Къ теоріи дисперсіи: случай многихъ полосъ поглощенія.

А. П. Грузинцева.

Въ электромагнитной теоріи дисперсіи Гельмгольца, изложенной нами съ нѣкоторыми дополненіями въ статьѣ *) „Электромагнитная теорія проводниковъ", разсматривается простѣйшій случай, когда средина заключаетъ въ себѣ одинъ родъ матеріальныхъ іонъ, поляризующихся подъ вліяніемъ электрическихъ силъ; въ настоящей статьѣ мы разсмотримъ случай, когда въ тѣлѣ существуютъ молекюли нѣсколькихъ родовъ, т. е. когда тѣло даетъ спектръ со многими полосами поглощенія и покажемъ, что общія уравненія сохранятъ свой прежній видъ: измѣнится лишь значеніе нѣкоторыхъ коэффиціентовъ.

Пусть въ разсматриваемомъ тѣлѣ находится n различныхъ *іонъ*, т. е. n различнаго рода молекюлей. Обозначимъ количества, относящіяся къ i-ой изъ нихъ, прежними буквами, какъ въ упомянутой нашей работѣ, съ указателемъ i внизу; поэтому, электрическая энергія средины представится въ видѣ: (вмѣсто фор. (1) ст. 22):

$$U=\int\left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)-\frac{4\pi}{K}\sum_1^n(ff_i+gg_i+hh_i)+\right.$$

$$\left.+2\pi\sum_1^n\frac{1}{K_i}(f_i^2+g_i^2+h_i^2)\right]d\tau\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

энергія-же токовъ перемѣщенія въ видѣ [вмѣсто фор. (3) стр. 24):

$$W=A\int\left[F\frac{d(f+\sum f_i)}{dt}+G\frac{d(g+\sum g_i)}{dt}+H\frac{d(h+\sum h_i)}{dt}\right]d\tau \quad . \quad . \quad (b)$$

---

*) Записки Императорскаго Харьковскаго университета, кн. 4, 1899 г.

Работа *диссипативныхъ силъ* будетъ, если обозначимъ R работу токовъ проводимости (стр. 25):

$$\sum P_a p_a = -\frac{1}{2}\sum_1^n \int m_i \left[\left(\frac{df_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh_i}{dt}\right)^2\right] d\tau +$$

$$+\sum_1^n \int [r_1 f_i + r_2 g_i + r_3 h_i]\, d\tau + R,$$

гдѣ положено:

$$r_1 = k_{1i}\frac{df_i}{dt}, \quad r_2 = k_{2i}\frac{dg_i}{dt}, \quad r_3 = k_{3i}\frac{dh_i}{dt}. \quad \dots\dots \quad (c)$$

Поэтому, вмѣсто уравненій (I) § 25, (II) § 26 и (III) § 27, будемъ имѣть:

$$\frac{4\pi}{K}\left(f - \sum_1^n f_i\right) - A\frac{dF}{dt} + P_0 = 0 \quad \text{и т. п.} \dots\dots (d)$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + A\frac{d(f + \sum f_i)}{dt} + Ap = 0 \quad \text{и т. п.} \dots (e)$$

$$4\pi\left(\frac{f_i}{K_i} - \frac{f}{K}\right) - A\frac{dF}{dt} + m_i\frac{d^2 f_i}{dt^2} + r_1 = 0. \quad \text{и т. п.} \dots (f)$$

Изъ (d) и (f) черезъ исключеніе F, G, H находимъ:

$$m_i\frac{d^2 f_i}{dt^2} + k_i\frac{df_i}{dt} + \frac{4\pi}{K_i}f_i + \frac{4\pi}{K}\sum_1^n f_i - \frac{8\pi}{K}f = 0 \quad \text{и т. п.} \dots (h)$$

принимая, что $P_0 = Q_0 = R_0 = 0$.

Для магнитной силы получимъ [вм. (2) стр. 33] уравненія:

$$A\mu\frac{d\alpha}{dt} = \frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial}{\partial y}(h - \sum h_i) - \frac{\partial}{\partial z}(g - \sum g_i)\right] \quad \text{и т. п.} \dots (k)$$

Опредѣлимъ прежде всего связь между f, g, h съ одной стороны и f_i, g_i, h_i съ другой.

