Къ вопросу о безконечно-малыхъ деформацiяхъ поверхности.

А. П. Пшеборскаго.

Какъ извѣстно, вопросъ о нахожденiи всѣхъ поверхностей, наложимыхъ на данную, сводится къ интегрированiю уравненiя въ частныхъ производныхъ второго порядка вида

$$Rr + Ss + Tt + N(rs - t^2) = 0\,,$$

гдѣ r, s, t вторыя частныя производныя нѣкоторой функцiи по независимымъ перемѣннымъ.

Однако, нѣсколько съузивъ нашу задачу и не задаваясь цѣлью найти конечныя уравненiя поверхностей, наложимыхъ на данную, мы можемъ свести вопросъ о деформацiи поверхности къ интегрированiю либо системы линейныхъ уравненiй въ частныхъ производныхъ перваго порядка, либо къ интегрированiю одного *линейнаго* уравненiя въ частныхъ производныхъ второго порядка.

Въ разсматриваемомъ случаѣ задачу нашу можно формулировать слѣдующимъ образомъ: найти уравненiя *семейства* поверхностей или ихъ частей, наложимыхъ на данную поверхность.

Положимъ, что уравненiя искомаго семейства поверхностей (или ихъ частей) будутъ

$$x_t = f_1(u, v, t)\,, \quad y_t = f_2(u, v, t)\,, \quad z_t = f_3(u, v, t)\,,$$

гдѣ u и v криволинейныя координаты, а t параметръ.

Пусть данная поверхность S (x, y, z) соотвѣтствуетъ значенiю параметра $t = 0$.

Предполагая деформацію непрерывной, мы можемъ считать функціи f_1, f_2, f_3 непрерывными функціями параметра t, разложимыми въ степенные ряды, расположенные по степенямъ t и сходящіеся равномѣрно въ нѣкоторой области.

Другими словами, мы можемъ предположить, что x_t, y_t, z_t выражаются слѣдующимъ образомъ

$$\begin{aligned} x_t &= x + tx_1 + t^2x_2 + \cdots, \\ y_t &= y + ty_1 + t^2y_2 + \cdots, \\ z_t &= z + tz_1 + t^2z_2 + \cdots, \end{aligned} \tag{1}$$

гдѣ $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ функціи перемѣнныхъ u и v, опредѣляемыя изъ условія наложимости поверхности $S_t\ (x_t, y_t, z_t)$ на поверхность $S\ (x, y, z)$.

Послѣднее условіе, какъ извѣстно, состоитъ въ равенствѣ линейныхъ элементовъ поверхностей S_t и S т. е. напишется слѣдующимъ образомъ:

$$dx_t^2 + dy_t^2 + dz_t^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2}$$

Это условіе должно имѣть мѣсто для всѣхъ значеній t, для которыхъ ряды (3) равномѣрно сходятся.

Поэтому, подставляя во (2) значенія dx_t, dy_t, dz_t, опредѣленныя изъ (1), и сравнивая коэффиценты при различныхъ степеняхъ t въ обѣихъ частяхъ, мы получимъ рядъ уравненій, изъ которыхъ можно послѣдовательно опредѣлить функціи x_i, y_i, z_i, а именно

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &dx\,dx_2 + dy\,dy_2 + dz\,dz_2 + \frac{1}{2}(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &dx\,dx_n + dy\,dy_n + dz\,dz_n + dx_1dx_{n-1} + dy_1dy_{n-1} + dz_1dz_{n-1} + \ldots = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Уравненія (3) и (4) разбиваются на рядъ линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка, а именно уравненіе (3) разбиваются на три уравненія:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \ \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}\right) = 0, \ \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0. \tag{5}$$

Что же касается уравненій (4), то каждое изъ нихъ разбивается на три уравненія вида

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial u} = A_i\,, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} \right) = B_i\,, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial v} = C_i, \tag{6}$$

гдѣ A_i, B_i, C_i извѣстныя функціи отъ u и v.

