

## Объ одномъ обобщеніи теоремы Абеля.

Д. Мордухай-Болтовскаго.

§ 1. Пусть

$$F(z, u) = 0 \quad (1)$$

неприводимое уравненіе  $m$ -ой степени алгебраической кривой.

Пересѣчемъ эту кривую другой алгебраической кривой, въ уравненіи которой степени  $n$

$$\Phi(z, u, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (2)$$

коэффициенты рациональныя функціи нѣкотораго числа переменныхъ параметровъ  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Исключеніе  $u$  изъ уравненій (1) и (2) даетъ уравненіе

$$\Omega(z, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0, \quad (3)$$

опредѣляющее значеніе  $z$  для точекъ пересѣченія упомянутыхъ кривыхъ, въ которомъ коэффициенты будутъ также рациональными функціями отъ  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Значенія  $z, u$  для точекъ пересѣченія, число которыхъ равно  $m$ , будемъ обозначать черезъ

$$(z_1, u_1), (z_2, u_2), \dots, (z_m, u_m).$$

Если  $R(z, u)$  рациональная функція  $z, u$ , а слѣдовательно

$$J(z, u) = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} R(z, u) dz$$

Абелевъ интеграль, относящійся къ кривой (1), то по теоремѣ Абеля въ ея обобщенномъ видѣ \*):

Сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=mn} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz \quad (4)$$

равна суммѣ рациональной функціи параметровъ  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и линейной функціи съ постоянными коэффициентами логарифмовъ рациональных функцій тѣхъ же параметровъ.

Предположимъ теперь, что въ области  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  уравненіе (3) импримитивно, т. е. предположимъ, что корни этого уравненія удовлетворяютъ неприводимому въ области  $(\xi, a_1, a_2, \dots, a_k)$  уравненію

$$\Psi(z, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (5)$$

степени  $s$ , гдѣ  $\xi$  удовлетворяетъ неприводимому въ области  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  уравненію

$$\Theta(\xi, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (6)$$

степени  $s = \frac{mn}{r}$ .

Соотвѣтственно различнымъ корнямъ уравненія (6) корни уравненія (3) раздѣлятся на  $s$  системъ импримитивности по  $r$  корней въ каждой.

Обозначимъ черезъ  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  корни уравненія (6). Тогда корни первой системы

$$z_1, z_2, \dots, z_r$$

будутъ удовлетворять уравненію

$$\Psi(z, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0, \quad (7)$$

второй системы

$$z_{r+1}, z_{r+2}, \dots, z_{2r}$$

уравненію

$$\Psi(z, \xi_2, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0,$$

и т. д.

\*) Abel. Oeuvres. t. I. Demonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes.

Appell et Goursat. Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. § 189, p. 416.

Возьмемъ сумму интеграловъ, подобную (4), которую разсмотримъ Абель:

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz,$$

но распространенную не на всѣ  $m$  корней уравненія (3), а только на корни, принадлежащія первой системѣ или на соответствующія имъ точки пересѣченія кривыхъ (1) и (2). Слѣдую Абелю, находимъ полный дифференциалъ  $J$  относительно  $a_1, a_2, \dots, a_k$

$$\delta J = \sum_{i=1}^{i=r} R(z_i, u_i) \delta z_i, \quad (8)$$

гдѣ  $\delta$  знакъ дифференцированія по  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

Но уравненія (1), (5) и (6) намъ даютъ:

$$\delta F(z_i, u_i) = 0,$$

$$\delta \Psi(z_i, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0,$$

$$\delta \Theta(\xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0,$$

откуда, обозначая для краткости

$$F(z_i, u_i) = F_i,$$

$$\Psi(z_i, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k) = \Psi_i,$$

$$\Theta(\xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) = \Theta_1,$$

имѣемъ

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \delta u_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Psi_i}{\partial a_j} \delta a_j = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Theta_1}{\partial a_j} \delta a_j = 0.$$

Изъ этой системы линейныхъ относительно  $\delta z_i, \delta u_i, \delta \xi_1$  уравненій получаемъ

$$\begin{aligned} \delta z_i &= \frac{\frac{\partial F_i}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial(\Theta_1, \Psi_i)}{\partial(\xi_1, a_j)} \delta a_j}{\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial(F_i, \Psi_i)}{\partial(z_i, u_i)}} = \\ &= \sum_{j=1}^{j=k} Q_j(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) \delta a_j, \end{aligned}$$