Пусть, какъ и прежде:

$$f = Me^{\varrho}, \quad g = Ne^{\varrho}, \quad h = Pe^{\varrho},$$

и

$$f_i = u_i f; \quad g_i = u_i g, \quad h_i = u_i h, \quad \dots\dots\dots (l)$$

тогда уравненія (h) дадутъ по подстановкѣ:

$$\left[-m_i p^2+k_i p\sqrt{-1}+\frac{4\pi}{K_i}\right]u_i-\frac{8\pi}{K}+\frac{4\pi}{K}\sum_1^n u_i=0.$$

или, если положимъ:

$$-\frac{m_i K}{8\pi}p^2+\frac{K}{2K_i}+\frac{Kk_i}{8\pi}p\sqrt{-1}=A_i-\frac{1}{2}, \qquad (i=1,2,3\ldots n)$$

то получимъ:

$$(2A_i-1)\,u_i=2-\sum_1^n u_i \ldots\ldots\ldots (n)$$

Примѣнимъ это уравненіе къ u_1; получимъ:

$$(2A_1-1)\,u_1=2-\sum_1^n u_i,$$

а сравнивая съ тѣмъ же уравненіемъ (n), найдемъ:

$$u_i=\frac{2A_1-1}{2A_i-1}u_1 \ldots\ldots\ldots (p)$$

Полагая здѣсь $i=2,\ 3,\ldots n$, мы выразимъ всѣ u_i въ функціи u_1.
Отсюда находимъ:

$$\sum_1^n u_i=(2A_1-1)u_1\sum_1^n\frac{1}{2A_i-1} \ldots\ldots\ldots (q)$$

Но:

$$(2A_1-1)\,u_1=2-\sum_1^n u_i,$$

подставляя значеніе $\sum u_i$ изъ (q), получимъ:

$$(2A_1-1)\,u_1=2-u_1(2A_1-1)\sum_1^n\frac{1}{2A_i-1},$$

откуда:

$$u_1=\frac{2}{(2A_1-1)\left[1+\sum\limits_1^n\frac{1}{2A_i-1}\right]}.$$

Пусть

$$1+\sum_{1}^{n}\frac{1}{2A_i-1}=\frac{2}{S}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (r)$$

тогда:

$$u_1=\frac{S}{2A_1-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и по равенству (p):

$$\left.\begin{aligned} u_2&=\frac{S}{2A_2-1} \\ &\cdots\cdots \\ u_n&=\frac{S}{2A_n-1}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Сложивъ (1) и (2), найдемъ:

$$\sum_{1}^{n}u_i=S\sum_{1}^{n}\frac{1}{2A_i-1}=S\left(\frac{2}{S}-1\right),$$

т. е.

$$\sum_{1}^{n}u_i=2-S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

или при помощи (r):

$$\sum_{1}^{n}u_i=2-\frac{2}{1+\sum_{1}^{n}\frac{1}{2A_i-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Здѣсь:

$$2A_i-1=\frac{K}{K_i}-\frac{m_iK}{4\pi}p^2+\frac{k_iK}{4\pi}p\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots (5)$$

или, если положимъ:

$$\frac{K}{K_i}=\eta_i, \quad \frac{m_iK}{4\pi}=a_i', \quad \frac{k_iK}{4\pi}=b_i' \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$2A_i=1+\eta_i-a_i'p^2+b_i'p\sqrt{-1} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Теперь уравненія (k) напишутся въ видѣ:

$$A\mu\frac{d\alpha}{dt}=\frac{4\pi(1-u)}{K}\left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad \text{и т. д.} \quad \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

гдѣ положили:

$$u = \sum_1^n u_i = 2 - S. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Уравненія-же (e) будутъ:

$$4\pi A(1+u)\frac{df}{dt} + 4\pi A p = \frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}. \quad \text{и т. п.} \ldots \text{(III)}$$

Опредѣлимъ теперь составляющія тока проводимости: p, q и r. Имѣемъ согласно опредѣленію (стр. 36, § 33):

$$p_1 = C(P - \sum_1^n P_i) = C\left(\frac{4\pi}{K}f - \sum_1^n \frac{4\pi u_i}{K_i} f\right),$$

т. е.