Какъ показалъ Cauchy, мы найдемъ рѣшенія уравненій (6) помощью квадратуръ, если будетъ найдено общее рѣшеніе уравненій (5), а потому первой ступенью въ рѣшеніи задачи о деформаціяхъ поверхности представляетъ интегрированіе системы уравненій (5) или, что то же, уравненія (3).

Задача объ интегрированіи послѣдняго уравненія носитъ названіе задачи о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности и вотъ на какомъ основаніи.

Положимъ, что мы нашли функціи x_1, y_1, z_1, удовлетворяющія уравненію (3); разсмотримъ поверхность S', которой координаты

$$x' = x + tx_1\,, \quad y' = y + ty_1\,, \quad z' = z + tz_1\,;$$

линейный элементъ этой поверхности въ силу условія (3) приметъ видъ

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2\,(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2). \tag{7}$$

Если теперь мы предположимъ, что t безконечно-малая величина, то изъ (7) увидимъ, что линейные элементы поверхностей S и S' отличаются на величину второго порядка относительно разстоянія соотвѣтственныхъ точекъ на поверхностяхъ S и S'. Послѣднія поверхности, очевидно, не наложимы другъ на друга, но безконечно мало отличаются одна отъ другой.

При изслѣдованіи безконечно-малыхъ деформацій поверхности весьма существенную роль играютъ поверхности, связанныя другъ съ другомъ такимъ образомъ, что на нихъ соотвѣтственные линейные элементы взаимно ортогональны. Эти поверхности мы для сокращенія назовемъ *линейно-ортогональными поверхностями.*

Если черезъ S_1 обозначимъ геометрическое мѣсто точекъ (x_1, y_1, z_1), то изъ условія (3) заключимъ, что поверхности S и S_1, *линейно-ортогональны.*

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ.

Линейный элементъ поверхности (S) представимъ въ видѣ

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Черезъ D, D', D'' обозначимъ основныя величины второго порядка поверхности (S), черезъ h обозначимъ детерминантъ $EG - F^2$, черезъ K полную кривизну поверхности (S), черезъ H ея среднюю кривизну, черезъ X, Y, Z cos'ы нормали къ данной поверхности, наконецъ черезъ

$$d\sigma^2 = edu^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

линейный элементъ сферическаго изображенія поверхности (S).

Соотвѣтственные элементы поверхности (S_1) будемъ обозначать тѣми же буквами съ индексомъ 1.

Уравненія (5) мы можемъ замѣнить уравненіями вида:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = \varphi\sqrt{h}, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\varphi\sqrt{h}, \qquad (8)$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0\,,$$

гдѣ φ нѣкоторая функція, введенная впервые Weingarten'омъ и названная имъ *характеристической функціей деформаціи.*

Съ нахожденіемъ этой функціи вопросъ объ опредѣленіи функцій x_1, y_1, z_1, сводится къ квадратурамъ.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣляя изъ (8) частныя производныя отъ функціи $\varphi\sqrt{h}$ по u и v, мы найдемъ

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{h})}{\partial u} = \frac{D\sum X\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - D'\sum X\dfrac{\partial x_1}{\partial u}}{\sqrt{h}},$$

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{h})}{\partial v} = \frac{D'\sum X\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - D''\sum X\dfrac{\partial x_1}{\partial u}}{\sqrt{h}}.$$

Предполагая теперь, что $DD'' - D'^2$ отлично отъ нуля, т. е. что поверхность (S) неразвертывающаяся, мы опредѣлимъ изъ этихъ уравненій суммы $\sum X\dfrac{\partial x_1}{\partial u}$, $\sum X\dfrac{\partial x_1}{\partial v}$. Присоединяя полученныя такимъ образомъ уравненія къ уравненіямъ (8), мы опредѣлимъ изъ нихъ частныя производныя по u и v отъ x_1, y_1, z_1, а именно

