Sur la formule de Stokes.

Par M. A. Tikhomandritzky.

On peut obtenir la formule de Stokes d'une manière plus simple que celle que l'on trouve dans le Traité d'Analyse de M-r E. Picard, t. I-er, p. 117 (1-ère ed.), qui d'ailleurs rèste la même quelque soit le nombre n des variables indépendantes.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, ayant les dérivées partielles par rapport à ces variables; après avoir exprimé ces dernières en fonctions d'une variable indépendante t et d'un paramètre α, fonctions qui aient des dérivées par rapport à t et à α, considérons l'intégrale:

$$u = \int \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial t} dt, \tag{1}$$

qui sera ainsi prise dans l'éspace à n dimensions le long d'une courbe:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n)} \tag{2}$$

à partir du point fixe $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, corréspondant à la valeur $t = t_0$, jusqu' à l'autre point fixe $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, corréspondant à la valeur $t = t_1$. Les coordonnées des deux points limites nous considérons donc indépendantes du paramètre, toutes les courbes de la famille (2) passant par ces deux points; mais la courbe de l'intégration variant avec la valeur de ce paramètre, l'intégrale u sera en général une fonction de α; en la différentiant par rapport à α, nous aurons:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha} \frac{\partial x_i}{\partial t} dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial t} dt; \tag{3}$$

l'intégration par parties appliquée au dernier terme, vu de l'indépendance de α des valeurs des $\overset{n}{\underset{1}{x_i}}$ aux limites de l'intégrale, nous donne:

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial\alpha\partial t}\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\, dt;$$

en portant ce résultat dans l'égalité (3), en la multipliant ci-après par $d\alpha$ et en intégrant de $\alpha = \alpha_0$ à $\alpha = \alpha_1$, nous aurons:

$$(5) \qquad u_1 - u_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right) dt\, d\alpha,$$

ou, en désignant par $\sum\limits_{i,j=1}^{n}{}'$ la somme étendue à toutes les combinaisons deux à deux des valeurs des indices i et j de 1 à n:

$$(6) \qquad u_1 - u_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=1}^{n}{}' \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right) dt\, d\alpha.$$

Mais d'une part on a d'après (1):

$$(7) \; u_1 - u_0 = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha_1) \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt - \int_{t_0}^{t_1} (\alpha_0) \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\, dt = -\int_{(L)} \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i,$$

en désignant par L la courbe, composée de la courbe

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha_0), \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

allant du point corréspondant à $t = t_0$ à celui qui corréspond à $t = t_1$, et de l'autre courbe

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha_1), \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

allant du dernier point au premier;—de l'autre part nous avons par la formule connue pour la transformation des variables dans les intégrales doubles:

$$(8) \qquad dx_i dx_j = \left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right) dt\, d\alpha;$$

en vertu de (7) et de (8) l'équation (6) prend la forme:

$$-\int_{(L)} \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \iint_{(S)} \sum_{i,j=1}^{n}{}' \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j, \tag{9}$$

en désignant par S la surface balayée par la courbe (2), lorsque le paramètre α varie d'une manière continue de $\alpha = \alpha_0$, à $\alpha = \alpha_1$, et qui a ainsi pour son contour la courbe L.

Mais c'est justement la formule de Stokes.

(Lu à la séance de 23 décembre 1901 de la section des mathématiques pures et appliquées du XI-me Congrès des naturalistes et des médécins russes.)