$$p_1 = \frac{4\pi C}{K} f\left(1 - \sum_1^n \frac{K u_i}{K_i}\right) = \frac{4\pi C}{K}\left(1 - \sum_1^n u_i \eta_i\right) f. \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Точно также найдемъ для токовъ переноса:

$$p_i = \frac{4\pi C_i}{K_i} f_i = \frac{4\pi C_i u_i}{K_i} f$$

и, слѣдовательно:

$$p_2 = \frac{4\pi C}{K} f \cdot \sum_1^n \frac{K C_i u_i}{K_i C} = \frac{4\pi C}{K} f \sum_1^n \delta_i u_i \quad \ldots\ldots (\beta)$$

гдѣ положено:

$$\delta_i = \frac{K}{K_i} \cdot \frac{C_i}{C} = \eta_i \frac{C_i}{C}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

И такъ, окончательно получимъ:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{4\pi C}{K}\left(1 + \sum_1^n (\delta_i - \eta_i) u_i\right) \cdot f$$

или

$$p = \frac{4\pi C}{K}\left(1 + \sum_1^n \gamma_i u_i\right) f, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

гдѣ:

$$\gamma_i = \delta_i - \eta_i = \left(\frac{C_i}{C} - 1\right)\eta_i \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (\varepsilon)$$

Положимъ теперь:

$$\sum_1^n u_i \eta_i = \eta \cdot u; \quad \sum_1^n \delta_i u_i = \delta \cdot u; \quad \sum_1^n \gamma_i u_i = \gamma \cdot u \quad . \, . \, . \, . \quad (\mathrm{IV})$$

откуда:

$$\gamma = \delta - \eta. \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (\mathrm{V})$$

Слѣдовательно, всѣ уравненія внутри средины имѣютъ прежній видъ.

Далѣе, первая система поверхностныхъ условій остается въ томъ-же видѣ и точно также вторая система пограничныхъ условій будетъ того-же вида, какъ и прежде.

Дѣйствительно, эти условія будутъ:

$$\left[P - \sum_1^n P_i'\right]_1 = \left[P - \sum_1^n P_i'\right]_2,$$

$$\left[Q - \sum_1^n Q_i'\right]_1 = \left[Q - \sum_1^n Q_i'\right]_2.$$

Но:

$$P_i' = \frac{4\pi}{K_i} f_i = \frac{4\pi u_i}{K_i} f,$$

слѣдовательно:

$$P - \sum_1^n P_i' = \frac{4\pi}{K} f - 4\pi f \sum \frac{u_i}{K_i} = \frac{4\pi}{K} f\left(1 - \sum_1^n u_i \eta_i\right) = \frac{4\pi}{K}(1 - u\eta) f.$$

Вся разница, слѣдовательно, въ томъ, что u опредѣляется уравненіемъ:

$$u = 2 - \frac{1}{1 - \sum\limits_1^n \frac{1}{2A_i - 1}}$$

или

$$\frac{1}{2}u = \frac{\sum\limits_1^n \frac{1}{2A_i - 1}}{1 + \sum\limits_1^n \frac{1}{2A_i - 1}} \quad \text{. . . . . (VI)}$$

Здѣсь:

$$2A_i - 1 = \eta_i - a'_i p^2 + b'_i p \sqrt{-1}$$

или

$$2A_i - 1 = \eta_i (1 - a_i p^2 + b_i p \sqrt{-1}) \quad \text{. . . . . . . } (\mu)$$

гдѣ положено:

$$a_i = \frac{a'_i}{\eta_i}, \quad b_i = \frac{b'_i}{\eta_i}$$

или

$$a_i = \frac{m_i K_i}{4\pi}, \quad b_i = \frac{k_i K_i}{4\pi} \quad \text{. . . . . } (\nu)$$

Показавъ аналитически, что все остается въ прежнемъ видѣ и для n родовъ іонъ, т. е. для n полосъ поглощенія средины, разсмотримъ физическій смыслъ полученныхъ результатовъ.

Въ выраженіяхъ для p_1, q_1, r_1 входитъ количество:

$$\sum_1^n \frac{K u_i}{K_i} = \sum_1^n \eta_i u_i .$$

Всегда возможно опредѣлить новое постоянное K_0 такъ, чтобы:

$$\sum_1^n \frac{u_i}{K_i} = \frac{\sum\limits_1^n u_i}{K_0} = \frac{u}{K_0} \quad \text{. . . . . } (a)$$

т. е. K_0 будетъ количество *среднее физически-эквивалентное* количествамъ K_i $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Въ такомъ случаѣ для количества

$$\eta = \frac{\sum_1^n u_i \eta_i}{u}$$

получимъ:

$$\eta = \frac{K}{u} \sum_1^n \frac{u_i}{K_i} = \frac{K}{K_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

какъ разъ прежнее выраженіе для случая одного рода іоновъ.