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{D\left(\varphi\dfrac{\partial X}{\partial v} - X\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - D'\left(\varphi\dfrac{\partial X}{\partial u} - X\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{K\sqrt{h}}, \qquad (9)$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{D'\left(\varphi\dfrac{\partial X}{\partial v} - X\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right) - D''\left(\varphi\dfrac{\partial X}{\partial u} - X\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{K\sqrt{h}}$$

и аналогичныя выраженія для $\frac{\partial y_1}{\partial u}$, $\frac{\partial y_1}{\partial v}$, $\frac{\partial z_1}{\partial u}$, $\frac{\partial z_1}{\partial v}$, гдѣ только вмѣсто X входятъ соотвѣтственно Y и Z.

Условія $\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_1}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 y_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial v \partial u}$, $\frac{\partial^2 z_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial v \partial u}$ приводятся къ одному

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''\frac{\partial \varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{K\sqrt{h}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{D\frac{\partial \varphi}{\partial v} - D'\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{K\sqrt{h}}\right] = H\varphi. \tag{10}$$

Такимъ образомъ, найдя интегралъ φ линейнаго уравненія 2-го порядка (10), мы помощью квадратуръ опредѣлимъ функціи x_1, y_1, z_1, т. е. рѣшимъ нашу задачу о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности.

Настоящая статья имѣетъ цѣлью дать кинематическую интерпретацію безконечно-малой дифермаціи поверхности и выяснить кинематическое значеніе Weingarten'овской функціи φ.

Тому же вопросу посвящена статья Volterra, помѣщенная въ Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei за 1884 годъ; къ сожалѣнію, я не имѣлъ возможности познакомиться съ этой статьей.

Предположимъ, что точка M (x, y, z) поверхности S послѣ деформаціи переходитъ въ точку M' $(x + tx_1, y + ty_1, z + tz_1)$ поверхности S'. Величины tx_1, ty_1, tz_1 будутъ проэкціями перемѣщенія точки M на оси координатъ.

Возьмемъ на нѣкоторой кривой, проходящей черезъ точку M, безконечно-близкую къ ней точку m $(x + dx, y + dy, z + dt)$. Послѣ деформаціи точка m поверхности S перейдетъ въ точку m' $[x + dx + t(x_1 + dx_1), y + dy + t(y_1 + dy_1), z + dz + t(z_1 + dz_1)]$ поверхности S'. При этомъ перемѣщеніе точки m будетъ состоять изъ перемѣщенія tx_1, ty_1, tz_1, общаго съ точкой M и изъ относительнаго перемѣщенія, коего проэкціи на оси координатъ будутъ tdx_1, tdy_1, tdz_1.

Изслѣдованіемъ послѣдняго т. е. относительнаго перемѣщенія мы и займемся.

Для этого предварительно найдемъ нѣкоторое особое выраженіе для дифференціаловъ dx, dy, dz.

Уравненія (9) мы можемъ написать слѣдующимъ образомъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{\varphi^2}{K\sqrt{h}}\left[D\frac{\partial \xi}{\partial v} - D'\frac{\partial \xi}{\partial u}\right], \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{\varphi^2}{K\sqrt{h}}\left[D'\frac{\partial \xi}{\partial v} - D''\frac{\partial \xi}{\partial u}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

гдѣ черезъ ξ, η, ζ обозначены величины

$$\xi = \frac{X}{\varphi}, \quad \eta = \frac{Y}{\varphi}, \quad \zeta = \frac{Z}{\varphi},$$

очевидно связанныя соотношеніемъ

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\varphi^2}. \tag{12}$$

Геометрическое мѣсто точекъ (ξ, η, ζ) представить нѣкоторую поверхность Σ, радіусъ векторъ которой параллеленъ нормали къ поверхности S.

