О вѣроятности a posteriori.

А. А. Маркова.

При извѣстныхъ условіяхъ вѣроятность P_k, что въ n испытаній нѣкоторое событіе появится ровно k разъ, опредѣляется по формулѣ

$$P_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k} \frac{\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx},$$

если въ n_0 наблюденныхъ испытаній то же событіе появилось ровно k_0 разъ.

На основаніи этой формулы при помощи пріема, который былъ примѣненъ Чебышевымъ къ вѣроятности a priori, нетрудно доказать, что для любого положительнаго числа t вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n}} \leqq \frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0} \leqq +\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n}}$$

больше

$$1-\frac{1}{t^2}.$$

Для указанной цѣли прежде всего замѣтимъ, что вышеопредѣленное выраженіе P_k представляетъ коэффиціентъ при ξ^k въ разложеніи по степенямъ перемѣннаго ξ функціи

$$F(\xi) = \frac{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}(1-x+\xi x)^n\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx},$$

такъ что

$$\sum_{k=0,1,2,\ldots,n} P_k \xi^k = \frac{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}(1-x+\xi x)^n\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}.$$

Отсюда кромѣ очевиднаго равенства

$$\sum P_k = 1$$

выводимъ при помощи дифференцированія

$$F'(1) = \sum P_k k = \frac{n\int_0^1 x^{k_0+1}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx} = n\,\frac{k_0+1}{n_0+2},$$

$$F''(1) = \sum P_k k(k-1) = \frac{n(n-1)\int_0^1 x^{k_0+2}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}$$

$$= n(n-1)\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{k_0+2}{n_0+3}$$

и затѣмъ

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2$$

$$= \sum P_k \frac{k(k-1)}{n^2} + \sum P_k \frac{k}{n^2} - 2\frac{k_0}{n_0}\sum P_k \frac{k}{n} + \frac{k_0^2}{n_0^2}\sum P_k$$

$$= \frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{k_0+2}{n_0+3}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\,\frac{k_0+1}{n_0+2} - 2\frac{k_0}{n_0}\,\frac{k_0+1}{n_0+2} + \frac{k_0^2}{n_0^2}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0+1-k_0}{n_0+3} + \left(\frac{k_0+1}{n_0+2}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2 + \frac{1}{n_0+3}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0-k_0+1}{n_0+2}.$$

Съ другой стороны простое тождество

$$\left(\frac{k_0+1}{n_0+2}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2+\frac{1}{n_0+3}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0-k_0+1}{n_0+2}$$

$$=\frac{1}{4(n_0+3)}+\left(1-2\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\right)^2\left\{\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{4(n_0+3)}\right\}$$

обнаруживаетъ, что сумма

$$\left(\frac{k_0+1}{n_0+2}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2+\frac{1}{n_0+3}\,\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0-k_0+1}{n_0+2}$$

должна заключаться между количествами

$$\frac{1}{4(n_0+3)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(n_0+2)^2}\left\{1+\frac{n_0+1}{n_0+3}\right\}=\frac{2}{(n_0+2)(n_0+3)},$$

которыя оба меньше

$$\frac{1}{4n_0}.$$

Еще легче обнаружить неравенство

$$\frac{k_0+1}{n_0+2}\,\frac{n_0+1-k_0}{n_0+3}<\frac{1}{4}.$$

Слѣдовательно

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right).$$

Остается примѣнить къ послѣднему неравенству извѣстныя разсужденія Чебышева *), и мы тотчасъ придемъ къ заключенію, что вѣроятность выполненія неравенствъ

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}}\leqq\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\leqq+\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}}$$

должна быть больше

$$1-\frac{1}{t^2}.$$

13 Апрѣля 1900 г.

---

*) См. напр. въ *Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества* (вторая серія, томъ 1) статью В. Г. Имшенецкаго „Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей“.