гдѣ  $Q(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k)$  рациональная функция  $z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Подставляя это выражение вмѣсто  $\delta z_i$  въ выражение (8), получаемъ:

$$\begin{aligned} \delta J &= \sum_{j=1}^{j=k} \sum_{i=1}^{i=r} Q_j(z_i, u_i, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) R(z_i, u_i) \delta a_j, \\ \delta J &= \sum_{j=1}^{j=k} P_j(z_1, z_2, \dots, z_r, u_1, u_2, \dots, u_r, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) \delta a_j, \end{aligned}$$

гдѣ  $P_j$  рациональная функция  $z_1, z_2, \dots, z_r, u_1, u_2, \dots, u_r, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k$  и кромѣ того симметрическая функция паръ  $(z_1, u_1), (z_2, u_2), \dots, (z_r, u_r)$ . Вслѣдствіе предполагаемой неприводимости уравненіе (5), а слѣдовательно и (3), кратныхъ корней не имѣютъ, а потому

$$u_i = \omega(z_i, a_1, a_2, \dots, a_k), \quad (9)$$

гдѣ  $\omega$  рациональная функция  $z_i, a_1, a_2, \dots, a_k$ , общая для всѣхъ значеній значка  $i$ .

Подставляя это выраженіе  $u_i$  въ функцию  $P_j$ , мы приводимъ эту функцию къ симметрической функции только отъ  $z_1, z_2, \dots, z_r$ , рациональной относительно  $z_1, z_2, \dots, z_r, \xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k$ , а пользуясь уравненіемъ (7), приводимъ ее къ рациональной функции  $\xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k$ :

$$P_j(\xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Такимъ образомъ

$$\delta J = \sum_{j=1}^{j=k} P_j(\xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) \delta a_j.$$

Откуда, обозначая черезъ  $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_k^{(0)}$  частныя значенія  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и черезъ  $\xi_1^{(1)}$  значеніе  $\xi_1$  при  $a_1 = a_1^{(0)}$ , черезъ  $\xi_1^{(2)}$  значе-

ніе  $\xi_1$  при  $a_1 = a_1^{(0)}$  и при  $a_2 = a_2^{(0)}$  и т. д., через  $\xi_1^{(k-1)}$  значеніе  $\xi_1$  при  $a_1 = a_1^{(0)}, a_2 = a_2^{(0)}, \dots, a_{k-1} = a_{k-1}^{(0)}$ , получимъ:

$$\begin{aligned}
 J = & \int_{a_1^{(0)}}^{a_1} \Pi_1(\xi_1, a_1, a_2, \dots, a_k) da_1 + \int_{a_2^{(0)}}^{a_2} \Pi_2(\xi_1^{(1)}, a_1^{(0)}, a_2, \dots, a_k) da_2 + \\
 & + \int_{a_3^{(0)}}^{a_3} \Pi_3(\xi_1^{(2)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3, \dots, a_k) da_3 + \dots + \\
 & + \int_{a_k^{(0)}}^{a_k} \Pi_k(\xi_1^{(k-1)}, a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_{k-1}^{(0)}, a_k) da_k + C,
 \end{aligned} \tag{10}$$

гдѣ постоянная  $C$  функція  $(z_0, u_0)$ .

Такимъ образомъ сумма

$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz$$

не выражается вообще черезъ алгебраическія функціи и логариомы алгебраическихъ функцій параметровъ, но выражается черезъ сумму функцій отъ  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , изъ которыхъ каждая опредѣляется Абелевымъ интеграломъ

$$\int \Pi(\xi, a) da,$$

зависящимъ отъ уравненія  $s$ -ой относительно  $\xi$  степени, т. е. равной числу системъ импримитивности уравненія (3), опредѣляющаго значенія  $z$ , одной изъ координатъ точекъ пересѣченія кривыхъ (1) и (2).

