos\gamma\cos t = r_0\cos\gamma\,(1-\cos t),$$

$$y = y_0 - r_0\sin\gamma\cos t = r_0\sin\gamma\,(1-\cos t),$$

$$z = r_0\sin t,$$

гдѣ t уголъ, составляемый соотвѣтственнымъ радіусомъ круга съ отрѣзкомъ CO.

Возьмемъ на кругѣ нѣкоторую точку G и напишемъ условіе, что ея перемѣщенія ортогональны къ кругу (K).

Если обозначимъ черезъ δx, δy, δz проэкціи перемѣщеній точки G на оси (T), то послѣднее условіе будетъ вида:

$$\sin t\cos\gamma\,\delta x + \sin t\sin\gamma\,\delta y + \cos t\,\delta z = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто δx, δy, δz ихъ значенія, представимъ послѣднее выраженіе въ видѣ

$$A d\alpha + B d\beta + T dt = 0, \tag{38}$$

гдѣ

$$A = \frac{r_0\cos\gamma}{\omega} - \frac{r_0\cos\gamma}{\omega}\cos t + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\alpha} - \frac{\omega\cos\gamma}{2}\right)\sin t,$$

$$B = -\frac{r_0\sin\gamma}{\omega} + \frac{r_0\sin\gamma}{\omega}\cos t + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\beta} - \frac{\omega\sin\gamma}{2}\right)\sin t,$$

$$T = r_0.$$

Чтобы условіе (38) имѣло мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$ необходимо и достаточно, чтобы тождественно удовлетворялось соотношеніе

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial\beta}\right) + B\left(\frac{\partial T}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial t}\right) + T\left(\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Послѣднее выраженіе, какъ нетрудно убѣдиться, приводится къ виду:

$$P\sin t + Q\cos t + R = 0, \tag{39}$$

гдѣ

$$P = \frac{r_0^2}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega\sin\gamma}{r_0}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega\cos\gamma}{r_0}\right)\right],$$

$$R = -Q = r_0^3\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\gamma}{r_0\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\cos\gamma}{r_0\omega}\right)\right] + r_0\sin\gamma\cos\gamma.$$

Такъ какъ разсматриваемая нами система круговъ ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей, другими словами, такъ какъ соотношеніе (39) имѣетъ мѣсто для безконечнаго числа значеній t, то необходимо, чтобы имѣли мѣсто соотношенія

$$P = 0, \quad R = -Q = 0.$$

Подставляя въ выраженія для P, Q, R вмѣсто γ, r_0 ихъ значенія (36) и (37), приведемъ эти уравненія къ виду:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{M\omega}{l}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{N\omega}{l}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{N}{\omega l}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{M}{\omega l}\right) = -\frac{MN}{l^2}. \tag{40}$$

Въ справедливости послѣднихъ уравненій можно убѣдиться при помощи уравненій (II) и (III).

Въ самомъ дѣлѣ, складывая уравненія (II) и (III), получимъ:

$$\frac{\partial(N\omega)}{\partial\alpha} + MN = \frac{\partial(M\omega)}{\partial\beta} - MN,$$

или еще

$$\frac{\partial(N\omega)}{\partial\alpha} + \frac{MN(2l-\omega^2)}{2l} = \frac{\partial(M\omega)}{\partial\beta} - \frac{MN(2l+\omega^2)}{2l};$$

принимая во вниманіе значенія M и N, мы напишемъ послѣднее уравненіе въ видѣ

$$\frac{1}{l}\frac{\partial(N\omega)}{\partial\alpha} - \frac{N\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\alpha} = \frac{1}{l}\frac{\partial(M\omega)}{\partial\beta} - \frac{M\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\beta},$$

а это ничто иное, какъ первое изъ уравненій (40).

Если теперь, раздѣливши уравненія (II), (III) на ωl, сложимъ ихъ и придадимъ къ обѣимъ частямъ полученнаго равенства по

$$\frac{2l-\omega^2}{2\omega^2 l^2} NM - \frac{2l+\omega^2}{2\omega^2 l^2} NM = -\frac{MN}{l^2},$$

то найдемъ второе изъ уравненій (40).

Для насъ особенно интересно первое изъ уравненій (40); оно показываетъ, что мы можемъ положить

$$\frac{\omega M}{l} = \frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad \frac{\omega N}{l} = \frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

гдѣ φ нѣкоторая опредѣленная функція.

Если еще введемъ функцію ψ помощью соотношенія

$$\psi = \frac{\varphi}{l}, \tag{41}$$

то получимъ для M и N слѣдующія выраженія:

$$M = \frac{2}{\omega\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad N = \frac{2}{\omega\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{42}$$

§ 10. Пользуясь уравненіями (I)—(V) легко вывести систему *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ, которымъ удовлетворяютъ функціи φ и ψ.

Дифференцируя по α и β выраженіе (41) и подставляя въ полученныя такимъ образомъ выраженія вмѣсто производныхъ отъ функціи l ихъ значенія черезъ производныя отъ функціи φ, найдемъ, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{2}{\omega^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = -\frac{2}{\omega^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{VI}$$

Уравненіе (I) приметъ видъ

$$L = \frac{4}{\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right] - \frac{2\varphi\psi}{a} + \psi^2 = 0. \tag{43}$$

Найдемъ выраженія для производныхъ отъ M и N черезъ производныя отъ φ и подставимъ полученныя такимъ образомъ значенія въ уравненія (II)—(V); если при этомъ примемъ во вниманіе уравненія (VI) и (43), то получимъ слѣдующія *линейныя* уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} &= \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\omega^2-2a}{4a}\psi + \frac{\varphi}{2a},\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} &= -\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\omega^2+2a}{4a}\psi - \frac{\varphi}{2a}.
\end{aligned}\right\} \tag{VII}$$

Если теперь составимъ различныя выраженія для $\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha^2\partial\beta}$, $\frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta^2}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}$, то увидимъ, что уравненія (VI) и (VII) будутъ совмѣстны въ силу *одного только* условія

$$\frac{\partial^2\log\omega}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\log\omega}{\partial\beta^2}=\frac{1}{\omega^2}.$$

Дифференцируя по α и β функцію L, представляющую лѣвую часть уравненія (43), видимъ, что въ силу уравненій (VI) и (VII) производныя $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ тождественно равны нулю, а слѣдовательно

$$L=g=\text{const}.$$

Такимъ образомъ находимъ слѣдующее важное отличіе уравненій (II)—(V) и уравненій (VI) и (VII): въ то время, какъ для первыхъ уравненіе $L=0$ является *условіемъ* совмѣстности, для послѣднихъ— уравненіе $L=\text{const}$ является лишь *слѣдствіемъ* самихъ уравненій.

Ясно, въ чемъ кроется причина такого отличія: уравненія (VI) и (VII) *линейныя* въ то время, какъ функція L представляетъ нѣкоторую *квадратичную форму* относительно φ, ψ и производныхъ $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$; само собою разумѣется поэтому, что уравненіе $L=\text{const}$ не можетъ быть условіемъ совмѣстности уравненій (VI) и (VII).

Постоянная g, въ которую обращается функція L для интеграловъ нашихъ уравненій (VI) и (VII), опредѣляется начальными значеніями функцій φ, ψ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ при $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$; эти же начальныя значенія вмѣстѣ съ тѣмъ, вообще говоря, опредѣляютъ въ нѣкоторой области голоморфные интегралы уравненій (VI) и (VII).

Такимъ образомъ интегралы этихъ уравненій зависятъ отъ *четырехъ* произвольныхъ постоянныхъ φ_0, ψ_0, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0$.

При рѣшеніи задачи, обратной задачѣ Guichard'a, мы должны подобрать эти постоянныя такимъ образомъ, чтобы функція L для интеграловъ нашихъ уравненій была равна нулю.

Такъ какъ эта функція однородна относительно φ, ψ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$, то изъ условія $L_0=0$ мы опредѣлимъ отношеніе двухъ изъ этихъ постоянныхъ къ третьей.

Если теперь замѣтимъ, что выраженіе для l можетъ быть представлено въ видѣ

$$l = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{A\varphi_0 + B\psi_0 + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0 + D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0}{A_1\varphi_0 + B_1\psi_0 + C_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0 + D_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0},$$

гдѣ A, B, C, D... опредѣленныя функціи отъ α, β, то отсюда видимъ, что въ выраженіе для l входитъ только *двѣ* произвольныхъ постоянныхъ, если не считать еще постоянной a.

Такимъ образомъ приходимъ къ извѣстному уже намъ результату, что всякой поверхности minima Σ соотвѣтствуетъ, вообще говоря, ∞^3 поверхностей S, наложимыхъ на параболоидъ вращенія.

Предполагая, что мы находимся въ условіяхъ теоремы, обратной теоремѣ Guichard'a, мы изъ соотношеній (42) находимъ, что

$$N\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - M\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что на поверхности Σ кривыя $\varphi = \text{const}$ ортогональны къ соотвѣтствующимъ плоскостямъ

$$Nx - My = 0,$$

т. е. къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ Σ и S.

При доказательствѣ первой теоремы Bianchi мы видѣли, что оберткой послѣднихъ плоскостей служитъ поверхность съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = a^2du^2 + a^2\left[2(u+v) + 2c\right]dv^2,$$

гдѣ a и c постоянныя, т. е. поверхность Weingarten'овскаго типа, наложимая на поверхность вращенія.

Постараемся доказать это и въ настоящемъ случаѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ расширимъ нѣсколько условія нашей задачи, а именно: постараемся найти линейный элементъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ поверхности Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на этой поверхности; при этомъ допустимъ, что функція φ представляетъ интегралъ уравненій (VI) и (VII), удовлетворяющій условію

$$\frac{4}{\omega^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right] - \frac{2\varphi\psi}{a} + \psi^2 = g, \qquad \text{(VIII)}$$

гдѣ g нѣкоторая постоянная.

§ 11. Уравненіе плоскости, линейный элементъ обертки которой мы ищемъ, будетъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} x - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} y = 0; \tag{44}$$

а потому координаты любой точки нашей плоскости таковы:

$$x = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t, \quad y = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t, \quad z, \tag{45}$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Координаты точки искомой обертки опредѣлимъ изъ условія, что ея перемѣщенія при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β происходятъ въ плоскости (44).

Если черезъ δx, δy, δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній искомой точки на оси (T), то условіе наше выразится аналитически слѣдующимъ образомъ:

$$A d\alpha + B d\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \delta y = 0.$$

Такъ какъ по нашему предположенію условіе это имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$, то оно распадается на два условія:

$$A = 0, \quad B = 0, \tag{46}$$

изъ которыхъ мы сможемъ опредѣлить t и z.

Проэкціи перемѣщеній нашей точки будутъ:

$$\delta x = -\frac{\omega}{2} d\alpha + d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t\right) + \frac{z}{\omega} d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t,$$

$$\delta y = -\frac{\omega}{2} d\beta + d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t\right) + \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t - \frac{z}{\omega} d\beta, \tag{47}$$

$$\delta z = dz + \frac{t}{\omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha\right].$$

Воспользовавшись уравненіями (VI)—(VII) и оставляя въ сторонѣ случаи, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$, приведемъ уравненія (46) къ виду:

$$\frac{z}{\omega} + \frac{t}{2a} \left[\frac{(\omega^2 - 2a)\psi}{2} + \varphi\right] = \frac{\omega}{2},$$

$$\frac{z}{\omega} - \frac{t}{2a} \left[\frac{(\omega^2 + 2a)\psi}{2} - \varphi\right] = -\frac{\omega}{2};$$

отсюда находимъ, что

$$t=\frac{2a}{\psi\omega},\quad z=\frac{a\psi-\varphi}{\psi},$$

а слѣдовательно координаты соотвѣтственной точки искомой обертки таковы:

$$x=\frac{2a}{\psi\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad y=\frac{2a}{\psi\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},\quad z=\frac{a\psi-\varphi}{\psi}.$$

Подставляя эти значенія въ выраженія (47), найдемъ для проэкцій перемѣщеній нашей точки слѣдующія выраженія:

$$\delta x=-\frac{2a}{\omega\psi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\psi,\quad \delta y=-\frac{2a}{\omega\psi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\psi,\quad \delta z=-d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)-\frac{ad\psi}{\psi}.$$

Если теперь примемъ во вниманіе соотношеніе (VIII), то для искомаго линейнаго элемента, найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2=\left[\frac{2\varphi}{a\psi}-1+\frac{g}{\psi^2}\right]\frac{a^2d\psi^2}{\psi^2}+\left[d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)+\frac{ad\psi}{\psi}\right]^2.$$

Полагая

$$\frac{d\psi}{\psi}=-dv,\quad d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)-adv=ad\theta,$$

откуда имѣемъ

$$\psi=e^{-v},\quad \frac{1}{a}\frac{\varphi}{\psi}=\theta+v+\frac{1}{2},$$

приведемъ выраженіе для ds^2 къ виду

$$ds^2=a^2d\theta^2+a^2[2(\theta+v)+ge^{2v}]. \tag{48}$$

Мы видимъ отсюда, что искомая обертка представляетъ поверхность Weingarten'овскаго типа, съ которой мы встрѣтились въ § 2-мъ главы IV.

Роль координаты x упомянутаго §-а здѣсь будетъ играть координата z, которая равна

$$z=a-\frac{\varphi}{\psi}=\frac{a}{2}-a(\theta+v);$$

роль функціи h того же параграфа играетъ функція $r=\sqrt{x^2+y^2}$, т. е. функція

$$r=a\sqrt{2(\theta+v)+ge^{2v}}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что полученная нами поверхность S_0 находится съ поверхностью Σ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся между собою въ первой теоремѣ Bianchi поверхности S_0 и Σ.

Какъ мы видѣли, интегралъ φ системы дифференціальныхъ уравненій (VI) и (VII) заключаетъ *четыре* произвольныхъ постоянныхъ; присоединяя къ нимъ еще постоянную a, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, обратной первой теоремѣ Bianchi.

Всякой поверхности тіпіта Σ соотвѣтствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 Weingarten'овскаго типа съ линейнымъ элементомъ (48). *Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій* (VI) *и* (VII). *Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \mathrm{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ.*

§ 12. Остается намъ сказать нѣсколько словъ объ исключенномъ нами изъ изслѣдованія случаѣ, когда $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ или $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0$.

Обращаясь къ уравненіямъ (VII) и полагая $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ равнымъ 0, мы находимъ, что это возможно лишь въ случаѣ, когда $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0$, т. е. когда поверхность Σ катеноидъ. Кривыя $\varphi = \mathrm{const}$ въ этомъ случаѣ представляютъ параллели, а слѣдовательно оберткой плоскостей, ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \mathrm{const}$ т. е. плоскостей меридіановъ, будетъ ось вращенія.

Итакъ въ этомъ случаѣ поверхность S_0 дегенерируетъ въ прямую линію.

ГЛАВА VI.

Теорема, обратная третьей теоремѣ Guichard'a. Преобразованіе поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной. Теорема, обратная второй теоремѣ Bianchi для поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной.

§ 1. Въ предыдущей главѣ мы доказали теоремы, обратныя первымъ теоремамъ Guichard'a и Bianchi, и указали на одно интересное преобразованіе поверхностей minima.

Настоящая глава посвящена рѣшенію аналогичныхъ вопросовъ для поверхностей съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной.

Положимъ, что имѣемъ нѣкоторую поверхность Σ съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной; не нарушая общности, можемъ положить эту кривизну равной -1.

Отнесемъ нашу поверхность къ линіямъ кривизны $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$; оси нашихъ координатъ (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы оси $x^{\text{-овъ}}$ касались кривыхъ $\beta = \mathrm{const}$, а оси $y^{\text{-овъ}}$ — кривыхъ $\alpha = \mathrm{const}$.

При этихъ предположеніяхъ основныя величины, характеризующія нашу поверхность Σ, будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$\xi = \cos\omega, \quad \eta_1 = \sin\omega, \quad r = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha},$$

$$p = q_1 = 0, \quad p_1 = \cos\omega, \quad q = \sin\omega,$$

гдѣ ω интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{1}$$

Линейный элементъ нашей поверхности при этомъ, очевидно, будетъ вида:

$$ds^2 = \cos^2\omega d\alpha^2 + \sin^2\omega d\beta^2.$$

Возьмемъ на нормали къ поверхности Σ, проведенной черезъ нѣкоторую точку O этой поверхности, точку $M(o, o, l)$; геометрическимъ мѣстомъ этой точки при движенiи точки O по нашей поверхности Σ будетъ нѣкоторая поверхность S.

Обозначимъ черезъ u уголъ между нормалью къ Σ и касательной плоскостью къ S, проведенной въ соотвѣтственной точкѣ M.

Если поверхность S будетъ поверхностью, наложимой на одну изъ *основныхъ* поверхностей вращенiя, и если при томъ конгруэнцiя нормалей къ Σ будетъ конгруэнцiей *присоединенной* къ S, то между разстоянiемъ l соотвѣтственныхъ точекъ поверхностей S и Σ и угломъ u должна существовать слѣдующая зависимость [1]):

$$l^2 = \frac{a}{\sin^2 u} - 1, \tag{2}$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная.

Очевидно, что для дѣйствительности поверхности S эта постоянная должна быть положительной, т. е. $a > 0$.

Кромѣ того, какъ мы видѣли въ той же III главѣ, линiи кривизны поверхности Σ должны соотвѣтствовать сопряженнымъ линiямъ поверхности S.

Выразимъ эти оба условiя аналитически.

Проэкцiи перемѣщенiй точки $M(o, o, l)$ на соотвѣтственныя оси (T), какъ легко видѣть, будутъ:

$$\delta x = (\cos\omega + l\sin\omega)\, d\alpha, \quad \delta y = (\sin\omega - l\cos\omega)\, d\beta, \quad \delta z = dl. \tag{3}$$

Уравненiе касательной плоскости къ поверхности S въ точкѣ M пусть будетъ:

$$Mx + Ny - (z - l) = 0. \tag{4}$$

Коэффицiенты M, N опредѣлятся изъ условiя, что перемѣщенiя точки M при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненiяхъ параметровъ α, β будутъ происходить въ плоскости (4), т. е. что для всевозможныхъ значенiй $d\alpha$, $d\beta$ имѣетъ мѣсто соотношенiе

$$M\delta x + N\delta y - \delta z = 0.$$

Отсюда находимъ для нашихъ коэффицiентовъ слѣдующiя значенiя:

$$M = \frac{1}{\cos\omega + l\sin\omega}\frac{\partial l}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{1}{\sin\omega - l\cos\omega}\frac{\partial l}{\partial \beta}. \tag{5}$$

Замѣчая, что $\sin u$ представляетъ cos угла, составляемаго нормалью къ плоскости (4) съ осью z, мы напишемъ наше условiе (2) въ видѣ

---

[1]) См. гл. III § 3.

$$M^2+N^2+1=\frac{l^2+1}{a}; \tag{I}$$

условіе это, какъ нетрудно видѣть, представляетъ уравненіе въ частныхъ производныхъ 1-го порядка относительно функціи l.

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Черезъ нѣкоторую неподвижную точку P пространства, служащую началомъ подвижной системы координатъ (T_1), оси которой постоянно параллельны соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T), проведемъ плоскость, параллельную плоскости (4); уравненіе этой плоскости по отношенію къ (T_1) будетъ:

$$Mx+Ny-z=0. \tag{6}$$

Дадимъ параметру α приращеніе $d\alpha$; при этомъ координаты (T_1) примутъ положеніе (T_1'); соотвѣтственныя точки O и M поверхностей Σ и S перемѣстятся вдоль кривыхъ $\beta=\text{const}$ и прійдутъ въ положеніе O' и M'.

По отношенію къ осямъ (T_1') уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку P и параллельной касательной плоскости къ S въ точкѣ M', будетъ:

$$M'x'+N'y'-z'=0, \tag{7}$$

гдѣ

$$M'=M+\frac{\partial M}{\partial\alpha}d\alpha,\quad N'=N+\frac{\partial N}{\partial\alpha}d\alpha.$$

Пересѣченіе плоскостей (6) и (7) дастъ намъ въ предѣлѣ направленіе, сопряженное съ кривой $\beta=\text{const}$ на поверхности S.

Уравненіе плоскости (7) по отношенію къ осямъ (T_1) получимъ, полагая [1])

$$x'=x+\left(y\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-z\sin\omega\right)d\alpha,\quad y'=y-x\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\alpha,\quad z'=z+x\sin\omega d\alpha,$$

а слѣдовательно предѣльная прямая пересѣченія плоскостей (6) и (7) будетъ дана уравненіемъ (6) и уравненіемъ

$$x\left[\frac{\partial M}{\partial\alpha}-N\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\sin\omega\right]+y\left[\frac{\partial N}{\partial\alpha}+M\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right]-zM\sin\omega=0.$$

Если теперь положимъ, что на поверхности S кривыя $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$ сопряженныя, другими словами, что перемѣщеніе точки M

[1]) См. гл. II § 6.

вдоль кривой $\alpha = \text{const}$ параллельно послѣдней прямой, то получимъ наше второе условіе:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha} + M\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right)(\sin\omega - \cos\omega l) - M\sin\omega\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0,$$

которое въ силу (5) приводится къ виду:

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -M\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + MN\sin\omega. \tag{II}$$

Это условіе представляетъ относительно функціи l дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 2-го порядка, которое мы можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta} = -(\sin\omega - l\cos\omega)\frac{\partial \omega}{\partial \beta}M + (\cos\omega + l\sin\omega)\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}N - (\cos 2\omega + l\sin 2\omega)MN.$$

Уравненіе (II) мы можемъ представить въ нѣсколько иной формѣ, а именно, дифференцируя выраженіе (5) для M по β и принимая во вниманіе только-что полученное нами выраженіе для $\dfrac{\partial^2 l}{\partial\alpha\partial\beta}$, мы вмѣсто уравненія (II) получимъ тождественное съ нимъ уравненіе:

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = N\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - MN\cos\omega. \tag{III}$$

§ 2. Теперь намъ остается показать, что уравненія (I) и (II) или, что то же, уравненія (I) и (III) совмѣстны.

Предположимъ, что послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто; въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравненіе (I) по α и вставимъ въ полученное уравненіе вмѣсто $\dfrac{\partial N}{\partial \alpha}$ его значеніе (I); оставляя въ сторонѣ случай $M = 0$, найдемъ, что

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = N\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - N^2\sin\omega + \frac{l(\cos\omega + l\sin\omega)}{a}. \tag{IV}$$

Наконецъ, дифференцируя уравненіе (I) по β, пользуясь выраженіемъ (III) для $\dfrac{\partial M}{\partial \beta}$ и исключая случай $N = 0$, получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -M\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + M^2\cos\omega + \frac{l(\sin\omega - l\cos\omega)}{a}. \tag{V}$$

Итакъ, если наши уравненія (I), (II) и (III) совмѣстны, то должны быть совмѣстны уравненія (II)—(V) т. е. должны удовлетворяться тождественно соотношенія

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial\beta\partial\alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial\beta\partial\alpha}.$$

Въ справедливости послѣднихъ тождествъ легко убѣдиться простымъ дифференцированіемъ выраженій (II)—(V), если при томъ примемъ во вниманіе соотношеніе (I) и вспомнимъ, что ω интегралъ уравненія (1).

Если теперь перенесемъ всѣ члены въ уравненіи (I) въ лѣвую часть и обозначимъ лѣвую часть полученнаго такимъ образомъ уравненія черезъ L, то, въ силу уравненій (II) и (V) будемъ имѣть, что производныя $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ тождественно равны нулю т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial\beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что $L = \text{const}$ для интеграловъ уравненій (II)—(V).

Для совмѣстности уравненій (II)—(V) эта постоянная, какъ мы видѣли раньше, должна равняться нулю.

Уравненія (II)—(V), къ интегрированію которыхъ сводится рѣшеніе нашей задачи, представляютъ *три* уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно функціи l.

Если они будутъ совмѣстны, то они имѣютъ, вообще говоря, въ извѣстной области интегралъ, опредѣляемый начальными значеніями функцій l, $\frac{\partial l}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial\beta}$ для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Для того, чтобы уравненія (II)—(V) были совмѣстны, эти начальныя значенія должны удовлетворять соотношенію $L_0 = 0$, гдѣ черезъ L_0 мы обозначаемъ значеніе функціи L при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Принимая теперь во вниманіе, что постоянная a выбрана нами совершенно произвольно и подчинена единственному условію $a > 0$, видимъ, что въ наше выраженіе для l будетъ входить *три* произвольныхъ постоянныхъ: a, l_0, $\left(\frac{\partial l}{\partial\alpha}\right)_0$, а потому число поверхностей S, удовлетворяющихъ двумъ нашимъ условіямъ, будетъ ∞^3.

§ 3. Покажемъ теперь, что всѣ эти поверхности S наложимы на одну изъ *основныхъ* поверхностей вращенія т. е. имѣютъ линейный элементъ вида:

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a - \sin^2 u)} + k^2 \text{cotang}^2 u\, dv^2,$$

гдѣ k постоянная.

Кромѣ того покажемъ, что система нормалей къ Σ представляетъ конгруэнцію, присоединенную къ поверхностямъ S.

Если наши оба предположенія справедливы, то на поверхностяхъ S кривыя $l = \text{const}$ должны быть геодезическими параллелями, а въ такомъ случаѣ дифференціальный параметръ 1-го порядка $\Delta_1(l)$, составленный относительно линейнаго элемента поверхности S, долженъ быть функціей только отъ l.

На основаніи выраженій (3) и (5) линейный элементъ поверхности S будетъ:

$$ds_0^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = (\cos\omega + l\sin\omega)^2 (M^2 + 1)\, d\alpha^2 +$$

$$+ 2(\sin\omega - l\cos\omega)(\cos\omega + l\sin\omega)\, MN d\alpha d\beta + (\sin\omega - l\cos\omega)^2 (N^2 + 1)\, d\beta^2.$$

Составляя дифференціальный параметръ $\Delta_1(l)$, легко найдемъ, что

$$\Delta_1(l) = \frac{M^2 + N^2}{M^2 + N^2 + 1} = \frac{l^2 + 1 - a}{l^2 + 1},$$

т. е., что $\Delta_1(l)$ функція только отъ l.

Дифференціалъ длины дуги геодезическихъ кривыхъ, ортогональныхъ къ кривымъ $l = \text{const}$, будетъ

$$d\theta = \frac{dl}{\sqrt{\Delta_1(l)}} = \sqrt{\frac{l^2 + 1}{l^2 + 1 - a}}\, dl.$$

Вводя вмѣсто l перемѣнное u, связанное съ l соотношеніемъ (2), получимъ:

$$d\theta^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a - \sin^2 u)}.$$

Линейный элементъ нашей поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2 dv^2.$$

Функцію σ опредѣлимъ, вычисливъ по извѣстной формулѣ Bonnet геодезическую кривизну линій $l = \text{const}$.

Такимъ образомъ для опредѣленія функціи σ получимъ уравненіе:

$$-\frac{1}{\varrho_{gl}} = \frac{\partial \log\sigma}{\partial u} = -\frac{1}{\sin u \cos u},$$

откуда найдемъ, что

$$\sigma = k\,\text{cotang}\, u\,,$$

гдѣ при соотвѣтственномъ выборѣ параметра v можемъ считать k постоянной.

Итакъ линейный элементъ нашей поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a - \sin^2 u)} + k^2 \mathrm{cotang}^2 u\, dv^2,$$

т. е. поверхность S наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія: гиперболическій синусоидъ, укороченный или удлиненный катеноидъ или логариѳмическую поверхность вращенія.

Эти три случаи, какъ мы уже видѣли, будутъ характеризоваться значеніемъ постоянной a, а именно для перваго изъ нихъ $a > 1$, для второго $a < 1$ и для третьяго $a = 1$.

Чтобы доказать, что нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S, намъ остается показать, что на послѣдней поверхности кривыя $l = \mathrm{const}$ ортогональны къ плоскости, проходящей черезъ нормали къ поверхностямъ Σ и S.

Уравненіе послѣдней плоскости будетъ:

$$Nx - My = 0.$$

Проэкціи перемѣщенія соотвѣтственной точки M поверхности S вдоль кривой $l = \mathrm{const}$ будутъ на основаніи (3)

$$\delta x = (\cos\omega + l\sin\omega)\, d\alpha, \quad \delta y = -(\sin\omega - l\cos\omega)\frac{\dfrac{\partial l}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial l}{\partial \beta}}\, d\alpha, \quad \delta z = 0,$$

или, если примемъ во вниманіе выраженія (5)

$$\delta x = (\cos\omega + l\sin\omega)\, d\alpha, \quad \delta y = -(\cos\omega + l\sin\omega)\frac{M}{N}\, d\alpha, \quad \delta z = 0,$$

откуда имѣемъ, что

$$\frac{N}{\delta x} = -\frac{M}{\delta y},$$

а это и есть искомое условіе.

Такимъ образомъ, сопоставляя результаты настоящаго и предыдущаго параграфовъ, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной соотвѣтствуетъ ∞^3 поверхностей S, наложимыхъ на основныя поверхности вращенія, при чемъ нормали къ Σ составляютъ конгруэнціи, присоединенныя къ S.

§ 4. Переходимъ къ разсмотрѣнію случаевъ, исключенныхъ нами, а именно, когда одна изъ функцій M или N равна нулю.

Положимъ, что $M=0$, тогда, обращаясь къ уравненію (III), находимъ, что либо $N=0$, либо $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0$.

Первый случай не даетъ намъ рѣшенія нашей задачи, ибо тогда мы имѣли бы, что $l=\mathrm{const}$ и $u=\mathrm{const}$.

Что касается второго условія, то оно указываетъ на то, что наша поверхность Σ поверхность вращенія.

