

Нѣкоторыя приложенія теоріи линейчатыхъ конгруэнцій.

А. П. Пшеборскаго.

В в е д е н і е.

Начало теоріи линейчатыхъ конгруэнцій т. е. системъ прямыхъ въ пространствѣ, уравненіе которыхъ зависитъ отъ двухъ параметровъ, положено Monge'емъ въ 1781 году въ Mémoires de l'Académie des sciences.

Дальнѣйшее развитіе этой теоріи въ случаѣ, когда прямая конгруэнція представляютъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности, мы находимъ въ знаменитомъ трудѣ этого геометра Application de l'Analyse à la Géométrie и въ его Théorie des déblais et des remblais.

Изученіе этого частнаго вида линейчатыхъ конгруэнцій тѣсно связано у Monge'a съ ученіемъ о кривизнѣ поверхностей т. е. съ вопросомъ первостепенной важности въ теоріи поверхностей.

Совершенно съ другой точки зрѣнія рассматриваютъ конгруэнціи нормалей Malus и Dupin ¹⁾.

Къ изслѣдованію этихъ конгруэнцій эти геометры пришли при рассмотрѣніи вопроса о распространеніи свѣта въ изотропныхъ средахъ и, главнымъ, образомъ, при изученіи преломленія и отраженія свѣта.

Результатомъ ихъ изслѣдованій явился цѣлый рядъ теоремъ, играющихъ весьма важную роль въ геометрической оптикѣ. Главнѣйшія изъ этихъ теоремъ читатель найдетъ въ первой главѣ настоящаго сочиненія.

Особенно важной является теорема, носящая названіе *теоремы Malus - Dupin'a*; сущность ея состоитъ въ томъ, что системы лучей,

¹⁾ Malus. Optique. Journal de l'Ecole Polytechnique XIV Cahier 1807.

Dupin. Sur les routes snivies par la lumière et par les corps élastiques, en général dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction (Application de géométrie et de mécanique à la marine, aux ponts et chaussées etc., Paris. 1822).

нормальныхъ къ нѣкоторой поверхности, остаются конгруэнціями нормалей послѣ какого угодно числа преломленій и отраженій въ изотропныхъ средахъ.

Благодаря этому свойству лучей при разсмотрѣніи вопроса о распространеніи свѣта въ изотропныхъ средахъ можно ограничиваться разсмотрѣніемъ конгруэнцій нормалей, какъ это и дѣлаютъ Malus и Dupin.

Только при переходѣ къ изслѣдованію преломленія свѣта въ кристаллахъ данъ былъ толчекъ къ изученію болѣе общихъ линейчатыхъ конгруэнцій.

Дѣйствительно, какъ показали опыты, всякая система лучей, послѣ преломленія въ кристаллахъ разбивается на двѣ: на систему лучей *обыкновенныхъ* и *необыкновенныхъ*.

Въ то время какъ первые лучи подчиняются тѣмъ же законамъ преломленія, что и лучи въ изотропныхъ средахъ, вторые этимъ законамъ не подчиняются; между прочимъ они не подчиняются теоремѣ Malus-Dupin'a т. е. перестаютъ быть конгруэнціями нормалей къ нѣкоторой поверхности.

Первымъ трудомъ, посвященнымъ теоріи необыкновенныхъ лучей, былъ мемуаръ Hamilton'a Theory of Systems of Rays ¹⁾; особенно подробно развита эта теорія въ дополненіи къ этому мемуару, помѣщенномъ въ XVI томѣ упомянутаго журнала.

Въ основу своихъ изслѣдованій Hamilton кладетъ припринципъ наименьшаго дѣйствія, хотя главной своей цѣлью онъ ставитъ изученіе геометрическихъ свойствъ разсматриваемыхъ имъ лучей.

Изслѣдованія Hamilton'a, значительно подвинувшія впередъ теорію линейчатыхъ конгруэнцій, все таки не относятся къ наиболѣе общимъ конгруэнціямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы видѣли, изслѣдованія эти относятся къ свѣтовымъ лучамъ; что касается послѣднихъ, то они обладаютъ одной характеристической особенностью, а именно: ихъ направленіе связано для каждой однородной среды нѣкоторой постоянной зависимостью съ направленіемъ соответствующихъ касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ волны, т. е. къ нѣкоторымъ, опредѣленнымъ для каждой однородной среды, поверхностямъ.

Общую теорію какихъ-угодно линейчатыхъ конгруэнцій мы находимъ впервые въ знаменитомъ мемуарѣ Kummer'a Allgemeine Theorie der gradelinigen Strahlensysteme, помѣщенномъ въ LVII томѣ Journal de Crelle за 1859 годъ.