Если корни уравненія (3) дѣлятся на двѣ системы импримитивности, т. е. уравненіе (6) второй степени относительно  $\xi$ , то въ лѣвую часть уравненія (10) будутъ входить только ультраэллиптическіе интегралы.

Если же уравненіе (6) первой степени, то получаемъ случай Абелевой теоремы, такъ какъ тогда  $\xi$  выражается рационально черезъ  $a$ .

**§ 2.** Оставляя въ сторонѣ этотъ слишкомъ общій случай, мы останавливаемся на частномъ, на нашъ взглядъ наиболѣе интересномъ.

Возьмемъ семейство кривыхъ, опредѣляемыхъ алгебраическими уравненіями:

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0, \quad (11)$$

степени  $n_1$  относительно  $(z, u)$ , и

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0, \quad (12)$$

степени  $n_2$  относительно  $\mu$ , при чемъ мы предполагаемъ, что во второмъ уравненіи  $\Theta(\lambda, \mu)$  не разлагается на множители, кривая опредѣляемая этимъ уравненіемъ не разлагается на кривыя нисшихъ порядковъ.

Исключая  $\mu$  изъ уравненій (11) и (12), получаемъ уравненіе  $n_1 n_2$ -ой степени:

$$\Phi(z, u, \lambda) = 0, \quad (13)$$

содержащее одинъ переменный параметръ  $\lambda$ .

Исключая  $u$  изъ уравненій (1) и (13), получаемъ уравненіе  $m n_1 n_2$ -ой степени:

$$\Omega(z, \lambda) = 0. \quad (14)$$

Можно доказать, что это уравненіе въ томъ случаѣ, когда для точекъ пересѣченія кривыхъ (1) и (13) одновременно не обращаются въ нуль функціи  $\varphi(z, u)$ ,  $\psi(z, u)$ ,  $\chi(z, u)$ , уравненіе импримитивное, какъ уравненіе (3), рассмотрѣнное въ § 1.

Замѣтимъ прежде всего, что уравненіе (14) можно получить такимъ образомъ.

Составляемъ произведеніе функцій

$$\begin{aligned} & [\varphi(z, u^{(1)}) + \lambda\psi(z, u^{(1)}) + \mu\chi(z, u^{(1)})], \\ & [\varphi(z, u^{(2)}) + \lambda\psi(z, u^{(2)}) + \mu\chi(z, u^{(2)})], \\ & \dots \dots \dots \\ & [\varphi(z, u^{(m)}) + \lambda\psi(z, u^{(m)}) + \mu\chi(z, u^{(m)})], \end{aligned}$$

гдѣ  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$  различныя значенія  $u$ , опредѣляемыя уравненіемъ (1). Произведеніе это

$$\prod_{i=1}^{i=m} [\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})],$$

будучи функціей симметрической относительно  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}$ , будетъ равно рациональной функціи  $z, \lambda, \mu$ , которую означимъ черезъ  $\Psi(z, \lambda, \mu)$ .

Такимъ образомъ для точекъ пересѣченія мы будемъ имѣть:

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = 0. \quad (15)$$

Намъ остается только исключить  $\mu$  при помощи уравненія

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0. \quad (12)$$

Теперь докажемъ, что при сдѣланномъ предположеніи относительно функций  $\varphi(z, u)$ ,  $\psi(z, u)$ ,  $\chi(z, u)$  уравненіе (15) будетъ неприводимо въ области  $(\lambda, \mu)$ .

Предположимъ, что имѣетъ мѣсто противное, что для всѣхъ значеній  $\gamma, \mu$

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z, \lambda, \mu) \Psi_2(z, \lambda, \mu) \dots \Psi_k(z, \lambda, \mu).$$

Замѣтимъ, что неприводимые множители  $\Psi(z, \lambda, \mu)$  функции цѣлыя относительно  $z, \lambda, \mu$ , можно считать тоже цѣлыми функциями  $\lambda, \mu$ , ибо въ противномъ случаѣ, приводя въ нихъ всѣ коэффициенты при степеняхъ  $z$  къ одному знаменателю, имѣли бы:

$$\Psi(z, \lambda, \mu) = \frac{\Psi_1(z, \lambda, \mu) \Psi_2(z, \lambda, \mu) \dots \Psi_k(z, \lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)},$$

откуда  $f(\lambda, \mu) = \text{постоянному}$ .