Всѣ уравненія, служащія для опредѣленія функціи l, сведутся къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію 1-го порядка (I).

Интегралъ его заключаетъ одну произвольную постоянную; присоединяя еще къ ней постоянную a, видимъ, что поверхностей S, удовлетворяющихъ нашимъ двумъ условіямъ, въ этомъ случаѣ будетъ ∞^2.

Пользуясь тѣми же разсужденіями, что и въ § 5 предыдущей главы, мы увидимъ, что поверхности S будутъ поверхностями вращенія.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности вращенія Σ съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной соотвѣтствуетъ ∞^2 поверхностей вращенія S, наложимыхъ на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ поверхностямъ S.

§ 5. Обратимся къ разсмотрѣнію поверхности Σ_1, точки которой симметричны съ точками данной поверхности Σ относительно соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхности S т. е. относительно плоскостей

$$Mx+Ny-z+l=0.$$

Координаты соотвѣтственной точки O_1 поверхности Σ_1 будутъ, очевидно,

$$x=-\frac{2alM}{l^2+1},\quad y=-\frac{2alN}{l^2+1},\quad z=\frac{2al}{l^2+1}. \tag{8}$$

Найдемъ выраженіе для линейнаго элемента поверхности Σ_1.

Проэкціи перемѣщеній разсматриваемой точки O_1 на соотвѣтственныя оси (T), если примемъ во вниманіе наши уравненія (I)—(V), будутъ:

$$\begin{aligned}
\delta x&=\frac{(l^2-1)\cos\omega-2l\sin\omega}{l^2+1}\left(\frac{2aM^2}{l^2+1}-1\right)d\alpha+\frac{(l^2-1)\sin\omega+2l\cos\omega}{l^2+1}\frac{2aMN}{l^2+1}d\beta,\\
\delta y&=\frac{(l^2-1)\cos\omega-2l\sin\omega}{l^2+1}\frac{2aMN}{l^2+1}d\alpha+\frac{(l^2-1)\sin\omega+2l\cos\omega}{l^2+1}\left[\frac{2aN^2}{l^2+1}-1\right]d\beta,\\
\delta z&=\frac{(l^2-1)\cos\omega-2l\sin\omega}{l^2+1}\frac{2aM}{l^2+1}d\alpha-\frac{(l^2-1)\sin\omega+2l\cos\omega}{l^2+1}\frac{2aN}{l^2+1}d\beta.
\end{aligned} \tag{9}$$

Линейный элементъ нашей поверхности Σ_1 будетъ вида:

$$ds_1^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$

гдѣ

$$A = \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}, \quad B = \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}.$$

Замѣчая, что функціи A, B удовлетворяютъ соотношенію

$$A^2 + B^2 = 1,$$

мы можемъ положить

$$A = \cos\Omega = \frac{(l^2-1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2+1}, \quad B = \sin\Omega = \frac{(l^2-1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2+1}, \tag{10}$$

гдѣ Ω дѣйствительная функція.

При этомъ предположеніи линейный элементъ поверхности Σ_1 представится въ слѣдующей формѣ:

$$ds_1^2 = \cos^2\Omega d\alpha^2 + \sin^2\Omega d\beta^2. \tag{11}$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности Σ_1, какъ нетрудно видѣть, будетъ:

$$2aMx + 2aNy + (l^2 + 1 - 2a)z + 2al = 0, \tag{12}$$

а слѣдовательно уравненіе соотвѣтственной нормали будетъ:

$$\frac{x + \frac{2alM}{l^2+1}}{2aM} = \frac{y + \frac{2alN}{l^2+1}}{2aN} = \frac{z - \frac{2al}{l^2+1}}{l^2+1-2a};$$

нормаль эта, какъ и слѣдовало ожидать, проходитъ черезъ соотвѣтственную точку $M(o,\ o,\ l)$ поверхности S.

Найдемъ теперь дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности S.

Для вывода его воспользуемся методомъ, употребленнымъ нами уже не одинъ разъ.

Примемъ нѣкоторую неподвижную точку P за начало координатъ (T_1), оси которыхъ остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T).

Уравненіе по отношенію къ (T_1) плоскости, параллельной плоскости (12) и проходящей черезъ точку P, будетъ:

$$2aMx + 2aNy + (l^2 + 1 - 2a)z = 0. \tag{13}$$

Дадимъ параметрамъ α, β нѣкоторыя приращенія $d\alpha$, $d\beta$; координатныя оси (T_1) примутъ при этомъ нѣкоторое положеніе (T_1'); точка O_1 поверхности Σ_1 перемѣстится по кривой, характеризуемой приращеніями параметровъ $(d\alpha,\ d\beta)$ въ точку O_1'.

По отношенію къ осямъ (T_1') уравненіе плоскости, параллельной касательной плоскости къ поверхности Σ_1 въ точкѣ O_1', будетъ:

$$2aM'x' + 2aN'y' + (l'^2 + 1 - 2a)\,z' = 0,$$

гдѣ

$$M' = M + dM, \quad N' = N + dN, \quad l' = l + dl.$$

Относя это уравненіе къ прежнимъ осямъ (T_1), найдемъ, что уравненіе прямой, параллельной направленію, сопряженному съ кривой $(d\alpha,\ d\beta)$, будетъ дано уравненіемъ (13) и уравненіемъ

$$Hx + Gy + Lz = 0,$$

гдѣ

$$H = 2adM - 2aN\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) + (l^2 + 1 - 2a)\sin\omega d\alpha,$$

$$G = 2adN + 2aM\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\,d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\,d\beta\right) - (l^2 + 1 - 2a)\cos\omega d\beta,$$

$$L = 2ldl - 2aM\sin\omega d\alpha + 2aN\cos\omega d\beta.$$

Если черезъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ обозначимъ приращенія параметровъ, соотвѣтствующія перемѣщенію точки O_1 по поверхности Σ_1 вдоль кривой, сопряженной съ тою, которая характеризуется приращеніями $(d\alpha,\ d\beta)$, то послѣ несложныхъ вычисленій, пользуясь уравненіями (I)—(V), мы приведемъ искомое уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1 къ виду:

$$d\alpha\delta\alpha - d\beta\delta\beta = 0. \tag{14}$$

Послѣднее уравненіе представляетъ въ то же время дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ.

Итакъ мы приходимъ къ заключенію, что всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ_1.

Въ частности, линіямъ кривизны и ассимптотическимъ линіямъ поверхности Σ соотвѣтствуютъ линіи кривизны и ассимптотическія линіи поверхности Σ_1.

Что касается ассимптотическихъ линій, то это ясно само собою, что же касается линій кривизны, то въ силу послѣдняго уравненія (14) линіи $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ сопряженныя кривыя поверхности Σ_1; въ то же самое время онѣ ортогональны, какъ это явствуетъ изъ формы линейнаго элемента поверхности Σ_1; отсюда ясно, что эти кривыя представляютъ линіи кривизны поверхности Σ_1.

Намъ остается показать, что поверхность Σ_1 имѣетъ постоянную отрицательную кривизну, равную -1.

Обратимся опять къ координатамъ (T_1), имѣющимъ начало въ неподвижной точкѣ P.

Изъ уравненія касательной плоскости къ поверхности Σ_1 видно, что координаты сферическаго изображенія точки O_1 поверхности Σ_1 по отношенію къ осямъ (T_1) будутъ:

$$x_1 = \frac{2aM}{l^2+1}, \quad y_1 = \frac{2aN}{l^2+1}, \quad z_1 = 1 - \frac{2a}{l^2+1}.$$

Проэкціи перемѣщеній сферическаго изображенія на оси (T_1) или на оси (T), очевидно, таковы:

$$\delta x_1 = -\sin\Omega\left(\frac{2a}{l^2+1}M^2 - 1\right)d\alpha + \cos\Omega\,\frac{2aMN}{l^2+1}\,d\beta,$$

$$\delta y_1 = -\sin\Omega\,\frac{2aMN}{l^2+1}\,d\alpha + \cos\Omega\left(\frac{2a}{l^2+1}N^2 - 1\right)d\beta,$$

$$\delta z_1 = -\sin\Omega\,\frac{2aM}{l^2+1}\,d\alpha - \cos\Omega\,\frac{2aN}{l^2+1}\,d\beta,$$

гдѣ $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ имѣютъ значенія (10).

Отсюда, замѣчая, что радіусы кривизны нашей поверхности Σ_1 представляютъ ничто иное, какъ величины отношеній $\frac{\delta x}{\delta x_1}, \frac{\delta y}{\delta y_1}, \frac{\delta z}{\delta z_1}$ при перемѣщеніяхъ вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, найдемъ, что

$$R_1 = -\operatorname{cotang}\Omega, \quad R_2 = \operatorname{tang}\Omega,$$

а потому кривизна поверхности Σ_1 равна -1.

Отсюда тоже слѣдуетъ, что функція Ω удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial\beta^2} = \sin\Omega\cos\Omega.$$

§ 6. Какъ мы только-что видѣли, наши поверхности постоянной отрицательной кривизны Σ и Σ_1 связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что на нихъ линіямъ кривизны и ассимптотическимъ линіямъ одной соотвѣтствуютъ линіи кривизны и ассимптотическія линіи другой.

Если припомнимъ результаты, полученные во II главѣ нашего изслѣдованія, то увидимъ, что подобное же соотвѣтствіе существуетъ между поверхностями отрицательной кривизны, являющимися Baecklund'овскими преобразованіями какой-либо одной поверхности.

Естественнымъ поэтому является вопросъ: не представляютъ-ли поверхности Σ и Σ_1 преобразованія одной какой-либо поверхности Σ_2 или, другими словами, нельзя-ли перейти отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_1 путемъ двухъ послѣдовательно примѣненныхъ преобразованій B_{σ_1}, B_{σ_2}.

Обращаясь къ § 13 второй главы и сохраняя всѣ обозначенія этого параграфа, при чемъ только для краткости вмѣсто θ_1 будемъ писать просто θ, мы должны имѣть въ случаѣ утвердительнаго отвѣта на поставленный вопросъ для координатъ точки O_1 поверхности Σ_1 слѣдующія выраженія:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{2alM}{l^2+1} = [m_1 + m_2\cos(\Omega-\omega)]\cos\theta - \mu_1 m_2 \sin(\Omega-\omega)\sin\theta, \\
y &= -\frac{2alN}{l^2+1} = [m_1 + m_2\cos(\Omega-\omega)]\sin\theta + \mu_1 m_2 \sin(\Omega-\omega)\cos\theta, \qquad (15) \\
z &= \frac{2al}{l^2+1} = m_1 m_2 \sin(\Omega-\omega).
\end{aligned}
$$

Здѣсь m_1, μ_1 постоянныя, характеризующія преобразованіе B_{σ_1}, помощью котораго мы переходимъ отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_2 съ линейнымъ элементомъ

$$ds_2^2 = \cos^2\theta d\alpha^2 + \sin^2\theta d\beta^2.$$

Что касается постоянныхъ m_2, μ_2, то онѣ характеризуютъ преобразованіе B_{σ_2}, приводящее насъ отъ поверхности Σ_2 къ поверхности Σ_1.

Изъ выраженій (10) предыдущаго параграфа легко найдемъ, что

$$\sin(\Omega-\omega) = \frac{2l}{l^2+1}, \quad \cos(\Omega-\omega) = \frac{l^2-1}{l^2+1}. \qquad (16)$$

Подставляя эти значенія въ выраженія (15), мы прежде всего видимъ, что

$$m_1 m_2 = a \qquad (17)$$

и кромѣ того, что

$$
\begin{aligned}
-2alM &= [m_1(l^2+1) + m_2(l^2-1)]\cos\theta - 2m_2\mu_1 l\sin\theta, \\
-2alN &= [m_1(l^2+1) + m_2(l^2-1)]\sin\theta + 2m_2\mu_1 l\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Опредѣленныя такимъ образомъ функціи M и N должны удовлетворять нашимъ уравненіямъ (I)—(V); подставляя значенія M и N въ уравненіе (I), получимъ:

$$[(m_1+m_2)^2-4a]\,l^4+$$
$$+[2(m_1^2-m_2^2)+4m_2^2\mu_1^2-4a(1-a)]\,l^2+(m_1-m_2)^2=0.$$

Это соотношеніе должно быть простымъ тождествомъ, т. е. постоянныя m_1, m_2 должны удовлетворять кромѣ соотношенія (17) еще соотношеніямъ

$$(m_1+m_2)^2=4a;\quad m_1^2-m_2^2+2m_2^2\mu_1^2-2a(1-a)=0,\quad m_1-m_2=0.$$

Легко видѣть, что эти соотношенія удовлетворятся, если положимъ

$$m_1=m_2=\pm\sqrt{a},\quad \mu_1^2=1-a. \tag{18}$$

Такъ какъ постоянныя μ_1, m_1, μ_2, m_2 связаны соотношеніями

$$m_1^2+\mu_1^2=1,\quad m_2^2+\mu_2^2=1,$$

то въ силу послѣднихъ равенствъ имѣемъ, что $\mu_1^2=\mu_2^2$, откуда $\mu_2=\pm\mu_1$. Какой здѣсь нужно выбрать знакъ, покажетъ дальнѣйшее изслѣдованіе.

Въ силу только что полученныхъ условій, выраженія для M и N примутъ видъ:

$$m_1M=\mu_1\sin\theta-l\cos\theta,\quad m_1N=-\mu_1\cos\theta-l\sin\theta. \tag{19}$$

Нетрудно теперь простымъ дифференцированіемъ убѣдиться, что полученныя нами выраженія для M и N удовлетворяютъ тождественно уравненіямъ (II)—(V), если только обратимъ вниманіе, что θ представляетъ интегралъ системы дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+\frac{\partial\omega}{\partial\beta}&=-\frac{\mu_1\cos\theta\sin\omega}{m_1}+\frac{\sin\theta\cos\omega}{m_1},\\ \frac{\partial\theta}{\partial\beta}+\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}&=\frac{\mu_1\sin\theta\cos\omega}{m_1}-\frac{\cos\theta\sin\omega}{m_1}.\end{aligned} \tag{20}$$

Намъ остается показать, что полученная нами функція Ω удовлетворяетъ уравненіямъ, аналогичнымъ уравненіямъ (20), въ которыхъ нужно только замѣнить θ, ω, m_1, μ_1 соотвѣтственно черезъ Ω, θ, m_2, μ_2.

Комбинируя полученныя такимъ образомъ уравненія съ уравненіями (20), найдемъ, что Ω должно удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha}=-\frac{1}{m_1}(\mu_2\cos\Omega+\mu_1\cos\omega)\sin\theta+\frac{1}{m_1}(\sin\Omega+\sin\omega)\cos\theta,$$

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta}=\frac{1}{m_1}(\mu_2\sin\Omega+\mu_1\sin\omega)\cos\theta-\frac{1}{m_1}(\cos\Omega+\cos\omega)\sin\theta;$$

здѣсь нами уже принято во вниманіе условіе $m_1 = m_2$.

Подставляя сюда вмѣсто $\sin\Omega$, $\cos\Omega$ и производныхъ $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta}$ ихъ значенія и исключая изъ полученныхъ выраженій $\cos\theta$ и $\sin\theta$ при помощи уравненій (19), приходимъ къ условіямъ:

$$(\mu_1+\mu_2)(\mu_1 M - Nl)[\cos\omega(1-l^2)+2l\sin\omega]=0,$$
$$(\mu_1+\mu_2)(\mu_1 N + Ml)[\sin\omega(1-l^2)-2l\cos\omega]=0.$$

Отсюда ясно, что искомое условіе будетъ:

$$\mu_1+\mu_2=0. \tag{21}$$

Въ самомъ дѣлѣ ни одинъ изъ остальныхъ множителей не можетъ обратиться въ нуль, такъ какъ приравнивая ихъ нулю мы либо получимъ для l значеніе, не зависящее отъ значенія a — результатъ очевидно невозможный, либо найдемъ, что $l=\text{const}$, что то-же не даетъ рѣшенія нашей задачи.

Такимъ образомъ видимъ, что преобразованіе поверхности Σ въ поверхность Σ_1 можетъ быть достигнуто путемъ послѣдовательнаго примѣненія двухъ Bäcklund'овскихъ преобразованій B_{σ_1} и B_{σ_2}, характеризуемыхъ соотвѣтственно постоянными (m_1, μ_1), $(m_1, -\mu_1)$.

Во II главѣ мы видѣли, что постоянныя m_1, μ_1, m_2, μ_2 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$m_1=\cos\sigma_1,\quad \mu_1=\sin\sigma_1,\quad m_2=\cos\sigma_2,\quad \mu_2=\sin\sigma_2,$$

при чемъ углы $\frac{\pi}{2}-\sigma_1$, $\frac{\pi}{2}-\sigma_2$ представляютъ углы между фокальными плоскостями соотвѣтственныхъ псевдосферическихъ линейчатыхъ конгруэнцій.

Изъ условій (18) и (21) заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ постоянныя σ_1 и σ_2 связаны между собою соотношеніемъ

$$\sigma_2=-\sigma_1.$$

Замѣчая далѣе, что постоянныя m_1 и μ_1 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$m_1=\sqrt{a},\quad \mu_1^2=1-a,$$

гдѣ a дѣйствительная и при томъ положительная величина, мы видимъ, что углы σ_1, σ_2 при условіи $a < 1$ будутъ дѣйствительными; при $a = 1$, очевидно, будемъ имѣть два преобразованія Bianchi B_0; наконецъ при $a > 1$ наши преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2} будутъ мнимыми сопряженными; вотъ почему послѣдовательное ихъ примѣненіе приводитъ къ *дѣйствительной* поверхности Σ_1 [1]).

Итакъ мы пришли къ слѣдующей теоремѣ.

Нормали къ какой либо поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной послѣ отраженія отъ поверхности S, которая наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія и для которой нормали къ Σ представляютъ присоединенную конгруэнцію, будутъ нормальны къ поверхности Σ_1 съ той же постоянной отрицательной кривизной. Отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_1 мы можемъ прійти путемъ послѣдовательнаго примѣненія двухъ Bäcklund'овскихъ преобразованій B_{σ_1}, $B_{-\sigma_1}$; при томъ, если поверхность S наложима на укороченный или удлиненный катеноидъ, оба эти преобразованія дѣйствительны, если она наложима на логариѳмическую поверхность вращенія — эти преобразованія представляютъ преобразованія Bianchi, наконецъ, если S наложима на гиперболическій синусоидъ вращенія — преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2} мнимыя сопряженныя.

§ 7. Въ предыдущей главѣ мы показали, какимъ образомъ можно свести рѣшеніе всѣхъ поставленныхъ тамъ вопросовъ къ интегрированію нѣкоторой системы *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка.

Пользуясь аналогичнымъ методомъ, можемъ сдѣлать это и въ разсматриваемомъ нами теперь случаѣ.

Для этого разсмотримъ систему круговъ (K), ортогональныхъ къ нашимъ поверхностямъ постоянной отрицательной кривизны Σ и Σ_1 и имѣющихъ центры въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ къ поверхности S.

Какъ мы видѣли въ III главѣ нашего изслѣдованія, эта конгруэнція круговъ будетъ ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей.

Центръ C какого-либо изъ этихъ круговъ представляетъ точку пересѣченія трехъ соотвѣтственныхъ плоскостей

$$z = 0, \quad Mx + Ny - z + l = 0, \quad Nx - My = 0;$$

дѣйствительно, первая изъ нихъ касается поверхности Σ, вторая поверхности S, а третья проходитъ черезъ нормали къ этимъ двумъ поверхностямъ, а слѣдовательно и черезъ нормаль къ поверхности Σ_1.

---

[1]) См. гл. II § 14.

Такимъ образомъ координаты нашего центра C будутъ:

$$x_0 = -\frac{Ml}{M^2+N^2} = \frac{-aMl}{l^2+1-a}, \quad y_0 = \frac{aNl}{l^2+1-a}, \quad z_0 = 0,$$

а радіусъ его

$$r_0^2 = \frac{a^2l^2(M^2+N^2)}{(l^2+1-a)^2} = \frac{al^2}{l^2+1-a} \tag{22}$$

Обозначимъ начало нашихъ координатъ (T) черезъ O; черезъ γ обозначимъ уголъ, составляемый отрѣзкомъ OC съ осью $x^{-овъ}$, тогда

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{a}\,M}{\sqrt{l^2+1-a}}, \quad \sin\gamma = -\frac{\sqrt{a}\,N}{\sqrt{l^2+1-a}}. \tag{23}$$

Если черезъ t обозначимъ уголъ, составляемый какимъ-либо радіусомъ круга съ отрѣзкомъ CO, тогда координаты соотвѣтственной точки нашего круга выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - r_0\cos\gamma\cos t = r_0\cos\gamma\,(1-\cos t),\\ y &= y_0 - r_0\sin\gamma\cos t = r_0\sin\gamma\,(1-\cos t),\\ z &= r_0\sin t. \end{aligned} \tag{24}$$

Возьмемъ на кругѣ нѣкоторую точку G и напишемъ условіе, что ея перемѣщенія ортогональны къ кругу (K).

Если черезъ δx, δy, δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній точки G на оси (T), то послѣднее условіе будетъ вида:

$$\sin t\cos\gamma\,\delta x + \sin t\sin\gamma\,\delta y + \cos t\,\delta z = 0.$$

Подставляя сюда значенія δx, δy, δz, мы представимъ послѣднее выраженіе въ видѣ:

$$A d\alpha + B d\beta + T dt = 0, \tag{25}$$

гдѣ

$$A = r_0\sin\omega\cos\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\alpha} + \cos\omega\cos\gamma\right)\sin t - r_0\sin\omega\cos\gamma\cos t,$$

$$B = -r_0\cos\omega\sin\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial\beta} + \sin\omega\sin\gamma\right)\sin t + r_0\cos\omega\sin\gamma\cos t,$$

$$T = r_0.$$

Чтобы условіе (25) имѣло мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$, какъ извѣстно, необходимо и достаточно, чтобы тождественно удовлетворялось соотношеніе

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial \beta}\right)+B\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha}-\frac{\partial A}{\partial t}\right)+T\left(\frac{\partial A}{\partial \beta}-\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)=0.$$

Послѣднее выраженіе, какъ нетрудно убѣдиться, приводится къ слѣдующему виду:

$$P\sin t+Q\cos t+R=0, \tag{26}$$

гдѣ

$$P=r_0^2\left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\cos\omega\cos\gamma}{r_0}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin\omega\sin\gamma}{r_0}\right)\right],$$

$$Q=-R=-r_0^3\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos\omega\sin\gamma}{r_0}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\sin\omega\cos\gamma}{r_0}\right)\right]+r_0\cos\gamma\sin\gamma.$$

Такъ какъ разсматриваемая нами система круговъ ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей, другими словами, такъ какъ соотношеніе (26) имѣетъ мѣсто для безчисленнаго множества значеній функціи t, то необходимо имѣютъ мѣсто соотношенія

$$P=0,\quad Q=-R=0.$$

Подставляя въ эти выраженія вмѣсто γ и r_0 ихъ значенія, мы приведемъ ихъ къ виду

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\cos\omega M}{l}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin\omega N}{l}\right) \tag{27}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos\omega N}{l}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\sin\omega M}{l}\right)+\frac{MN}{l^2}=0. \tag{28}$$

Въ справедливости послѣднихъ соотношеній легко убѣдиться при помощи нашихъ уравненій (II) и (III).

Въ самомъ дѣлѣ, комбинируя эти два уравненія мы получимъ:

$$\sin\omega\frac{\partial N}{\partial \alpha}+\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}N\cos\omega-\sin^2\omega MN=\cos\omega\frac{\partial M}{\partial \beta}-\frac{\partial \omega}{\partial \beta}M\sin\omega+\cos^2\omega MN;$$

дѣля обѣ части на l и прибавляя къ обѣимъ частямъ по $-\dfrac{MN\sin\omega\cos\omega}{l^2}$, мы легко прійдемъ къ соотношенію (27).

Для вывода соотношенія (28) поступимъ слѣдующимъ образомъ: умножимъ уравненіе (II) на $\frac{\cos\omega}{l}$, а уравненіе (III) на $\frac{\sin\omega}{l}$; складывая полученныя выраженія найдемъ, что

$$\frac{\cos\omega}{l}\frac{\partial N}{\partial\alpha}-\frac{\sin\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}N+\frac{\sin\omega}{l}\frac{\partial M}{\partial\beta}+\frac{\cos\omega}{l}M=0.$$

Прибавимъ теперь къ обѣимъ частямъ послѣдняго уравненія по $-\frac{MN}{l^2}$, при чемъ примемъ во вниманіе слѣдующее тождество:

$$\frac{MN}{l^2}=\frac{MN(\cos^2\omega+l\sin\omega\cos\omega)}{l^2}+\frac{MN(\sin^2\omega-l\cos\omega\sin\omega)}{l^2}=$$

$$=\frac{\cos\omega N}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\alpha}+\frac{\sin\omega M}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\beta},$$

тогда получимъ уравненіе (28).

Особый интересъ представляетъ для насъ уравненіе (27); оно показываетъ, что функціи $\frac{\cos\omega M}{l}$ и $\frac{\sin\omega N}{l}$ можно считать частными производными по α и β отъ одной и той же функціи, т. е.

$$\frac{\cos\omega M}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad \frac{\sin\omega N}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta};$$

если кромѣ того введемъ функцію ψ при помощи соотношенія

$$\psi=\frac{\varphi}{l}, \tag{29}$$

то для функцій M и N найдемъ слѣдующія выраженія:

$$M=\frac{1}{\psi\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad N=\frac{1}{\psi\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{30}$$

§ 8. Пользуясь уравненіями (I)—(V), легко вывести тѣ дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ, которымъ удовлетворяютъ функціи ψ и φ.

Дифференцируя по α и β выраженіе (29) и подставляя въ полученныя выраженія вмѣсто производныхъ отъ функціи l ихъ значенія черезъ производныя отъ функціи φ, найдемъ, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=-\text{tang}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta}=\text{cotang}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{VI}$$

Уравненіе (I) приметъ теперь видъ

$$L = \frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 - \frac{\varphi^2}{a} - \frac{(1-a)\,\psi^2}{a} = 0; \qquad \text{(VII)}$$

если, принявши во вниманіе это условіе, продифференцируемъ выраженія (30) для M и N по α и β и подставимъ полученныя значенія для производныхъ отъ этихъ функцій въ уравненія (II)—(V), то легко найдемъ слѣдующія уравненія, которымъ удовлетворяютъ функціи φ и ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\cos^2\omega}{a}\varphi - \frac{1-a}{a}\psi\sin\omega\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \qquad \text{(VIII)}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\sin^2\omega}{a}\varphi + \frac{1-a}{a}\psi\sin\omega\cos\omega.$$

Если теперь составимъ различныя выраженія для

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta^2}, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta\partial\alpha^2},$$

то увидимъ, что уравненія наши (VI) и (VIII) будутъ совмѣстны въ силу *одного только* условія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega.$$

Дифференцируя по α и β функцію L, представляющую лѣвую часть уравненія (VII), мы увидимъ, что въ силу уравненій (VI) и (VIII) производныя $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ тождественно равны нулю, слѣдовательно

$$L = g = \text{const}.$$

Такимъ образомъ уравненіе это является слѣдствіемъ уравненій (VI) и (VIII).

Постоянная g опредѣляется начальными значеніями функцій ψ, φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ для $\alpha=\alpha_0$ и $\beta=\beta_0$; эти же начальныя значенія опредѣляютъ, вообще говоря, голоморфные въ нѣкоторой области интегралы уравненій (VI) и (VII).

Какъ въ § 10 пятой главы мы убѣдимся, что въ случаѣ разсмотрѣнномъ нами въ предыдущихъ параграфахъ т. е. въ случаѣ, когда $g=0$, выраженіе для функціи l

$$l = \frac{\varphi}{\psi}$$

заключаетъ *двѣ* произвольныхъ постоянныхъ, если не считать постоянной a.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ извѣстному уже намъ результату, что всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной соотвѣтствуетъ ∞^3 поверхностей S, наложимыхъ на основныя поверхности вращенія и связанныхъ опредѣленнымъ образомъ съ поверхностью Σ.

Предполагая, что мы находимся въ условіяхъ теоремы, обратной теоремѣ Guichard'а, мы изъ соотношеній (30) видимъ, что

$$M \frac{1}{\sin\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - N \frac{1}{\cos\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0,$$

откуда заключаемъ, что на поверхности Σ кривыя $\varphi = \text{const}$, гдѣ φ интегралъ уравненій (VI) и (VIII), удовлетворяющій уравненію $L = 0$, ортогональны къ плоскостямъ

$$Nx - My = 0$$

т. е. къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ S и Σ.

При доказательствѣ второй теоремы Bianchi мы видѣли, что обертка послѣднихъ плоскостей представляетъ поверхность наложимую на поверхность вращенія, линейный элементъ которой можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[a + \frac{a}{1-a} e^{2\tau}\right] dv^2,$$

гдѣ a постоянная, а

$$\tau = -av - (1-a)\theta.$$

Постараемся доказать это въ настоящемъ случаѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ нѣсколько расширимъ нашу задачу, а именно будемъ искать линейный элементъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на этой поверхности, при чемъ за φ примемъ интегралъ уравненій (VI) и (VIII), удовлетворяющій соотношенію

$$L = g,$$

гдѣ g нѣкоторая произвольная постоянная.

