Обращеніе въ нуль θ-функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ.

М. А. Тихомандрицкаго.

Извѣстно, что функція

$$\Theta\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}}\right) \tag{1}$$

p независимыхъ перемѣнныхъ u_h, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I}} = u_h, \quad (h = 1, 2, \ldots p) \tag{2}$$

обращается въ нуль, когда или 1) одна или нѣсколько изъ точекъ $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ приходятъ въ точку (ξ, y_ξ), или 2) когда эти точки $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ приходятъ на присоединенную кривую перваго рода:

$$\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y}) = 0, \tag{3}$$

причемъ въ послѣднемъ случаѣ, — случаѣ неопредѣленности, когда $(x_i \overset{p}{\underset{1}{,}} y_i)$ не опредѣляются по даннымъ значеніямъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$ изъ (2), это обращеніе въ нуль есть тождественное, т. е. при всякомъ значеніи (ξ, y_ξ). При опредѣленіи Θ-функціи равенствомъ:

$$\Theta\left(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_h}}\right) = e^{\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} | \xi)}, \tag{4}$$

гдѣ

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}}|\xi) = \int \sum_{k=1}^{p} [C_h + J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k]\, du + C, \tag{5}$$

а $J(u_h)_k$ есть трансцендентная второго рода:

$$J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}})_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II_k}} \tag{6}$$

обращающаяся въ ∞^1, когда одна изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ приходитъ въ фундаментальную точку $(a_k \cdot b_k)$, эти свойства Θ-функціи должны вытекать изъ свойствъ трансцендентныхъ 2-го рода. Показать это—цѣль настоящей замѣтки.

1. Аргументы функцій J въ (5) опредѣляются по аргументамъ (2) на основаніи теоремы Абеля. Означая чрезъ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ новые верхніе предѣлы интеграловъ перваго и второго рода, мы будемъ имѣть:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_k}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}}; \qquad (h=1,2,\ldots p) \tag{7}$$

$$J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k = \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{II_k}}, \tag{8}$$

причемъ (a_k, b_k), $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ суть безконечности, а (ξ, y_ξ), $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ нули „главной функціи“ независимой перемѣнной (z, y_z):

$$P_{z\xi}(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}). \tag{9}$$

Интегралы въ (8) въ разсматриваемомъ случаѣ не могутъ быть выражены чрезъ интегралы въ (6), такъ какъ уравненіе, выражающее теорему Абеля для интеграловъ второго рода дѣлается иллюзуарнымъ, когда одинъ изъ предѣловъ совпадаетъ съ параметромъ такого интеграла; поэтому вмѣсто функціи (9) мы возьмемъ сперва въ основаніе функцію:

$$P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}), \tag{10}$$

гдѣ (x', y') обозначаетъ точку, лежащую вблизи (a_k, b_k), но не совпадающую съ нею. Въ этомъ случаѣ теорема Абеля даетъ слѣдующія уравненія:

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{x'}{\underset{\xi}{I_h}}, \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots p)} \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{II_k}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{x_i}{\underset{x_0}{II_h}} + \overset{x'}{\underset{\xi}{II_k}} - D_{a_k} \log [P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, }} y_i)] \tag{12}$$

Такъ какъ вблизи (a_k, b_k) имѣемъ:

$$\overset{x'}{\underset{\xi}{II_k}} = \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} + \mathbf{P}(x' - a_k), \tag{13}$$

если

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0 \tag{14}$$

фундаментальное уравненіе, а жирное **P** означаетъ рядъ расположенный по положительнымъ степенямъ своего аргумента,—и

$$P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, }} y_i) = -\frac{\dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}}{x' - a_k} + \mathbf{P}_1(x' - a_k), \tag{15}$$

слѣдовательно

$$D_{a_k} P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, }} y_i) = -\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k} \cdot \dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}}{(x' - a_k)^2} + \mathbf{P}_2(x' - a_k), \tag{16}$$

а потому:

$$D_{a_k} \log [P_{a_k\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, }} y_i)] = \frac{\dfrac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} - \dfrac{x' - a_k}{\dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}} \mathbf{P}_2(x' - a_k)}{1 - \dfrac{x' - a_k}{\dfrac{\partial F(x', y')}{\partial y'}} \mathbf{P}_1(x' - a_k)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{x' - a_k} + \mathbf{P}_3(x' - a_k); \tag{17}$$

то въ (12) члены, обращающіеся при $x'-a_k=0$ въ безконечность, сократятся, и для суммы интеграловъ 2-го рода лѣвой части (12) получится конечное опредѣленное значеніе. Итакъ функція (8) имѣетъ конечное опредѣленное значеніе, пока ни одна изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ не приходитъ въ точку (ξ, y_ξ), или пока онѣ не приходятъ на кривую $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})=0$. Чтобы изслѣдовать, что будетъ имѣть мѣсто въ этихъ послѣднихъ случаяхъ, намъ нужно прежде дать новую форму главной функціи (10).