Разсматриваемая, какъ функция цѣлая  $\lambda, \mu$ ,  $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$  должна или вовсе не содержать  $\lambda, \mu$ , или дѣлиться на одинъ изъ множителей,

$$\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})$$

функции  $\Psi(z, \lambda, \mu)$ .

Исключая пока первый случай, когда

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z), \quad (16)$$

т. е. функция  $\Psi(z, \lambda, \mu)$  содержитъ множитель независящій отъ  $\lambda, \mu$ , мы должны представить  $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$  въ слѣдующей формѣ:

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) \prod_{i=1}^{i=l} [\varphi(z, u^{(i)}) + \lambda\psi(z, u^{(i)}) + \mu\chi(z, u^{(i)})].$$

Можно доказать, что  $l = m$ .

Положимъ  $l < m$ . Обозначая коэффициентъ при  $\lambda^\alpha \mu^\beta$  по разложеніи произведенія въ правой части черезъ  $\eta_{\alpha\beta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)})$ , а черезъ  $\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)})$  коэффициентъ при  $\lambda^\gamma \mu^\delta$ , замѣтимъ, что функции

$$\eta_{\alpha\beta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}) \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}),$$

$$\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}) \omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}),$$

какъ равныя коэффициентамъ при  $\lambda^\alpha \mu^\lambda$  и  $\lambda^\gamma \mu^\delta$  въ  $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ , должны приводиться къ функции отъ  $z$ , и тоже относится къ ихъ частному:

$$\frac{\eta_{\alpha\lambda}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)})}{\eta_{\gamma\delta}(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)})} = \eta(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}).$$

Но при неприводимости уравненія (1) это можетъ быть лишь въ томъ случаѣ, когда въ  $\eta$  входятъ не только  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}$ , но и  $u^{(l+1)}, \dots, u^{(m)}$ , т. е. когда  $l = m$ , противно предположенію.

Если же  $l = m$ , то  $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$  дѣлится на  $\Psi(z, \lambda, \mu)$ ; тогда имѣемъ

$$\omega_1(z, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k)}) = 1,$$

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi(z, \lambda, \mu),$$

и уравненіе (15) противно допущенію неприводимо.

Остается только рассмотретьъ случай, исключенный нами, когда

$$\Psi_1(z, \lambda, \mu) = \Psi_1(z), \quad (16)$$

т. е. когда уравненіе (15) имѣетъ корни, независящіе отъ  $\lambda, \mu$ . Но тогда существуютъ такія значенія  $z, u$ , которыя, удовлетворяя уравненію (1), удовлетворяютъ вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ  $\lambda, \mu$ , или удовлетворяютъ одновременно тремъ уравненіямъ:

$$\varphi(z, u) = 0,$$

$$\psi(z, u) = 0, \quad (17)$$

$$\chi(z, u) = 0.$$

Можно еще сказать: точки пересѣченія кривыхъ (1) и (13) тогда совпадаютъ съ общими тремъ кривымъ (17) точками, если таковыя у нихъ существуютъ.

Такимъ образомъ, если соблюдено вышеизложенное условіе, то уравненіе

$$\Omega(z, \lambda) = 0 \quad (14)$$

импримитивно, и притомъ число системъ импримитивности равно степени уравненія (12) относительно  $\mu$ , число же корней въ каждой системѣ равно степени  $\Psi(z, \lambda, \mu)$  относительно  $z$ , т.  $mn_1 = r$ . Согласно съ вышедоказаннымъ въ § 1 сумма



$$J = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz$$

выражается через одинъ Абелевъ интегралъ

$$\int \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda,$$

если  $\mu = \mu_1$  тотъ корень уравненія (12), которому соотвѣтствуютъ корни

$$z_1, z_2, \dots, z_{n_1 m},$$

которыя, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненію

$$\Psi(z, \lambda, \mu_1) = 0.$$

Такимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz = \int \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda + C, \quad (18)$$