§ 9. Итакъ пусть φ и ψ интегралы дифференціальныхъ уравненій (VI) и (VIII), удовлетворяющіе соотношенію

$$L = g.$$

Уравненіе по отношенію къ (T) соотвѣтственной плоскости, ортогональной къ кривой $\varphi = \text{const}$ и проходящей черезъ нормаль къ Σ, будетъ

$$\cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0, \tag{31}$$

а потому координаты любой точки этой поверхности будутъ

$$x = \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Координаты точки, геометрическимъ мѣстомъ которой будетъ обертка плоскостей (31), мы опредѣлимъ изъ условія, что перемѣщенія ея при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β будутъ происходить въ плоскости (31).

Если черезъ δx, δy, δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній искомой точки на оси (T), то условіе наше выразится аналитически слѣдующимъ образомъ:

$$A d\alpha + B d\beta = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \delta x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \delta y = 0. \tag{32}$$

Такъ какъ по нашему предположенію условіе это имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$, то оно распадается на два условія:

$$A = 0, \quad B = 0, \tag{33}$$

изъ которыхъ мы и сможемъ опредѣлить искомыя величины t и z.

Проэкціи перемѣщеній нашей точки будутъ:

$$\delta x = \cos\omega d\alpha + d\left(t\sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + z\sin\omega d\alpha - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t\cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\delta y = \sin\omega d\beta + d\left(t\cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t\sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - z\cos\omega d\beta,$$

$$\delta z = dz + t\cos^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta - t\sin^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\alpha.$$

Если теперь воспользуемся основными уравненіями (VI) и (VIII) и оставимъ въ сторонѣ случаи $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=0$, то легко приведемъ наши условія (33) къ виду:

$$\cos\omega+t\left[\frac{\cos^2\omega\sin\omega}{a}\varphi-\frac{1-a}{a}\psi\sin^2\omega\cos\omega\right]+z\sin\omega=0,$$

$$\sin\omega+t\left[\frac{\sin^2\omega\cos\omega}{a}\varphi+\frac{1-a}{a}\psi\cos^2\omega\sin\omega\right]-z\cos\omega=0,$$

откуда опредѣлимъ искомыя функціи t и z:

$$t=\frac{-a}{\varphi\sin\omega\cos\omega},\quad z=\frac{(a-1)\psi}{\varphi}.$$

Такимъ образомъ координаты точекъ искомой обертки выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x=-\frac{a}{\varphi\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad y=-\frac{a}{\varphi\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},\quad z=\frac{(a-1)\psi}{\varphi}.$$

Отсюда уже, пользуясь уравненіями (VI) и (VIII), найдемъ слѣдующія выраженія для проэкцій перемѣщеній δx, δy, δz:

$$\delta x=\frac{a}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha+\frac{a}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)d\beta=\frac{a}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)d\varphi,$$

$$\delta y=\frac{a}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)+\frac{a}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2=\frac{a}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)d\varphi,$$

$$\delta z=\frac{\psi}{\varphi}\left[\frac{1-a}{\varphi}d\varphi-\frac{d\psi}{\psi}\right].$$

Линейный элементъ разсматриваемой обертки будетъ, слѣдовательно, вида:

$$ds^2=\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2=\frac{a^2}{\varphi^4}\left[\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right]d\varphi^2+$$
$$+\frac{\psi^2}{\varphi^2}\left[\frac{1-a}{\varphi}d\varphi-\frac{d\psi}{\psi}\right]^2;$$

въ силу соотношенія

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2=g+\frac{\varphi^2}{a}+\frac{1-a}{a}\psi^2,$$

онъ обратится въ слѣдующій:

$$ds^2 = \frac{n^2}{\varphi^4}\left[g - \frac{\varphi^2}{n} - \frac{1+n}{n}\psi^2\right]d\varphi^2 + \frac{\psi^2}{\varphi^2}\left[\frac{1+n}{\varphi}d\varphi - \frac{d\psi}{\psi}\right]^2,$$

гдѣ мы черезъ n обозначили величину $-a$.

Если теперь положимъ

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dv, \quad (1+n)\frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} = (1+n)\,d\theta,$$

т. е. допустимъ, что

$$\varphi = e^v, \quad \psi = \frac{e^{(1+n)v-(1+n)\theta}}{1+n},$$

то мы приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду

$$ds^2 = e^{2\tau}d\theta^2 + \left[gn^2e^{-2v} - n - \frac{n}{1+n}e^{2\tau}\right]dv^2, \tag{34}$$

гдѣ

$$\tau = nv - (n+1)\,\theta.$$

Отсюда видимъ, что наша поверхность представляетъ поверхность, съ которой мы встрѣтились во второй теоремѣ Bianchi.

Какъ легко видѣть, разстояніе какой-либо точки этой поверхности отъ соотвѣтственной касательной плоскости къ поверхности Σ равно координатѣ z, которая выразится слѣдующимъ образомъ черезъ θ и v:

$$z^2 = e^{2\tau};$$

разстояніе ϱ между нормалью къ Σ и параллельной ей касательной къ нашей оберткѣ выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = gn^2e^{-2v} - n - \frac{n}{n+1}e^{2\tau}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что полученная нами поверхность S_0 находится съ поверхностью Σ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся между собою поверхности S_0 и Σ во второй теоремѣ Bianchi.

Подобно тому, какъ въ § 11 предыдущей главы, мы прійдемъ къ теоремѣ, обратной второй теоремѣ Bianchi, а именно:

Всякой поверхности съ постоянной отрицательной кривизной Σ соотвѣтствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (34). *Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ диффе-*

ренціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка (VI) и (VIII). Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ.

§ 10. При выводѣ второй теоремы Bianchi, мы видѣли, что кромѣ поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (34), опредѣленнымъ образомъ связанныхъ съ поверхностями Σ постоянной отрицательной кривизны, съ тѣми же поверхностями Σ связаны аналогичнымъ образомъ и поверхности S_0 съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = e^{-2v}\,du^2 + [2\,(v - u)\,e^{-2v} + be^{-2v} - m]\,dv^2, \tag{35}$$

гдѣ b и m нѣкоторыя постоянныя [1])

Является теперь вопросъ, возможно ли найти для всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной поверхности S_0, опредѣленнымъ образомъ связанныя съ Σ и имѣющія линейный элементъ вида (35).

Для рѣшенія этого вопроса воспользуемся указаніями Bianchi, дающими возможность нѣсколько преобразовать наши уравненія (VI) и (VIII) [2]).

Преобразованіе это заключается въ слѣдующемъ.

Въ уравненія (VI) и (VIII), а также въ уравненіе

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 = g + \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1-a}{a}\psi^2 \tag{36}$$

вставимъ вмѣсто ψ функцію $\psi + c$, гдѣ c постоянная; при этой замѣнѣ уравненія (VI) очевидно не измѣнятся.

Затѣмъ положимъ

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)c = n$$

и въ полученныхъ такимъ образомъ уравненіяхъ положимъ

$$\frac{1}{a} - 1 = 0,$$

при чемъ будемъ считать въ нихъ n независящей отъ a величиной.

Такимъ образомъ прійдемъ къ слѣдующей системѣ уравненій:

---

[1]) См. гл. IV § 3.

[2]) Atti della R. A. dei Lincei t. IX fasc. 6.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \cos^2\omega\,\varphi - n\sin\omega\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \tag{IX}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \sin^2\omega\,\varphi + n\sin\omega\cos\omega,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = -\operatorname{tang}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \operatorname{cotang}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \tag{X}$$

$$L = \frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 - \varphi^2 - 2n\psi = g. \tag{XI}$$

Въ совмѣстности уравненій (IX) и (X) убѣдимся непосредственнымъ дифференцированіемъ, при чемъ, какъ легко видѣть, единственнымъ условіемъ совмѣстности будетъ условіе

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega\cos\omega.$$

Далѣе, тоже непосредственнымъ дифференцированіемъ убѣждаемся, что функціи $\frac{\partial L}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial L}{\partial\beta}$ тождественно равны нулю.

Подобно тому, какъ и при разсмотрѣніи уравненій (VI) и (VIII), мы увидимъ, что интегралы φ и ψ нашей системы (IX) и (X) будутъ зависѣть отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ, помощью которыхъ опредѣлится постоянная g, входящая въ уравненіе (XI).

Теперь постараемся найти обертку плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ поверхности S и ортогональныхъ къ соотвѣтственнымъ кривымъ $\varphi = \mathrm{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ.

Уравненіе какой-либо изъ этихъ плоскостей по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будетъ

$$\cos\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}x - \sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}y = 0, \tag{37}$$

а слѣдовательно координаты любой точки этой плоскости будутъ

$$x = \sin\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}t,\quad y = \cos\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}t,\quad z.$$

Функціи t и z для точекъ искомой обертки получимъ изъ условія, что перемѣщенія этихъ точекъ при безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β будутъ происходить въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ (37).

Условіе это

$$Ad\alpha + Bd\beta = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\delta x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\delta y = 0$$

разбивается на два

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Если вычислимъ выраженія для δx, δy и при этомъ воспользуемся уравненіями (IX) и (X), то тогда уравненія $A = 0$ и $B = 0$ приведутся къ виду

$$\cos\omega + t\sin\omega\cos\omega\,[\varphi\cos\omega - n\sin\omega] + z\sin\omega = 0,$$

$$\sin\omega + t\sin\omega\cos\omega\,[\varphi\sin\omega + n\cos\omega] - z\cos\omega = 0.$$

Отсюда легко найдемъ слѣдующія значенія для функцій t и z, соотвѣтствующія точкѣ искомой обертки

$$t = -\frac{1}{\varphi\sin\omega\cos\omega}, \quad z = -\frac{n}{\varphi};$$

такимъ образомъ координаты этой точки будутъ

$$x = \frac{1}{\varphi\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = -\frac{1}{\varphi\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = -\frac{n}{\varphi}.$$

Проэкціи перемѣщеній разсматриваемой точки на оси (T) будутъ въ силу уравненій (IX) и (X) вида

$$\delta x = \frac{1}{\varphi^2\cos\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha + \frac{1}{\varphi^2\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\beta = \frac{1}{\varphi^2\cos\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\varphi,$$

$$\delta y = \frac{1}{\varphi^2\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\alpha + \frac{1}{\varphi^2\sin\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 d\beta = \frac{1}{\varphi^2\sin\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\varphi,$$

$$\delta z = \frac{nd\varphi}{\varphi^2} - \frac{d\psi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}\left[\frac{nd\varphi}{\varphi} - d\psi\right],$$

а потому линейный элементъ искомой поверхности будетъ

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{nd\varphi}{\varphi} - d\psi\right]^2 + \frac{d\varphi^2}{\varphi^4}\left[\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2\right].$$

Если теперь обратимъ вниманіе на соотношеніе (XI), то приведемъ выраженіе для ds^2 къ виду

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{nd\varphi}{\varphi} - d\psi\right]^2 + \frac{d\varphi^2}{\varphi^4}[g + \varphi^2 + 2n\psi].$$

Полагая

$$\frac{nd\varphi}{\varphi} - d\psi = nd\theta, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = dv,$$

а слѣдовательно

$$\psi = n(v - \theta), \quad \varphi = ne^v,$$

мы дадимъ нашему линейному элементу слѣдующую форму

$$ds^2 = e^{-2v}\, d\theta^2 + \left[1 + \frac{g}{n^2} e^{-2v} + 2(v - \theta)\, e^{-2v}\right] dv^2, \tag{38}$$

а это линейный элементъ вида (35).

Если выразимъ въ параметрахъ θ, v разстояніе z точки разсматриваемой обертки отъ соотвѣтственной касательной плоскости къ поверхности Σ и разстояніе $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ между нормалью къ Σ и параллельной ей касательной къ оберткѣ, то легко найдемъ для нихъ слѣдующія значенія

$$z^2 = e^{-2v}, \quad \varrho^2 = x^2 + y^2 = 1 + \frac{g}{n^2} e^{-2v} + 2(v - \theta)\, e^{-2v}.$$

Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ теорема, обратная второй теоремѣ Bianchi для поверхности съ постоянной отрицательной кривизной нами доказана; теорему эту можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной соотвѣтствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (38). *Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка* (IX) *и* (X). *Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \mathrm{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ.*

Обращаясь къ случаямъ, когда одна изъ производныхъ $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ обращается въ нуль, мы, какъ и въ концѣ предыдущей главы, увидимъ, что это возможно лишь тогда, когда поверхность Σ поверхность вращенія. Въ этомъ случаѣ поверхность S_0 обратится въ ось вращенія.

ГЛАВА VII.

Теорема, обратная второй теоремѣ Guichard'a. Преобразованіе поверхностей съ постоянной положительной кривизной. Теорема, обратная второй теоремѣ Bianchi для поверхностей съ постоянной положительной кривизной.

§ 1. Намъ остается разсмотрѣть тѣ же вопросы, что и въ предыдущей главѣ, но только въ случаѣ, когда кривизна начальной поверхности Σ положительна; не нарушая общности, можемъ положить эту кривизну равной $+1$.

За координатныя линіи на поверхности Σ примемъ линіи кривизны $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$; координатныя оси (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы оси x-овъ касались кривыхъ $\beta = \text{const}$, а оси y-овъ кривыхъ $\alpha = \text{const}$.

Основныя величины, характеризующія нашу поверхность Σ, будутъ [1]):

$$\xi = \cosh\omega, \quad \eta_1 = \sinh\omega, \quad p_1 = -\cosh\omega, \quad q = \sinh\omega, \quad p = q_1 = 0,$$

$$r = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha},$$

при чемъ ω представляетъ интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} + \sinh\omega\cosh\omega = 0. \tag{1}$$

Линейный элементъ нашей поверхности, очевидно, будетъ

$$ds^2 = \cosh^2\omega d\alpha^2 + \sinh^2\omega d\beta^2.$$

Возьмемъ на нормали, проведенной къ Σ въ нѣкоторой точкѣ O, точку $M(o, o, l)$; геометрическимъ мѣстомъ этой точки будетъ нѣкоторая поверхность S.

---

[1]) Darboux, t. III, p. 385.

Черезъ u обозначимъ уголъ, составляемый нормалью къ Σ съ касательной плоскостью къ S, проведенной въ соотвѣтственной точкѣ M.

Если поверхность S будетъ наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія и если при томъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S, то, во первыхъ, между разстояніемъ l соотвѣтственныхъ точекъ O и M и угломъ u существуетъ соотношеніе

$$l^2 = \frac{a}{\sin^2 u} + 1\,, \tag{2}$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная, и, во вторыхъ, линіи кривизны поверхности Σ соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S [1]).

Какъ легко видѣть, для дѣйствительности поверхности S постоянная a должна удовлетворять одному изъ двухъ условій: либо $a > 0$ либо $0 > a > -1$.

Первое имѣетъ мѣсто, когда $l^2 > 1$, а второе, когда $l^2 < 1$.

Проэкціи перемѣщеній точки $M(o, o, l)$ на оси (T) будутъ:

$$\delta x = (\cosh\omega + l\sinh\omega)\, d\alpha, \quad \delta y = (\sinh\omega + l\cosh\omega)\, d\beta, \quad \delta z = dl. \tag{3}$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S, проведенной въ точкѣ M, пусть будетъ

$$Mx + Ny - z + l = 0. \tag{4}$$

Коэффиціенты M и N опредѣлятся изъ условія, что перемѣщенія точки M при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ (α, β) должны происходить въ плоскости (4), т. е., что для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$M\delta x + N\delta y - \delta z = 0.$$

Отсюда для M и N находимъ слѣдующія значенія:

$$M = \frac{1}{\cosh\omega + l\sinh\omega}\frac{\partial l}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{1}{\sinh\omega + l\cosh\omega}\frac{\partial l}{\partial \beta}. \tag{5}$$

Такъ какъ $\sin u$ представляетъ ничто иное, какъ $\cos$ угла, составляемаго нормалью къ плоскости (4) съ нормалью къ поверхности Σ, то мы напишемъ условіе (2) въ видѣ:

$$M^2 + N^2 + 1 = \frac{l^2 - 1}{a}. \tag{I}$$

[1]) См. гл. III § 3 и § 5.

Условіе это, какъ нетрудно видѣть, представляетъ дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 1-го порядка относительно функціи l.

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Черезъ нѣкоторую неподвижную точку P пространства, служащую началомъ подвижной системы координатъ (T_1), оси которой постоянно параллельны соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T), проведемъ плоскость, параллельную плоскости (4); уравненіе этой плоскости по отношенію къ (T_1) будетъ

$$Mx + Ny - z = 0. \tag{6}$$

Дадимъ параметру α приращеніе $d\alpha$; при этомъ координатныя оси (T_1) примутъ положеніе (T_1'); соотвѣтственныя точки O и M поверхностей Σ и S перемѣстятся вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и прійдутъ въ положеніе O' и M'.

По отношенію къ осямъ (T_1') уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку P и параллельной касательной плоскости къ S въ точкѣ M', будетъ:

$$M'x' + N'y' - z' = 0, \tag{7}$$

гдѣ

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial \alpha} d\alpha, \quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Пересѣченіе плоскостей (6) и (7) дастъ намъ въ предѣлѣ направленіе, сопряженное съ кривой $\beta = \text{const}$ на поверхности S.

Уравненіе плоскости (7) по отношенію къ осямъ (T_1) мы получимъ, полагая [1])

$$x' = x - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} y + z \sinh\omega\right) d\alpha, \quad y' = y + x \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha, \quad z' = z + x \sinh\omega d\alpha,$$

а слѣдовательно предѣльная прямая пересѣченія плоскостей (6) и (7) будетъ дана уравненіемъ (6) и уравненіемъ

$$x\left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} + N\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \sinh\omega\right] + y\left[\frac{\partial N}{\partial \alpha} - M\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right] - zM\sinh\omega = 0.$$

Если теперь положимъ, что на поверхности S кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ сопряженныя, другими словами, что перемѣщеніе точки M вдоль кривой $\alpha = \text{const}$ параллельно послѣдней прямой, то получимъ наше второе условіе

[1]) См. гл. II § 6.

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha} - M\frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right)(\sinh\omega + l\cosh\omega) - M\sinh\omega\,\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0,$$

которое въ силу (5) приводится къ виду:

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = M\frac{\partial \omega}{\partial \beta} + MN\sinh\omega. \tag{II}$$

Это условіе представляетъ относительно функціи l дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 2-го порядка, которое мы можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = (\sinh\omega + l\cosh\omega)\frac{\partial \omega}{\partial \beta}M + (\cosh\omega + l\sinh\omega)\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}N + (\cosh 2\omega + l\sinh 2\omega)MN.$$

Уравненіе (II) мы можемъ представить въ нѣсколько иной формѣ, а именно: дифференцируя выраженіе (5) для M по β и принимая во вниманіе только что полученное нами выраженіе для $\dfrac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta}$, мы вмѣсто уравненія (II) получимъ тождественное съ нимъ уравненіе

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = N\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + MN\cosh\omega. \tag{III}$$

§ 2. Теперь намъ остается показать, что уравненія (I) и (II) или, что то же, уравненія (I) и (III) совмѣстны.

Предположимъ, что послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто; въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравненіе (I) по α и вставимъ въ полученное уравненіе вмѣсто $\dfrac{\partial N}{\partial \alpha}$ его значеніе (I); оставляя въ сторонѣ случай $M = 0$, найдемъ, что

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = -N\frac{\partial \omega}{\partial \beta} - N^2\sinh\omega + \frac{l(\cosh\omega + l\sinh\omega)}{a}. \tag{IV}$$

Наконецъ, дифференцируя уравненіе (I) по β, пользуясь выраженіемъ (III) для $\dfrac{\partial M}{\partial \beta}$ и исключая случай $N = 0$, получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -M\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - M^2\cosh\omega + \frac{l(\sinh\omega + l\cosh\omega)}{a}. \tag{V}$$

Итакъ, если наши уравненія (I), (II) и (III) совмѣстны, то должны быть совмѣстны уравненія (II)—(V), т. е. должны удовлетворяться тождественно соотношенія

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Въ справедливости послѣднихъ тождествъ легко убѣдиться простымъ дифференцированіемъ выраженій (II)—(V), если при томъ примемъ во вниманіе соотношеніе (I) и вспомнимъ, что ω удовлетворяетъ уравненію (1).

Если теперь перенесемъ всѣ члены въ уравненіи (I) въ лѣвую часть и обозначимъ лѣвую часть полученнаго такимъ образомъ уравненія черезъ L, то въ силу уравненій (II)—(V) найдемъ, что производныя $\dfrac{\partial L}{\partial \alpha}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что для интеграла уравненій (II)—(V) функція L равна постоянной.

Для совмѣстности же уравненій (II)—(V) эта постоянная, какъ мы видѣли, должна равняться нулю.

Уравненія (II)—(V), къ интегрированію которыхъ сводится рѣшеніе нашей задачи, представляютъ *три* уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно функціи l.

Разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ § 2 предыдущей главы, мы прійдемъ къ заключенію, что поверхностей S, удовлетворяющихъ двумъ нашимъ условіямъ, будетъ ∞^3.

§ 3. Покажемъ теперь, что всѣ эти поверхности S наложимы на одну изъ *основныхъ* поверхностей вращенія съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a + \sin^2 u)} + k^2 \mathrm{cotang}^2 u\, dv^2,$$

гдѣ k постоянная.

Кромѣ того покажемъ, что система нормалей къ Σ представляетъ конгруэнцію, *присоединенную* къ поверхностямъ S.

Если оба наши предположенія справедливы, то на поверхности S кривыя $l = \mathrm{const}$ представляютъ геодезическія параллели.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, составимъ дифференціальный параметръ $\Delta_1(l)$ относительно линейнаго элемента поверхности S.

Линейный элементъ этотъ, какъ нетрудно видѣть, будетъ

$$ds_0^2 = (\cosh\omega + l\sinh\omega)^2 (M^2 + 1)\, d\alpha^2 + (\sinh\omega + l\cosh\omega)^2 (N^2 + 1)\, d\beta^2 + \\ + 2(\cosh\omega + l\sinh\omega)(\sinh\omega + l\cosh\omega)\, MN d\alpha d\beta.$$

Составляя выраженіе для $\Delta_1(l)$, найдемъ, что

$$\Delta_1(l) = \frac{M^2 + N^2}{M^2 + N^2 + 1} = \frac{l^2 - 1 - a}{l^2 - 1}.$$

Дифференціалъ длины дуги геодезическихъ линій, ортогональныхъ къ кривымъ $l = \text{const}$, будетъ

$$d\theta = \sqrt{\frac{l^2 - 1}{l^2 - 1 - a}}\, dl.$$

Вводя перемѣнное u, связанное съ l соотношеніемъ (2), получимъ:

$$d\theta^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a + \sin^2 u)}.$$

Линейный элементъ поверхности S можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2 dv^2.$$

Функцію σ опредѣлимъ, вычисливъ по извѣстной формулѣ Bonnet геодезическую кривизну линій $l = \text{const}$.

Такимъ образомъ найдемъ, что

$$\sigma = k \operatorname{cotang} u,$$

гдѣ k постоянная.

Итакъ линейный элементъ нашей поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u\,(a + \sin^2 u)} + k^2 \operatorname{cotang}^2 u\, dv^2,$$

а слѣдовательно въ зависимости отъ того, будетъ ли a положительнымъ или отрицательнымъ, поверхность S будетъ наложима либо на двуполый гиперболоидъ вращенія, либо на эллипсоидъ вращенія около большой оси.

Далѣе совершенно такъ же, какъ въ § 3 предыдущей главы, убѣдимся, что кривыя $l = \text{const}$ на поверхности S ортогональны къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ Σ и S.

Такимъ образомъ прійдемъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности Σ съ постоянной положительной Гауссовской кривизной соотвѣтствуетъ ∞^3 поверхностей S, наложимыхъ либо на двуполый гиперболоидъ вращенія, либо на эллипсоидъ вращенія около большой оси, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S.

Мы не будемъ останавливаться на исключенныхъ нами въ предыдущемъ изслѣдованіи случаяхъ, когда одна изъ функцій M или N равна нулю.

Путемъ тѣхъ же разсужденій, что и въ § 4 предыдущей главы мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности вращенія Σ съ постоянной положительной Гауссовской кривизной соотвѣтствуетъ ∞^2 поверхностей вращенія S, наложимыхъ либо на двуполый гиперболоидъ вращенія, либо на эллипсоидъ вращенія около большой оси, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S.

§ 4. Переходимъ къ разсмотрѣнію поверхности Σ_1, точки которой симметричны съ точками данной поверхности Σ относительно соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхности S т. е. относительно плоскостей

$$Mx + Ny - z + l = 0.$$

Координаты соотвѣтственной точки O_1 поверхности Σ_1 будутъ, очевидно,

$$x = -\frac{2alM}{l^2-1}, \quad y = -\frac{2alN}{l^2-1}, \quad z = \frac{2al}{l^2-1}. \tag{8}$$

Найдемъ выраженіе для линейнаго элемента поверхности Σ_1.

Проэкціи перемѣщеній точки O_1 мы можемъ представить въ слѣдующей формѣ, если только примемъ во вниманіе уравненія (I)—(V):

$$\delta x = \frac{\cosh\omega(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}\left[\frac{2aM^2}{l^2-1}-1\right]d\alpha + \frac{\sinh\omega(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}\frac{2aMN}{l^2-1}d\beta,$$

$$\delta y = \frac{\cosh\omega(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}\frac{2aMN}{l^2-1}d\alpha + \frac{\sinh\omega(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}\left[\frac{2aN^2}{l^2-1}-1\right]d\beta,$$

$$\delta z = -\frac{\cosh\omega(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}\frac{2aM}{l^2-1}d\alpha - \frac{\sinh\omega(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}\frac{2aN}{l^2-1}d\beta.$$

Линейный элементъ поверхности Σ_1 будетъ вида:

$$ds_1^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$

гдѣ

$$A = \frac{\cosh\omega\,(1+l^2)+2l\sinh\omega}{l^2-1}, \quad B = \frac{\sinh\omega\,(1+l^2)+2l\cosh\omega}{l^2-1}.$$

Замѣчая, что функціи A, B удовлетворяютъ соотношенію

$$A^2 - B^2 = 1,$$

мы можемъ найти такую дѣйствительную функцію Ω, чтобы

$$\cosh\Omega = \pm A, \quad \sinh\Omega = \pm B.$$

Линейный элементъ поверхности Σ_1 будетъ при этомъ вида

$$ds_1^2 = \cosh^2\Omega d\alpha^2 + \sinh^2\Omega d\beta^2,$$

при чемъ Ω опредѣляется изъ выраженій

$$\begin{aligned} \cosh\Omega &= \pm \frac{\cosh\omega\,(l^2+1) + 2l\sinh\omega}{l^2-1}, \\ \sinh\Omega &= \pm \frac{\sinh\omega\,(l^2+1) + 2l\cosh\omega}{l^2-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здѣсь очевидно верхніе знаки нужно брать въ случаѣ, когда $l^2 > 1$, а нижніе, когда $l^2 < 1$.

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности Σ_1 будетъ, какъ нетрудно видѣть:

$$2aMx + 2aNy + (l^2 - 1 - 2a)\,z + 2al = 0, \tag{10}$$

а слѣдовательно уравненіе нормали будетъ:

$$\frac{x + \dfrac{2alM}{l^2-1}}{2aM} = \frac{y + \dfrac{2alN}{l^2-1}}{2aN} = \frac{z - \dfrac{2al}{l^2-1}}{l^2-1-2a}.$$

Найдемъ теперь дифференціальныя уравненія сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1.

Черезъ неподвижную точку P пространства, служащую началомъ подвижной системы координатъ (T_1), оси которой постоянно параллельны осямъ (T), проведемъ плоскость, параллельную касательной плоскости (10) къ поверхности Σ_1; уравненіе ея по отношенію къ (T_1) будетъ

$$2aMx + 2aNy + (l^2 - 1 - 2a)\,z = 0. \tag{11}$$

Дадимъ параметрамъ α, β приращенія $d\alpha$, $d\beta$; при этомъ оси (T_1) примутъ положеніе (T_1'), а точка O_1 передвинется по нѣкоторой кривой (c) въ точку O_1'.

По отношенію къ (T_1') уравненіе плоскости, параллельной касательной плоскости къ Σ_1 въ точкѣ O_1' и проходящей черезъ нашу неподвижную точку P, будетъ:

$$2aM'x' + 2aN'y' + (l'^2 - 1 - 2a)\,z' = 0,$$

гдѣ

$$M' = M + dM, \quad N' = N + dN, \quad l' = l + dl.$$

Если отнесемъ это уравненіе къ прежнимъ осямъ (T_1), то легко найдемъ, что прямая, параллельная направленію, сопряженному съ кривой (c) на поверхности Σ_1, будетъ дана уравненіемъ (11) и уравненіемъ

$$Hx + Gy + Lz = 0,$$

гдѣ

$$H = 2ad M - 2a\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\beta\right)N + (l^2 - 1 - 2a)\sinh\omega d\alpha,$$

$$G = 2ad N + 2a\left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}d\beta\right)M + (l^2 - 1 - 2a)\cosh\omega d\beta,$$

$$L = 2l dl - 2aM\sinh\omega d\alpha - 2aN\cosh\omega d\beta.$$

Если черезъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ обозначимъ приращенія параметровъ, соотвѣтствующія перемѣщенію точки O_1 по поверхности Σ_1 вдоль кривой, сопряженной съ кривой (c), то послѣ несложныхъ вычисленій, пользуясь уравненіями (I)—(V), найдемъ дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1

$$d\alpha\delta\alpha - d\beta\delta\beta = 0.$$

Послѣднее уравненіе представляетъ въ то же время уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ.

Итакъ мы видимъ, что всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ будетъ соотвѣтствовать система сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1 и наоборотъ.