Въ этомъ мемуарѣ Kummer, основываясь на однозначномъ соответствіи между точками какой-угодно поверхности и прямыми какой-

¹⁾ Transaction of the Irisch Academy. T. XV. 1830.

угодно конгруэнціи и пользуясь методами дифференціальной геометріи, находитъ всѣ главнѣйшія свойства самыхъ общихъ линейчатыхъ конгруэнцій.

Такимъ образомъ съ появленіемъ упомянутаго мемуара, можно сказать, была установлена полная общая теорія линейчатыхъ конгруэнцій.

Дальнѣйшія работы въ этой области, если не считать работъ Plücker'a и нѣкоторыхъ нѣмецкихъ геометровъ, были посвящены главнымъ образомъ различнымъ приложеніямъ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій къ оптикѣ и теоріи поверхностей.

Такъ сравнительно вскорѣ послѣ опубликованія мемуара Kummer'a вышло въ свѣтъ сочиненіе Meibauer'a Theorie der gradelinigen Strahlensysteme des Lichtes. Berlin 1864, въ которомъ даются приложенія Kummer'овской теоріи къ оптикѣ.

Болѣе самостоятельнымъ является сочиненіе Levisal'я Recherches d'optiques géométriques, появившееся въ 1867, въ Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure t. IV.

Мы упомянули выше объ изслѣдованіяхъ Plücker'a.

Знаменитый творецъ линейчатой геометріи, въ которой за пространственный элементъ принята прямая, само собою разумѣется долженъ былъ разсматривать системы прямыхъ, зависящихъ отъ двухъ параметровъ, т. е. линейчатыхъ конгруэнціи. Въ классическомъ сочиненіи знаменитаго геометра Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig 1868/9 мы находимъ общее изслѣдованіе линейчатыхъ конгруэнцій 1-ой и 2-ой степени.

Такимъ образомъ было положено начало изслѣдованіямъ алгебраическихъ конгруэнцій — изслѣдованіямъ, которыми занимались Kummer, Schumacher и, въ послѣднее время, Rudolf Sturm и другіе германскіе геометры.

Сочиненіе Sturm'a Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. Lipzig 1892/3, представляетъ обстоятельное изслѣдованіе по теоріи линейчатыхъ конгруэнцій 1-ой и 2-ой степени въ духѣ синтетической геометріи.

Въ то время, какъ нѣмецкіе геометры, слѣдуя Kummer'у и Plücker'у развивали и развиваютъ теорію линейчатыхъ конгруэнцій, такъ сказать, an und für sich, французскіе математики занимаются приложеніемъ этой теоріи къ теоріи поверхностей, являясь такимъ образомъ прямыми послѣдователями Monge'a.

Насколько намъ извѣстно, первымъ обширнымъ трудомъ въ этомъ направленіи является извѣстный мемуаръ Ribaucour'a Etude des élastoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle ¹⁾.

¹⁾ Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. XLIV. 1881.

Въ этомъ блестящемъ мемуарѣ Ribaucour сводитъ изученіе поверхностей *minima* къ изученію изотропныхъ конгруэнцій т. е. конгруэнцій, фокальныя плоскости которыхъ касаются круга на бесконечности.

Цѣлый рядъ новыхъ, весьма важныхъ, результатовъ, масса поставленныхъ и намѣченныхъ задачъ, которые мы находимъ въ этомъ мемуарѣ, являются убѣдительнымъ доказательствомъ важности и плодотворности изученія линейчатыхъ конгруэнцій.

Разсматриваемый мемуаръ представляетъ интересъ и съ другой стороны: въ немъ Ribaucour систематически пользуется методомъ, известнымъ подъ названіемъ *периморфіи*, методомъ, важность котораго еще раньше была доказана работами O. Bonnet, Codazzi, Laguerre'a, Lamé.

Сущность этого метода заключается въ томъ, что мы относимъ точки пространства не къ неподвижной системѣ координатъ, а къ нѣкоторому подвижному триэдру, связанному опредѣленнымъ образомъ съ какой-либо *координатной* поверхностью.

Тѣмъ же методомъ пользуется Ribaucour и въ другомъ своемъ замѣчательномъ мемуарѣ, написанномъ еще въ 1876 году, но напечатанномъ только въ 1891 въ *Journal de mathématiques pures et appliquées*; мы говоримъ о мемуарѣ *Mémoire sur la théorie des surfaces courbes*.

Здѣсь мы встрѣчаемся съ систематическимъ изложеніемъ свойствъ линейчатыхъ конгруэнцій, различнымъ образомъ связанныхъ съ какой-либо поверхностью.