2. Для ясности мы будемъ теперь писать послѣ независимой перемѣнной всѣ нули функціи, сперва произвольно-задаваемые, потомъ опредѣляемые по нимъ, (непроизвольные), отдѣляя послѣдніе отъ первыхъ вертикальною чертою. Независимую перемѣнную будемъ обозначать чрезъ (z, y_z). Такимъ образомъ

$$\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i \,|\, x'_i, y'_i}}) \tag{18}$$

будетъ обозначать присоединенную функцію 1-го рода, обращающуюся въ 0^1 въ $p-1$ произвольно-назначенныхъ мѣстахъ $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ и въ другихъ $p-1$ мѣстахъ $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$, по нимъ вполнѣ опредѣляемымъ. Если бы за произвольные нули функціи мы выбрали $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$, то непроизвольными стали бы $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}})$. Если мы составимъ теперь произведеніе изъ функцій (10) и (18), то получимъ присоединенную функцію, (ибо таковъ второй множитель), которая будетъ обращаться въ безконечность ∞^1 въ двухъ мѣстахъ (x', y') и (x_p, y_p), и въ нуль въ мѣстахъ $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$, (ξ, y_ξ) и $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$. Это будетъ, слѣдовательно, присоединенная функція 3-го рода съ произвольными нулями въ мѣстахъ $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$, (ξ, y_ξ) и непроизвольными въ мѣстахъ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$. Въ самомъ дѣлѣ, непроизвольные нули будутъ эти самые потому, что они опредѣляются по тѣмъ же даннымъ (ξ, y_ξ), (x', y'), $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, только теперь чрезъ посредство $(\overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}})$, которые вполнѣ и однозначно опредѣляются по $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}})$. Мы получаемъ слѣдовательно такое равенство:

$$P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) \varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, y_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x_i', y_i') =$$

$$= P_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}}; \xi, y_\xi | \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}), \tag{19}$$

откуда будемъ имѣть:

$$P_{z\xi}(x', y'; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) = \frac{P_{x', x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}}; \xi, y_\xi | \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\varphi(\overset{m-2}{z}, \overset{n-2}{y_z}; x_i, y_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x_i', y_i')}. \tag{20}$$

Это и есть та новая форма для главной функціи, которую мы желали вывести. Такихъ формъ будетъ всего p; онѣ получатся, если будемъ передавать роль точки (x_p, y_p) каждой изъ прочихъ безконечностей $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ главной функціи. Достаточно разсмотрѣть одну, здѣсь выведенную, чтобы имѣть представленіе о томъ, что будетъ имѣть мѣсто въ остальныхъ подобныхъ случаяхъ.

3. Предположимъ теперь, что точка (x_p, y_p) приходитъ въ точку (ξ, y_ξ); тогда функція P_{x', x_p} приведется къ присоединенной функціи перваго рода, что случится отъ того, что *одинъ изъ непроизвольныхъ нулей функціи* $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ *придетъ въ точку* (x', y'); такимъ образомъ каждая изъ безконечностей функціи будетъ поглощена однимъ нулемъ. Иначе получилась бы присоединенная функція съ одною безконечностью, каковой нѣтъ. Это предложеніе доказано еще Клебшемъ и Горданомъ въ ихъ „Theorie der Abel'schen Functionen", и слѣдуетъ также, равно какъ и то, что сейчасъ скажемъ, изъ формулы (14) на стр. 97 нашихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Харьковъ, 1895 года". Такъ какъ произвольные нули разсматриваемой функціи, $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}})$ и (ξ, y_ξ), всѣ равноправны, то тоже случится и тогда, когда точка (x_p, y_p) придетъ въ совпаденіе съ одною изъ точекъ $(\overset{p-1}{\underset{1}{x_i', y_i'}})$, т. е. когда всѣ безконечности главной функціи $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$ окажутся на присоединенной кривой перваго рода: *въ этомъ случаѣ* точно также *одинъ изъ непроизвольныхъ нулей* $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$ *придетъ въ точку* (x', y'). И это будетъ имѣть мѣсто какъ бы близка ни была точка (x', y') къ точкѣ (a_k, b_k), а также и тогда, когда она придетъ съ нею въ совпа-