Въ частности легко показать, что линіи кривизны и ассимптотическія кривыя поверхности Σ соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны и ассимптотическимъ кривымъ поверхности Σ_1. Доказательство здѣсь то же, что и въ § 5 предыдущей главы.

Намъ остается показать, что поверхность Σ_1 имѣетъ постоянную Гауссовскую кривизну, равную $+1$.

Обратимся опять къ координатамъ (T_1), имѣющимъ начало въ неподвижной точкѣ P.

Изъ уравненія нормали къ поверхности Σ_1 ясно, что координаты сферическаго изображенія соотвѣтственной точки поверхности Σ_1 по отношенію къ (T_1) будутъ:

$$x_1 = \frac{2aM}{l^2 - 1}, \quad y_1 = \frac{2aN}{l^2 - 1}, \quad z_1 = 1 - \frac{2a}{l^2 - 1}.$$

Проэкціи перемѣщеній сферическаго изображенія на оси (T_1) или что тоже, на оси (T), очевидно, таковы:

$$\delta x_1 = \mp \sinh\Omega\left(\frac{2aM^2}{l^2-1}-1\right)d\alpha \mp \cosh\Omega\frac{2aMN}{l^2-1}d\beta,$$

$$\delta y_1 = \mp \sinh\Omega\frac{2aMN}{l^2-1}d\alpha \mp \cosh\Omega\left[\frac{2aN^2}{l^2-1}-1\right]d\beta,$$

$$\delta z_1 = \pm \sinh\Omega\frac{2aM}{l^2-1}d\alpha \pm \cosh\Omega\frac{2aN}{l^2-1}d\beta,$$

гдѣ $\sinh\Omega$ и $\cosh\Omega$ имѣютъ значенія (9).

Отсюда, замѣчая, что радіусы кривизны нашей поверхности Σ_1 представляютъ ничто иное, какъ величины отношеній $\frac{\delta x}{\delta x_1}$, $\frac{\delta y}{\delta y_1}$, $\frac{\delta z}{\delta z_1}$ при перемѣщеніяхъ вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, найдемъ, что

$$R_1 = -\operatorname{cotangh}\Omega, \quad R_2 = -\operatorname{tangh}\Omega,$$

а потому Гауссовская кривизна поверхности Σ_1 равна $+1$.

Отсюда тоже слѣдуетъ, что функція Ω удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\beta^2}+\sinh\Omega\cosh\Omega=0.$$

§ 5. Соотвѣтствіе между поверхностями Σ и Σ_1, какъ мы только что видѣли, аналогично тому, какое существуетъ между двумя преобразованіями одной и той-же поверхности постоянной положительной кривизны, разсмотрѣнными нами во II главѣ.

Въ виду этого постараемся найти, если можно, такую поверхность Σ_2 съ постоянной Гауссовской кривизной $+1$, преобразованіями которой были бы двѣ наши поверхности Σ и Σ_1.

Сохраняя всѣ обозначенія § 16 второй главы, при чемъ для краткости будемъ только писать θ вмѣсто θ_1, мы должны имѣть для координатъ x, y, z соотвѣтственной точки поверхности Σ_1 такія выраженія:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{2alM}{l^2-1} = i[m_1\cosh\theta + m_2\cosh\theta\cosh(\Omega-\omega)+\mu_1 m_2\sinh\theta\sinh(\Omega-\omega)],\\
y &= -\frac{2alN}{l^2-1} = -[m_1\sinh\theta + m_2\sinh\theta\cosh(\Omega-\omega)+\mu_1 m_2\cosh\theta\sinh(\Omega-\omega)], \qquad (12)\\
z &= \frac{2al}{l^2-1} = -m_1 m_2\sinh(\Omega-\omega).
\end{aligned}
$$

Здѣсь m_1, μ_1 постоянныя, характеризующія преобразованіе B_{σ_1}, помощью котораго мы переходимъ отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_2 съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = \cosh^2\theta d\alpha^2 + \sinh^2\theta d\beta^2.$$

Что касается постоянныхъ m_2, μ_2, то онѣ характеризуютъ преобразованіе B_{σ_2}, приводящее насъ отъ поверхности Σ_2 къ поверхности Σ_1.

Изъ выраженій (9) предыдущаго параграфа легко найдемъ, что

$$\sinh(\Omega-\omega)=\pm\frac{2l}{l^2-1},\quad \cosh(\Omega-\omega)=\pm\frac{l^2+1}{l^2-1}, \tag{13}$$

при чемъ верхніе знаки, очевидно, соотвѣтствуютъ случаю когда $l^2>1$ т. е. когда наша постоянная $a>0$, а нижніе—случаю, когда $l^2<1$ т. е. когда a удовлетворяетъ неравенствамъ $0<a<-1$.

Подставляя эти значенія въ выраженія (12), мы приходимъ къ слѣдующимъ соотношеніямъ:

$$a=\mp m_1 m_2 \tag{14}$$

и

$$-2alM=i\{[m_1(l^2-1)\pm m_2(l^2+1)]\cosh\theta\pm 2\mu_1 m_2 l\sinh\theta\},$$
$$2alN=[m_1(l^2-1)\pm m_2(l^2+1)]\sinh\theta\pm 2\mu_1 m_2 l\cosh\theta.$$

Опредѣленныя такимъ образомъ функціи M и N должны удовлетворять уравненіямъ (I)—(V); подставляя эти значенія M и N въ уравненіе (I), получимъ:

$$l^4[4a+(m_1\pm m_2)^2]+$$
$$+2l^2[(m_2^2-m_1^2-2a(1+a)-2\mu_1^2 m_2^2]+(m_1\mp m_2)^2=0.$$

Это соотношеніе должно быть простымъ тождествомъ, а потому постоянныя m_1, m_2 должны удовлетворять кромѣ соотношенія (14) еще соотношеніямъ

$$4a+(m_1\pm m_2)^2=0,\quad m_1\mp m_2=0,\quad a(1+a)+\mu_1^2 m_2^2=0. \tag{15}$$

Сопоставляя полученныя нами условія съ условіемъ (14), найдемъ, что

$$m_1=\pm m_2=\sqrt{-a},\quad \mu_1^2=\mu_2^2. \tag{16}$$

Принимая во вниманіе эти соотношенія, мы для M и N найдемъ слѣдующія выраженія:

$$m_1 M=i(l\cosh\theta+\mu_1\sinh\theta),$$
$$m_1 N=-(l\sinh\theta+\mu_1\cosh\theta) \tag{17}$$

Подставляя эти значенія въ уравненія (II)—(V), увидимъ, что они удовлетворятся тождественно, если только обратимъ вниманіе, что θ удовлетворяетъ системѣ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}+i\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=\frac{\mu_1 i\sinh\omega\cosh\theta}{m_1}-\frac{i\cosh\omega\sinh\theta}{m_1},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=-\frac{\mu_1\cosh\omega\sinh\theta}{m_1}+\frac{\sinh\omega\cosh\theta}{m_1}\ ^{1}). \tag{18}$$

Намъ остается показать, что полученная нами функція Ω удовлетворяетъ уравненіямъ, аналогичнымъ (18), въ которыхъ мы замѣнимъ θ, ω, m_1, μ_1 соотвѣтственно черезъ Ω, θ, $m_2=\pm m_1$, μ_2.

Комбинируя полученныя такимъ образомъ уравненія съ уравненіями (18), мы приведемъ уравненія, которымъ должна удовлетворять функція Ω къ виду:

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha}=\left[\frac{\mu_2 i\cosh\Omega}{\pm m_1}+\frac{\mu_1 i\cosh\omega}{m_1}\right]\sinh\theta-\left(\frac{i\sinh\Omega}{\pm m_1}+\frac{i\sinh\omega}{m_1}\right)\cosh\theta,$$

$$\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta}=-\left[\frac{\mu_2\sinh\Omega}{\pm m_1}+\frac{\mu_1\sinh\omega}{m_1}\right]\cosh\theta+\left[\frac{\cosh\Omega}{\pm m_1}+\frac{\cosh\omega}{m_1}\right]\sinh\theta.$$

Подставляя сюда вмѣсто $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial\beta}$, M, N, $\cosh\Omega$, $\sinh\Omega$ ихъ значенія, полученныя въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, мы приведемъ наши выраженія къ виду:

$$(\mu_1+\mu_2)\cosh\Omega\sinh\theta=0,$$

$$(\mu_1+\mu_2)\sinh\Omega\cosh\theta=0.$$

Легко видѣть, что единственнымъ условіемъ тождественнаго обращенія въ нуль этихъ выраженій будетъ:

$$\mu_1+\mu_2=0,$$

такъ какъ въ другихъ случаяхъ мы получили бы для l выраженія, не зависящія отъ постоянной a — результатъ невозможный, если предположимъ, что a произвольно.

Итакъ, резюмируя полученные нами результаты, видимъ, что поверхность Σ_1 можетъ быть получена путемъ послѣдовательнаго примѣненія къ поверхности Σ двухъ преобразованій B_{σ_1}, B_{σ_2}, при чемъ постоянныя m_1, m_2, μ_1, μ_2 этихъ преобразованій связаны между собою соотношеніями:

---

[1]) См. гл. II § 15.

при $a > 0$

$$m_1 = m_2 = \sqrt{-a} = ib, \quad \mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{1 + b^2}$$

и при $a < 0$

$$m_1 = -m_2 = \sqrt{-a} = b < 1, \quad \mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{1 - b^2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ результатами, полученными нами въ концѣ II главы, видимъ, что найденныя теперь нами преобразованія B_{σ_1}, B_{σ_2} принадлежатъ какъ разъ къ тѣмъ комплекснымъ преобразованіямъ, послѣдовательное примѣненіе которыхъ должно приводить къ дѣйствительной поверхности.

§ 6. Постараемся теперь свести рѣшеніе всѣхъ поставленныхъ нами въ этой главѣ вопросовъ къ интегрированію системы *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ перваго и второго порядковъ. Для этого преобразуемъ наши уравненія (II)—(V), воспользовавшись тѣмъ свойствомъ конгруэнціи круговъ, ортогональныхъ къ поверхностямъ Σ и Σ_1 и имѣющихъ центры въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ къ поверхности S, что она ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей.

Центръ C одного какого-либо изъ этихъ круговъ представляетъ точку пересѣченія трехъ соотвѣтственныхъ плоскостей: касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ Σ и S и плоскости, проходящей черезъ нормали къ этимъ двумъ поверхностямъ, т. е. плоскостей, уравненія которыхъ

$$z = 0, \quad Mx + Ny - z + l = 0, \quad Nx - My = 0;$$

Координаты этого центра будутъ слѣдовательно

$$x_0 = -\frac{Ml}{M^2 + N^2} = -\frac{aMl}{l^2 - 1 - a},$$

$$y_0 = -\frac{Nl}{M^2 + N^2} = \frac{-aNl}{l^2 - 1 - a}, \quad z_0 = 0,$$

а радіусъ r_0 соотвѣтственнаго круга

$$r_0^2 = \frac{a^2 l^2 (M^2 + N^2)}{(l^2 - 1 - a)^2} = \frac{al^2}{l^2 - 1 - a}. \tag{19}$$

Обозначимъ начало нашихъ координатъ черезъ O; черезъ γ обозначимъ уголъ, составляемый отрѣзкомъ OC съ осью $x^{\text{-овъ}}$, тогда

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{a}\, M}{\sqrt{l^2 - 1 - a}}, \quad \sin\gamma = -\frac{\sqrt{a}\, N}{\sqrt{l^2 - 1 - a}}. \tag{20}$$

Если черезъ t обозначимъ уголъ, составляемый какимъ-либо радiусомъ круга съ отрѣзкомъ CO, тогда координаты соотвѣтственной точки разсматриваемаго круга будутъ

$$x = r_0 \cos\gamma\,(1 - \cos t), \quad y = r_0 \sin\gamma\,(1 - \cos t), \quad z = r_0 \sin t. \tag{21}$$

Если разсматриваемая точка описываетъ поверхность ортогональную къ кругамъ то ея перемѣщенiя удовлетворяютъ при всевозможныхъ значенiяхъ $d\alpha$, $d\beta$ соотношенiю

$$\sin t \cos\gamma\,\delta x + \sin t \sin\gamma\,\delta y + \cos t\,\delta z = 0, \tag{22}$$

гдѣ δx, δy, δz представляютъ проэкцiи перемѣщенiй нашей точки на соотвѣтственныя оси (T).

Если подставимъ вмѣсто этихъ проэкцiй ихъ значенiя, то приведемъ выраженiе (22) къ виду

$$A d\alpha + B d\beta + T dt = 0, \tag{23}$$

гдѣ

$$A = r_0 \sinh\omega \cos\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \alpha} + \cosh\omega \cos\gamma\right) \sin t - r_0 \sinh\omega \cos\gamma \cos t,$$

$$B = r_0 \cosh\omega \sin\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \beta} + \sinh\omega \sin\gamma\right) \sin t - r_0 \cosh\omega \sin\gamma \cos t,$$

$$T = r_0.$$

Чтобы условiе (23) имѣло мѣсто при всевозможныхъ значенiяхъ $d\alpha$, $d\beta$, недбходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось тождественно соотношенiе

$$A\left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial \beta}\right) + B\left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial t}\right) + T\left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right) = 0,$$

которое имѣетъ видъ

$$P \sin t + Q \cos t + R = 0,$$

гдѣ

$$P = r_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\cosh\omega \cos\gamma}{r_0} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sinh\omega \sin\gamma}{r_0}\right],$$

$$Q = -R = r_0 \left[r_0^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\cosh\omega \sin\gamma}{r_0} - r_0^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\sinh\omega \cos\gamma}{r_0} - \sin\gamma \cos\gamma\right].$$

Такъ какъ наши круги ортогональны къ безчисленному множеству поверхностей, то слѣдовательно

$$P=0, \quad Q=-R=0.$$

Подставляя въ послѣднія уравненія вмѣсто γ и r_0 ихъ значенія (20) и (19), найдемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\cosh\omega M}{l}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sinh\omega N}{l}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\cosh\omega N}{l}-\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\sinh\omega M}{l}+\frac{MN}{l^2}=0. \quad (24)$$

Въ справедливости послѣднихъ уравненій легко убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Комбинируя уравненія (II) и (III), получимъ:

$$\cosh\omega\frac{\partial M}{\partial\beta}+M\sinh\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-MN\cosh^2\omega=$$

$$=\sinh\omega\frac{\partial N}{\partial\alpha}+N\cosh\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-MN\sinh^2\omega;$$

если теперь раздѣлимъ обѣ части на l и прибавимъ къ нимъ по $-\frac{MN\sinh\omega\cosh\omega}{l^2}$, то легко прійдемъ къ первому изъ уравненій (24).

Для вывода второго изъ этихъ уравненій поступимъ такимъ образомъ: умножимъ уравненіе (III) на $\frac{\sinh\omega}{l}$ и изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія вычтемъ уравненіе (II), умноженное на $\frac{\cosh\omega}{l}$, тогда найдемъ

$$\frac{\sinh\omega}{l}\frac{\partial M}{\partial\beta}+M\frac{\cosh\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{\cosh\omega}{l}\frac{\partial N}{\partial\alpha}-N\frac{\sinh\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0;$$

сложивъ теперь это уравненіе съ тождествомъ

$$-M\frac{\sinh\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\beta}+N\frac{\cosh\omega}{l^2}\frac{\partial l}{\partial\alpha}=\frac{MN}{l^2},$$

мы и получимъ второе изъ уравненій (24).

Первое изъ уравненій (24) показываетъ, что функціи $M\frac{\cosh\omega}{l}$ и $N\frac{\sinh\omega}{l}$ представляютъ частныя производныя одной и той же функціи т. е.

$$M\frac{\cosh\omega}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad N\frac{\sinh\omega}{l}=\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta};$$

если теперь введемъ еще функцію ψ

$$\psi=\frac{\varphi}{l}, \tag{25}$$

то для M и N найдемъ слѣдующія выраженія

$$M=\frac{1}{\psi\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad N=\frac{1}{\psi\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{26}$$

§ 7. Пользуясь уравненіями (I)—(V), легко найти тѣ дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го и 1-го порядка, которымъ удовлетворяютъ введенныя нами функціи φ и ψ.

Въ самомъ дѣлѣ, если подставимъ въ уравненіе (I) вмѣсто M и N ихъ значенія (26), то приведемъ его къ виду

$$L=\frac{1}{\cosh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{\sinh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2-\frac{\varphi^2}{a}+\frac{1+a}{a}\psi^2=0, \tag{VI}$$

здѣсь черезъ L мы обозначаемъ лѣвую часть нашего уравненія.

Дифференцируя выраженіе (25) и принимая во вниманіе выраженія (26), легко найдемъ, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=-\operatorname{tangh}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\psi}{\partial\beta}=-\operatorname{cotangh}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}. \tag{VII}$$

Если теперь продифференцируемъ выраженія (26) по α и β, подставимъ въ уравненія (II)—(V) полученныя значенія функцій l, M, N и ихъ производныхъ, и кромѣ того примемъ во вниманіе уравненія (VI) и (VII), то найдемъ искомыя уравненія

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=\operatorname{tangh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\operatorname{cotangh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\cosh^2\omega}{a}\varphi+\frac{a+1}{a}\psi\sinh\omega\cosh\omega,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}=\operatorname{tangh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotangh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \tag{VIII}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}=-\operatorname{tangh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\operatorname{cotangh}\omega\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\sinh^2\omega}{a}\varphi+\frac{a+1}{a}\psi\sinh\omega\cosh\omega.$$

Если теперь составимъ различныя выраженія для $\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}, \frac{\partial^3\varphi}{\partial\alpha\partial\beta^2}, \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta\partial\alpha^2}$, то увидимъ, что уравненія наши (VII) и VIII) будутъ совмѣстны въ силу *одного только* условія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}+\sinh\omega\cosh\omega=0.$$

Дифференцируя по α и β функцію L, представляющую лѣвую часть уравненія (VI), мы найдемъ, что въ силу уравненій (VII) и (VIII) она тождественно равна нулю, а слѣдовательно

$$L = g = \text{const}.$$

Такимъ образомъ уравненіе

$$L = \frac{1}{\cosh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sinh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 - \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1+a}{a}\psi^2 = g = \text{const}. \quad \text{(IX)}$$

представляетъ *слѣдствіе* уравненій (VII) и (VIII).

Постоянная g опредѣляется начальными значеніями для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ функцій $\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \psi$; эти же начальныя значенія опредѣляютъ, вообще говоря, голоморфные въ нѣкоторой области интегралы уравненій (VII) и (VIII).

Какъ въ § 10 пятой главы мы убѣдимся, что въ случаѣ, разсмотрѣнномъ нами въ предыдущихъ параграфахъ, а именно, когда $g = 0$, выраженіе для функціи l

$$l = \frac{\varphi}{\psi}$$

будетъ зависѣть отъ *двухъ* произвольныхъ постоянныхъ.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изъ соотношеній (26) находимъ, что

$$M\frac{1}{\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - N\frac{1}{\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0,$$

откуда заключаемъ, что кривыя $\varphi = \text{const}$, гдѣ φ интегралъ уравненій (VII) и (VIII), удовлетворяющій условію $L = 0$, проведенныя на поверхности Σ, ортогональны къ плоскостямъ

$$Nx - My = 0,$$

проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ Σ и S.

Какъ мы знаемъ изъ теоремы Bianchi [1]), обертка послѣднихъ плоскостей должна быть наложима на поверхность вращенія съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = e^{2\tau}\,d\theta^2 + \left[a - \frac{a}{1+a}e^{2\tau}\right]dv^2,$$

гдѣ a постоянная, а τ дается выраженіемъ

$$\tau = av - (a+1)\theta.$$

[1]) См. гл. IV § 3.

Вмѣсто того, чтобы доказывать послѣднее утвержденіе, мы найдемъ линейный элементъ обертки плоскостей, ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ. и проходящихъ черезъ нормали къ Σ, при чемъ за φ примемъ интегралъ уравненій (VII) и (VIII), удовлетворяющій соотношенію (VI), гдѣ g какая угодно постоянная.

§ 8. Уравненіе разсматриваемой плоскости будетъ очевидно,

$$\cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0, \tag{27}$$

а потому координаты любой точки этой плоскости будутъ

$$x = \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Значенія параметра t и координаты z для соотвѣтствующей точки искомой обертки найдемъ изъ условія, что перемѣщенія этой точки при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β будутъ происходить въ плоскости (27).

Проэкціи перемѣщеній нашей точки на оси (T) будутъ:

$$\delta x = \cosh\omega d\alpha + d\left(t\sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + z\sinh\omega d\alpha - \left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t\cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\delta y = \sinh\omega d\beta + d\left(t\cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t\sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + z\cosh\omega d\beta,$$

$$\delta z = dz - t\cosh^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta - t\sinh^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\alpha,$$

а потому уравненія, служащія для опредѣленія t и z, примутъ видъ:

$$\sinh\omega + \frac{t}{a} \sinh\omega \cosh\omega \left[\varphi\sinh\omega + (a+1)\psi\cosh\omega\right] + z\cosh\omega = 0,$$

$$\cosh\omega + \frac{t}{a} \sinh\omega \cosh\omega \left[\varphi\cosh\omega + (a+1)\psi\sinh\omega\right] + z\sinh\omega = 0.$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ, что

$$t = -\frac{a}{\varphi\sinh\omega\cosh\omega}, \quad z = \frac{(a+1)\psi}{\varphi},$$

а слѣдовательно координаты искомой точки будутъ:

$$x = -\frac{a}{\varphi\cosh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = -\frac{a}{\varphi\sinh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = \frac{(a+1)\psi}{\varphi};$$

проэкціи ея перемѣщеній на основаніи уравненій (VII) и V(III) примутъ слѣдующій видъ:

$$\delta x = \frac{a}{\varphi^2 \cosh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\varphi, \quad \delta y = \frac{a}{\varphi^2 \sinh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\varphi, \quad \delta z = -\frac{\psi}{\varphi}\left[\frac{(a+1)\,d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi}\right].$$

Если примемъ теперь во вниманіе соотношеніе (IX), то для линейнаго элемента разсматриваемой поверхности найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = a^2\left[\frac{\varphi^2}{a} - \frac{1+a}{a}\psi^2 + g\right]\frac{d\varphi^2}{\varphi^4} +$$

$$+ \frac{\psi^2}{\varphi^2}\left[\frac{a+1}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi}\right]^2.$$

Положимъ здѣсь

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dv, \quad \frac{(1+a)\,d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} = (1+a)\,d\theta,$$

или, что то же,

$$\varphi = e^v, \quad \psi = \frac{e^{(1+a)v - (1+a)\theta}}{1+a},$$

тогда нашъ линейный элементъ приведемъ къ виду

$$ds^2 = e^{2\tau}\, d\theta^2 + \left[g a^2 e^{-2v} + a - \frac{a}{1+a} e^{2\tau}\right] dv^2, \tag{28}$$

гдѣ

$$\tau = av - (a+1)\,\theta.$$

Такъ же, какъ и въ § 9 предыдущей главы, убѣдимся, что найденная нами поверхность S_0 находится съ поверхностью Σ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся между собою поверхности S_0 и Σ во второй теоремѣ Bianchi.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности Σ съ постоянной положительной кривизной соотвѣтствуетъ ∞^5 поверхностей съ линейнымъ элементомъ (28). *Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій 1-го и 2-го порядка* (VII) *и* (VIII). *Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \mathrm{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ.*

§ 9. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ находятся поверхности съ линейнымъ элементомъ вида

$$ds^2 = e^{-2v}\,du^2 + [2(v-u)\,e^{-2v} + be^{-2v} - m]\,dv^2, \tag{29}$$

которыя, какъ мы видѣли во второй теоремѣ Bianchi, связаны опредѣленнымъ образомъ съ поверхностями постоянной кривизны.

Для этого опять воспользуемся пріемомъ Bianchi для преобразованія уравненій (VII), (VIII) и (IX), а именно: вставимъ въ эти уравненія вмѣсто ψ функцію $\psi + c$, гдѣ c постоянная.

Въ полученныхъ такимъ образомъ уравненіяхъ положимъ

$$\frac{(1+a)\,c}{a} = n$$

и затѣмъ положимъ

$$\frac{1}{a} + 1 = 0,$$

при чемъ n будемъ считать независящей отъ a величиной.

Такимъ образомъ прійдемъ къ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} &= \operatorname{tangh}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \operatorname{cotangh}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \varphi\cosh^2\omega + n\sinh\omega\cosh\omega,\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} &= \operatorname{tangh}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotangh}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \qquad \text{(X)}\\
\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} &= -\operatorname{tangh}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \operatorname{cotangh}\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \varphi\sinh^2\omega + n\sinh\omega\cosh\omega.
\end{aligned}$$

Уравненія (VII) останутся безъ перемѣны, что же касается уравненія (IX), то оно приметъ видъ:

$$L = \frac{1}{\cosh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sinh^2\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2 + \varphi^2 + 2n\varphi = g = \text{const}. \tag{XI}$$

Простымъ дифференцированіемъ убѣждаемся, что уравненія (VII), (X) и (XI) совмѣстны въ силу единственнаго условія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} + \sinh\omega\cosh\omega = 0.$$

Какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, найдемъ обертку плоскостей, ортогональныхъ къ соотвѣтственнымъ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ, и проходящихъ черезъ нормали къ Σ т. е. плоскостей

$$\cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0. \tag{30}$$

Координаты точекъ, лежащихъ въ этой плоскости, будутъ:

$$x = \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Пользуясь тѣми же разсужденіями, что и раньше, мы для опредѣленія значеній t и z, соотвѣтствующихъ точкѣ искомой обертки, найдемъ уравненія:

$$\cosh\omega + t\sinh\omega\cosh\omega\,(n\sinh\omega - \varphi\cosh\omega) + z\sinh\omega = 0,$$

$$\sinh\omega + t\sinh\omega\cosh\omega\,(n\cosh\omega - \varphi\sinh\omega) + z\cosh\omega = 0;$$

отсюда легко получимъ, что

$$t = \frac{1}{\varphi\sinh\omega\cosh\omega}, \quad z = -\frac{n}{\varphi},$$

а потому координаты соотвѣтственной точки нашей обертки будутъ

$$x = \frac{1}{\varphi\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = \frac{1}{\varphi\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = -\frac{n}{\varphi}.$$

Проэкціи ея перемѣщеній на оси (T), очевидно, таковы:

$$\delta x = -\frac{1}{\varphi^2\cosh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\varphi, \quad \delta y = -\frac{1}{\varphi^2\sinh\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}d\varphi, \quad \delta z = \frac{1}{\varphi}\left[d\psi + \frac{nd\varphi}{\varphi}\right],$$

а потому на основаніи (XI) линейный элементъ разсматриваемой поверхности будетъ

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2}\left[d\psi + \frac{nd\varphi}{\varphi}\right]^2 + [g - \varphi^2 - 2n\varphi]\frac{d\varphi^2}{\varphi^4}.$$

Если теперь положимъ

$$\frac{nd\varphi}{\varphi} + d\psi = nd\theta, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = dv,$$

а слѣдовательно

$$\psi = -n(v - \theta) \quad \varphi = ne^v,$$

то приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду

$$ds^2 = e^{-2v}\, d\theta^2 + \left[\frac{g}{n^2} e^{-2v} - 1 + 2(v - \theta)\, e^{-2v}\right] dv^2, \tag{31}$$

откуда заключаемъ, что поверхность наша имѣетъ тотъ же линейный элементъ, что и поверхность S_0, разсматриваемая въ теоремѣ Bianchi.

Такимъ образомъ такъ же, какъ и въ концѣ предыдущей главы, мы приходимъ къ теоремѣ, обратной второй теоремѣ Bianchi, а именно: *Всякой поверхности* Σ *съ постоянной положительной кривизной соотвѣтствуетъ* ∞^5 *поверхностей* S_0 *съ линейнымъ элементомъ* (31). *Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го и 2-го порядка* (IX) *и* (X). *Поверхности* S_0 *представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ* Σ *и ортогональныхъ къ кривымъ* $\varphi = \text{const}$, *проведеннымъ на поверхности* Σ.

Мы не будемъ останавливаться на случаѣ, когда одна изъ производныхъ $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$ обратится въ нуль: результаты изслѣдованія этого случая тождественны съ полученными нами въ концѣ предыдущей главы.

Замѣченныя опечатки.