Затѣмъ имѣемъ:

$$u\delta = \sum_1^n \frac{KC_i u_i}{K_i C} = \frac{K}{C} \sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i},$$

и опять возможно опредѣлить количество C_0, какъ *среднее физически-эквивалентное* всѣмъ C_i $(i = 1 \, , \, 2 \, , \ldots n)$ по формулѣ:

$$\sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i} = C_0 \sum_1^n \frac{u_i}{K_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

слѣдовательно, при помощи (a) получаемъ:

$$\sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i} = \frac{C_0 u}{K_0},$$

и, значитъ:

$$\delta = \frac{C_0}{K_0} \cdot \frac{K}{C} = \eta \frac{C_0}{C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

Наконецъ, найдемъ:

$$\gamma = \left(\frac{C_0}{C} - 1\right) \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

Итакъ, всѣ соотношенія между коэффиціентами K_0, C_0, δ, η и γ остаются прежними.

Отсюда сдѣлаемъ общее заключеніе:

Если средина заключаетъ n различныхъ, діэлектрически-поляризующихся іоновъ, характеризуемыхъ молекулярными постоянными K_i и C_i $(i = 1 \, , \, 2 \, , \ldots n)$ или, другими словами, *спектръ средины имѣетъ n по-*

лось поглощенія, то мы можемъ замѣнить такую совокупность n іоновъ одним іономъ, физически имъ эквивалентнымъ и характеризуемымъ постоянными K_0 и C_0, опредѣляемыми изъ соотношеній:

$$\frac{1}{K_0} = \frac{\sum_1^n \frac{u_i}{K_i}}{\sum_1^n u_i}, \qquad C_0 = \frac{\sum_1^n \frac{C_i u_i}{K_i}}{\sum_1^n \frac{u_i}{K_i}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

Въ такомъ случаѣ всѣ формулы, полученныя нами для срединъ съ съ однимъ родомъ іонъ, примѣняются и къ срединамъ съ какимъ угодно числомъ іонъ:—причемъ соотношенія:

$$\eta = \frac{K}{K_0}, \quad \gamma = \left(\frac{C_0}{C} - 1\right)\eta, \quad \delta = \frac{C_0}{C}\eta \quad . \; . \; . \; . \quad (II)$$

сохраняются, но съ той только разницей, что K_0 и C_0 имѣютъ значеніе *эквивалентныхъ среднихъ* *) изъ всѣхъ значеній K_i и C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, относящихся къ различнымъ іонамъ и опредѣляемыхъ формулами (I).

Можно замѣтить относительно η слѣдующее.

Такъ какъ:

$$\eta = \frac{K \sum_1^n L_i u_i}{\sum_1^n u_i}, \qquad \text{гдѣ} \qquad L_i = \frac{1}{K_i}$$

и

$$0 < K_i < 1\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

то

$$\eta > K.$$

Точно также относительно K_0 можно замѣтить, что

$$0 < K_0 < 1. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (h)$$

---

*) Мы вводимъ терминъ *эквивалентное среднее* въ отличіе отъ *ариѳметическаго средняго n* данныхъ количествъ.

Дѣйствительно, K_0 не можетъ достигать значенія діэлектрической постоянной какой-нибудь средины, наименьшее-же значеніе $K=1$ (для воздуха или, лучше, пустоты); поэтому K_0 должно заключаться между 0 и 1.

Отсюда вытекаетъ одно важное слѣдствіе. Если средина заключаетъ чрезвычайно много различныхъ родовъ іонъ, т. е. обладаетъ спектромъ съ безчисленнымъ количествомъ полосъ поглощенія или другими словами, она поглощаетъ всѣ лучи, лежащіе между длинами волнъ λ_1 и λ_2, что это K_0 будетъ ариѳметическимъ среднимъ изъ всѣхъ K_i, т. е.

$$K_0 = 0,5.$$

Такой случай мы имѣемъ въ металлахъ.