гдѣ  $C$  независитъ отъ  $z_i, u_i$ , а только отъ  $z_0, u_0$ . Обозначая лѣвую часть этого равенства черезъ  $J[z_i, u_i]$  и полагая, что для  $\lambda = \lambda'$

$$z_1 = z'_1, z_2 = z'_2, \dots, z_r = z'_r; \quad u_1 = u'_1, u_2 = u'_2, \dots, u_r = u'_r,$$

для  $\lambda = \lambda''$

$$z_1 = z''_1, z_2 = z''_2, \dots, z_r = z''_r; \quad u_1 = u''_1, u_2 = u''_2, \dots, u_r = u''_r,$$

а слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz = J[z''_i, u''_i] - J[z'_i, u'_i],$$

выводимъ изъ равенства (18), что

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda. \quad (19)$$

Интегралъ  $\int \Pi(\lambda, \mu) d\lambda$  относится къ кривой  $\Theta(\lambda, \mu) = 0$ , которую мы можемъ задавать произвольно съ однимъ условіемъ, чтобы эта кривая не разлагалась на кривыя нисшаго порядка. Въ случаѣ, если это уравненіе первой степени относительно  $\mu$  и  $\lambda$ :

$$\alpha\lambda + \beta\mu = \gamma,$$

то уравнение

$$\Phi(z, u, \lambda) = 0 \quad (13)$$

будетъ типа

$$\Phi_1(z, u) + \lambda \Phi_2(z, u) = 0$$

т. е. уравненіемъ пучка кривыхъ, и теорема даетъ извѣстный случай Абелевой теоремы \*).

Сумма  $J$  будетъ выражаться черезъ алгебраическія функціи параметра  $\lambda$  и логариёмы алгебраическихъ функцій, а слѣдовательно и черезъ алгебраическія и логариёмы алгебраическихъ функцій  $(z_1, u_1)$ ,  $(z_2, u_2)$ ,  $\dots$ ,  $(z_r, u_r)$  и въ томъ случаѣ, когда уравненіе (12) будетъ такое:

$$\alpha \lambda^2 + 2\beta \lambda \mu + \gamma \mu^2 + \delta \lambda + \varepsilon \mu + \zeta = 0.$$

Когда же уравненіе (12) будетъ четвертой степени относительно  $\lambda$  и второй относительно  $\mu$ , наприимѣръ

$$\mu^2 = (1 - \lambda^2)(1 - k^2 \lambda^2), \quad (20)$$

то получаемъ выраженіе суммы Абелевыхъ интеграловъ черезъ одинъ эллиптическій интеграль.

Мы могли бы воспроизвести все доказательство § 1, примѣняясь къ изслѣдуемому частному случаю, при которомъ должны были бы выразить  $\delta z_i$  въ функціи  $z_i, u_i, \lambda, \mu$  и  $\delta \lambda$  изъ уравненій:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_i &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_i} \delta u_i + \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial u_i} \delta u_i \right) \lambda + \\ &+ \left( \frac{\partial \chi_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial \chi_i}{\partial u_i} \delta u_i \right) \mu_1 + \psi_i \delta \lambda + \chi_i \delta \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\delta F_i = \frac{\partial F_i}{\partial z_i} \delta z_i + \frac{\partial F_i}{\partial u_i} \delta u_i = 0$$

$$\delta \Theta_1 = \frac{\partial \Theta_1}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial \Theta_1}{\partial \mu_1} \delta \mu_1 = 0.$$

Откуда

$$\delta z_i = \frac{\left( \psi_i \frac{\partial \Theta_1}{\partial \mu_1} - \chi_i \frac{\partial \Theta_1}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial F_i}{\partial u_i}}{\Delta_i \frac{\partial \Theta_1}{\partial \mu_1}} \delta \lambda,$$

\*) Appell et Goursat. p. 418.