Стр.	Строка.		Напечатано.	Должно быть.
49	3	снизу	snivis	suivis
49	2	„	daus	dans
51	15	сверху	d'optiques géométriques	d'optique géométrique
51	30	„	Lipzig	Leipzig
55	5	снизу	1913	19 Bd.
55	13	„	*найта*	*найти*
63	3	„	ихъ точекъ	соотвѣтственной точки ребра
63	9	„	$-(qdu+p_1 dv)\cos\alpha$	$-(qdu+q_1 dv)\cos\alpha$
66	15	сверху	$-q_1\eta$	$-q\eta_1$
71	10	снизу	$rp_1\cos\alpha - q\sin\alpha \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = 0$	$rp_1\cos\alpha \sin\alpha - q\dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = 0$
73	13	сверху	гдѣ φ и ω	гдѣ φ, а слѣдовательно и ω,
86	6	„	q	q_1
93	9	„	$(pdu+pdv_1)z$	$(pdu+p_1dv)z$
103	22	„	получаемые	получаемыя
105	1	снизу	$-i\dfrac{1+\mu}{dv}$	$-i\dfrac{1+\mu}{m}$
112	12	„	дѣйствительныя	дѣйствительная
115	4	сверху	$-\eta_1 q$	$+\eta_1 q$
115	9	снизу	$\xi r_1\sin\alpha$	$\xi r_1\sin\alpha\cos\alpha$
116	4	сверху	$\xi r_1\sin\alpha$	$\xi r_1\sin\alpha\cos\alpha$
119	20	„	$\pm y\sin\alpha$	$\pm z\sin\alpha$
121	4	снизу	$\eta_1 = k\,\mathrm{cotang}\,u$	$\eta_1 = k\,\mathrm{cotang}\,u$ (28)
124	16	сверху	$d=\pm(l\pm n)$	$d_1=\pm(n-l)$ $d_2=n+l$
126	7	„	$-n^2$	$-n^2r_0^2$
129	6	снизу	$x_0=\dfrac{\cos u}{l}$	$x_0=\dfrac{l}{\cos u}$
134	14	сверху	$\dfrac{\xi q_1^2}{p_1}$	$\dfrac{\xi}{\eta_1}\dfrac{q_1^2}{p_1}$

Стр.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
136	13 снизу	$2c=$	$2ac=$
138	1 „	$z=z_1-\alpha''\frac{z}{z'}$	$z=z_1-\alpha''\frac{U}{U'}$
142	11 сверху	уравпенію	уравненію
144	5 „	$-mn$	$-2mn$
146	1 „	*линейнаго элемента* (36)	*линейнаго элемента* (33) *или* (36)
155	13 „	$\delta y=\frac{2l+\omega^2}{2\omega}\frac{\frac{\partial l}{\partial\alpha}}{\frac{\partial l}{\partial\beta}}d\beta$	$\delta y=\frac{2l+\omega^2}{2\omega}\frac{\frac{\partial l}{\partial\alpha}}{\frac{\partial l}{\partial\beta}}d\alpha$
155	15 „	$\delta y=-\frac{2l+\omega^2}{2\omega}\frac{M}{N}$	$\delta y=-\frac{2l+\omega^2}{2\omega}\frac{M}{N}d\alpha$
155	3 и 2 снизу	задача Guichard'а очевидно не допускаетъ	наши уравненія очевидно не допускаютъ
159	9 сверху	вмѣсто $d\alpha$, $d\beta$	нужно $Md\alpha$, $Nd\beta$
176	10 снизу	$a^2[2(\theta+v)+ge^{2v}]$	$a^2[2(\theta+v)+ge^{2v}]dv^2$
194	7 снизу	$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\cos\omega N\right)$	$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\cos\omega N}{l}\right)$
195	4 сверху	$\frac{\cos\omega}{l}M$	$\frac{\cos\omega}{l}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}M$
198	8 „	поверхности	плоскости
213	15 „	$d\alpha\delta\alpha-d\beta\delta\beta=0$	$d\alpha\delta\alpha+d\beta\delta\beta=0$

Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet.

Par A. M. Liapounoff.

La méthode proposée par M. Neumann pour le problème de Dirichlet a été dans ces derniers temps l'objet de nombreuses recherches, parmi lesquelles il faut surtout signaler celles de M. Zaremba, de M. Stekloff et de M. Korn. Ces recherches, provoquées par celles de M. Poincaré (*Acta mathematica,* t. XX), ont amené à une large extension de la méthode en ce qui concerne la surface qui sert de frontière au domaine considéré. Mais il reste encore à faire une extension en ce qui concerne les valeurs que doit prendre sur la surface la fonction harmonique cherchée, car à l'égard de ces valeurs on a dû faire une certaine restriction.

Il est vrai que M. Korn cherche à se débarrasser de cette restriction *). Mais les théorèmes dont il se sert à cet effet ne me semblent pas, sinon exacts, au moins assez clairs pour ne pas soulever des doutes.

Dans ce qui suit, je me propose de montrer, comment l'extension dont il s'agit se déduit de quelques résultats que j'ai obtenus dans le Mémoire *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, t. IV, 1898).

Au lieu de la méthode elle-même, je considérerai le principe qui lui sert de base et que j'ai appelé dans le Mémoire cité *principe de Neumann.* C'est ce principe qu'il faut établir en toute généralité, car la méthode de Neumann en découle immédiatement sans aucune démonstration.

1. Commençons par rappeler, en quoi consiste le principe de Neumann.

Soient: E une région de l'espace, ne s'étendant pas à l'infini, et S la surface qui lui sert de frontière.

---

*) *Abhandlungen zur Potentialtheorie.* Berlin, 1901. (*Voir* Abhandlung 5, p. 64 et Abh. 1, p. 5—11, 19—23).

Nous supposerons que cette surface consiste d'une seule nappe fermée ayant une aire finie et admettant, en tout point, un plan tangent déterminé.

Soient: p et p' deux points de cette surface, r leur distance mutuelle et φ' l'angle que fait la normale *intérieure* (c'est-à-dire, dirigée vers E) au point p' avec la direction $p'p$.

En entendant par ds' un élément superficiel contenant le point p' et par f' la valeur en p' d'une fonction f définie pour les points de S, nous allons considérer des intégrales de la forme

$$\int \frac{f' \cos\varphi' \, ds'}{r^2}, \tag{1}$$

l'intégration étant étendue à toute la surface considérée.

Cette intégrale est ce qu'on appelle la *valeur directe* en p du potentiel de la double couche donné par la formule

$$\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2}$$

où R désigne la distance du point p' à un point P qui ne se trouve pas sur S et Φ' l'angle de la normale en p' avec la direction $p'P$.

L'intégrale (1), qui dépend de la position du point p, définira une nouvelle fonction sur S. Si la fonction f est continue, cette fonction le sera aussi, et la même chose aura lieu dans un cas plus général, celui où la fonction f est seulement limitée et telle que l'intégrale

$$\int f \, ds \text{ *)}$$

étendue à S ait un sens comme limite de somme, conformément à la définition ordinaire. Si f est dans ce cas, nous dirons que c'est une fonction intégrable sur S.

Cela posé, soit v_0 une fonction donnée quelconque intégrable sur S. Cette fonction étant substituée à la place de f, l'intégrale (1) divisée par 2π représentera une fonction que nous désignerons par v_1. En appliquant le même procédé à v_1, nous en déduirons une nouvelle fonction v_2. De même, en partant de v_2, nous obtiendrons v_3, et ainsi de suite.

De cette manière nous parviendrons à une suite indéfinie de fonctions

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots, \tag{2}$$

---

*) Dans cette formule, ainsi qu'en d'autres analogues, nous entendons par ds un élément superficiel contenant le point p, auquel se rapporte la valeur de la fonction à intégrer.

liées entre elles par les équations de la forme

$$v_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{v'_{m-1} \cos\varphi' ds'}{r^2},$$

où v'_{m-1} désigne la valeur au point p' de la fonction v_{m-1}. C'est à cette suite que se rapporte le principe en question que l'on peut énoncer ainsi:

Quelle que soit la fonction v_0, on a, en tout point de la surface,

$$|v_{m+1} - v_m| < L\lambda^m, \tag{3}$$

L, λ étant certaines constantes positives indépendantes du nombre m, dont la seconde, λ, est moindre que 1 et ne dépend point du choix de v_0.

L'inégalité (3) étant établie, il en résultera que v_m, m croissant indéfiniment, tendra vers une certaine limite, et il est facile d'établir, dans des suppositions bien générales à l'égard de la surface, que cette limite ne peut être qu'une constante.

Soit C cette constante.

Nous aurons, quel que soit m,

$$C = v_m + (v_{m+1} - v_m) + (v_{m+2} - v_{m+1}) + \dots$$

et par suite, en vertu de (3),

$$|v_m - C| < L\lambda^m (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \frac{L}{1-\lambda} \lambda^m.$$

Donc, L_1 étant une certaine constante positive, il viendra

$$|v_m - C| < L_1 \lambda^m. \tag{4}$$

C'est sous cette forme que j'ai employé le principe de Neumann dans le Mémoire cité plus haut. Maintenant je préfère de le considérer sous la forme (3).

2. Récemment M. Stekloff est parvenu à établir le principe de Neumann dans des suppositions bien générales à l'égard de la surface, mais *sous la restriction que la fonction v_0 est susceptible de se présenter sous forme du potentiel d'une simple couche, répandue sur la surface considérée d'une manière continue.*

C'est précisément ce cas que j'ai considéré dans mon Mémoire, où le principe de Neumann m'a servi de point de départ, mais où *je ne l'ai employé que dans la supposition ci-dessus à l'égard de* v_0 *).

A présent, dans les mêmes suppositions à l'égard de la surface que celles admises par M. Stekloff, je me propose de montrer que, *si le principe de Neumann est établi sous la restriction signalée à l'égard de* v_0, *il est exact en toute généralité.*

Quant aux suppositions que je ferai, l'une d'entre elles a été déjà énoncée plus haut et les autres se réduiront à celles-ci:

I. On peut assigner une longueur D, telle que, un point quelconque p de la surface S étant pris pour centre de la sphère de rayon D, une parallèle à la normale à S en p ne puisse rencontrer S, à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;

II. ϑ étant l'angle compris entre 0 et π que font entre elles les normales intérieures en des points p et p' de S et r la distance pp', on peut assigner au rapport $\frac{\vartheta}{r}$ une limite supérieure indépendante de la position des points p et p'.

Dans ces suppositions, je pourrai me servir des résultats obtenus dans mon Mémoire, où certaines propositions ont été établies même dans des suppositions un peu plus générales.

3. Conjointement avec le principe de Neumann, nous allons considérer un autre principe analogue, celui qui sert de base à la méthode connue de Robin relative au problème électrostatique.

En retenant les notations du n⁰ 1, désignons par φ l'angle que fait la normale intérieure au point p avec la direction pp', et partant d'une

---

*) Quelques passages des Travaux contenant des renvois à mon Mémoire me donnent lieu à soupçonner que je n'ai pas été bien compris. On dit que, partant du principe de Neumann dans le cas des surfaces non-convexes, j'ai cru possible de me fonder sur les recherches de M. Poincaré. Mais moi, je ne l'ai dit nulle part et je ne vois pas, d'où pouvait-on tirer cette conclusion. Si j'ai cité le Mémoire de M. Poincaré, ce fut bien naturel, car les nouvelles ressources que donnait cet important Mémoire ne laissaient aucun doute sur la possibilité d'une démonstration générale du principe en question. Mais, pour obtenir cette démonstration, il fallait encore chercher à modifier l'analyse de M. Poincaré de manière à la rendre indépendante de certains postulats qui y étaient admis et dont quelques-uns coïncidaient avec les propositions que je voulais établir. Je ne pouvais donc pas me fonder sur les recherches de M. Poincaré, et d'ailleurs je n'en avais pas besoin, car *tout ce que je voulais faire se réduisait à signaler certaines conclusions, auxquelles on pourrait parvenir, si le principe de Neumann était déjà établi pour la surface considérée, soit qu'elle soit convexe ou non.*

fonction quelconque k_0, intégrable sur S, formons une suite indéfinie de fonctions

$$k_0, \quad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots,$$

se déterminant successivement par la formule

$$k_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k'_{m-1} \cos\varphi \, ds'}{r^2}, \tag{5}$$

où k'_{m-1} désigne la valeur de k_{m-1} au point p' et l'intégration s'étend à toute la surface considérée.

Cela posé, le nouveau principe, que nous appellerons *principe de Robin*, s'énoncera ainsi:

Quelle que soit la fonction k_0, on a, en tout point de la surface,

$$|k_{m+1} - k_m| < M\mu^m, \tag{6}$$

M, μ étant certaines constantes positives indépendantes du nombre m, dont la seconde, μ, est moindre que 1 et ne dépend point du choix de k_0.

Si l'on parvient à établir l'inégalité (6), on pourra conclure que la fonction k_m tendra, m croissant indéfiniment, vers une certaine limite, et cela uniformément pour tous les points de la surface.

Soit k cette limite, qui représentera une certaine fonction continue sur S et vérifiant l'équation

$$k = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k' \cos\varphi \, ds'}{r^2} \tag{7}$$

où k' est la valeur de k en p' *).

Nous aurons

$$k = k_m + (k_{m+1} - k_m) + (k_{m+2} - k_{m+1}) + \ldots,$$

d'où, en vertu de (6),

$$|k_m - k| < M\mu^m (1 + \mu + \mu^2 + \ldots) = \frac{M}{1-\mu} \mu^m,$$

et par suite

$$|k_m - k| < M_1 \mu^m, \tag{8}$$

M_1 étant une certaine constante positive.

---

*) En général, étant considérée une fonction quelconque f d'un seul point de S, sa valeur en p' sera désignée par f'.

C'est une nouvelle forme du principe de Robin.

On aperçoit une analogie complète entre ce principe et le principe de Neumann. Seulement la limite k de k_m, en général, n'est pas une constante: c'est une fonction qui représente la densité d'une couche électrique en *distribution naturelle* à la surface considérée.

Il est facile de s'assurer que l'on a, quel que soit m,

$$\int k_m ds = \int k_0 ds,$$

les intégrations s'étendant à toute la surface.

Par suite, si l'on a

$$\int k_0 \, ds = 0,$$

il viendra

$$\int k \, ds = 0.$$

Or, on sait que dans ce cas l'équation (7) ne peut être vérifiée, qu'en supposant $k = 0$ pour tous les points de la surface.

Donc, si l'on a

$$\int k_0 ds = 0,$$

l'inégalité (8) prendra la forme

$$|k_m| < M_1 \mu^m,$$

ce qui fait voir que la série

$$k_0 \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3 \pm \ldots$$

sera convergente, et cela absolument et uniformément pour tous les points de la surface.

4. Supposons que le principe de Neumann soit déjà établi dans le cas, où l'on a

$$v_0 = \int \frac{k'_0 \, ds'}{r}, \tag{9}$$

k_0 étant une fonction quelconque *continue* sur la surface.

Alors, comme il a été montré dans le Mémoire cité plusieurs fois, on pourra établir le principe de Robin en toute généralité.

Nous l'avions montré en partant de l'inégalité (4).

Signalons sommairement, comment pourrait-on le faire, si l'on ne voulait se servir que de l'inégalité (3).

Avant tout on remarquera que la formule (9) entraîne, pour toutes les valeurs de m, des formules de la même forme

$$v_m = \int \frac{k'_m\, ds'}{r},$$

où les k_m vérifient les équations de la forme (5) *).

Maintenant posons

$$k_{m+1} - k_m = h_m, \quad v_{m+1} - v_m = u_m. \quad {\scriptstyle (m=0,1,2,\ldots)}$$

Alors il viendra: d'une part

$$u_m = \int \frac{h'_m\, ds'}{r}, \quad h_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'_{m-1}\cos\varphi\, ds'}{r^2}$$

et d'autre part

$$u_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{u'_{m-1}\cos\varphi'\, ds'}{r^2}.$$

Par suite, la condition (3) prenant la forme

$$|u_m| < L\lambda^m,$$

qui est un cas particulier de (4), les raisonnements développés dans notre Mémoire nous conduiront à une inégalité de la forme

$$|h_{m+1} - h_m| < M'\mu^m,$$

analogue à celle (6).

Or, on a

$$\int h_0\, ds = \int k_1\, ds - \int k_0\, ds = 0.$$

---

*) Cette conclusion résulte immédiatement de la considération de la formule connue de Green qui sert à exprimer la fonction harmonique au moyen des valeurs sur la surface de la fonction elle-même et de sa dérivée normale. Dans mon Mémoire, où je voulais établir le principe de Robin dans des suppositions, à l'égard de la surface, un peu plus générales qu'ici, j'ai dû, pour pouvoir appliquer la formule de Green, introduire une certaine restriction à l'égard de la fonction k_0. Ici cette restriction est inutile, puisque, dans les conditions actuelles, on peut établir ladite formule par la considération des surfaces parallèles, ainsi que je l'ai signalé dans mon Mémoire à une autre occasion.

Donc, en vertu de ce qui à été montré au numéro précédent, nous aurons aussi une inégalité de la forme

$$|h_m| < M\mu^m,$$

qui n'est autre chose que l'inégalité (6).

Nous avons imposé à la fonction k_0 la condition d'être continue. Mais il est facile de s'en débarrasser.

En effet, quelle que soit la fonction k_0 que nous supposons toujours intégrable sur S, la fonction k_1 sera continue et, par suite, pourra jouer le rôle de k_0 dans la démonstration.

De cette manière nous parvenons à la conclusion que *le principe de Robin est une conséquence nécessaire du principe de Neumann.*

La réciproque est encore vraie, car on voit immédiatement que le principe de Robin conduit au principe de Neumann pour ce qui concerne le cas, où la fonction initiale v_0 est susceptible de se présenter sous forme du potentiel d'une simple couche à densité continue, et cela suffit, comme nous allons le montrer ici, pour établir ce principe en général.

5. Avant tout, il convient de signaler une autre forme pour la restriction ci-dessus à l'égard de v_0, sous laquelle nous supposons établi le principe de Neumann.

Soit f une fonction, telle que, pour tous les points de la surface S, on ait

$$f = \int \frac{\sigma' \, ds'}{r}, \tag{10}$$

σ étant une fonction continue sur S.

Alors l'intégrale

$$\int \frac{\sigma' \, ds'}{R},$$

tant pour le domaine intérieur à S, que pour celui extérieur, représentera la fonction harmonique se réduisant sur S à f, et comme cette fonction admet, sur la surface, des dérivées normales régulières *), nous pouvons conclure que le potentiel de la double couche

$$\int \frac{f' \cos \Phi' \, ds'}{R^2} \tag{11}$$

sera dans le même cas; car, d'après ce qui a été montré dans notre Mémoire, c'est à cela que se réduit la condition, nécessaire et suffisante

*) Pour ce qui concerne l'expression *dérivée normale régulière,* je renverrai à mon Mémoire (Journ. de Math., 5 série, t. IV, pages 246, 247 et 285).

pour que la fonction harmonique, définie par sa valeur f sur S, admette des dérivées normales régulières sur cette surface.

D'ailleurs il est facile d'établir directement que, si l'intégrale (11) admet des dérivées normales régulières sur S, la fonction f est susceptible de se présenter sous la forme (10).

Pour le montrer, il n'y a qu'à répéter les raisonnements développés dans notre Mémoire.

Soit $2\pi L$ la valeur commune, en un point p de S, des deux dérivées normales, intérieure et extérieure, de l'intégrale (11) *), ces dérivées étant supposées régulières sur S.

En supposant que dans la définition de ces dérivées intervient la direction de la normale *intérieure*, considérons l'équation

$$h + \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = L, \tag{12}$$

h étant une fonction inconnue.

Admettons provisoirement que l'on ait réussi à obtenir une solution continue de cette équation.

En désignant cette solution par H, posons

$$\int \frac{H' \, ds'}{R} = V_e$$

et désignons par W l'intégrale (11).

Alors, eu égard aux propriétés connues des potentiels des simples couches, nous parviendrons à la conclusion que la dérivée normale extérieure de la fonction $V_e - W$ sera égale à zéro pour tous les points de la surface S, et de là, cette dérivée étant régulière, nous pouvons conclure que, *pour tous les points de l'espace extérieur* par rapport à S, on aura

$$V_e = W. \tag{13}$$

Pareillement, si nous considérons l'équation

$$h - \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = -L, \tag{14}$$

en admettant que l'on en ait obtenu une solution continue K, nous arriverons à la conclusion que, V_i étant défini par la formule

*) Quelle que soit la fonction continue f, si l'une des deux dérivées normales du potentiel (11) existe, l'autre existera aussi et lui sera égale. *Voir* le Mémoire cité, pages 298, 299 (remarque).

$$\int \frac{K' ds'}{R} = V_i,$$

la dérivée normale intérieure de la fonction $V_i - W$ sera égale à zéro en tout point de S. Donc, cette dérivée étant régulière, la fonction $V_i - W$ conservera une valeur constante dans l'espace intérieur par rapport à S.

D'ailleurs on pourra toujours choisir K de telle manière que cette valeur constante soit égale à zéro.

En effet, ayant trouvé une solution de l'équation (14), on peut en obtenir une infinité, en ajoutant à cette solution diverses solutions de l'équation (7), et ces dernières sont telles que l'intégrale

$$\int \frac{k' ds'}{R}$$

représente, dans l'espace intérieur à S, une quantité constante susceptible d'une valeur arbitraire.

Donc nous pouvons supposer que la solution K ait été choisie de manière à avoir

$$(15) \qquad V_i = W$$

pour tous les points de l'espace intérieur à S.

Maintenant supposons que les points, auxquels se rapportent les formules (13) et (15), se rapprochent indéfiniment vers un point p de la surface S.

En vertu des propriétés connues des potentiels des doubles couches, la formule (13) se réduira, à la limite, à

$$\int \frac{H' ds'}{r} = \int \frac{f' \cos\varphi' ds'}{r^2} - 2\pi f,$$

et la formule (15) deviendra

$$\int \frac{K' ds'}{r} = \int \frac{f' \cos\varphi' ds'}{r^2} + 2\pi f.$$

Par suite, en posant

$$\frac{1}{4\pi}(K - H) = \sigma,$$

on aura bien la formule (10).

Il ne reste qu'à montrer que les équations (12) et (14) sont possibles.

A cet effet, considérons la suite indéfinie de fonctions

$$h_0, \quad h_1, \quad h_2, \quad h_3, \; \ldots,$$

liées entre elles par les équations de la forme

$$h_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{h'_{m-1} \cos\varphi \, ds'}{r^2},$$

en supposant

$$h_0 = L.$$

Par la définition même de la quantité L, nous aurons

$$\int L \, ds = 0.$$

Par suite, comme nous l'avons déjà remarqué, toutes les séries de la forme

$$\pm h_0 \pm h_1 \pm h_2 \pm \cdots$$

seront convergentes et leur convergence sera uniforme sur S. D'ailleurs, tous les h_m représenterons des fonctions continues, puisque, les dérivées normales du potentiel (11) étant régulières, L sera une fonction continue.

De là on voit que la série

$$h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \cdots$$

représentera une fonction continue vérifiant l'équation (12) et que la série

$$-h_0 - h_1 - h_2 - h_3 - \cdots$$

représentera une fonction continue qui vérifiera l'équation (14).

Nous pouvons donc poser

$$H = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \cdots,$$

$$K = k - h_0 - h_1 - h_2 - \cdots,$$

k étant une solution convenablement choisie de l'équation (7).

6. En vertu de ce que nous venons de montrer, la restriction imposée à la fonction v_0 peut être présentée sous cette forme:

Les dérivées normales du potentiel

$$\int \frac{v'_0 \cos\Phi' \, ds'}{R^2} \tag{16}$$

existent et sont régulières sur la surface.

Or on peut signaler une condition assez simple, sinon nécessaire, du moins suffisante, pour que cette circonstance ait certainement lieu.

En entendant par p le point variable, auquel se rapporte la valeur f d'une fonction désignée par la même notation, plaçons ce point dans une position quelconque sur la surface S et considérons l'ensemble des points μ de S dont la distance à p ne surpasse pas la longueur D figurant dans la première des deux conditions énoncées au n° 2. La position de tout point μ de cet ensemble pouvant être définie sans ambiguïté par celle de sa projection sur le plan tangent à S en p, regardons la valeur f_μ de la fonction f en μ comme fonction des coordonnées polaires dans ce plan de la projection du point μ, le point p étant pris pour pôle. Puis, en entendant par ϱ le rayon vecteur et par ψ l'angle polaire de ladite projection, calculons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f_\mu \, d\psi ,$$

dans la supposition qu'on ait attribué à ϱ une valeur fixe, assez petite pour que la condition $p\mu < D$ soit possible pour toutes les valeurs de ψ entre 0 et 2π. Alors la quantité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\mu \, d\psi = \bar{f}$$

représentera ce que nous appellerons *valeur moyenne de la fonction f au voisinage du point p à la distance ϱ de la normale en p.*

Dans le Mémoire que nous avons cité plusieurs fois, nous avons établi la proposition suivante:

En tout point de la surface, où la fonction continue f vérifie une inégalité de la forme

$$|\bar{f} - f| < A\varrho^{\alpha+1},$$

A, α étant des nombres positifs indépendants de ϱ, le potentiel

$$\int \frac{f' \cos \Phi' \, ds'}{R^2}$$

admet les dérivées normales. D'ailleurs, si la condition ci-dessus se trouve remplie pour tous les points de la surface avec des valeurs fixes de A et de α, ces dérivées seront régulières.

Donc, v_0 étant une fonction continue et $\bar{v}_0$ désignant sa valeur moyenne au voisinage du point p à la distance ϱ de la normale en p, si, pour toute position du point p sur la surface et indépendamment de la valeur de ϱ, on a

$$(17) \qquad |\bar{v}_0 - v_0| < A\varrho^{\alpha+1}$$

avec des valeurs positives fixes de A et de α, il sera certain que les dérivées normales du potentiel (16) existent et sont régulières.

Par suite, la condition (17) suffit pour que la fonction continue v_0 puisse être présentée sous la forme (9).

Donc, dans le cas de cette condition, nous pouvons regarder le principe de Neumann comme établi, et par cela même nous pouvons encore le regarder comme établi dans tous les cas, où, au lieu de v_0, une autre fonction quelconque de la suite (2) satisfait à une pareille condition.

Or nous allons montrer que la fonction v_2 vérifie toujours une inégalité de la forme en question,

$$|\bar{v}_2 - v_2| < A\varrho^{\alpha+1},$$

et cela quelle que soit la fonction v_0, continue ou discontinue, pourvu qu'elle soit intégrable.

C'est de cette manière que nous arriverons à l'extension requise du principe de Neumann.

7. Nous allons établir la proposition suivante:

Posons

$$\int \frac{f' \cos\varphi' \, ds'}{r^2} = w$$

et désignons par $\bar{w}$ *la valeur moyenne de cette fonction au voisinage du point* p *à la distance* ϱ *de la normale en* p. *Toutes les fois que la fonction* f *vérifie une condition de la forme*

$$|f - f'| < ar^{\alpha},$$

a, α *étant des nombres positifs indépendants de la position des points* p *et* p', *auxquels se rapportent les valeurs* f *et* f', *la fonction* w, *si l'on suppose* $\alpha < 1$ *), *vérifiera une condition de la forme*

$$|\bar{w} - w| < A\varrho^{\alpha+1},$$

où A *est un nombre positif ne dépendant ni de* ϱ, *ni de la position du point* p.

---

*) Il est évident que, si f ne se réduit pas à une constante, le nombre α ne peut pas surpasser 1, et que d'ailleurs on peut toujours supposer $\alpha < 1$.

Considérons un point quelconque p_0 de la surface et désignons par

$$f_0, \quad w_0, \quad \overline{w}_0, \quad \varphi'_0, \quad r_0$$

les valeurs que prennent les quantités

$$f, \quad w, \quad \overline{w}, \quad \varphi', \quad r,$$

considérées comme fonctions du point p, lorsque ce point coïncide avec p_0.

Le point p_0 étant pris pour pôle des coordonnées polaires dans le plan tangent à la surface en p_0, soient ϱ et ψ le rayon vecteur et l'angle polaire de la projection du point p sur ce plan tangent.

Nous aurons

$$\overline{w}_0 - w_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (w - w_0)\, d\psi$$

en supposant que, dans la fonction à intégrer, l'on ait attribué à ϱ une valeur fixe assez petite, et quant à cette fonction, qui est donnée par la formule

$$w - w_0 = \int \left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right) f'\, ds',$$

nous pourrons la présenter sous la forme

$$w - w_0 = \int \left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)(f' - f_0)\, ds',$$

puisque, d'après un théorème connu,

$$\int \left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right) ds' = 0,$$

quelles que soient les positions des points p et p_0.

Nous allons chercher une limite supérieure pour la quantité

$$|\overline{w}_0 - w_0|.$$

A cet effet, nous devrons nous occuper d'abord de la fonction $w - w_0$ et, pour faciliter notre recherche, nous allons décomposer l'intégrale, par laquelle nous venons d'exprimer $w - w_0$, en trois intégrales, étendues à trois portions de la surface définies de la manière suivante.

Concevons une surface cylindrique de révolution C ayant pour axe la normale au point p_0 et désignons la portion de la surface S découpée par C au voisinage de p_0 par S'_0 et tout le reste de S par S'. Pour rayon de cette surface cylindrique, nous prendrons une longueur fixe qD, en entendant par q une fraction assez petite, pour que la portion S'_0 se trouve toute entière à l'intérieur de la sphère de rayon D ayant pour centre le point p_0 (n⁰ 2).

Imaginons ensuite une nouvelle surface cylindrique de révolution, ayant le même axe et correspondant à un rayon δ plus petit que qD. Cette surface décomposera S'_0 en deux portions: celle intérieure, que nous désignerons par S_0, et celle extérieure, qui sera désignée par S_1.

De cette manière la surface S se décomposera en trois portions S_0, S_1, S', et en désignant les intégrales de la forme

$$\int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2}-\frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)(f'-f_0)\,ds'$$

étendues à ces portions respectivement par J_0, J_1, J', nous aurons

$$w-w_0=J_0+J_1+J'.$$

Pour aller plus loin, nous devons signaler certaines inégalités qui résultent des suppositions que nous avons faites à l'égard de la surface (n⁰ 2).

8. Soient n et n' les directions des normales intérieures aux points p et p'.

En vertu de la supposition II, le rapport

$$\frac{\operatorname{tang}(n, n')}{r},$$

pour des valeurs assez petites de r, ne surpassera pas une certaine limite, quelle que soit d'ailleurs la position des points p et p', et nous pouvons prendre pour D une longueur assez petite, pour que l'on ait

$$\operatorname{tang}(n, n')<\frac{r}{D},$$

toutes les fois que $r<D$.