Металлы *поглощаютъ* всѣ свѣтовые лучи отъ крайнихъ красныхъ ($\lambda_1 = 0^{\mu},7$, примѣрно, гдѣ $1^{\mu} = 0,001$ миллиметра) до крайнихъ фіолетовыхъ ($\lambda_2 = 0^{\mu},4$), поэтому для нихъ должны получить:

$$K_0 = 0,5.$$

Опытъ вполнѣ подтверждаетъ такое заключеніе *).

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что

$$1 < \eta < \infty.$$

для металловъ или вообще для срединъ, поглощающихъ сплошь лучи отъ λ_1 до λ_2, должны имѣть:

$$\eta = 2K.$$

Это тоже вполнѣ подтверждается опытомъ **).

Обратимся теперь къ дисперсіонной формулѣ.

Мы имѣли:

$$\frac{1}{2}u = \frac{\sum\limits_1^n \frac{1}{2A_i - 1}}{1 + \sum\limits_1^n \frac{1}{2A_i - 1}},$$

гдѣ

$$2A_i - 1 = \eta_i - a_i' p^2 + b_i' p \sqrt{-1}$$

*) Стр. 75 цитир. ст.

**) Стр. 74 и 78 цит. ст.

или

$$2A_i - 1 = \eta_i(1 - a_i p^2 = b_i p\sqrt{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Поэтому, подставивъ значеніе A_i, получимъ по приведеніи къ одному знаменателю

$$\sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1} = \frac{f_1(p^2) + pf_2(p^2)\sqrt{-1}}{\varphi_{2n}(p)},$$

$$1 + \sum_1^n \frac{1}{2A_i - 1} = \frac{F_1(p^2) + pF_2(p^2)\sqrt{-1}}{\varphi_{2n}(p)},$$

причемъ f_1 и F_2 суть цѣлыя раціональныя функціи отъ p^2 степени $n - 1$-ой съ дѣйствительными коэффиціентами; F_1 — степени n-ой, а f_2 степени $n - 2$-ой, функція-же $\varphi_{2n}(p)$ имѣетъ тоже видъ:

$$\varphi_{2n}(p) = \varphi_1(p^2) + p\varphi_2(p^2)\sqrt{-1},$$

причемъ φ_1 — n-ой степени, а φ_2 — $n - 1$-ой отъ p^2.

Отсюда находимъ, что

$$\frac{1}{2}n = \frac{f_1(p^2) + pf_2(p^2)\sqrt{-1}}{F_1(p^2) + pF_2(p^2)\sqrt{-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Дисперсіонная формула (§ 41, стр. 44) даетъ:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = \frac{1+u}{1-u}K\mu - \frac{1+\gamma u}{1-u}D\mu\sqrt{-1};$$

но:

$$1 + u = (1 - u) + 2u; \qquad 1 + \gamma u = (1 - u) + (\gamma + 1)u,$$

слѣдовательно:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = K\mu - D\mu\sqrt{-1} + \frac{[2K\mu - D\mu(\gamma + 1)\sqrt{-1}]u}{1 - u} \quad . \quad . \quad (a)$$

или лучше:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = K\mu - D\mu\sqrt{-1} + \frac{[4K\mu - 2D\mu(\gamma + 1)\sqrt{-1}]\frac{1}{2}u}{1 - u}, \quad . \quad (b)$$

слѣдовательно, надо составить функцію:

$$Y = \frac{\frac{1}{2}u}{1-u} \,. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

Но мы нашли:

$$\frac{1}{2}u = \frac{f_1(p^2) + pf_2(p^2)\sqrt{-1}}{F_1(p^2) + pF_2(p^2)\sqrt{-1}}\,,$$

поэтому:

$$1 - u = \frac{[F_1(p^2) - 2f_1(p^2)] + p\sqrt{-1}\,[F_2(p^2) - 2f_2(p^2)]}{F_1(p^2) + pF_2(p^2)\sqrt{-1}}\,.$$

Итакъ, получаемъ:

$$Y = \frac{f_1(p^2) + pf_2(p)\sqrt{-1}}{\Phi_1(p^2) + p\sqrt{-1}\,.\,\Phi_2(p^2)}\,. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (p)$$