гдѣ

$$\Delta(z_i, u_i) = \frac{\partial(F_i, \varphi_i)}{\partial(z_i, u_i)} + \frac{\partial(F_i, \psi_i)}{\partial(z_i, u_i)} \lambda + \frac{\partial(F_i, \chi_i)}{\partial(z_i, u_i)} \mu_1.$$

Функция, обозначенная въ § 1 черезъ  $P_j$ , въ настоящемъ случаѣ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$P_j(z_i, u_i, \lambda, \mu_1) = \frac{\frac{\partial\Theta(\lambda, \mu_1)}{\partial\mu_1} \sum_{i=1}^{i=r} \frac{R(z_i, u_i) \psi(z_i, u_i)}{\Delta(z_i, u_i)} - \frac{\partial\Theta(\lambda, \mu_1)}{\partial\lambda} \sum_{i=1}^{i=r} \frac{R(z_i, u_i) \chi(z_i, u_i)}{\Delta(z_i, u_i)}}{\frac{\partial\Theta(\lambda, \mu_1)}{\partial\mu_1} \cdot \frac{\partial F(z_i, u_i)}{\partial u_i}}.$$

§ 3. Если Абелевъ интеграль

$$J = \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz$$

перваго рода, т. е. конеченъ при всякомъ положеніи точекъ  $(z''_i, u''_i)$ , то интеграль во второй части равенства (19) будетъ тоже перваго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ обратное, что интеграль

$$\int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda$$

обращается въ безконечность при  $\lambda'' = \lambda^{(0)}$ , мы должны предположить, что при этомъ значеніи  $\lambda$  одинъ изъ интеграловъ лѣвой части уравненія (19) тоже обращается въ безконечность, что противно условію.

Если возьмемъ случай уравненія (20), получимъ, что

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz = A \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} \quad (21)$$

гдѣ  $A$  постоянное,

$$(z'_1, u'_1), (z'_2, u'_2), \dots, (z'_i, u'_i)$$

удовлетворяютъ уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda' \psi(z, u) + \chi(z, u) \sqrt{(1-\lambda'^2)(1-k^2\lambda'^2)} = 0,$$

$$(z''_1, u''_1), (z''_2, u''_2), \dots, (z''_i, u''_i)$$

уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda'' \psi(z, u) + \chi(z, u) \sqrt{(1-\lambda''^2)(-k^2\lambda''^2)} = 0.$$

Возьмемъ для интеграла перваго рода обычную для него форму:

$$\int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz = \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} \frac{Q(z, u)}{F'_u(z, u)} dz$$

$$\int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{N(\lambda, \mu_1)}{\Theta'_{\mu_1}(\lambda, \mu_1)} d\lambda$$

гдѣ  $Q(z, u)$  цѣлая функція  $m$ -3-ей степени отъ  $z, u$ ,  $N(\lambda, \mu_1)$  цѣлая функція  $n_2$  — 3-ой степени отъ  $\lambda, \mu$ .

Равенство (19) для этого случая напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=r} \int_{(z'_i, u'_i)}^{(z''_i, u''_i)} \frac{Q(z, u)}{F'_u(z, u)} dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{N(\lambda, \mu_1)}{\Theta'_{\mu_1}(\lambda, \mu_1)} d\lambda. \quad (22)$$

§ 4. Мы сдѣлаемъ еще одно очень важное замѣчаніе, касающееся условія неприводимости уравненія (5) въ § 1 и (14) въ § 2.

Въ нашихъ разсужденіяхъ мы вездѣ предполагали, что уравненіе

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (5)$$

а слѣдовательно и

$$\Omega(z, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (3)$$

неприводимы, т. е.  $\Omega$  не разлагается на множители  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$  рациональные относительно  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Но существуетъ одинъ случай, когда не смотря на приводимость  $\Psi$  и  $\Omega$  теорема § 1 имѣеть мѣсто. Это тотъ случай, когда  $\Psi$  разлагается на множитель  $\Psi_1(z)$  независимый отъ  $\xi, a_1, a_2, \dots, a_k$  и другой неприводимый множитель  $\Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k)$ , такъ что

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k) = \Psi_1(z) \Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k). \quad (23)$$

Тогда къ уравненію

$$\Psi_2(z, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0 \quad (24)$$

мы можемъ приложить всѣ разсужденія, которыя прилагались къ

$$\Psi(z, \xi, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0, \quad (5)$$

такъ какъ: во первыхъ корни уравненія (24) удовлетворяютъ импримитивному уравненію

$$\frac{\Omega(z, a_1, a_2, \dots, a_k)}{\Psi_1(z)} = \Omega_1(z, a_1, a_2, \dots, a_k) = 0; \quad (25)$$

во вторыхъ, такъ какъ это уравненіе неприводимо, ни одинъ изъ корней его не будетъ кратнымъ, и  $u_1, u_2, \dots, u_q$ , соответствующіе корнямъ  $z_1, z_2, \dots, z_q$  уравненія (25), выразятся рационально (9) въ послѣднихъ; а на этихъ пунктахъ и основывается все доказательство § 1.