Cela posé, prenons le point p_0 pour origine des coordonnées rectangulaires, en dirigeant l'axe des z suivant la normale intérieure en ce point, et désignons par x, y, z les coordonnées du point p et par r la distance p_0p. En vertu de la supposition I, z sera une fonction uniforme de x, y, tant que $r<D$, et nous aurons

$$\operatorname{tang}(n, z)=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Par suite, en supposant $\mathrm{r} < D$, nous aurons

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < \frac{\mathrm{r}}{D}.$$

Or, si l'on pose

$$x = \varrho \cos\psi, \quad y = \varrho \sin\psi$$

et que l'on régarde z comme fonction de ϱ et de ψ, il viendra

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 < \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Donc, dans la supposition $\mathrm{r} < D$, on aura

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right| < \frac{\mathrm{r}}{D} < 1$$

et par suite

$$|z| < \varrho, \quad \mathrm{r} = \sqrt{\varrho^2 + z^2} < \sqrt{2}\,\varrho.$$

De là on déduit

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right| < \sqrt{2}\,\frac{\varrho}{D},$$

ce qui donne

$$|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\varrho^2}{D}. \tag{18}$$

Remarquons qu'en vertu de cette inégalité il vient

$$|r\cos\varphi'| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{r^2}{D},$$

toutes les fois que $r < D$; et comme, pour $r < D$,

$$\cos(n, n') > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on aura, dans la même supposition,

$$|\cos\varphi'| < \frac{r\cos(n, n')}{D}. \tag{19}$$

L'inégalité $\mathrm{r} < \sqrt{2}\,\varrho$, que nous venons d'obtenir en supposant $\mathrm{r} < D$, fait voir que, pour rayon du cylindre C, nous pouvons prendre $\frac{1}{\sqrt{2}}D$. Quant au rayon δ, nous supposerons

$$\delta < \frac{1}{2}D.$$

En même temps, nous supposerons que le point p se trouve sur S_0 et que l'on ait

$$\mathrm{r} < \frac{1}{2}\delta.$$

Dans ces suppositions, pour toute position du point p' sur S_0, nous aurons

$$r < \mathrm{r} + r_0 < \frac{1}{2}\delta + \sqrt{2}\,\delta < 2\delta < D$$

et, par suite, nous pourrons nous servir de l'inégalité (19), ainsi que de celle-ci:

$$|\cos\varphi_0'| < \frac{r_0 \cos(n', z)}{D}. \tag{20}$$

Nous désignerons les coordonnées du point p' par x', y', z' et nous poserons

$$x' = \varrho' \cos\psi', \quad y' = \varrho' \sin\psi'.$$

Alors, pour toute position du point p' sur S_0 et S_1, nous aurons

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2} < \frac{r_0}{D}, \tag{21}$$

$$|z'| < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varrho'^2}{D},$$

et la seconde inégalité, avec celle (18), donnera

$$|zz'| < \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{\varrho'^2}{D^2}.$$

Par suite, si nous nous arrêtons à la supposition $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, nous aurons

$$|zz'| < \frac{1}{4}\varrho^2. \tag{22}$$

Signalons enfin certaines inégalités qui résultent de la supposition $\mathrm{r} < \frac{1}{2}\delta$, lorsque le point p' se trouve sur S_1.

Soit ω l'angle que font entre elles les directions p_0p et p_0p'. Nous aurons

$$r^2 = r_0^2 + \mathrm{r}^2 - 2r_0\mathrm{r}\cos\omega$$

et, comme, dans notre supposition, on a

$$\mathrm{r} < \frac{1}{2}\varrho' < \frac{1}{2}r_0,$$

le développement connu

$$\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + \mathrm{r}^2 - 2r_0\mathrm{r}\cos\omega}} = \sum_0^\infty P_n(\cos\omega)\left(\frac{\mathrm{r}}{r_0}\right)^n$$

donnera

$$\frac{r_0}{r} = 1 + \frac{\mathrm{r}}{r_0}\cos\omega + 2\frac{\mathrm{r}^2}{r_0^2}\vartheta,$$

où ϑ désigne une quantité comprise entre -1 et $+1$.

De là on déduit les trois inégalités suivantes:

$$\left|\frac{r_0^3}{r^3} - 1 - 3\frac{\mathrm{r}}{r_0}\cos\omega\right| < 22\frac{\mathrm{r}^2}{r_0^2},$$

$$\left|\frac{r_0^3}{r^3} - 1\right| < 14\frac{\mathrm{r}}{r_0}, \qquad \frac{r_0^3}{r^3} < 8,$$

dont la première, eu égard à ce que

$$\mathrm{r}r_0\cos\omega = xx' + yy' + zz'$$

et en vertu de (22), donne

$$\left|\frac{r_0^3}{r^3} - 1 - 3\frac{xx' + yy'}{r_0^2}\right| < \left(22 + \frac{3}{4}\right)\frac{\mathrm{r}^2}{r_0^2}.$$

Donc, dans la supposition $\mathrm{r} < \frac{1}{2}\delta$, nous aurons

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{xx' + yy'}{r_0^5}\right| < 6\frac{\delta^2}{r_0^5}, \\ &\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < 7\frac{\delta}{r_0^4}, \quad \frac{1}{r^3} < 8\frac{1}{r_0^3}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant nous avons tout ce qui nous était nécessaire.

9. En nous reportant à l'expression de $w - w_0$, nous pouvons écrire

$$|\overline{w}_0 - w_0| < L + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} J_1\, d\psi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} J'\, d\psi\right|,$$

L étant une limite supérieure de $|J_0|$ indépendante de ψ.

Or, nous avons

$$J_0 = \int \frac{\cos\varphi'}{r^2}(f' - f_0)\, ds' - \int \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}(f' - f_0)\, ds',$$

en supposant que les intégrales sont étendues à S_0.

Donc, en entendant par l une limite supérieure de la fonction $|f' - f_0|$ sur S_0 et ayant égard aux inégalités (19) et (20), nous aurons

$$|J_0| < \frac{l}{D}\int \frac{\cos(n', n)\, ds'}{r} + \frac{l}{D}\int \frac{\cos(n', z)\, ds'}{r_0};$$

et quant aux intégrales qui figurent ici, la seconde ne surpassera pas, évidemment, $2\pi\delta$ et la première sera plus petite que $2\pi\sqrt{2}\,\delta$, comme on s'assure facilement en remarquant que S_0 se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon $\sqrt{2}\,\delta$ ayant pour centre le point p_0.

De cette manière nous obtenons

$$|J_0| < 2\pi(\sqrt{2} + 1)\frac{l}{D}\,\delta,$$

et comme, en vertu de la condition du théorème, nous pouvons prendre

$$l = a(\sqrt{2}\,\delta)^\alpha < a\sqrt{2}\,\delta^\alpha,$$

nous aurons

$$|J_0| < 2\pi(2 + \sqrt{2})\frac{a}{D}\,\delta^{\alpha+1}.$$

Nous pouvons donc poser

$$L = 7\pi\frac{a}{D}\,\delta^{\alpha+1}.$$

Passons maintenant à la considération de l'intégrale

$$J_1 = \int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)(f' - f_0)\, ds'$$

étendue à S_1.

Nous avons

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2} = \frac{r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0}{r^3} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_0 \cos\varphi'_0 .$$

Or on a, évidemment,

$$\begin{aligned} r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0 &= x\cos(n', x) + y\cos(n', y) + z\cos(n', z) \\ &= \left(z - x\frac{\partial z'}{\partial x'} - y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\cos(n', z). \end{aligned}$$

Par suite, si l'on pose

$$\Omega = \frac{z\cos(n', z)}{r^3} - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\left(x\frac{\partial z'}{\partial x'} + y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\cos(n', z)$$

$$+ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{xx' + yy'}{r_0^5}\right) r_0\cos\varphi'_0 ,$$

il viendra

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2} = 3\frac{xx' + yy'}{r_0^4}\cos\varphi'_0 - \left(x\frac{\partial z'}{\partial x'} + y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\frac{\cos(n', z)}{r_0^3} + \Omega ,$$

ce qui fait voir que, l'expression

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}$$

étant considérée comme fonction de ψ en vertu des formules

$$x = \varrho\cos\psi , \qquad y = \varrho\sin\psi ,$$

on aura

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right) d\psi = \int_0^{2\pi} \Omega\, d\psi .$$

Cela posé, reportons nous aux inégalités (18), (20), (21) et (23). Eu égard à ce que

$$\left| x\frac{\partial z'}{\partial x'} + y\frac{\partial z'}{\partial y'} \right| < \varrho \sqrt{\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}$$

et tenant compte de l'inégalité $\varrho < \frac{1}{2}\delta$, nous obtiendrons

$$|\Omega| < \left(\sqrt{2} + \frac{19}{2}\right)\frac{\delta^2\cos(n', z)}{Dr_0^3} < 11\,\frac{\delta^2\cos(n', z)}{Dr_0^3} .$$

Nous aurons donc

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2}-\frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)d\psi\right|<11\,\frac{\delta^2\cos(n',z)}{D r_0^3},$$

et par suite, eu égard à l'inégalité

$$|f'-f_0|<a r_0^\alpha,$$

il viendra

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} J_1\,d\psi\right|<11\,\frac{a}{D}\,\delta^2\int\frac{\cos(n'.z)\,ds'}{r_0^{3-\alpha}}.$$

Or, l'intégrale étant étendue à S_1, on a

$$\int\frac{\cos(n',z)\,ds'}{r_0^{3-\alpha}}=\int_0^{2\pi}d\psi'\int_\delta^{qD}\frac{\varrho'\,d\varrho'}{r_0^{3-\alpha}}<\frac{2\pi}{1-\alpha}\,\delta^{\alpha-1}.$$

Donc on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}J_1\,d\psi\right|<\frac{22\pi}{1-\alpha}\,\frac{a}{D}\,\delta^{\alpha+1}.$$

Reste à considérer J'. Mais on voit immédiatement qu'il est possible d'assigner un nombre fixe A', tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}J'\,d\psi\right|<A'\varrho^2,$$

quelles que soient la valeur attribuée à ϱ et la position du point p_0.

Rapprochons maintenant les inégalités obtenues.

Nous aurons

$$|\overline{w}_0-w_0|<\left(7+\frac{22}{1-\alpha}\right)\frac{\pi a}{D}\,\delta^{\alpha+1}+A'\varrho^2,$$

et cela quels que soient δ et ϱ, pourvu qu'on ait

$$\frac{1}{2}D>\delta>2\mathrm{r}.$$

Or nous pouvons satisfaire à cette condition en posant, par exemple,

$$\delta=2\sqrt{2}\,\varrho,$$

ϱ étant supposé assez petit, et dans cette hypothèse notre inégalité conduira à celle-ci

$$|\overline{w}_0 - w_0| < A\varrho^{\alpha+1},$$

où l'on pourra prendre pour A un nombre qui ne dépend ni de ϱ, ni de la position du point p_0.

Nous arrivons donc à l'inégalité qu'il fallait établir.

10. En vertu de la proposition que nous venons d'établir, nous pouvons affirmer que, si la fonction v_1 satisfait à une condition de la forme

(24) $$|v_1' - v_1| < a r^\alpha,$$

a et α étant des nombres positifs fixes, la fonction

$$v_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v_1' \cos\varphi' \, ds'}{r^2}$$

vérifiera la condition requise

(25) $$|\overline{v}_2 - v_2| < A\varrho^{\alpha+1}.$$

Or, d'après une proposition qui a été établie récemment par M. Korn, la fonction

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v_0' \cos\varphi' \, ds'}{r^2}$$

vérifiera toujours une inégalité de la forme (24), pourvu que v_0 soit une fonction intégrable sur S.

D'ailleurs il est facile de le prouver par les formules que nous venons de développer.

En effet, soient: l une limite supérieure de la fonction $|f|$ sur S et J_0, J_1, J' les intégrales de la forme

$$\int \left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0'}{r_0^2}\right) f' \, ds'$$

étendues respectivement à S_0, S_1, S', de sorte qu'il viendra

$$w - w_0 = J_0 + J_1 + J'.$$

En faisant les mêmes suppositions que précédemment, nous aurons

$$|J_0| < 2\pi(\sqrt{2}+1)\frac{l}{D}\,\delta < 5\pi\,\frac{l}{D}\,\delta.$$

Passant ensuite à la considération de J_1, nous remarquons que la formule

$$r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi_0' = \left(z - x\frac{\partial z'}{\partial x'} - y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\cos(n', z),$$

en vertu de (18) et (21), donne

$$|r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi_0'| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{r}^2}{D} + \frac{\mathrm{r}r_0}{D}\right)\cos(n', z),$$

ce qui, eu égard à l'inégalité $\mathrm{r} < \frac{1}{2}r_0$ (ayant lieu, si le point p' appartient à S_1), conduit à

$$|r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi_0'| < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\frac{\mathrm{r}r_0\cos(n', z)}{D} < \frac{11}{8}\frac{\mathrm{r}r_0\cos(n', z)}{D}.$$

Par suite, la formule

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0'}{r_0^2} = \frac{r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi_0'}{r^3} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)r_0\cos\varphi_0',$$

en vertu de (20) et des inégalités

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < 14\frac{\mathrm{r}}{r_0^4}, \quad \frac{1}{r^3} < 8\frac{1}{r_0^3},$$

donnera

$$\left|\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0'}{r_0^2}\right| < 25\frac{\mathrm{r}\cos(n', z)}{D r_0^2}.$$

Nous aurons donc

$$|J_1| < 25\frac{l}{D}\mathrm{r}\int\frac{\cos(n', z)\,ds'}{r_0^2},$$

et à plus forte raison

$$|J_1| < 50\pi\frac{l}{D}\mathrm{r}\log\frac{D}{\delta}.$$

Enfin, en ce qui concerne l'intégrale J', il est évident que, a' étant un nombre fixe assez grand, on aura

$$|J'| < a'\mathrm{r}.$$

De cette manière nous obtenons

$$|w - w_0| < 5\pi \frac{l}{D} \delta + 50\pi \frac{l}{D} \mathrm{r} \log \frac{D}{\delta} + a' \mathrm{r}$$

et, comme nous pouvons poser $\delta = 2\mathrm{r}$, nous arrivons à une inégalité de la forme

$$|w - w_0| < a \mathrm{r} \log \frac{D}{\mathrm{r}},$$

a étant un nombre fixe assez grand.

Donc, pour une autre valeur de a, on aura encore

$$|w - w_0| < a \mathrm{r}^\alpha,$$

α étant un nombre positif choisi arbitrairement sous la condition $\alpha < 1$.

De cette manière nous parvenons à la proposition suivante *):

Quelle que soit la fonction f intégrable sur la surface considérée et quel que soit le nombre positif α plus petit que 1, la fonction

$$w = \int \frac{f' \cos \varphi' \, ds'}{r^2}$$

vérifiera une condition de la forme

$$|w' - w| < a r^\alpha,$$

a étant un nombre positif indépendant des positions des points p et p'.

Donc, quelle que soit la fonction intégrable v_0, la fonction v_1 satisfera toujours à une condition de la forme (24) et, par conséquent, la fonction v_2 vérifiera une condition de la forme (25). Cette dernière fonction sera donc toujours susceptible de se présenter sous la forme du potentiel d'une simple couche répandue sur la surface avec une densité continue.

Cela étant établi, nous pouvons regarder notre tâche comme achevée.

---

*) Remarquons que M. Korn n'a établi cette proposition que dans le cas de $\alpha \leq \frac{1}{2}$. (*Abhandlungen zur Potentialtheorie,* Abh. 1, p. 5—8).

Die Jacobische Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung.

Von **Adolf Kneser**.

Seit den fundamentalen Untersuchungen, welche Jacobi im 17. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlicht hat, ist es bekannt, dass bei den gewöhnlichen Aufgaben der Variationsrechnung das gesuchte Extremum im Allgemeinen von der Curve, welche den Differentialgleichungen des Problems genügt, nur in begrenztem Umfange geliefert wird. Für die kürzesten Linien auf einer Oberfläche z. B. erhält man eine Differentialgleichung, welche die geodätischen Linien characterisirt; aber nicht jeder geodätische Bogen giebt ein Minimum des Abstandes seiner Endpunkte; dieses Minimum liegt nur dann vor, wenn man den Anfangspunkt jenes Bogens festhaltend den Endpunkt auf einer bestimmten geodätischen Linie diesseits eines gewissen Grenzpunktes verbleiben lässt, welchen man als den dem Anfangspunkte conjugirten Punkt bezeichnet. Ist nun A der Anfangspunkt, so haben die durch A gehenden geodätischen Linien im Allgemeinen eine Enveloppe, welche von jeder der geodätischen Linien in dem zu A conjugirten Punkte B berührt wird, und irgend ein der geodätischen Linie AB angehöriger Bogen AC liefert im Allgemeinen nur dann ein Minimum des Abstandes AC, wenn C zwischen A und B liegt. Dieser Satz ist schon von Jacobi auf allgemeinere Probleme der Variationsrechnung ausgedehnt worden. In der von Rosenhain angefertigten Nachschrift einer im Wintersemester 1837—38 gehaltenen Vorlesung von Jacobi, welche im Archiv der Berliner Akademie der Wissenschaften aufbewahrt wird, findet sich nämlich die Bemerkung, dass für das Extremum des Integrals

$$\int f(x, y, p)\, dx, \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

die Enveloppe der durch einen festen Punkt gehenden und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

genügenden Curven die analoge Bedeutung hat, wie die oben bezeichnete Enveloppe geodätischer Linien für das Minimum der Entfernung. Es wird auch ausgesprochen, dass schon für den Bogen, der von dem festen Punkte und dem entsprechenden Berührungspunkte auf der Enveloppe, also von zwei conjugirten Punkten begrenzt wird, das gesuchte Extremum des Integrals

$$\int f(x\,,\,y\,,\,p)\,dx$$

im Allgemeinen nicht mehr geliefert wird.

Wir wollen dieses von Jacobi aufgestellte Theorem auf das folgende sehr allgemeine Problem ausdehnen.

Es sei

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx}\,,\quad p_2 = \frac{dy_2}{dx}\,,\;\cdots,\quad p_n = \frac{dy_n}{dx}\,,$$

und werde die Aufgabe gestellt, das Integral

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\cdots,y_n\,,\,p_1\,,\,p_2\,,\cdots,p_n)\,dx$$

zu einem Extremum zu machen. Dabei sei f eine gegebene Function ihrer Argumente, $y_1\,,\,y_2\,,\cdots,\,y_n$ seien unbekannte Functionen von x, welche für $x = x_0$ und $x = x_1$ vorgeschriebene Werthe annehmen und allgemein den Bedingungsgleichungen

$$\varphi_\rho(x\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\ldots,\,y_n\,,\,p_1\,,\,p_2\,,\cdots,\,p_n) = 0 \qquad (\rho=1,2,\ldots,r)$$

genügen.

Wir wollen zeigen, dass auch hier die ein festes Werthsystem enthaltenden und den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannichfaltigkeiten im Gebiet der Grössen $x\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\cdots,\,y_n$ eine Enveloppe haben, an welcher das gesuchte Extremum in ähnlichem Sinne aufhört, wie es oben für die geodätischen Linien angedeutet wurde. Dabei gelingt es auch, eine bekannte und merkwürdige Eigenschaft der Enveloppe der durch einen festen Punkt A gehenden geodätischen Linien zu verallgemeinern, welche in Folgendem besteht: Sind B und D die Berührungspunkte zweier durch A gehender geodätischer Linien mit der Enveloppe, so gilt die Gleichung

$$AD - AB = BD,$$

in welcher rechts ein Bogen der Enveloppe, links geodätische Bögen stehen. Bei der Verallgemeinerung dieses Satzes hat man nur an Stelle der Bogenlänge den entsprechenden Werth des Integrals

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)\, dx$$

zu setzen; an Stelle der geodätischen Linien treten die Mannichfaltigkeiten, welche den Differentialgleichungen des Problems genügen.

---

§ 1.

In der Variationsrechnung wird als nothwendige Bedingung für das Extremum des Integrals

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, dx,$$

in welchem allgemein

$$p_\nu = \frac{dy_\nu}{dx}$$

gesetzt ist, bei den Bedingungsgleichungen

$$\text{(1)} \qquad \varphi_\rho(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (\rho=1,2,\ldots,r)}$$

folgendes System von Gleichungen abgeleitet.

Es bedeute ν die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, ebenso ρ die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, r$; λ_ρ seien r neue Unbekannte und es werde

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_r\varphi_r$$

gesetzt. Dann hat man als nothwendige Bedingungen des Extremums die n Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial p_\nu} = 0,$$

welche im Allgemeinen mit den r Gleichungen (1) combinirt ausreichen, die $n+r$ Unbekannten y_ν, λ_ρ zu bestimmen.

Man kann diese Gleichungen in der Form

$$(2) \qquad \sum_\nu p'_\nu \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_\nu} + \sum_\rho \lambda'_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_\mu} + F_\mu(x, y_1, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = 0$$

schreiben, und durch Derivation der Gleichungen (1) ergiebt sich

$$(3) \qquad \sum_\nu p'_\nu \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_\nu} + G_\rho(x, y_1, \cdots, p_n) = 0.$$

Die Determinante der Coefficienten aller Grössen p'_ν, λ'_ρ in den Gleichungen (2), (3) werde durch D bezeichnet.

Um nun festen Boden zu gewinnen, nehmen wir an, die Functionen f, φ_ρ seien in einem gewissen Gebiete der Variablen x, y_ν, p_ν, welches (G) heisse, holomorph; dann gilt dasselbe von den Functionen G_ρ und bei beliebigen Werthen der Grössen λ_ρ auch von allen F_μ, da diese die Grössen λ_ρ nur linear enthalten.

Für die diesem Gebiet (G) angehörige Stelle

$$x = x_0, \quad y_\nu = Y_\nu^0, \quad p_\nu = P_\nu^0$$

sei D von Null verschieden und gelte die Ungleichung

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_r} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_r} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dann können die Grössen p_ρ als Functionen der Argumente $x, y_\nu, p_{r+\sigma}$ aus den Gleichungen (1) ausgerechnet werden, wobei σ, wie fortan immer, die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, n-r$ bedeute; die erhaltenen Ausdrücke sind holomorph an der Stelle x_0, Y_ν^0, $P_{r+\sigma}^0$.

Weiter ergiebt die Auflösung der linearen Gleichungen (2), (3)

$$(5) \qquad \begin{aligned} p'_{r+\sigma} &= H_\sigma(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho), \\ \lambda'_\rho &= K_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho), \end{aligned}$$

und die Functionen H_σ, K_ρ sind ebenso wie F_μ, G_ρ bei beliebigen Werthen der Grössen λ_ρ holomorph an der Stelle x_0, Y_ν^0, $P_{r+\sigma}^0$.

Bezeichnet man noch durch $L_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma})$ die Auflösungen der Gleichungen (1) nach p_ρ, so kann man die Gleichungen (5) zu folgendem System ergänzen:

$$\frac{dp_{r+\sigma}}{dx} = H_\sigma(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho),$$

$$(6) \qquad \frac{dy_{r+\sigma}}{dx} = p_{r+\sigma}, \quad \frac{d\lambda_\rho}{dx} = K_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho),$$

$$\frac{dy_\rho}{dx} = L_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma}).$$

Hiermit hat man genau $2n$ Differentialgleichungen für die $2n$ Unbekannten y_ν, $p_{r+\sigma}$, λ_ρ; auf den rechten Seiten kommen nur die Unbekannten selbst vor, während links ihre ersten Ableitungen stehen.

Alle rechten Seiten sind holomorph an der Stelle

$$x = x_0, \quad y_\nu = Y_\nu^0, \quad p_{r+\sigma} = P_{r+\sigma}^0.$$

Es werde nun durch Y_ν, $P_{r+\sigma}$, Λ_ρ dasjenige particuläre Lösungssystem der Gleichungen (6) bezeichnet, für welches an der Stelle $x = x_0$ die Gleichungen

$$Y_\nu = Y_\nu^0, \quad P_{r+\sigma} = P_{r+\sigma}^0, \quad \Lambda_\rho = \Lambda_\rho^0$$

bestehen, wobei Λ_ρ^0 beliebige Werthe sind.

Dieses Integralsystem bleibe längs irgend eines Intervalls der Variablen x, etwa von x_0 bis x_1, holomorph und liefere in demselben nur Werthsysteme (x, y_ν, p_ν), welche dem Gebiet (G) angehören; ausserdem sei D für diese Systeme von Null verschieden und bleibe die Ungleichung (4) gültig.

Alsdann kann in der Umgebung eines jeden von ihnen das System (2), (3) in die Form (6) übergeführt werden und man kann sagen, dass auch die rechten Seiten der Gleichungen (6) in diesen Werthsystemen holomorph sind.

Damit sind die Bedingungen erfüllt, unter denen man auf das System (6) den folgenden allgemeinen Satz *) anwenden kann.

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen sei nach den Ableitungen der Unbekannten aufgelöst; ein Integralsystem (S) sei in dem In-

---

*) Vgl. z. B. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, § 27 (Braunschweig, 1900)

tervall (J) holomorph und ergebe in diesem nur solche Werthsysteme der Unbekannten, in denen die für die Ableitungen der Unbekannten erhaltenen Ausdrücke holomorph sind. Alsdann sind auch alle Integralsysteme, deren Anfangswerthe, etwa die an der unteren Grenze des Intervalls (J) angenommenen, von den entsprechenden des Systems (S) hinreichend wenig abweichen, in dem ganzen Intervall (J) holomorph, und die an einer bestimmten Stelle desselben erhaltenen Werthe holomorphe Functionen der Anfangswerthe.

Angewandt auf das System (6) ergiebt dieser Satz sofort das folgende Resultat.

Ein beliebiges Integralsystem y_ν, p_ν, λ_ρ sei dadurch characterisirt, dass für $x = x_0$ die Gleichungen

$$y_\nu = y_\nu^0, \quad p_{r+\sigma} = p_{r+\sigma}^0, \quad \lambda_\rho = \lambda_\rho^0$$

bestehen; wenn dann die Differenzen

$$|y_\nu^0 - Y_\nu^0|, \quad |p_{r+\sigma}^0 - P_{r+\sigma}^0|, \quad |\lambda_\rho^0 - \Lambda_\rho^0|$$

gewisse Grenzen nicht überschreiten, so sind die Grössen y_ν, p_ν, λ_ρ als Functionen von x in dem Intervall von x_0 bis x_1 holomorph; ihre Werthe an jeder einzelnen Stelle desselben sind holomorph in den $2n$ Anfangswerthen y_ν^0, $p_{r+\sigma}^0$, λ_ρ^0.

§ 2.

Wir betrachten jetzt speciell diejenigen Integralsysteme der Gleichungen (2), (3) oder (6), für welche

$$(7) \qquad y_\nu^0 = Y_\nu^0;$$

bezeichnet man die den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannichfaltigkeiten im Gebiet der Grössen x, y_ν allgemein als Extremalen, so hat man durch die Annahme (7) diejenigen Extremalen characterisirt, welche durch den festen Anfangspunkt (x_0, Y_ν^0) hindurchgehen; diesen bezeichnen wir durch 0.

Setzt man noch

$$p_{r+\sigma}^0 = P_{r+\sigma}^0, \quad \lambda_\rho^0 = \Lambda_\rho^0,$$

so erhält man die specielle Extremale (C), für welche $y_\nu = Y_\nu$ wird; auf dieser wollen wir das Extremum des Integrals

$$\int f(x, y_\nu, p_\nu)\, dx$$

untersuchen und zeigen, dass das Extremum nicht mehr vorhanden ist, wenn der Werth x von x_0 beginnend eine gewisse Grenze überschreitet.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir die Grössen $p^0_{r+\sigma}$, λ^0_ρ durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die Grössen $P^0_{r+\sigma}$, Λ^0_ρ in derselben Reihenfolge durch $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und gehen davon aus, dass für die in der Stelle 0 beginnenden Extremalen nach § 1 gesetzt werden kann

(8) $$y_\nu = f_\nu(x, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

wobei die Functionen f_ν holomorph sind, sobald x dem Intervall von x_0 bis x_1 angehört, die Differenzen $|a_\nu - A_\nu|$ aber hinreichend klein sind; speciell hat man

$$Y_\nu = f_\nu(x, A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Nun sei x_1 der erste auf x_0 folgende Werth, für welchen die Functionaldeterminante

$$\Delta(x_0, x) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

verschwindet, während sie zwischen x_0 und x_1 von Null verschieden ist.

Diese Grösse ist im Wesentlichen mit der von Mayer und Scheeffer bei der Untersuchung der zweiten Variation benutzten Grösse $\Delta(x_0, x)$ identisch.

Eine noch unerledigte Frage ist, ob diese Grösse auch identisch verschwinden kann; wir setzen voraus, dass dies für die Extremale (C) nicht der Fall sei.

Wir setzen ferner voraus, dass neben der Gleichung

(9) $$\Delta(x_0, x_1) = 0$$

die Ungleichung

(10) $$\left.\frac{d\Delta(x_0, x)}{dx}\right|^{x=x_1} \gtrless 0$$

bestehe; dann kann, da $\Delta(x_0, x)$ ebenso wie die Grössen y_ν in den Argumenten x, a_ν holomorph ist, aus der Gleichung

$$\Delta(x_0, x) = 0$$

die Grösse x als Function der Variablen a_ν ausgerechnet werden, welche an der Stelle $a_\nu = A_\nu$ holomorph ist und hier den Werth x_1 annimmt; man erhalte etwa

$$x = \xi(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{11}$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichungen (8), so erhalte man

$$y_\nu = f_\nu(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_n) = g_\nu(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

dann sind auch die Functionen g_ν an der Stelle $a_\nu = A_\nu$ holomorph, und da

$$\xi(A_1, A_2, \ldots, A_n) = x_1,$$

so folgt

$$g_\nu(A_1, A_2, \ldots, A_n) = f_\nu(x_1, A_1, A_2, \ldots, A_n) = Y_\nu^1.$$

Aus der Ungleichung (10) folgt weiter, dass nicht alle Subdeterminanten $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die man aus der Determinante $\Delta(x_0, x)$ bilden kann, für $x = x_1$, $a_\nu = A_\nu$ verschwinden.