деніе: въ обоихъ сказанныхъ случаяхъ одинъ изъ непроизвольныхъ нулей $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\, y_{\alpha_i})$ функціи придетъ въ точку (a_k, b_k). А это влечетъ за собою обращеніе въ безконечность ∞^1 соотвѣтственнаго члена въ правой части равенства (8), т. е. въ этихъ случаяхъ функція $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k$ обратится въ безконечность ∞^1, и при этомъ во второмъ случаѣ, т. е. когда $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\, y_i)$ приходятъ на присоединенную кривую перваго рода, при всякихъ значеніяхъ (ξ, y_ξ) и $p-1$ изъ этихъ паръ, т. е. тождественно.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\, y_{\alpha_i})$, опредѣляясь по величинамъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\, y_i)$, неопредѣляемымъ вполнѣ по значеніямъ независимыхъ перемѣнныхъ $\overset{p}{\underset{1}{u_h}}$, остаются тоже способными принимать безчисленное множество значеній, и даже по двумъ причинамъ, *за исключеніемъ одной изъ этихъ величинъ* $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\, y_{\alpha_i})$, *которая обязательно переходитъ въ* (a_k, b_k), влѣдствіе чего вся сумма $\sum\limits_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{x_0}{\Pi_k}}$, повторяемъ, обращается въ безконечность ∞^1. А это послѣднее обстоятельство и есть, какъ увидимъ, причина обращенія въ нуль Θ-функціи въ сказанныхъ случаяхъ, притомъ во второмъ тождественно.

Въ I случаѣ функція

$$P_{x',x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}}; \xi, y_\xi \,|\, \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}}) \tag{21}$$

переходитъ въ присоединенную функцію 1-го рода:

$$\overset{m-2\;\,n-2}{\varphi}(z, y_z;\, x_i', \underset{i}{y'} \,\Big|^{p-1}_{1}\, \alpha_i, y_{\alpha_i}),\text{*)} \tag{22}$$

причемъ дѣлаются

$$(\alpha_i, y_{\alpha_i}) \overset{p-1}{\underset{1}{=}} (x_i, y_i), \tag{23}$$

ибо $p-1$ нулей такой функціи однозначно опредѣляютъ остальные $p-1$ ея нули; во II случаѣ она переходитъ въ присоединенную функцію 1-го рода:

---

*) Мы предполагаемъ для простоты, что (α_p, y_{α_p}) приходитъ въ (x', y').

$$\varphi(z\,,\ y_z\,;\ \overset{p-2}{\underset{1}{x_i,}}\ y'_i\,;\ \xi\,,\ y_\xi\,|\,\overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i,}}\ y_{\alpha_i}), \tag{24}$$

причемъ равенство (23) уже не будетъ имѣть мѣста.

Въ I случаѣ равенство (12) обращается въ тождество. Чтобы извлечь изъ него то, что намъ нужно, слѣдуетъ прибѣгнуть къ методу предѣловъ.

4. Показать, что въ первомъ изъ этихъ случаевъ Θ-функція дѣйствительно обращается въ нуль, можно двоякимъ образомъ, исходя изъ равенства (12), смотря по тому, какую изъ двухъ формъ главной функціи мы предпочтемъ, ту ли, которая представляется формулою (20) этой статьи, или ту, которая получается изъ формулы (3) § 58 нашихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ", стр. 103, чрезъ перестановку $(\overset{p}{\underset{1}{a_i,}}\ b_i)$ съ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\ \beta_i)$, перемѣну затѣмъ $(\overset{p}{\underset{1}{\alpha_i,}}\ \beta_i)$ на $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i)$, $(x\,,\ y)$ на $(x'\,,\ y')$, и представляетъ по перенесеніи суммы $\sum$ въ другую часть разложеніе главной функціи напростые элементы (по Hermite'у), именно:

$$P_{\xi\eta}(x',\ y'\,;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i) = P_{\xi\eta}(x',\ y'\,;\ \overset{p}{\underset{1}{a_i,}}\ b_i) -$$

$$-\sum_{j=1}^{p} P_{\xi\eta}(x_j,\ y_j\,;\ \overset{p}{\underset{1}{a_i,}}\ b_i)\,\varphi_j(\overset{m-2}{x'},\ \overset{n-2}{y'}\,;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i), \tag{25}$$

послѣ предварительнаго разложенія $P_{a_k\xi}(x',\ y'\,;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i)$ на двѣ функціи по формулѣ:

$$P_{a_k\xi}(x',\ y'\,;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i) = P_{a_k\eta}(x',\ y'\,;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i) - P_{\xi\eta}(x',\ y'\,;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i) \tag{26}$$