Такимъ образомъ и къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz$$

примѣнима теорема § 1.

Но такъ какъ корни уравненія

$$\Psi_1(z) = 0$$

не зависятъ отъ  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то прибавленіе къ суммѣ

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz = \int \Pi(\lambda, \mu) d\lambda + C \quad (26)$$

суммы

$$\sum_{i=q+1}^{i=r} \int_{(z_0, u_0)}^{(z_i, u_i)} R(z, u) dz$$

гдѣ  $z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_r$  корни уравненія  $\psi_1(z) = 0$ , равносильно прибавленію къ правой части равенства (26) постояннаго, такъ что послѣднее имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда лѣвая часть уравненія (3) или (5) содержитъ множитель  $\Psi_1(z)$ .

Это же замѣчаніе относится и къ случаю кривой (13), т. е.  $\Psi(z, \lambda, \mu)$  можетъ содержать множитель независимый отъ  $\lambda, \mu$ , —  $\Psi_1(z)$ .

Но тогда, какъ мы выше въ § 2 показали, существуютъ точки пересѣченія двухъ кривыхъ (1) и (13), лежащія въ общихъ тремъ кривымъ

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z, u) &= 0 \\ \psi(z, u) &= 0 \\ \chi(z, u) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

точкахъ. Обратное, если существуютъ общія тремъ кривымъ (17) точки, и съ этими точками совпадаютъ нѣкоторыя точки пересѣченія кривыхъ (1) и (13), то  $\Psi(z, \lambda, \mu)$  содержитъ множитель  $\Psi_1(z)$ , независимый отъ  $\lambda, \mu$ . Въ самомъ дѣлѣ, тогда уравненія (1) и (13) имѣютъ общія рѣшенія независимыя отъ  $\lambda, \mu$ , и тоже относится къ  $\Psi(z, \lambda, \mu) = 0$ .

Замѣтимъ также, что въ лѣвой части равенства (19), представляющаго слѣдствіе (18), всѣ члены, относящіеся къ корнямъ уравненія  $\Psi_1(z)$  равны нулю, и оно можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u) dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu) d\lambda + \sum_{i=1}^{i=q} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u) dz. \quad (27)$$

§ 5. Предположимъ, что уравненіе

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0 \quad (12)$$

таково, что при

$$\lambda = 0 \quad \mu_1 = 0 \quad (28)$$

такъ, что при  $\lambda = 0$

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu_1\chi(z, u) = \varphi(z, u),$$

и затѣмъ предположимъ, что функціи  $\varphi(z, u)$ ,  $\psi(z, u)$ ,  $\chi(z, u)$   $n_1 = m - 2$ -ой степени.

Мы можемъ, какъ извѣстно опредѣлить коэффициенты функціи  $\varphi(z, u)$  такъ, что она будетъ имѣть  $m_1 - p$  \*) напередъ заданныхъ нулей [или точекъ пересѣченія кривыхъ  $F(z, u) = 0$  и  $\varphi(z, u) = 0$ ], если въ число ихъ включить всѣ двойныя точки кривой (1) числомъ  $\delta$ . Остальныя  $p$  нулей опредѣлятся, какъ и коэффициенты, въ видѣ алгебраическихъ функцій ихъ.

При  $m \geq 3$ , что мы будемъ всегда, конечно, предполагать, всѣ нули раздѣлимъ на 4 группы:

I) Произвольно заданныя точки:  $(z''_1, u''_1), (z''_2, u''_2), \dots, (z''_{p+1}, u''_{p+1})$ , число которыхъ  $p + 1$ .

II) Другія  $m - 3$  произвольно заданныя точки.

III)  $\delta$  двойныхъ точекъ  $F(z, u)$ , считаемыя за  $2\delta$  точекъ пересѣченія.

IV)  $p$  опредѣляемыхъ предыдущими нулей.