Если черезъ Ξ, H, Z обозначимъ cos'ы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности Σ съ осями, то на основаніи (11) получимъ

$$\sum \Xi \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \sum \Xi \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

откуда заключаемъ, что нормали къ поверхностямъ S_1 и Σ параллельны, т. е., что

$$\Xi = X_1, \quad H = Y_1, \quad Z = Z_1.$$

Изъ уравненій (7), присоединяя къ нимъ уравненія

$$\sum \xi \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \xi \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

мы опредѣлимъ $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$, а именно

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\varphi\sqrt{h}}{\Delta}\left(\eta \frac{\partial z_1}{\partial u} - \zeta \frac{\partial y_1}{\partial u}\right), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\varphi\sqrt{h}}{\Delta}\left(\eta \frac{\partial z_1}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right),$$

гдѣ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Послѣдній детерминантъ находится легко на основаніи (11), а именно

$$\Delta = \frac{\varphi^4(DD''-D'^2)}{K^2 h} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

или замѣчая, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{X}{\varphi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{X}{\varphi^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

и что

$$K = \frac{DD''-D'^2}{EG-F^2} = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

получимъ окончательно

$$\Delta = \frac{\varphi\sqrt{eg-f^2}}{K} = \varphi\sqrt{h}.$$

Итакъ, для $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ получимъ слѣдующія выраженія:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta\frac{\partial z_1}{\partial u} - \zeta\frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \eta\frac{\partial z_1}{\partial v} - \zeta\frac{\partial y_1}{\partial v},$$

а слѣдовательно для dx, dy, dz найдемъ:

$$dx = \eta dz_1 - \zeta dy_1 \quad dy = \zeta dx_1 - \xi dz_1 \quad dz = \xi dy_1 - \eta dx_1. \tag{13}$$

Послѣднія уравненія послужатъ намъ для опредѣленія dx_1, dy_1, dz_1.

Въ самомъ дѣлѣ, умножая второе изъ нихъ на ζ, а третье на η и вычитая изъ второго третье, получимъ

$$dx_1(\eta^2+\zeta^2) = \zeta dy - \eta dz + \xi(\eta dy_1 + \zeta dz_1);$$

придавая къ обѣимъ частямъ по $\xi^2 dz_1$ и принимая во вниманіе соотношеніе (12), получимъ

$$dx_1 = \varphi^2\zeta dy - \varphi^2\eta dz + \varphi\xi V,$$

$$dy_1 = \varphi^2\xi dz - \varphi^2\zeta dx + \varphi\eta V,$$

$$dz_1 = \varphi^2\eta dx - \varphi^2\xi dy + \varphi\zeta V,$$

гдѣ

$$V = \varphi\,(\xi dx_1 + \eta dy_1 + \zeta dz_1)$$

или на основаніи (9)

$$V = \frac{1}{K\sqrt{h}}\left[\left(D'\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)du + \left(D''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)dv\right].$$

Наконецъ, замѣчая, что $\varphi\xi = X$, $\varphi\eta = Y$, $\varphi\zeta = Z$, мы получимъ

$$\begin{aligned} dx_1 &= (\varphi Z)\,dy - (\varphi Y)\,dz + XV, \\ dy_1 &= (\varphi X)\,dz - (\varphi Z)\,dx + YV, \\ dz_1 &= (\varphi Y)\,dx - (\varphi X)\,dy + ZV. \end{aligned} \tag{14}$$

Послѣднія соотношенія показываютъ, что относительное перемѣщеніе точки m при деформаціи состоитъ: 1) изъ вращенія φ вокругъ нормали N, проведенной въ точкѣ M къ поверхности S; 2) изъ перемѣщенія V вдоль этой нормали.