При этомъ можно сразу изслѣдовать случай, когда λ изъ точекъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i)$ приходятъ въ точку $(\xi\,,\ y_\xi)$. Вычисленія будутъ очень похожи на таковыя конца § 1; поэтому мы предоставляемъ ихъ читателю. Избирая форму (20) нашей функціи можно было бы тоже сразу изслѣдовать этотъ общій случай: для этого стоило бы только взять среднюю ариѳметическую изъ всѣхъ формъ, построенныхъ подобно (20) для всѣхъ точекъ изъ $(\overset{p}{\underset{1}{x_i,}}\ y_i)$, имѣющихъ придти въ точку $(\xi\,,\ y_\xi)$; для простоты мы ограничимся однако только разсмотрѣніемъ случая, когда только одна точка $(x_p\,,\ y_p)$ приходитъ въ точку $(\xi\,,\ y_\xi)$.

Для значеній (x', y') близкихъ къ (a_k, b_k), и (x_p, y_p) близкихъ къ (ξ, y_ξ) мы будемъ имѣть (опуская непроизвольные нули):

$$P_{x',x_p}(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) = -\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'} + \mathbf{P}_1(a_k - x') +$$

$$+ \frac{\dfrac{\partial F(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\varphi_p(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \mathbf{P}_2(x_p - \xi), \tag{27}$$

причемъ принято во вниманіе, что

$$\frac{\partial F(\xi, y_\xi)}{\partial y_\xi} = \frac{\partial F(x_p, y_p)}{\partial y_p} + (x_p - \xi)\,\mathbf{P}_3(x_p - \xi) \tag{28}$$

и что

$$\varphi_p(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) =$$

$$= \varphi_p(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; x_p, y_p) + (x_p - \xi)\,\mathbf{P}_4(x_p - \xi), \tag{29}$$

а также, что вообще

$$\varphi(a_k, b_k; x_i, y_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x'_i, y'_i) = \varphi(a_k, b_k; x'_i, y'_i \overset{p-1}{\underset{1}{\Big|}} x_i, y_i), \tag{30}$$

ибо (x_p, y_p) не нуль, а точка, гдѣ $\varphi_p = 1$

Совершая операцію D_{a_k} надъ обѣими частями равенства (27), будемъ имѣть:

$$D_{a_k} P_{x',x_p}(a_k, b_k; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi) =$$

$$= \left(\frac{\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'}\right)^2 - \frac{D_{a_k}\dfrac{\partial F(a_k, b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'} + \mathbf{P}'_1(a_k - x') + \tag{31}$$

$$+ \frac{\dfrac{\partial F(x_p, y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi} D_{a_k}\varphi(a_k, b_k; \overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}}) + \mathbf{P}'_2(x_p - \xi);$$

(гдѣ $\mathbf{P}_1'$ и $\mathbf{P}_2'$ новые ряды, получающіеся послѣ этой операціи). Дѣля (31) на (27) и вычитая результатъ послѣ сокращенія его на $-\dfrac{\dfrac{\partial F(a_k,\ b_k)}{\partial b_k}}{a_k - x'}$, изъ (13), мы будемъ имѣть послѣ положенія $x' = a_k$, $y' = b_k$, такой результатъ:

$$\text{пред.}\left(\overset{x'}{\underset{\xi}{\Pi}}{}_k - D_{a_k}\log P_{x',x_p}(a_k,\ b_k;\ \overset{p-1}{\underset{1}{x_i',\ y_i'}};\ \xi,\ y_\xi \,|\, \overset{p}{\alpha_i,\ y_{\alpha_i}})\right)_{x'=a_k,\ y'=b_k} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F(x_p,\ y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\,\varphi_p(\overset{m-2\ n-2}{a_k,\ b_k};\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,\ y_i}}) + \mathbf{P}(x_p - \xi). \tag{32}$$

Имѣя въ виду, что $D_{a_k}\log\varphi(\overset{m-2\ n-2}{\alpha_k,\ b_k};\ \overset{p-1}{x_i,\ y_i \,\underset{1}{|}\, x_i',\ y_i'})$ есть конечная величина, мы можемъ теперь написать:

$$C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I}}{}_h)_k = \frac{\dfrac{\partial F(x_p,\ y_p)}{\partial y_p}}{x_p - \xi}\,\varphi(\overset{m-2\ n-2}{a_k,\ b_k};\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,\ y_i}}) + K_k, \tag{33}$$