Здѣсь $\Phi_1(p^2)$ есть цѣлая раціональная функція p^2 степени n-ой, а $\Phi_2(p^2)$ подобная-же функція степени $n-1$-ой. Видъ этихъ функцій слѣдующій:

$$\Phi_1(p^2) = F_1(p^2) - 2f_1(p^2)\,; \quad \Phi_2(p^2) = F_2(p^2) - 2f_2(p^2)\,. \; . \; . \; (e)$$

Уничтожая радикалъ въ знаменателѣ, получимъ:

$$Y = Y_1 + Y_2 p\sqrt{-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f)$$

гдѣ положено:

$$Y_1 = \frac{\Psi_1(p^2)}{\Psi(p^2)}\,, \qquad Y_2 = \frac{\Psi_2(p^2)}{\Psi(p^2)}\,,$$

причемъ:

$$\Psi_1(p^2) = \Phi_1(p^2)\,f_1(p^2) + p^2\Phi_2(p^2)\,f_2(p^2)\,;$$

$$\Psi_2(p^2) = \Phi_1(p^2)\,f_2(p^2) - f_1(p^2)\,\Phi_2(p^2)\,.$$

Функція $\Psi_1(p^2)$ — $(2n-1)$-ой степени, а $\Psi_2(p^2)$ — $(2n-2)$-ой; затѣмъ:

$$\Psi(p^2) = \Phi_1^2(p^2) + p^2\Phi_2^2(p^2)$$

степени $2n$-ой.

Разложимъ теперь Y_1 и Y_2 на частныя дроби.

Пусть для простоты: $p^2 = z$, слѣдовательно:

$$Y_1 = \frac{\Psi_1(z)}{\Psi(z)}.$$

Функція $\Psi(z)$, какъ видно изъ способа ея составленія, имѣетъ $2n$ мнимыхъ, попарно сопряженныхъ корней вида:

$$z_{1i} \pm z_{2i}\sqrt{-1}\,, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n);$$

слѣдовательно:

$$Y_1 = \sum_1^n \left[\frac{A_{1i}}{z - z_{1i} - z_{2i}\sqrt{-1}} + \frac{A_{2i}}{z - z_{1i} + z_{2i}\sqrt{-1}}\right]$$

или:

$$Y_1 = \sum_1^n \frac{(A_{1i} + A_{2i})(z - z_{1i}) + (A_{1i} - A_{2i})\,z_{2i}\sqrt{-1}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2} \;.\;.\;.\;.\; (g)$$

Подобнымъ-же образомъ найдемъ:

$$Y_2 = \sum_1^n \frac{(B_{1i} + B_{2i})(z - z_{1i}) + (B_{1i} - B_{2i})\,z_{1i}\sqrt{-1}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2} \;.\;.\;.\;.\; (h)$$

Но A_{1i}. A_{2i}; B_{1i}, B_{2i} комплексныя сопряженныя, слѣдовательно, можно положить:

$$A_{1i} + A_{2i} = M_i; \quad A_{1i} - A_{2i} = -N_i\sqrt{-1}\,,$$

$$B_{1i} + B_{2i} = L_i; \quad B_{1i} - B_{2i} = -K_i\sqrt{-1}\,,$$

причемъ M_i, N_i; L_i и K_i *дѣйствительныя* количества.

Подставляя въ Y_1 и Y_2, получимъ:

$$Y_1 = \sum_1^n \frac{M_i(z - z_{1i}) + N_i z_{2i}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2}\,, \qquad Y_2 = \sum_1^n \frac{L_i(z - z_{1i}) + K_i z_{2i}}{(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2}. \quad (k)$$

Такъ какъ $\Psi_2(p^2)$ степени $2n - 2$-ой, а числитель въ Y_2 въ (k) степени $(2n - 1)$-ой, то заключаемъ, что

$$\sum_1^n L_i = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (l)$$

Положимъ теперь:

$$p_i^2 = \sqrt{z_{1i}^2 + z_{2i}^2}; \quad h_i^2 = 2(p_i^2 - z_{1i}), \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

тогда:

$$(z - z_{1i})^2 + z_{2i}^2 = (p_i^2 - p^2)^2 + h_i^2 p^2. \quad \ldots\ldots \quad (n)$$

Составляя теперь функцію Y, находимъ:

$$Y = \sum_1^n \frac{[M_i(p^2 - z_{1i}) + N z_{2i}] + p\sqrt{-1}\,[L_i(p^2 - z_{1i}) + K_i z_{2i}]}{(p_i^2 - p^2)^2 + h_i^2 p^2} \quad . \ (p)$$