Ist nämlich $\Delta_{\mu\nu}$ oder $\Delta_{\mu\nu}(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Adjuncte des Elements $\dfrac{\partial y_\mu}{\partial a_\nu}$, so hat man

$$\frac{d\Delta(x_0, x)}{dx} = \sum_{\mu}^{1,n}\left(\frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x\, \partial a_1}\Delta_{\mu 1} + \frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x\, \partial a_2}\Delta_{\mu 2} + \ldots\right),$$

woraus das Behauptete unmittelbar ersichtlich wird.

Es seien z. B. nicht alle Grössen

$$\Delta_{m\nu}(x_1, A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

gleich Null; dann wollen wir die Differentialgleichungen

$$\frac{da_\nu}{dt} = \Delta_{m\nu}(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{12}$$

ansetzen und diejenigen ihrer Integrale bestimmen, welche für $t = 0$ die Werthe

$$a_\nu = A_\nu \tag{13}$$

annehmen.

Ein solches Integralsystem giebt es, da die Grössen $\Delta_{m\nu}(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ an der Stelle $a_\nu = A_\nu$ holomorph sind, und die Grössen a_ν sind an der

Stelle $t=0$ holomorphe Functionen von t, welche, da die rechten Seiten der Gleichungen (12) bei der Substitution (13) nicht alle verschwinden, nicht sämmtlich constant sein können.

Setzt man diese Werthe a_ν in die Gleichungen

(14) $$y_\nu = f_\nu(x\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\cdots,\ a_n)$$

ein, so erhält man demnach eine vom Parameter t abhängige einfach unendliche Schar von Extremalen, die nicht alle mit (C) zusammenfallen.

Substituirt man ferner diese Integrale der Gleichungen (12) in den Ausdruck (11), so erhalte man

$$\xi(a_1\,,\ a_2\,,\cdots,\ a_n) = \Xi = \Xi(t)\,;$$

man findet dann mit Berücksichtigung der Anfangswerthe (13)

$$\Xi(0) = \xi(A_1\,,\ A_2\,,\cdots,\ A_n) = x_1\,.$$

Hieraus folgt, dass auch die Ausdrücke

(15) $$\eta_\nu = f_\nu(\xi\,,\ a_1\,,\ a_2\,,\cdots,a_n)\,,$$

wenn man für a_ν die definirten Functionen von t setzt, für $t=0$ holomorphe Functionen von t sind, deren Werthe für $t=0$ nichts anderes als Y_ν^1 sind.

Fügt man daher die Gleichung

(16) $$\xi = \Xi(t)$$

hinzu, so erhält man im Gebiet der Grössen x, y_ν eine Mannichfaltigkeit (E), welche von der Stelle 1 entsprechend dem Werthe $t=0$ ausgeht.

Wir zeigen nunmehr, dass (E) die Enveloppe der Schar (14) ist.

Zunächst sieht man leicht, dass bei hinreichend kleinen Werthen von t jede Curve der Schar (14) einen Punkt mit (E) gemein hat; man braucht nur in den Gleichungen (14) für x den Werth (16) zu substituiren, um die Gleichungen

$$\eta_\nu = y_\nu$$

hervorzurufen.

Sodann findet man aus den Gleichungen (15)

$$\frac{d\eta_\nu}{dt} = \frac{\partial f_\nu(\xi,a_1,\ldots)}{\partial\xi}\frac{d\Xi}{dt} + \frac{\partial f_\nu(\xi,a_1,\ldots)}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \frac{\partial f_\nu(\xi,a_1,\ldots)}{\partial a_2}\frac{da_2}{dt} + \cdots$$

$$= \frac{\partial f_\nu(\xi,a_1,\ldots)}{\partial\xi}\frac{d\Xi}{dt} + \left(\varDelta_{m1}\frac{\partial y_\nu}{\partial a_1} + \cdots + \varDelta_{mn}\frac{\partial y_\nu}{\partial a_n}\right),$$

wobei in der letzten Klammer nach ausgeführter Derivation überall $x = \xi$ zu setzen ist.

Bei dieser Substitution verschwindet aber die Klammer entweder wegen der Gleichung

$$\varDelta(x_0, \xi) = 0,$$

oder nach einer bekannten Eigenschaft der Subdeterminanten; man erhält also einfach

$$\frac{d\eta_\nu}{dt} = \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1 \dots)}{\partial \xi} \frac{d\Xi}{dt}. \tag{17}$$

Anderseits ergeben die Gleichungen (14)

$$\frac{dy_\nu}{dx} = \frac{\partial f_\nu(x, a_1, \dots)}{\partial x}$$

und es ist auch hier nach der Derivation $x = \xi$ zu substituiren, wenn man die der Extremale und der Mannichfaltigkeit (E) gemeinsame Stelle betrachten will.

Wenn daher die Ungleichung

$$\Xi'(t) \gtrless 0 \tag{18}$$

besteht, sodass ξ an der betreffenden Stelle für die Mannichfaltigkeit (E) als unabhängige Variable eingeführt werden kann, so findet man

$$\frac{d\eta_\nu}{d\xi} = \frac{dy_\nu}{dx}, \quad \frac{d\eta_\nu}{dt} = p_\nu \frac{d\xi}{dt}, \tag{19}$$

womit die Enveloppeneigenschaft für (E) erwiesen ist.

Die Ungleichung (18) besteht jedenfalls für alle hinreichend kleinen, von Null verschiedenen Werthe von t, sobald die Function $\Xi'(t)$ nicht identisch verschwindet. In diesem Falle würde aber, der Gleichung (17) zufolge, dasselbe von allen Grössen $\frac{d\eta_\nu}{dt}$ gelten; (E) zöge sich also auf die Stelle (x_1, Y_ν^1) oder 1 zusammen.

Da nun die Grössen a_ν nicht alle constant sind, so hätte man in diesem Falle eine Schar von Extremalen (14), welche die beiden Stellen 0 und 1 verbinden.

§ 3.

Wir betrachten nun das Integral

$$J = \int f(x)\,dx = \int F(x)\,dx,$$

längs irgend einer Extremalen der Schar (14) vom Punkte 0 bis zum Berührungspunkt mit (E) hin erstreckt, oder das Integral

$$\int_{x_0}^{\xi} F\,dx,$$

in dessen Integranden die Grössen y_ν, λ_ρ als Functionen von $x, a_1, \dots a_n$, mithin implicite als Functionen von x und t erscheinen, während die obere Grenze ξ von t allein abhängt.

Setzt man daher

$$\delta = dt\,\frac{\partial}{\partial t},$$

so findet man

$$\delta \int_{x_0}^{\xi} F\,dx = F\Big|^{\xi} \delta\xi + \int_{x_0}^{\xi} \delta F\,dx.$$

Nun ist

$$\delta F = \sum_{\nu}^{1,n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\,\delta p_\nu \right) + \sum_{\rho}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho}\,\delta\lambda_\rho,$$

die Coefficienten von $\delta\lambda_\rho$ verschwinden aber, da offenbar

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho} = \varphi_\rho = 0;$$

da ferner offenbar

$$\delta p_\nu = \frac{d\,\delta y_\nu}{dx}$$

und für die betrachteten Extremalen die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial p_\nu} = 0$$

bestehen, so findet man vermittelst einer partiellen Integration

$$\int_{x_0}^{\xi} \delta F\, dx = \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \delta y_\nu \Big|_{x_0}^{\xi}$$

Hier verschwinden die Werthe δy_ν für $x = x_0$, da an dieser Stelle unabhängig von t die Gleichungen gelten

$$y_\nu = Y_\nu^0.$$

Also ergiebt sich schliesslich

$$(20) \qquad \delta \int_{x_0}^{\xi} F\, dx = F\, \delta\xi + \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \delta y_\nu \Big|^{\xi}.$$

Jetzt wollen wir neben den Functionen

$$y_\nu = f_\nu(x, a_1, \ldots, a_n)$$

auch die auf (E) bezüglichen Werthe

$$\eta_\nu = f_\nu(\xi, a_1, \ldots, a_n)$$

betrachten; dann ergiebt sich sofort

$$\delta\eta_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi} \delta\xi + \sum_{\mu}^{1,n} \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1, \ldots)}{\partial a_\mu} \frac{da_\mu}{dt} dt,$$

$$\delta y_\nu = \sum_{\mu}^{1,n} \frac{\partial f_\nu(x, a_1, \ldots)}{\partial a_\mu} \frac{da_\mu}{dt} dt;$$

also folgt

$$\delta y_\nu \Big|^{\xi} = \delta\eta_\nu - p_\nu\, \delta\xi \Big|^{\xi}$$

und die Formel (20) wird

$$(21) \qquad \delta \int_{x_0}^{\xi} F\, dx = \Big(F - \sum_{\nu}^{1,n} p_\nu \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\Big) \delta\xi + \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu} \delta\eta_\nu \Big|^{\xi}.$$

Da nun η_ν und ξ, wenn man die Grössen a_ν als Functionen von t ansieht, reine Functionen von t allein sind, so ist

$$\delta\xi = \frac{d\xi}{dt}\,dt\,, \qquad \delta\eta_\nu = \frac{d\eta_\nu}{dt}\,dt\,,$$

und die in § 2 erhaltene Gleichung (19) ergiebt

$$\delta\eta_\nu - p_\nu \delta\xi = 0\,.$$

Dadurch erhält die Gleichung (21) die einfache Gestalt

$$\delta \int_{x_0}^{\xi} F\,dx = F \Big|^{\xi} \frac{d\xi}{dt}\,dt\,.$$

Da nun für $t = 0$ die Grössen y_ν, p_ν, λ_ρ in Y_ν, P_ν, Λ_ρ übergehen, so folgt hieraus durch Integration nach t

$$\int_{x_0}^{\xi} F(x\,,\ y_\nu\,,\ p_\nu\,,\ \lambda_\rho)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x\,,\ Y_\nu\,,\ P_\nu,\ \Lambda_\rho)\,dx =$$

$$= \int_0 F(\xi\,,\ \eta_\nu\,,\ p_\nu\,,\ \lambda_\rho)\,\frac{d\xi}{dt}\,dt\,,$$

oder da $f = F$ gesetzt werden kann,

$$(22) \qquad \int_{x_0}^{\xi} f(x\,,\ y_\nu\,,\ p_\nu)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x,\ Y_\nu,\ P_\nu)\,dx = \int_{x_1}^{\xi} f(\xi\,,\ \eta_\nu\,,\ p_\nu)\,dx\,.$$

Hier ist das Integral auf der rechten Seite offenbar das ursprünglich betrachtete, längs der Mannichfaltigkeit (E) genommen, für welche ja

$$p_\nu = \frac{dy_\nu}{dx} = \frac{d\eta_\nu}{d\xi}$$

zu setzen ist.

Zieht sich diese Mannichfaltigkeit in die Stelle 1 zusammen, so ist einfach

$$\frac{d\xi}{dt} = 0\,, \qquad \int_{x_0}^{\xi} f(x\,,\ y_\nu\,,\ p_\nu)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x\,,\ Y_\nu\,,\ P_\nu)\,dx\,.$$

Für letzteren Fall zeigt die erhaltene Gleichung unmittelbar, dass die Mannichfaltigkeit $y_\nu = Y_\nu$ für die Strecke von x_0 bis x_1 betrachtet das gesuchte Extremum des Integrals J nicht mehr liefert.

Denn, da nach § 2 die Grössen a_ν nicht alle constant sind, ergeben die Gleichungen (14) eine Schar die Stellen 0 und 1 verbindender Extremalen, welche der letzten Gleichung zufolge denselben Werth des Integrals J liefern.

Aber auch im allgemeinen Falle zeigt die Gleichung (22), dass das Extremum aufhört, abgesehen von einem gewissen Ausnahmefall, für den die Sache zweifelhaft bleibt. Schreibt man nämlich jene Gleichung in der Form

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, Y_\nu, P_\nu)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x, y_\nu, p_\nu)\,dx + \int_{\xi}^{x_1} f(x, y_\nu, p_\nu)\,dx,$$

wobei das zweite Integral auf der rechten Seite längs der Enveloppe (E) genommen ist, und bezeichnet man die Stelle (ξ, η_ν) durch 2, die längs der Extremalen genommenen Integrale aber durch überstrichene Buchstaben, so bedeutet diese Gleichung

$$\bar{J}_{01} = \bar{J}_{02} + J_{21},$$

eine Gleichung, durch welche die in der Einleitung besprochene Eigenschaft der geodätischen Linien verallgemeinert wird.

Diese Gleichung zeigt, dass der Integrationsweg 021, auf welchem von 0 bis 2 längs einer Extremale, von 2 bis 1 längs der Enveloppe integriert ist, denselben Werth von J giebt, wie der ursprünglich betrachtete Weg 01.

Wenn nun angenommen wird

$$(23) \qquad \Xi'(0) \gtrless 0,$$

so kann man, da $\Xi(0) = x_1$, durch passende Wahl von t in beliebiger Nähe des Werthes 0 bewirken, dass ξ dem Intervall von x_0 bis x_1 angehört.

Dann können die Integrationswege 01 und 021 durch gleiche Werthe der Variablen x in eindeutig umkehrbarer Weise auf einander bezogen werden, und haben in entsprechenden Stellen beliebig wenig von einander abweichende Werthe der Grössen p_ν.

Die zusammengesetzte Mannichfaltigkeit 021 gehört also zu denjenigen, mit denen man die ursprüngliche 01 hinsichtlich des Werthes von J vergleichen muss, schon wenn es sich um ein schwaches Extremum handelt, d. h. um ein Extremum gegenüber den Mannichfaltigkeiten, welche nicht nur hinsichtlich der Werthsysteme (x, y_ν), sondern auch hinsichtlich der Differentialverhältnisse $dy_\nu : dx$ von der ursprünglich betrachteten hinreichend wenig abweichen.

Unter der Voraussetzung (23) ist also schon das schwache Extremum des Integrals J für das von den Stellen 0 und 1 begrenzte Stück der Extremale (C) nicht mehr vorhanden, und es giebt im angegebenen Sinne beliebig nahe benachbarte Mannichfaltigkeiten, welche genau denselben Werth von J wie jenes Stück 01 liefern.

Hat man dagegen die Gleichung

$$\Xi'(0) = 0,$$

welche in den Formen

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} \frac{d a_\nu}{dt} \Bigg|^{t=0} = 0,$$

$$\text{(24)} \qquad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} \Delta_{m\nu} \Bigg|^{a_\nu = A_\nu} = 0, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial \Delta}{\partial a_\nu} \Delta_{m\nu} \Bigg|^{x_1, A_\nu} = 0$$

geschrieben werden kann, so sind Fälle möglich, in denen das ausgesprochene Resultat zweifelhaft wird; dies würde geschehen, wenn ξ für kleine Werthe von t nicht in das Intervall zwischen x_0 und x_1 hereintritt, die Enveloppe (E) also in der Stelle 1 das Analogon eines Rückkehrpunktes darbietet, dessen Zweige von 1 aus nach derjenigen Seite gehen, welche der Richtung von x_1 nach x_0 hin entgegengesetzt ist.

Jedenfalls aber genügt es die Gleichung (24) auszuschliessen, um bei den Voraussetzungen (9), (10) mit Sicherheit behaupten zu können, dass das gesuchte Extremum an der Stelle 1 in der angegebenen Weise aufhört.

Berlin, Februar 1902.

Объ одномъ обобщеніи теоремы Абеля.

Д. Мордухай-Болтовскаго.

§ 1. Пусть

$$F(z, u) = 0 \tag{1}$$

неприводимое уравненіе m-ой степени алгебраической кривой.

Пересѣчемъ эту кривую другой алгебраической кривой, въ уравненіи которой степени n

$$\Phi(z, u, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{2}$$

коэффиціенты раціональныя функціи нѣкотораго числа перемѣнныхъ параметровъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Исключеніе u изъ уравненій (1) и (2) даетъ уравненіе

$$\Omega(z, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \tag{3}$$

опредѣляющее значеніе z для точекъ пересѣченія упомянутыхъ кривыхъ, въ которомъ коэффиціенты будутъ также раціональными функціями отъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Значенія z, u для точекъ пересѣченія, число которыхъ равно mn, будемъ обозначать черезъ

$$(z_1, u_1), (z_2, u_2), \ldots, (z_{mn}, u_{mn}).$$

Если $R(z, u)$ раціональная функція z, u, а слѣдовательно

$$J(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} R(z, u)\, dz$$

Абелевъ интегралъ, относящійся къ кривой (1), то по теоремѣ Абеля въ ея обобщенномъ видѣ *):

Сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz \tag{4}$$

равна суммѣ раціональной функціи параметровъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и линейной функціи съ постоянными коэффиціентами логариѳмовъ раціональныхъ функцій тѣхъ же параметровъ.

Предположимъ теперь, что въ области $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ уравненіе (3) импримитивно, т. е. предположимъ, что корни этого уравненія удовлетворяютъ неприводимому въ области $(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ уравненію

$$\Psi(z, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{5}$$

степени s, гдѣ ξ удовлетворяетъ неприводимому въ области $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ уравненію

$$\Theta(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{6}$$

степени $s = \frac{mn}{r}$.

Соотвѣтственно различнымъ корнямъ уравненія (6) корни уравненія (3) раздѣлятся на s системъ импримитивности по r корней въ каждой.

Обозначимъ черезъ $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ корни уравненія (6). Тогда корни первой системы

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_r$$

будутъ удовлетворять уравненію

$$\Psi(z, \xi_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \tag{7}$$

второй системы

$$z_{r+1}, z_{r+2}, \ldots, z_{2r}$$

уравненію

$$\Psi(z, \xi_2, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

и т. д.

---

*) Abel. Oeuvres. t. I. Demonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

Appell et Goursat. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. § 189, p. 416.

Возьмемъ сумму интеграловъ, подобную (4), которую разсматривалъ Абель:

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz,$$

но распространенную не на всѣ mn корней уравненія (3), а только на корни, принадлежащіе первой системѣ или на соотвѣтствующія имъ точки пересѣченія кривыхъ (1) и (2). Слѣдуя Абелю, находимъ полный дифференціалъ J относительно $a_1, a_2, \ldots, a_k$

$$\delta J = \sum_{i=1}^{i=r} R(z_i, u_i)\, \delta z_i, \tag{8}$$

гдѣ δ знакъ дифференцированія по $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Но уравненія (1), (5) и (6) намъ даютъ:

$$\delta F(z_i, u_i) = 0,$$

$$\delta \Psi(z_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

$$\delta \Theta(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0,$$

откуда, обозначая для краткости

$$F(z_i, u_i) = F_i,$$

$$\Psi(z_i, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Psi_i,$$

$$\Theta(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Theta_1,$$

имѣемъ

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \delta u_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_j} \delta u_j = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Theta_1}{\partial a_j} \delta u_j = 0.$$

Изъ этой системы линейныхъ относительно δz_i, δu_i, $\delta \xi_1$ уравненій получаемъ

$$\delta z_i = \frac{\dfrac{\partial F_i}{\partial u_i} \sum\limits_{j=1}^{j=k} \dfrac{\partial(\Theta_1, \Psi_i)}{\partial(\xi_1, a_j)} \delta a_j}{\dfrac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_1} \cdot \dfrac{\partial(F_i, \Psi_i)}{\partial(z_i, u_i)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=k} Q_j(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \delta a_j,$$

гдѣ $Q(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ раціональная функція $z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Подставляя это выраженіе вмѣсто δz_i въ выраженіе (8), получаемъ:

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=r} Q_j(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, R(z_i, u_i)\, \delta a_j,$$

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} P_j(z_1, z_2, \ldots, z_r, u_1, u_2, \ldots, u_r, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \delta a_j,$$

гдѣ P_j раціональная функція $z_1, z_2, \ldots, z_r, u_1, u_2, \ldots, u_r, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k$ и кромѣ того симметрическая функція паръ $(z_1, u_1), (z_2, u_2), \ldots, (z_r, u_r)$ Вслѣдствіе предполагаемой неприводимости уравненіе (5), а слѣдовательно и (3), кратныхъ корней не имѣютъ, а потому

$$u_i = \omega(z_i, a_1, a_2, \ldots, a_k), \tag{9}$$

гдѣ ω раціональная функція $z_i, a_1, a_2, \ldots, a_k$, общая для всѣхъ значеній значка i.

Подставляя это выраженіе u_i въ функцію P_j, мы приводимъ эту функцію къ симметрической функціи только отъ $z_1, z_2, \ldots, z_r$, раціональной относительно $z_1, z_2, \ldots, z_r, \xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k$, а пользуясь уравненіемъ (7), приводимъ ее къ раціональной функціи $\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\Pi_j(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Такимъ образомъ

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} \Pi_j(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, \delta a_j.$$

Откуда, обозначая черезъ $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_k^{(0)}$ частныя значенія $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и черезъ $\xi_1^{(1)}$ значеніе ξ_1 при $a_1 = a_1^{(0)}$, черезъ $\xi_1^{(2)}$ значеніе ξ_1 при $a_1 = a_1^{(0)}$ и при $a_2 = a_2^{(0)}$ и т. д., черезъ $\xi_1^{(k-1)}$ значеніе ξ_1 при $a_1 = a_1^{(0)}$, $a_2 = a_2^{(0)}, \ldots, a_{k-1} = a_{k-1}^{(0)}$, получимъ:

$$J = \int_{a_1^{(0)}}^{a_1} \Pi_1(\xi_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)\, da_1 + \int_{a_2^{(0)}}^{a_2} \Pi_2(\xi_1^{(1)}, a_1^{(0)}, a_2, \ldots, a_k)\, da_2 +$$

$$+ \int_{a_3^{(0)}}^{a_3} \Pi_3(\xi_1^{(2)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3, \ldots, a_k)\, da_3 + \ldots + \tag{10}$$

$$+ \int_{a_k^{(0)}}^{a_k} \Pi_k(\xi_1^{(k-1)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_{k-1}^{(0)}, a_k)\, da_k + C,$$

гдѣ постоянная C функція (z_0, u_0).

Такимъ образомъ сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0 u_0)}^{(z_i u_i)} R(z, u)\, dz$$

не выражается вообще черезъ алгебраическія функціи и логариѳмы алгебраическихъ функцій параметровъ, но выражается черезъ сумму функцій отъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$, изъ которыхъ каждая опредѣляется Абелевымъ интеграломъ

$$\int \Pi(\xi, a)\, da,$$

зависящимъ отъ уравненія s-ой относительно ξ степени, т. е. равной числу системъ импримитивности уравненія (3), опредѣляющаго значенія z, одной изъ координатъ точекъ пересѣченія кривыхъ (1) и (2).

Если корни уравненія (3) дѣлятся на двѣ системы импримитивности, т. е. уравненіе (6) второй степени относительно ξ, то въ лѣвую часть уравненія (10) будутъ входить только ультраэллиптическіе интегралы.

Если же уравненіе (6) первой степени, то получаемъ случай Абелевой теоремы, такъ какъ тогда ξ выражается раціонально черезъ a.

§ 2. Оставляя въ сторонѣ этотъ слишкомъ общій случай, мы останавливаемся на частномъ, на нашъ взглядъ наиболѣе интересномъ.

Возьмемъ семейство кривыхъ, опредѣляемыхъ алгебраическими уравненіями:

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0, \tag{11}$$

степени n_1 относительно (z, u), и

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0, \tag{12}$$

степени n_2 относительно μ, при чемъ мы предполагаемъ, что во второмъ уравненіи $\Theta(\lambda, \mu)$ не разлагается на множители, кривая опредѣляемая этимъ уравненіемъ не разлагается на кривыя низшихъ порядковъ.

Исключая μ изъ уравненій (11) и (12), получаемъ уравненіе $n_1 n_2$-ой степени:

$$\Phi(z, u, \lambda) = 0, \tag{13}$$

содержащее одинъ перемѣнный параметръ λ.

Исключая u изъ уравненій (1) и (13), получаемъ уравненіе mn_1n_2-ой степени:

$$\Omega(z, \lambda) = 0. \tag{14}$$

Можно доказать, что это уравненіе въ томъ случаѣ, когда для точекъ пересѣченія кривыхъ (1) и (13) одновременно не обращаются въ нуль функціи $\varphi(z, u)$, $\psi(z, u)$, $\chi(z, u)$, уравненіе импримитивное, какъ уравненіе (3), разсмотрѣнное въ § 1.

Замѣтимъ прежде всего, что уравненіе (14) можно получить такимъ образомъ.

Составляемъ произведеніе функцій

$$[\varphi(z, u^{(1)}) + \lambda\psi(z, u^{(1)}) + \mu\chi(z, u^{(1)})],$$
$$[\varphi(z, u^{(2)}) + \lambda\psi(z, u^{(2)}) + \mu\chi(z, u^{(2)})],$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$[\varphi(z, u^{(m)}) + \lambda\psi(z, u^{(m)}) + \mu\chi(z, u^{(m)})],$$

гдѣ $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$ различныя значенія u, опредѣляемыя уравненіемъ (1). Произведеніе это

$$\prod_{i=1}^{i=m} [\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})],$$

будучи функціей симметрической относительно $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(m)}$, будетъ равно раціональной функціи z, λ, μ, которую означимъ черезъ $\Psi(z, \lambda, \mu)$.

Такимъ образомъ для точекъ пересѣченія мы будемъ имѣть:

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = 0. \tag{15}$$

Намъ остается только исключить μ при помощи уравненія

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0. \tag{12}$$

Теперь докажемъ, что при сдѣланномъ предположеніи относительно функцій $\varphi(z, u)$, $\psi(z, u)$, $\chi(z, u)$ уравненіе (15) будетъ неприводимо въ области (λ, μ).

Предположимъ, что имѣетъ мѣсто противное, что для всѣхъ значеній γ, μ

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z, \lambda, \mu)\, \Psi_2(z, \lambda, \mu) \ldots \Psi_k(z, \lambda, \mu).$$

Замѣтимъ, что неприводимые множители $\Psi(z, \lambda, \mu)$ функціи цѣлыя относительно z, λ, μ, можно считать тоже цѣлыми функціями λ, μ, ибо въ противномъ случаѣ, приводя въ нихъ всѣ коэффиціенты при степеняхъ z къ одному знаменателю, имѣли бы:

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = \frac{\Psi_1(z, \lambda, \mu)\, \Psi_2(z, \lambda, \mu) \ldots \Psi_k(z, \lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)},$$

откуда $f(\lambda, \mu) =$ постоянному.

Разсматриваемая, какъ функція цѣлая λ, μ, $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ должна или вовсе не содержать λ, μ, или дѣлиться на одинъ изъ множителей,

$$\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda \psi(z, u^{(i)}) + \mu \chi(z, u^{(i)})$$

функціи $\Psi(z, \lambda, \mu)$.

Исключая пока первый случай, когда

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z), \tag{16}$$

т. е. функція $\Psi(z, \lambda, \mu)$ содержитъ множитель независящій отъ λ, μ, мы должны представить $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ въ слѣдующей формѣ:

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}) \prod_{i=1}^{i=l} [\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda \psi(z, u^{(i)}) + \mu \chi(z, u^{(i)})].$$

Можно доказать, что $l = m$.

Положимъ $l < m$. Обозначая коэффиціентъ при $\lambda^\alpha \mu^\beta$ по разложеніи произведенія въ правой части черезъ $\eta_{\alpha\beta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})$, а черезъ $\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})$ коэффиціентъ при $\lambda^\gamma \mu^\delta$, замѣтимъ, что функціи

$$\eta_{\alpha\beta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})\, \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}),$$

$$\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})\, \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}),$$

какъ равныя коэффиціентамъ при $\lambda^\alpha \mu^\lambda$ и $\lambda^\gamma \mu^\delta$ въ $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$, должны приводиться къ функціи отъ z, и тоже относится къ ихъ частному:

$$\frac{\eta_{\alpha\lambda}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})}{\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)})} = \eta(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)}).$$

Но при неприводимости уравненія (1) это можетъ быть лишь въ въ томъ случаѣ, когда въ η входятъ не только $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(l)}$, но и $u^{(l+1)}, \ldots, u^{(m)}$, т. е. когда $l = m$, противно предположенію.

Если же $l = m$, то $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ дѣлится на $\Psi(z, \lambda, \mu)$; тогда имѣемъ

$$\omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(k)}) = 1,$$

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi(z, \lambda, \mu),$$

и уравненіе (15) противно допущенію неприводимо.

Остается только разсмотрѣть случай, исключенный нами, когда

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z), \tag{16}$$

т. е. когда уравненіе (15) имѣетъ корни, независящіе отъ λ, μ. Но тогда существуютъ такія значенія z, u, которыя, удовлетворяя уравненію (1), удовлетворяютъ вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ λ, μ, или удовлетворяютъ одновременно тремъ уравненіямъ:

$$\begin{gathered} \varphi(z, u) = 0, \\ \psi(z, u) = 0, \\ \chi(z, u) = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Можно еще сказать: точки пересѣченія кривыхъ (1) и (13) тогда совпадаютъ съ общими тремъ кривымъ (17) точками, если таковыя у нихъ существуютъ.