По тѣмъ либо другимъ свойствамъ конгруэнцій, опредѣленнымъ образомъ связанныхъ съ поверхностью, выводится цѣлый рядъ свойствъ, характеризующихъ самую поверхность. Кроме того теорія конгруэнцій даетъ здѣсь возможность изслѣдовать рядъ вопросовъ, касающихся различныхъ соотвѣтствій между поверхностями, какъ на примѣръ, соотношенія, когда касательныя плоскости въ соотвѣтственныхъ точкахъ двухъ поверхностей параллельны; соотношенія, когда всѣ соотвѣтственныя кривыя на двухъ поверхностяхъ взаимно ортогональны и т. п.

Далѣе Ribaucour прилагаетъ полученные результаты къ теоріи тройно-ортогональныхъ системъ, къ теоріи изгибанія поверхностей, къ вопросу о бесконечно-малыхъ деформацияхъ поверхности и еще ко многимъ другимъ.

Мы не можемъ остановиться подробно на разсмотрѣніи того богатаго матеріала, съ которымъ встрѣчаемся въ этомъ мемуарѣ; достаточно сказать, что этотъ мемуаръ явился источникомъ обширныхъ изслѣдованій Darboux, Guichard'a, Cosserat, Bianchi, при чемъ еще и до сихъ поръ много въ высшей степени важныхъ и интересныхъ идей Ribaucour'a, заключающихся въ этомъ мемуарѣ и въ вышеупомянутомъ мемуарѣ *Sur les élassoïdes*, не получили надлежащаго развитія.

Большинство результатовъ, полученныхъ Ribaucour'омъ, мы находимъ въ извѣстномъ сочиненіи Darboux: *Leçons sur la théorie générale des surfaces* и въ лекціяхъ Bianchi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie*.

Изъ трудовъ Cosserat упомянемъ о двухъ обширныхъ мемуарахъ, помѣщенныхъ въ VII и VIII томахъ *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*.

Первый изъ нихъ—*Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces* имѣетъ цѣлью дальнѣйшее развитіе главы вышеупомянутого мемуара Ribaucour'a, посвященной конгруэнціямъ прямыхъ, параллельныхъ нормалямъ нѣкоторой поверхности.

Между вопросами, тѣсно связанными съ теоріей этихъ конгруэнцій и рассмотрѣнными Cosserat, отмѣтимъ вопросъ о сферическомъ изображеніи поверхностей, о деформацияхъ поверхностей съ сохраненіемъ системы сопряженныхъ линій и въ частности линій кривизны (задача O. Bonnet), наконецъ, вопросъ о бесконечно-малыхъ деформацияхъ поверхностей.

Послѣднему изъ этихъ вопросовъ посвященъ другой изъ упомянутыхъ мемуаровъ—*Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible et sur les congruences des droites*.

Въ этомъ мемуарѣ мы находимъ дальнѣйшее развитіе идей Ribaucour'a, касающихся измѣненія Гауссовской кривизны поверхности при переходѣ къ поверхности бесконечно-близкой.

Исходя изъ рассмотрѣнія нѣкоторой линейчатой конгруэнціи, Cosserat изслѣдуетъ бесконечно-малыя деформации поверхности и даетъ рѣшеніе извѣстной задачи Christoffel'я о конформномъ изображеніи одной поверхности на другой.

Мы не будемъ останавливаться на работахъ Guichard'a, посвященныхъ линейчатымъ конгруэнціямъ вообще, и такъ называемымъ *W* конгруэнціямъ въ частности, при чемъ подъ *W* конгруэнціями подразумеваются такія, у которыхъ асимптотическимъ линіямъ одной фокальной поверхности соотвѣтствуютъ асимптотическія линіи другой ¹⁾.

Подробное изложеніе этихъ работъ Cosserat и Guichard'a читатель найдетъ у Darboux въ IV томѣ его *Théorie des surfaces* и у Bianchi въ уже упомянутыхъ *Vorlesungen*.

Не можемъ еще не упомянуть объ интересномъ мемуарѣ Thybaut *Sur la déformation du paraboloides et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* ²⁾.

¹⁾ Guichard. Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables (*Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 3 série. T. VI).

Guichard. Détermination des congruences telles que les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale (*Comptes rendus*. T. CX).

²⁾ *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure* 3 série. T. XIV.

Исходя изъ разсмотрѣнія нѣкоторой линейчатой конгруэнціи, Thubaut даетъ доказательство интересной теоремы Weingarten'a, касающейся вопроса о нахожденіи поверхностей, наложимыхъ на данную ¹⁾, далѣе находитъ связь между задачей о деформации параболоидовъ и задачей объ отысканіи изотермическихъ поверхностей; при этомъ онъ изслѣдуетъ одну весьма интересную W конгруэнцію, фокальная поверхность которой поверхности minima.