означая чрезъ K_k совокупность членовъ, несодержащихъ отрицательныхъ степеней $x_p - \xi$. Помножая это на du_k и суммируя по k отъ 1 до p, мы получимъ, имѣя въ виду, что по формулѣ (10) § 97 нашего выше цитированнаго сочиненія:

$$dx_p = \frac{\partial F(x_p,\ y_p)}{\partial y_p}\sum_{k=1}^{p}\varphi_p(a_k,\ b_k;\ \overset{p}{\underset{1}{x_i,\ y_i}})\,du_k, \tag{34}$$

слѣдующее:

$$\sum_{k=1}^{p}(C_k + J(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I}}{}_h)_k)\,du_k = \frac{dx_p}{x_p - \xi} + \sum_{k=1}^{p} K_k\,du_k, \tag{35}$$

откуда, интегрируя, на основаніи (5) получимъ:

$$\Phi(\overset{p}{\underset{1}{u_h}} \,|\, \xi) = \log(x_p - \xi) + L, \tag{36}$$

гдѣ L не содержитъ отрицательныхъ степеней $x_p - \xi$, и слѣдовательно по (4)

$$\Theta(u_h \overset{p}{\underset{1}{-}} \overset{\xi}{\underset{x_0}{I_k}}) = (x_p - \xi) e^L, \tag{37}$$

что обращается въ нуль при $x_p = \xi$, $y_p = y_\xi$.

5. Второй случай приводится къ первому. Въ этомъ случаѣ функція

$$\frac{P_{x',x_p}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}; \xi, y_\xi | \overset{p}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\overset{m-2\ n-2}{\varphi}(z, y_z; \overset{p-2}{\underset{1}{x_i, y_i}} | x'_i, y'_i)} \tag{38}$$

по замѣчанію въ концѣ § 3 обратится въ такую:

$$\frac{\overset{m-2\ n-2}{\varphi}(z, y_z; \overset{p-2}{\underset{1}{x'_i, y'_i}}, \xi, y_\xi | \overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})}{\overset{m-2\ n-2}{\varphi}(z, y_z; \overset{p-1}{\underset{1}{x_i, y_i}} | x'_i, y'_i)}, \tag{39}$$

которая будетъ имѣть p нулей: (ξ, y_ξ). $(\overset{p-1}{\underset{1}{\alpha_i, y_{\alpha_i}}})$, и p безконечностей: $(\overset{p}{\underset{1}{x_i, y_i}})$, (такъ какъ мы предположили, что $x_p = x'_{p-1}$, $y_p = y'_{p-1}$). Поэтому на основанiи теоремы Абеля для интеграловъ 1-го рода мы будемъ имѣть:

$$0 = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{x_i}{I_h}} + \overset{\xi}{\underset{x_p}{I_h}}; \tag{40}$$

складывая это съ равенствомъ:

$$u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{x_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{x_p}{\underset{a_p}{I_h}}, \tag{41}$$

опредѣляющимъ по (2) перемѣнныя u_h, мы будемъ имѣть:

$$u_h = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{\xi}{\underset{a_p}{I_h}}, \tag{42}$$

такъ что аргументамъ трансцендентныхъ второго рода $J(u_h \overset{p}{\underset{1}{+}} \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}})_k$ можно въ этомъ случаѣ дать такой видъ:

$$u_h + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p-1} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{\xi}{\underset{a_p}{I_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}} = \sum_{i=1}^{p} \overset{\alpha_i}{\underset{a_i}{I_h}} + \overset{a_k}{\underset{\xi}{I_h}}, \tag{43}$$

при условіи $\alpha_p = \xi$, $y_{\alpha_p} = y_\xi$, совершенно какъ въ первомъ случаѣ. Отсюда слѣдуетъ, что и въ этомъ 2-мъ случаѣ Θ-функція тоже обратится въ нуль и притомъ тождественно, ибо этотъ результатъ независитъ отъ значеній (ξ, y_ξ) и $(x_i, y_i)_1^{p-1}$.

Этой статьей я желалъ бы замѣнить § 112 своихъ „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ", гдѣ вслѣдствіе случившейся раньше (стр. 73) по недосмотру погрѣшности, дано не надлежащее объясненіе этому важному моменту теоріи Абелевыхъ интеграловъ. В. П. Ермаковъ далъ въ своей „Теоріи Абелевыхъ функцій безъ Римановыхъ поверхностей", Кіевъ, 1897 г. вѣрное, но не прямое объясненіе; второй случай сводится имъ на первый, также какъ и въ моей книгѣ.