Такимъ образомъ, если соблюдено вышеизложенное условіе, то уравненіе

$$\Omega(z, \lambda) = 0 \tag{14}$$

импримитивно, и притомъ число системъ импримитивности равно степени уравненія (12) относительно μ, число же корней въ каждой системѣ равно степени $\Psi(z, \lambda, \mu)$ относительно z, т. $mn_1 = r$. Согласно съ вышедоказаннымъ въ § 1 сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz$$

выражается черезъ одинъ Абелевъ интегралъ

$$\int \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda,$$

если $\mu = \mu_1$ тотъ корень уравненія (12), которому соотвѣтствуютъ корни

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n_1 m},$$

которыя, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненію

$$\Psi(z, \lambda, \mu_1) = 0.$$

Такимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz = \int \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + C, \tag{18}$$

гдѣ C независитъ отъ z_i, u_i, а только отъ z_0, u_0. Обозначая лѣвую часть этого равенства черезъ $J[z_i, u_i]$ и полагая, что для $\lambda = \lambda'$

$$z_1 = z_1', \; z_2 = z_2', \ldots, z_r = z_r'; \quad u_1 = u_1', \; u_2 = u_2', \ldots, u_r = u_r',$$

для $\lambda = \lambda''$

$$z_1 = z_1'', \; z_2 = z_2'', \ldots, z_r = z_r''; \quad u_1 = u_1'', \; u_2 = u_2'', \ldots, u_r = u_r'',$$

а слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_i', u_i')}^{(z_i'', u_i'')} R(z_1 u)\, dz = J[z_i'', u_i''] - J[z_i', u_i'],$$

выводимъ изъ равенства (18), что

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_i', u_i')}^{(i_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda. \tag{19}$$

Интегралъ $\int \Pi(\lambda, \mu)\, d\lambda$ относится къ кривой $\Theta(\lambda, \mu) = 0$, которую мы можемъ задавать произвольно съ однимъ условіемъ, чтобы эта кривая не разлагалась на кривыя нисшаго порядка. Въ случаѣ, если это уравненіе первой степени относительно μ и λ:

$$\alpha\lambda + \beta\mu = \gamma,$$

то уравненіе

$$\Phi(z, u, \lambda) = 0 \tag{13}$$

будетъ типа

$$\Phi_1(z, u) + \lambda \Phi_2(z, u) = 0$$

т. е. уравненіемъ пучка кривыхъ, и теорема даетъ извѣстный случай Абелевой теоремы *).

Сумма J будетъ выражаться черезъ алгебраическія функціи параметра λ и логариѳмы алгебраическихъ функцій, а слѣдовательно и черезъ алгебраическія и логариѳмы алгебраическихъ функцій (z_1, u_1), $(z_2, u_2), \ldots, (z_r, u_r)$ и въ томъ случаѣ, когда уравненіе (12) будетъ такое:

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2 + \delta\lambda + \varepsilon\mu + \zeta = 0.$$

Когда же уравненіе (12) будетъ четвертой степени относительно λ и второй относительно μ, напримѣръ

$$\mu^2 = (1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2), \tag{20}$$

то получаемъ выраженіе суммы Абелевыхъ интеграловъ черезъ одинъ эллиптическій интегралъ.

Мы могли бы возпроизвести все доказательство § 1, примѣняясь къ изслѣдуемому частному случаю, при которомъ должны были бы выразить δz_i въ функціи z_i, u_i, λ, μ и $\delta\lambda$ изъ уравненій:

$$\delta\Phi_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_i}\delta u_i + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial\psi_i}{\partial u_i}\delta u_i\right)\lambda + \\ + \left(\frac{\partial\chi_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial\chi_i}{\partial u_i}\delta u_i\right)\mu_1 + \psi_i\delta\lambda + \chi_i\delta\mu_1 = 0$$

$$\delta F_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i}\delta u_i = 0$$

$$\delta\Theta_1 = \frac{\partial\Theta_1}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\Theta_1}{\partial\mu_1}\delta\mu_1 = 0.$$

Откуда

$$\delta z_i = \frac{\left(\psi_i\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\mu_1} - \chi_i\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\lambda_1}\right)\dfrac{\partial F_i}{\partial u_i}}{\Delta_i\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\mu_1}}\delta\lambda,$$

---

*) Appell et Goursat. p. 418.

гдѣ

$$\Delta(z_i,\, u_i) = \frac{\partial(F_i,\, \varphi_i)}{\partial(z_i,\, u_i)} + \frac{\partial(F_i,\, \psi_i)}{\partial(z_i,\, u_i)}\lambda + \frac{\partial(F_i,\, \chi_i)}{\partial(z_i,\, u_i)}\mu_1.$$

Функція, обозначенная въ § 1 черезъ P_j, въ настоящемъ случаѣ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$P_j(z_i,\, u_i,\, \lambda,\, \mu_1) =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial\Theta(\lambda,\, \mu_1)}{\partial\mu_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=r}\frac{R(z_i,\, u_i)\,\psi(z_i,\, u_i)}{\Delta(z_i,\, u_i)} - \dfrac{\partial\Theta(\lambda,\, \mu_1)}{\partial\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=r}\frac{R(z_i,\, u_i)\,\chi(z_i,\, u_i)}{\Delta(z_i,\, u_i)}}{\dfrac{\partial\Theta(\lambda,\, \mu_1)}{\partial\mu_1} : \dfrac{\partial F(z_i,\, u_i)}{\partial u_i}}.$$

§ 3. Если Абелевъ интегралъ

$$J = \int_{(z_i,\, u_i)}^{(z_i'',\, u_i'')} R(z,\, u)\, dz$$

перваго рода, т. е. конеченъ при всякомъ положеніи точекъ $(z_i'',\, u_i'')$, то интегралъ во второй части равенства (19) будетъ тоже перваго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ обратное, что интегралъ

$$\int_{(\lambda',\, \mu')}^{(\lambda'',\, \mu'')} \Pi(\lambda,\, \mu_1)\, d\lambda$$

обращается въ безконечность при $\lambda'' = \lambda^{(0)}$, мы должны предположить, что при этомъ значеніи λ одинъ изъ интеграловъ лѣвой части уравненія (19) тоже обращается въ безконечность, что противно условію.

Если возьмемъ случай уравненія (20), получимъ, что

$$\sum_{i=1}^{i=r}\int_{(z_i',\, u_i')}^{(z_i'',\, u_i'')} R(z,\, u)\, dz = A\int_{(\lambda',\, \mu')}^{(\lambda'',\, \mu'')}\frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)\,(1-k^2\lambda^2)}} \qquad (21)$$

гдѣ A постоянное,

$$(z_1',\, u_1'),\ (z_2',\, u_2'),\ \ldots,(z_i',\, u_i')$$

удовлетворяютъ уравненію

$$\varphi(z,u) + \lambda'\psi(z,\, u) + \chi(z,\, u)\sqrt{(1-\lambda'^2)\,(1-k^2\lambda'^2)} = 0\,,$$

$$(z_1'',\, u_1''),(z_2'',\, u_2''),\ldots,(z_i'',\, u_i'')$$

уравненію

$$\varphi(z,u) + \lambda''\psi(z,\, u) + \chi(z,\, u)\sqrt{(1-\lambda''^2)\,(-k^2\lambda''^2)} = 0.$$

Возьмемъ для интеграла перваго рода обычную для него форму:

$$\int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u)\, dz = \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} \frac{Q(z, u)}{F'_u(z, u)}\, dz$$

$$\int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{N(\lambda, \mu_1)}{\Theta'_{\mu_1}(\lambda, \mu_1)}\, d\lambda$$

гдѣ $Q(z, u)$ цѣлая функція m—3-ей степени отъ z, u, $N(\lambda, \mu_1)$ цѣлая функція n_2 — 3-ой степени отъ λ, μ.

Равенство (19) для этого случая напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} \frac{Q(z_1 u)}{F'_u(z,\ u)}\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{N(\lambda, \mu_1)}{\Theta'_{\mu_1}(\lambda, \mu_1)}\, d\lambda. \tag{22}$$

§ 4. Мы сдѣлаемъ еще одно очень важное замѣчаніе, касающееся условія неприводимости уравненія (5) въ § 1 и (14) въ § 2.

Въ нашихъ разсужденіяхъ мы вездѣ предполагали, что уравненіе

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{5}$$

а слѣдовательно и

$$\Omega(z, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{3}$$

неприводимы, т. е. Ω не разлагается на множители $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ раціональные относительно $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Но существуетъ одинъ случай, когда не смотря на приводимость Ψ и Ω теорема § 1 имѣетъ мѣсто. Это тотъ случай, когда Ψ разлагается на множитель $\Psi_1(z)$ независящій отъ $\xi, a_1, a_2, \ldots, a_k$ и другой неприводимый множитель $\Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, такъ что

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = \Psi_1(z)\, \Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k). \tag{23}$$

Тогда къ уравненію

$$\Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0 \tag{24}$$

мы можемъ приложить всѣ разсужденія, которыя прилагались къ

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0, \tag{5}$$

такъ какъ: во первыхъ корни уравненія (24) удовлетворяютъ имприміитивному уравненію

$$\frac{\Omega(z, a_1, a_2, \ldots, a_k)}{\Psi_1(z)} = \Omega_1(z, a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0; \tag{25}$$

во вторыхъ, такъ какъ это уравненіе неприводимо, ни одинъ изъ корней его не будетъ кратнымъ, и $u_1, u_2, \ldots, u_q$, соотвѣтствующіе корнямъ $z_1, z_2, \ldots, z_q$ уравненія (25), выразятся раціонально (9) въ послѣднихъ; а на этихъ пунктахъ и основывается все доказательство § 1.

Такимъ образомъ и къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=q}\int_{(z_0, u_0)}^{(zi, u_i)} R(z, u)\, dz$$

примѣнима теорема § 1.

Но такъ какъ корни уравненія

$$\Psi_1(z) = 0$$

не зависятъ отъ $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то прибавленіе къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=q}\int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz = \int \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + C \tag{26}$$

суммы

$$\sum_{i=q+1}^{i=r}\int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u)\, dz$$

гдѣ $z_{q+1}, z_{q+2}, \ldots, z_r$ корни уравненія $\psi_1(z) = 0$, равносильно прибавленію къ правой части равенства (26) постояннаго, такъ что послѣднее имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда лѣвая часть уравненія (3) или (5) содержитъ множитель $\Psi_1(z)$.

Это же замѣчаніе относится и къ случаю кривой (13), т. е. $\Psi(z, \lambda, \mu)$ можетъ содержать множитель независящій отъ $\lambda, \mu, - \Psi_1(z)$.

Но тогда, какъ мы выше въ § 2 показали, существуютъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ (1) и (13), лежащія въ общихъ тремъ кривымъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z, u) &= 0 \\ \psi(z, u) &= 0 \\ \chi(z, u) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

точкахъ. Обратно, если существуютъ общія тремъ кривымъ (17) точки, и съ этими точками совпадаютъ нѣкоторыя точки пересѣченія кривыхъ (1) и (13), то $\Psi(z, \lambda, \mu)$ содержитъ множитель $\Psi_1(z)$, независящій отъ λ, μ. Въ самомъ дѣлѣ, тогда уравненія (1) и (13) имѣютъ общія рѣшенія независящія отъ λ, μ, и тоже относится къ $\Psi(z, \lambda, \mu) = 0$.

Замѣтимъ также, что въ лѣвой части равенства (19), представляющаго слѣдствіе (18), всѣ члены, относящіеся къ корнямъ уравненія $\Psi_1(z)$ равны нулю, и оно можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{i=q}\int_{(z_0,u_0)}^{(z_i'',u_i'')} R(z,u)\,dz = \int_{(\lambda',\mu')}^{(\lambda'',\mu'')} \Pi(\lambda,\mu_1)\,d\lambda + \sum_{i=1}^{i=q}\int_{z_0,u_0)}^{(z_i',u_i')} R(z,u)\,dz. \tag{27}$$

§ 5. Предположимъ, что уравненіе

$$\Theta(\lambda,\mu)=0 \tag{12}$$

таково, что при

$$\lambda=0 \qquad \mu_1=0 \tag{28}$$

такъ, что при $\lambda=0$

$$\varphi(z,u)+\lambda\psi(z,u)+\mu_1\chi(z,u)=\varphi(z,u),$$

и затѣмъ предположимъ, что функціи $\varphi(z,u)$, $\psi(z,u)$, $\chi(z,u)$ $n_1=m-2$-ой степени.

Мы можемъ, какъ извѣстно опредѣлить коэффиціенты функціи $\varphi(z,u)$ такъ, что она будетъ имѣть mn_1-p *) напередъ заданныхъ нулей [или точекъ пересѣченія кривыхъ $F(z,u)=0$ и $\varphi(z,u)=0$], если въ число ихъ включить всѣ двойныя точки кривой (1) числомъ δ. Остальныя p нулей опредѣлятся, какъ и коэффиціенты, въ видѣ алгебраическихъ функцій ихъ.

При $m\geqq 3$, что мы будемъ всегда, конечно, предполагать, всѣ нули раздѣлимъ на 4 группы:

I) Произвольно заданныя точки: $(z_1'',u_1''),(z_2'',u_2''),\ldots,(z_{p+1}'',u_{p+1}'')$, число которыхъ $p+1$.

II) Другія $m-3$ произвольно заданныя точки.

III) δ двойныхъ точекъ $F(z,u)$, считаемыя за 2δ точекъ пересѣченія.

IV) p опредѣляемыхъ предыдущими нулей.

Коэффиціенты же $\psi(z,u)$ и $\chi(z,u)$ мы можемъ опредѣлить такъ, чтобы какъ $\psi(z,u)$, такъ и $\chi(z,u)$ имѣли нули общія съ $\varphi(z,u)$, именно принадлежащія IV, III и II группамъ, значитъ числомъ mn_1-p-1; мы можемъ слѣдовательно произвольно задать еще одинъ нуль и въ $\psi(z,u)$ и $\chi(z,u)$; такимъ образомъ остается еще по перемѣнному параметру; имъ дадимъ опредѣленныя частныя значенія. Два параметра λ, μ въ функціи

---

*) гдѣ p родъ кривой (Geschlecht, Rang).

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u), \tag{29}$$

въ силу уравненія § 2, сводятся къ одному параметру λ; эта функція тоже имѣетъ $mn_1 - p - 1$, общихъ съ $\varphi(z, u)$ нулей, именно, II, III и IV группъ.

Параметромъ λ распорядимся такъ, чтобы функція (29) имѣла бы еще одинъ произвольно нами задаваемый нуль (z_0, u_0).

Пусть это значеніе λ есть $\lambda = \lambda'$.

Всѣ точки пересѣченія послѣднихъ трехъ группъ, какъ общія уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ λ, μ и, слѣдовательно. опредѣляемыя уравненіемъ

$$\Psi_1(z) = 0,$$

не входятъ ни въ лѣвую, ни въ правую часть равенства (27), и кромѣ того одинъ изъ интеграловъ правой части, соотвѣтствующій точкѣ пересѣченія:

$$z_i' = z_0, \quad u_i' = u_0,$$

равенъ нулю.

Итакъ мы имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i'', u_i'')} R(z, u)\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(0, 0)} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i', u_i')} R(z, u)\, dz.$$

Возьмемъ теперь общій случай кривой

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

когда для

$$\lambda = \lambda'',$$

$$\mu_1 = \mu''.$$

Такую кривую мы можемъ всегда преобразовать къ разсмотрѣнному типу, положивъ:

$$L = \lambda - \lambda'',$$

$$M = \mu_1 - \mu''.$$

Пусть уравненіе (12) преобразуется тогда въ слѣдующее

$$T(L, M) = 0;$$

$$\Pi(\lambda, \mu) = \Pi(L, M),$$

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu_1\chi(z, u) = \Phi(z, u) + L\psi(z, u) + M\chi(z, u),$$

гдѣ

$$\varphi(z, u) + \lambda'' \psi(z, u) + \mu'' \chi(z, u) = \Phi(z, u) .$$

Тогда мы можемъ написать, что

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u)\, dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1)\, d\lambda + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u)\, dz. \quad (30)$$

Отсюда получаемъ, что сумма $p+1$ значеній Абелева интеграла $J(z_i, u_i)$ сводится при помощи Абелева интеграла, относящагося къ произвольно-заданной кривой

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0 ,$$

къ числу p значеній того же интеграла.

Причемъ какъ предѣлы упомянутаго Абелева интеграла, такъ и значенія (z_i, u_i) для p интеграловъ, къ которымъ сводится $p+1$ заданныхъ, алгебраическія функціи отъ значеній z_i, u_i для этихъ послѣднихъ.

Теорема о сведеніи $p+1$ интеграловъ къ p интеграламъ при помощи алгебраическихъ функцій и логариѳмовъ является частнымъ случаемъ этой теоремы.

Для случая уравненія (20) и случая интеграловъ перваго рода имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u)\, dz = A \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u)\, dz. \quad (31)$$

Sur la formule de Stokes.

Par M. A. Tikhomandritzky.

On peut obtenir la formule de Stokes d'une manière plus simple que celle que l'on trouve dans le Traité d'Analyse de M-r E. Picard, t. I-er, p. 117 (1-ère ed.), qui d'ailleurs rèste la même quelque soit le nombre n des variables indépendantes.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ayant les dérivées partielles par rapport à ces variables; après avoir exprimé ces dernières en fonctions d'une variable indépendante t et d'un paramètre α, fonctions qui aient des dérivées par rapport à t et à α, considérons l'intégrale:

$$u = \int \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial t} dt, \tag{1}$$

qui sera ainsi prise dans l'éspace à n dimensions le long d'une courbe:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha) \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{2}$$

à partir du point fixe $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, corréspondant à la valeur $t=t_0$, jusqu' à l'autre point fixe $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, corréspondant à la valeur $t=t_1$. Les coordonnées des deux points limites nous considérons donc indépendantes du paramètre, toutes les courbes de la famille (2) passant par ces deux points; mais la courbe de l'intégration variant avec la valeur de ce paramètre, l'intégrale u sera en général une fonction de α; en la différentiant par rapport à α, nous aurons:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} dt; \tag{3}$$

l'intégration par parties appliquée au dernier terme, vu de l'indépendance de α des valeurs des $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ aux limites de l'intégrale, nous donne:

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial\alpha\partial t}\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\,dt;$$

en portant ce résultat dans l'égalité (3), en la multipliant ci-après par $d\alpha$ et en intégrant de $\alpha=\alpha_0$ à $\alpha=\alpha_1$, nous aurons:

$$(5) \qquad u_1-u_0=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial t}-\frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\right)dt\,d\alpha,$$

ou, en désignant par $\sum\limits_{i,j=1}^{n}{}'$ la somme étendue à toutes les combinaisons deux à deux des valeurs des indices i et j de 1 à n:

$$(6) \qquad u_1-u_0=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{i^0}^{t_1}\sum_{i,j=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_j}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial t}-\frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\right)dt\,d\alpha.$$

Mais d'une part on a d'après (1):

$$(7)\ u_1-u_0=\int_{t_0}^{t_1}(\alpha_1)\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial t}\,dt-\int_{t_0}^{t_1}(\alpha_0)\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial t}\,dt=-\int_{(L)}\sum_{i=1}^{n}X_i dx_i,$$

en désignant par L la courbe, composée de la courbe

$$x_i=\varphi_i(t,\alpha_0), \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

allant du point corréspondant à $t=t_0$ à celui qui corréspond à $t=t_1$, et de l'autre courbe

$$x_i=\varphi_i(t,\alpha_1), \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

allant du dernier point au premier;—de l'autre part nous avons par la formule connue pour la transformation des variables dans les intégrales doubles:

$$(8) \qquad dx_i dx_j=\left(\frac{\partial x_j}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial t}-\frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}\right)dt\,d\alpha;$$

en vertu de (7) et de (8) l'équation (6) prend la forme:

$$-\int_{(L)} \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \iint_{(S)} \sum_{i,j=1}^{n}{}' \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j, \tag{9}$$

en désignant par S la surface balayée par la courbe (2), lorsque le paramètre α varie d'une manière continue de $\alpha = \alpha_0$, à $\alpha = \alpha_1$, et qui a ainsi pour son contour la courbe L.

Mais c'est justement la formule de Stokes.

(Lu à la séance de 23 décembre 1901 de la section des mathématiques pures et appliquées du XI-me Congrès des naturalistes et des médécins russes.)

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 9-го Апрѣля 1899 года.

1. Доложено письмо отъ К. А. Андреева съ выраженіемъ благодарности Обществу за избраніе въ почетные члены.

2. М. А. Тихомандрицкій напомнилъ Обществу о недавней кончинѣ извѣстнаго геометра С. Ли.

По предложенію М. А. Тихомандрицкаго члены Общества почтили память С. Ли вставаніемъ.

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „О связи между поляризаціей и дисперсіей въ электромагнитной теоріи".

4. М. А. Тихомандрицкій представилъ Обществу пополненный имъ списокъ К. А. Андреева всѣхъ математическихъ изданій, вышедшихъ въ Харьковѣ съ 1804 года, которыя имъ перемѣчены, по просьбѣ Общества, особыми библіографическими значками по системѣ Repertoire bibliographique.

Постановлено благодарить проф. М. А. Тихомандрицкаго за исполненный имъ трудъ.

5. А. М. Ляпуновъ доложилъ статью Д. А. Граве: „Новое доказательство основной теоремы ученія о неявныхъ функціяхъ".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

29-го Октября 1899 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1898—1899 акад. годъ.

2. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на 1899—1900 акад. годъ.

Избраны: предсѣдателемъ проф. А. М. Ляпуновъ; товарищами предсѣдателя: профессоры М. А. Тихомандрицкій и В. А. Стекловъ; секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшеборскій.

3. Постановлено издать диссертацію В. А. Стеклова на средства Харьковскаго Математическаго Общества при помощи субсидіи въ 250 руб., ассигнованной для этой-же цѣли физико-математическимъ факультетомъ Харьковскаго университета.

Засѣданіе 5-го Ноября 1899 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о просьбѣ Вюртембергскаго Математическаго Общества объ обмѣнѣ изданіями; постановлено вступить въ обмѣнъ, начиная съ VI тома.

2. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи дисперсіи: случай многихъ полосъ поглощенія".

3. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщенія: а) „О рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ механики" и б) „Объ основной теоремѣ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій".

4. А. М. Гинцбургъ сдѣлалъ сообщеніе: „О равновѣсіи гибкихъ поверхностей подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ".

Засѣданіе 11-го Февраля 1900 года.

1. Предсѣдатель предложилъ почтить вставаніемъ память скончавшагося перваго предсѣдателя Общества проф. Е. И. фонъ-Бейера.

2. М. А. Тихомандрицкій прочелъ краткую біографію Е. И. фонъ-Бейера.

3. М. А. Тихомандрицкій напомнилъ о предстоящемъ 6-го Марта 200-лѣтнемъ юбилеѣ Берлинской Академіи Наукъ и предложилъ послать привѣтствіе отъ имени Харьковскаго Математическаго Общества; постановлено послать поздравительную телеграмму.

4. Предсѣдатель доложилъ о томъ, что отъ имени распорядительнаго комитета были посланы поздравительныя телеграммы почетному члену Общества проф. Н. В. Бугаеву по случаю исполнившагося 30-лѣтія его ученой дѣятельности и члену-корреспонденту Общества проф. А. В. Васильеву по случаю 25-лѣтія его ученой дѣятельности; затѣмъ предсѣдатель прочелъ письмо А. В. Васильева, въ которомъ онъ благодаритъ членовъ Общества за поздравленіе.

5. Предсѣдатель доложилъ о предложеніи обмѣна изданіями съ издателемъ журнала „Annales of Mathematics".

Постановлено вступить въ обмѣнъ, начиная съ VI тома 2-й серіи и предложить выслать всю 2-ю серію „Сообщеній" въ обмѣнъ на 1-ю серію „Annales of Mathematics".

6. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Отношеніе механической теоріи Фойхта къ электромагнитной теоріи Гельмгольтца".

7. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „О безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности".

8. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Метода обращенія В. Томсона и принципъ Дирихле".

Засѣданіе 24-го Марта 1900 года.

1. Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „О поверхностяхъ 2-го порядка съ точки зрѣнія проэктивной геометріи".

2. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О нуляхъ Θ-функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ".

3. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной теоремѣ теоріи вѣроятностей".

Засѣданіе 7-го Мая 1900 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о письмѣ отъ Берлинской Академіи Наукъ съ выраженіемъ благодарности за поздравленіе и о подобномъ же письмѣ отъ проф. Н. В. Бугаева.

2. Предсѣдатель доложилъ о просьбѣ Владимірской общественной библіотеки и библіотеки Общества изученія приамурскаго края о высылкѣ изданій Общества; постановлено выслать „Сообщенія", начиная съ 1-го тома 2-й серіи.

3. А. М. Ляпуновъ доложилъ статью академика А. А. Маркова: „О вѣроятности a posteriori".

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной теоремѣ теоріи вѣроятностей".

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

8-го Октября 1900 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1899—1900 акад. годъ.

2. Постановлено продолжать выписку журналовъ „Acta mathematica" и „Bulletin astronomique" и въ будущемъ году.

3. По предложенію А. П. Пшеборскаго постановлено предложить обмѣнъ изданіями редакціи журнала „Prace matematyczno-fizyczne".

4. По предложенію М. А. Тихомандрицкаго постановлено выписать „Encyclopédie des Sciences mathématiques“.

5. Произведены выборы членовъ распорядительнаго комитета на 1900—1901 акад. годъ.

Избраны: предсѣдателемъ проф. А. М. Ляпуновъ; товарищами предсѣдателя профессоры: М. А. Тихомандрицкій и В. А. Стекловъ; секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшеборскій.

Засѣданіе 27-го Октября 1900 года.

1. Прочитано письмо отъ редактора журнала „Prace matematyczno-fizyczne“ съ изъявленіемъ благодарности за предложенный обмѣнъ изданіями.

2. Доложено письмо отъ директора Томскаго технологическаго института съ предложеніемъ обмѣна изданіями. Постановлено вступить въ обмѣнъ и выслать всѣ вышедшіе томы 2-ой серіи „Сообщеній“.

3. Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной теоремѣ, касающейся линейчатыхъ поверхностей 2-го порядка“.

4. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „О двухъ теоремахъ Guichard'a“.

Засѣданіе 15-го Декабря 1900 года.

1. Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „О круговыхъ сѣченіяхъ тора“.

2. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ линейчатыхъ конгруэнціяхъ“.

Засѣданіе 16-го Февраля 1901 года.

1. Предсѣдатель напомнилъ членамъ о смерти академика Hermite'a и предложилъ почтить память знаменитаго ученаго вставаніемъ. При этомъ онъ сообщилъ, что распорядительнымъ комитетомъ была послана Парижской Академіи Наукъ телеграмма съ выраженіемъ соболѣзнованія, и доложилъ полученное въ отвѣтъ письмо Непремѣннаго Секретаря Darboux.

2. Предсѣдатель сообщилъ о предложеніи Кроатскаго Общества естествоиспытателей вступить въ обмѣнъ изданіями; постановлено выслать 2-ю серію „Сообщеній“.

3. Предсѣдатель сообщилъ объ ассигновкѣ правленіемъ университета 50 рублей на пріобрѣтеніе шкафа для библіотеки Общества.

4. Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ видоизмѣненіи задачи о курьерахъ“.

5. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной системѣ круговъ“.

6. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій“.

7. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „О постулятѣ Эвклида“.

8. Н. Н. Евдокимовъ сдѣлалъ сообщеніе: „Наблюденія надъ измѣненіями яркости β Lyrae“.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

23-го Сентября 1901 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1900—1901 акад. годъ.

2. Принятъ въ члены Общества приватъ-доцентъ Харьковскаго университета М. П. Косачъ (безъ избранія).

3. По предложенію А. М. Ляпунова постановлено разослать всѣмъ учрежденіямъ, съ которыми Общество находится въ обмѣнѣ изданіями, сочиненіе В. А. Стеклова „Общія методы рѣшенія основныхъ задачъ математической физики“, изданное на средства Общества.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 1901—1902 акад. годъ.

Избраны: предсѣдателемъ Общества проф. А. М. Ляпуновъ; товарищами предсѣдателя профессоры: М. А. Тихомандрицкій и В. А. Стекловъ; секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшеборскій.

Засѣданіе 19-го Октября 1901 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученіи „отчетовъ и протоколовъ Кіевскаго Физико-Математическаго Общества“ за 1900 годъ. Постановлено просить Кіевское Математическое Общество выслать „протоколы“ и за предыдущіе года въ обмѣнъ на 2-ю серію „Сообщеній Харьковскаго Математическаго Общества“.

2. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ сообщеніе: „Очеркъ трудовъ академика М. В. Остроградскаго по чистой математикѣ“.

3. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „Синтетическое доказательство теоремы о девяти точкахъ и девяти прямыхъ“.

4. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О методѣ ариѳметическихъ среднихъ К. Неймана“.

Засѣданіе 16-го Ноября 1901 года.

1. Постановлено продолжать выписывать и въ 1902 году журналы „Acta mathematica“ и „Bulletin astronomique“.

2. По предложенію В. А. Стеклова и Н. Н. Салтыкова въ члены Общества избранъ профессоръ горной академіи въ Берлинѣ А. Кнезеръ.

3. По предложенію М. А. Тихомандрицкаго и А. М. Ляпунова въ члены Общества избранъ М. Н. Лагутинскій.

4. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ сообщеніе: „О преобразованіяхъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной“.

5. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Зависимость разряднаго потенціала отъ длины искрового прорыва“.

6. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „Синтетическое доказательство основного свойства однополаго гиперболоида“.

Засѣданіе 1-го Февраля 1902 года.

1. Постановлено послать привѣтственную телеграмму почетному члену Общества проф. К. А. Андрееву по случаю исполнившагося 30-лѣтія его ученой и профессорской дѣятельности.

2. Избраны въ члены-корреспонденты Общества проф. A. Korn въ Мюнхенѣ и проф. S. Zaremba въ Краковѣ.

3. М. П. Косачъ сдѣлалъ сообщеніе: „О преломленіи свѣта на границѣ двухъ одноосныхъ кристалловъ“.

4. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О принципѣ Неймана“.