Послѣднее перемѣщеніе мы можетъ разсматривать какъ слѣдствіе нѣкотораго вращенія вокругъ оси, проходящей черезъ точку M перпендикулярно какъ къ элементу mM такъ и къ нормали N. Если послѣднее вращеніе обозначимъ черезъ ω, а проэкціи вращеній φ и ω на оси координатъ черезъ φ_x, φ_y, φ_z, ω_x, ω_y, ω_z, то выраженія (14) напишутся въ видѣ

$$\begin{aligned} dx_1 &= (\varphi_z + \omega_z)\,dy - (\varphi_y + \omega_y)\,dz, \\ dy_1 &= (\varphi_x + \omega_x)\,dz - (\varphi_z + \omega_z)\,dx, \\ dz_1 &= (\varphi_y + \omega_y)\,dx - (\varphi_x + \omega_x)\,dy. \end{aligned} \tag{15}$$

Наконецъ, если результирующее вращеніе обозначимъ черезъ Ω т. е. положимъ

$$\Omega^2 = \varphi^2 + \omega^2,$$

а его проэкціи на оси черезъ Ω_x, Ω_y, Ω_z, то выраженія (15) примутъ видъ

$$dx_1 = \Omega_z\,dy - \Omega_y\,dz, \quad dy_1 = \Omega_x\,dz - \Omega_z\,dx, \quad dz_1 = \Omega_y\,dx - \Omega_x\,dy. \tag{16}$$

Такимъ образомъ относительное перемѣщеніе точки m состоитъ изъ вращенія Ω вокругъ оси, проходящей черезъ точку M.

Найдемъ какъ направленіе, такъ и величину этого вращенія.

Изъ соотношеній (16) имѣемъ, что

$$\Omega_x dx_1 + \Omega_y dy_1 + \Omega_z dz_1 = 0$$

т. е. направленіе оси вращенія параллельно нормалямъ къ поверхностямъ S_1 и Σ.

Такъ какъ проэкція вращенія Ω на нормаль къ поверхности S есть φ, то слѣдовательно

$$\Omega_x X + \Omega_y Y + \Omega_z Z = \varphi\,;$$

замѣчая, что на основаніи предыдущаго

$$\Omega_x = \Omega \Xi\,, \quad \Omega_y = \Omega H, \quad \Omega_z = \Omega Z$$

получимъ

$$\Xi \xi + H\eta + Z\zeta = \frac{1}{\Omega}.$$

Но выраженіе $\Xi\xi + H\eta + Z\zeta$ есть ничто иное, какъ разстояніе касательной плоскости къ поверхности Σ отъ начала координатъ; обозначая его черезъ p, найдемъ, что

$$\Omega = \frac{1}{p}. \tag{17}$$

Нетрудно найти выражаніе для Ω при помощи характеристической функціи φ и ея производныхъ.

Обозначимъ черезъ ε, γ, δ коэффиціенты линейнаго элемента поверхности Σ:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \varepsilon du^2 + 2\delta\, du dv + \gamma dv^2.$$

Замѣчая, что $d\xi = \frac{1}{\varphi} dX - \frac{X}{\varphi^2} d\varphi$, получимъ

$$\varepsilon = \frac{e}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2, \quad \delta = \frac{f}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \quad \gamma = \frac{g}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2,$$

и слѣдовательно

$$\lambda = \varepsilon\gamma - \delta^2 = \frac{eg - f^2}{\varphi^6}\left[\varphi^2 + \frac{e\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2f\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + g\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{eg - f^2}\right].$$

Замѣчая, что второй членъ, стоящій въ скобкахъ, представляетъ ничто иное, какъ $\Delta_1'\varphi$ т. е. дифференціальный параметръ перваго порядка относительно сферическаго изображенія поверхности S, получимъ

$$\lambda = \frac{eg - f^2}{\varphi^6}(\varphi^2 + \Delta_1'\varphi).$$

Далѣе такъ какъ

$$\Xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right), \quad H = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right]$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right],$$

то слѣдовательно имѣемъ:

$$p = \sum \Xi\xi = \frac{\varphi^3}{\sqrt{eg - f^2}\sqrt{\varphi^2 + \Delta_1'\varphi}} \sum \xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right),$$

гдѣ Σ распространяется на всѣ круговыя перестановки изъ буквъ ξ, η, ζ.