или, короче:

$$Y = \sum_1^n \frac{(M_i p^2 + D_i) + p\sqrt{-1}\,(L_i p^2 + E_i)}{(p_i^2 - p^2)^2 + h_i^2 p^2}, \quad \ldots \quad (q)$$

гдѣ:

$$D_i = -M_i z_{1i} + N_i z_{2i}; \quad E_i = -L_i z_{1i} + K_i z_{2i}. \quad \ldots \quad (r)$$

Пусть теперь:

$$\frac{p}{p_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (s)$$

гдѣ λ_i длина волны соотвѣтствующая *собственному періоду* тѣла, τ_i; такихъ періодовъ тѣло имѣетъ n и каждому соотвѣтствуетъ *опредѣленная полоса поглощенія* въ его спектрѣ.

Знаменатель можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{p_i^4}{\lambda_0^4}\left[(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2\right],$$

гдѣ положено:

$$g_i = \frac{h_i \lambda_i}{p_i}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (t)$$

Полагая затѣмъ:

$$\left.\begin{aligned} D_i = P'_i p_i^4; \quad & 4\pi^2\omega_0^2 M_i = -Q'_i p_i^4, \\ 2\pi\omega_0 E_i = -R'_i p_i^4; \quad & 8\pi^3\omega_0^3 L_i = -S'_i p_i^4, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (u)$$

получимъ:

$$Y = \sum_1^n \frac{(P'_i \lambda_0^4 - Q'_i \lambda_0^2) - \sqrt{-1}\,(R'_i \lambda_0^2 + S'_i)\,\lambda_0}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Умножая Y на

$$4K\mu - 2D\mu(\gamma + 1)\sqrt{-1} = \alpha - \beta\lambda_0\sqrt{-1}\,,$$

гдѣ:

$$\gamma = \gamma' - \gamma''\sqrt{-1}\,, \qquad \alpha = 4K\mu - D\mu\gamma''\,, \qquad \beta = 4C\mu\omega_0(\gamma' + 1)\,,$$

получимъ:

$$Y(\alpha - \beta\lambda_0\sqrt{-1}) =$$

$$= \sum_1^n \frac{(\alpha P'_i - \beta R'_i)\,\lambda_0^4 - (\alpha Q'_i + \beta S'_i)\,\lambda_0^2 - \sqrt{-1}\,[\beta P'_i \lambda_0^5 + (R'_i \alpha - Q'_i \beta)\,\lambda_0^3 + \alpha S'_i \lambda_0]}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2}$$

или:

$$[\alpha - \beta\sqrt{-1}\,\lambda_0]\,Y = \sum_1^n \frac{(P_i \lambda_0^2 - Q_i)\,\lambda_0^2 - \sqrt{-1}\,(T_i \lambda_0^5 + R_i \lambda_0^3 + S_i \lambda_0)}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2}\,,$$

если положимъ:

$$P_i = \alpha P'_i - \beta R'_i\,; \quad Q_i = \alpha Q'_i + \beta S'_i\,; \quad T_i = \beta P'_i\,;$$

$$R_i = \alpha R'_i - \beta Q'_i\,; \quad S_i = \alpha S'_i.$$

И общія формулы дисперсіи будутъ:

$$\left.\begin{aligned} n_0^2(1 - \varkappa_0^2) &= K\mu + \sum_1^n \frac{(P_i \lambda_0^2 - Q_i)\,\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2}\,, \\ 2n_0^2 \varkappa_0 &= D\mu + \sum_1^n \frac{(T_i \lambda_0^4 + R_i \lambda_0^2 + S_i)\,\lambda_0}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2 \lambda_0^2}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Въ обычныхъ теоріяхъ дисперсіи $\beta = 0$; слѣдовательно, тогда:

$$T_i = 0\,; \quad P_i = \alpha P'_i\,; \quad Q_i = \alpha Q'_i\,; \quad R_i = \alpha R'_i$$

и формула для $2n_0^2\varkappa_0$ будетъ:

$$2n_0^2\varkappa_0 = \sum_1^n \frac{(R_i\lambda_0^2 + S_i)\lambda_0}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Къ такимъ-же результатамъ приводятъ и другія теоріи (напр. Гольдгаммера или Друде).