Коэффициенты же  $\psi(z, u)$  и  $\chi(z, u)$  мы можемъ опредѣлить такъ, чтобы какъ  $\psi(z, u)$ , такъ и  $\chi(z, u)$  имѣли нули общія съ  $\varphi(z, u)$ , именно принадлежащія IV, III и II группамъ, значить числомъ  $m_1 - p - 1$ ; мы можемъ слѣдовательно произвольно задать еще одинъ нуль и въ  $\psi(z, u)$  и  $\chi(z, u)$ ; такимъ образомъ остается еще по переменному параметру; имъ дадимъ опредѣленные частныя значенія. Два параметра  $\lambda, \mu$  въ функціи

\*) гдѣ  $p$  родъ кривой (Geschlecht, Rang).

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u), \quad (29)$$

въ силу уравненія § 2, сводятся къ одному параметру  $\lambda$ ; эта функція тоже имѣеть  $m_1 - p - 1$ , общихъ съ  $\varphi(z, u)$  нулей, именно, II, III и IV группы.

Параметромъ  $\lambda$  распорядимся такъ, чтобы функція (29) имѣла бы еще одинъ произвольно нами задаваемый нуль  $(z_0, u_0)$ .

Пусть это значеніе  $\lambda$  есть  $\lambda = \lambda'$ .

Всѣ точки пересѣченія послѣднихъ трехъ группъ, какъ общія уравненію

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu\chi(z, u) = 0$$

при всѣхъ значеніяхъ  $\lambda, \mu$  и, слѣдовательно, опредѣляемыя уравненіемъ

$$\Psi_1(z) = 0,$$

не входятъ ни въ лѣвую, ни въ правую часть равенства (27), и кромѣ того одинъ изъ интеграловъ правой части, соотвѣтствующій точкѣ пересѣченія:

$$z'_i = z_0, \quad u'_i = u_0,$$

равенъ нулю.

Итакъ мы имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u) dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(0, 0)} \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u) dz.$$

Возьмемъ теперь общій случай кривой

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

когда для

$$\lambda = \lambda''$$

$$\mu_1 = \mu''.$$

Такую кривую мы можемъ всегда преобразовать къ рассмотрѣнному типу, положивъ:

$$L = \lambda - \lambda'',$$

$$M = \mu_1 - \mu''.$$

Пусть уравненіе (12) преобразуется тогда въ слѣдующее

$$T(L, M) = 0;$$

$$\Pi(\lambda, \mu) = \Pi(L, M),$$

$$\varphi(z, u) + \lambda\psi(z, u) + \mu_1\chi(z, u) = \Phi(z, u) + L\psi(z, u) + M\chi(z, u),$$

гдѣ

$$\varphi(z, u) + \lambda'' \psi(z, u) + \mu'' \chi(z, u) = \Phi(z, u).$$

Тогда мы можемъ написать, что

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz = \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \Pi(\lambda, \mu_1) d\lambda + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u) dz. \quad (30)$$

Отсюда получаемъ, что сумма  $p + 1$  значений Абелева интеграла  $J(z_i, u_i)$  сводится при помощи Абелева интеграла, относящагося къ произвольно-заданной кривой

$$\Theta(\lambda, \mu) = 0,$$

къ числу  $p$  значений того же интеграла.

Причемъ какъ предѣлы упомянутаго Абелева интеграла, такъ и значения  $(z_i, u_i)$  для  $p$  интеграловъ, къ которымъ сводится  $p + 1$  заданныхъ, алгебраическія функціи отъ значений  $z_i, u_i$  для этихъ послѣднихъ.

Теорема о сведеніи  $p + 1$  интеграловъ къ  $p$  интеграламъ при помощи алгебраическихъ функцій и логарифмовъ является частнымъ случаемъ этой теоремы.

Для случая уравненія (20) и случая интеграловъ перваго рода имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{(z_0, u_0)}^{(z''_i, u''_i)} R(z, u) dz = A \int_{(\lambda', \mu')}^{(\lambda'', \mu'')} \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}} + \sum_{i=1}^{i=p} \int_{(z_0, u_0)}^{(z'_i, u'_i)} R(z, u) dz. \quad (31)$$