На основаніи опредѣленій ξ, η, ζ, имѣемъ:

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} = \frac{1}{\varphi^2}\left[\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left[Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right] + \frac{1}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left[Z\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial Z}{\partial v}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\varphi^2}X + \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{g}}\frac{1}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\varphi^3}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{e}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u},$$

а потому

$$\sum \xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right) = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\varphi^3}.$$

Такимъ образомъ для p окончательно имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 + \Delta_1'\varphi}},$$

а отсюда на основаніи (17)

$$\Omega^2 = \varphi^2 + \Delta'\varphi,$$

слѣдовательно относительное перемѣщенiе точки m состоитъ изъ вращенiя $t\varphi$ около нормали N къ поверхности S въ точкѣ M и изъ вращенiя $t\sqrt{\Delta_1'\varphi}$ около оси, лежащей въ касательной плоскости къ поверхности S и проходящей черезъ ту же точку M.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ.

Прежде всего посмотримъ, какому значенiю функцiи φ будетъ соотвѣтствовать вращенiе всей поверхности вокругъ неподвижной оси.

Для этого случая $\Omega_x = a$, $\Omega_y = b$, $\Omega_z = c$ гдѣ a, b, c постоянныя, а потому

$$\varphi = aX + bY + cZ.$$

Поверхность Σ обратится въ плоскость

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 1;$$

точно такъ же въ плоскость

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = k$$

обратится и поверхность S_1.

Посмотримъ, когда возможно положить $\varphi = \mathrm{const}$ т. е. другими словами, когда поверхность можетъ быть такъ деформируема, чтобы относительное перемѣщенiе безконечно-близкихъ точекъ ея одной относительно другой состояло въ постоянномъ вращенiи вокругъ нормали.

Такъ какъ φ есть интегралъ уравненiя (10), то слѣдовательно это возможно лишь при условiи

$$H = 0$$

т. е. для поверхностей minima.

Нетрудно видѣть, что при подобной деформацiи поверхность S_1 тоже будетъ поверхностью minima.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что для поверхности S_1 величины E_1, F_1, G_1 выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$E_1 = \frac{1}{eg - f^2}\left[D^2\varphi^2 g + D'^2\varphi^2 e - 2DD'\varphi^2 f + \left(D'\frac{\partial\varphi}{du} - D\frac{\partial\varphi}{dv}\right)^2\right],$$

$$G_1 = \frac{1}{eg - f^2}\left[D'^2\varphi^2 g + D''^2\varphi^2 e - 2D'D''\varphi^2 f + \left(D''\frac{\partial\varphi}{du} - D'\frac{\partial\varphi}{dv}\right)^2\right],$$

$$F_1 = \frac{1}{eg - f^2}\left[DD'g\varphi^2 + D'D''e\varphi^2 - (D'^2 + D''D)\varphi^2 f + \right.$$

$$\left. + \left(D'\frac{\partial\varphi}{du} - D\frac{\partial\varphi}{dv}\right)\left(D''\frac{\partial\varphi}{du} - D'\frac{\partial\varphi}{dv}\right)\right],$$

найдемъ, что

$$\sqrt{EG-F^2}=\pm\frac{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}},$$

а потому на основаніи (8) имѣемъ

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}=0\,,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}=0\,,$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=\frac{-1}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}}\sqrt{E_1G_1-F^2},\ \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}=+\frac{\sqrt{E_1G_1-F_1^2}}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}},$$

откуда заключаемъ, что характеристической функціей для поверхности S_1 служитъ функція

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{\varphi^2+\Delta_1'\varphi}},$$

поэтому при $\varphi=\text{const}$ имѣемъ и $\psi=\text{const}$, откуда по предыдущему заключаемъ, что поверхность S_1 тоже поверхность minima.