Уже изъ этого, далеко неполнаго, перечня вопросовъ, къ рѣшенію которыхъ прилагается теорія линейчатыхъ конгруэнцій, мнѣ кажется, яснымъ значеніе этой теоріи въ теоріи поверхностей; съ нѣкоторымъ рискомъ можно утверждать, что, собственно говоря, всю теорію поверхностей можно разсматривать какъ рядъ частныхъ задачъ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій.

Мы не будемъ болѣе перечислять работъ, посвященныхъ тѣмъ либо инымъ приложеніямъ теоріи линейчатыхъ конгруэнцій, а перейдемъ къ тѣмъ сочиненіямъ, которыя находятся въ тѣсной связи съ нашимъ изслѣдованіемъ.

Въ 1870 году въ Comptes rendus появилась небольшая замѣтка Ribaucour'a Sur la déformation des surfaces, въ которой между прочимъ приведена слѣдующая теорема: *если дана поверхность S съ постоянной кривизной $-\frac{1}{a^2}$, то круги C радиуса a , проведенные въ касательныхъ плоскостяхъ къ поверхности S и имѣющіе центры въ точкахъ касанія, ортогональны къ нѣкоторому семейству поверхностей S_1 . Всѣ послѣднія поверхности имѣютъ ту же постоянную кривизну $-\frac{1}{a^2}$.*

Эта теорема, на которую ни самъ Ribaucour, ни другіе математики не обратили тогда особеннаго вниманія, была вновь найдена Bianchi въ 1879 г. ²⁾ и послужила началомъ такъ называемой теоріи преобразованія поверхностей съ постоянной Гауссовской кривизной.

Результаты, полученные Bianchi были тотчасъ же обобщены Lie въ замѣткѣ Ueber Flächen deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind ³⁾.

Комбинируя преобразованія Bianchi и Lie, мы приходимъ къ нѣкоторому новому преобразованію поверхностей съ постоянной кривиз-

¹⁾ Weingarten. Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (Comptes rendus. T. CXII).

Weingarten. Sur la déformation des surfaces (Acta mathematica. T. XX).

²⁾ Bianchi. Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi (Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa 1879).

Bianchi. Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung (Mathematische Annalen. T. XVI. 1880).

³⁾ Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. T. IV. 1879.

ной, найденному Ваескунд'омъ независимо отъ упомянутыхъ изслѣдованій Bianchi и Lie ¹⁾.

Къ преобразованію Ваескунд'а мы приходимъ при рѣшеніи слѣдующей задачи теоріи линейчатыхъ конгруэнцій: *найти конгруэнцію прямыхъ, у которыхъ разстояніе между фокальными точками и уголъ между фокальными плоскостями постоянны и равны соответственно m и $\frac{\pi}{2} - \sigma$.*

Оказывается, что фокальныя поверхности подобной конгруэнціи имѣютъ постоянную кривизну, равную $-\frac{\cos^2 \sigma}{m^2}$, при чемъ, если мы знаемъ одну фокальную поверхность Σ , то при помощи квадратуръ найдемъ и другую Σ_1 .

Переходъ отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_1 и представляетъ преобразование Ваескунд'а; это преобразование, характеризуемое постоянной σ (при данной кривизнѣ поверхности Σ), символически обозначается черезъ B_σ .

Ясно, что величины σ и m будутъ одновременно дѣйствительными лишь въ томъ случаѣ, когда кривизна поверхности Σ отрицательна.

Такимъ образомъ преобразования Ваескунд'а приводятъ насъ къ дѣйствительнымъ поверхностямъ только при примѣненіи ихъ къ поверхностямъ съ постоянной отрицательной кривизной.

Само собою явился вопросъ, нельзя ли скомбинировать такимъ образомъ два послѣдовательныхъ преобразования Ваескунд'а, чтобы они дали нѣкоторое дѣйствительное преобразование поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной.

Всѣ попытки геометровъ, занимавшихся этимъ вопросомъ, а главнымъ образомъ Bianchi, оставались тщетными до недавняго времени.

Въ 1899 году въ Comptes rendus (23 janvier) появляются безъ доказательства двѣ въ высшей степени интересныя теоремы Guichard'а ²⁾; теоремы эти являются отвѣтомъ на слѣдующій вопросъ: *найти условія, при которыхъ линейчатая конгруэнція, неизмѣнно связанная съ нѣкоторой поверхностью S , остается при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S конгруэнціей нормалей къ поверхностямъ минимума или поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной.*

Въ частности, когда разсматриваемая конгруэнція касается поверхности S вопросъ этотъ былъ рѣшенъ еще раньше Weingarten'омъ ³⁾;

¹⁾ Ваескунд. Om ytor med konstant negativ Krökning (Lunds Univ. Arsskrift. 1913 d. 1883).

²⁾ Guichard. Sur la déformation des quadriques de révolution.

³⁾ Weingarten. Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist (Crelle's Journal. 1862).

Darboux. Théorie des surfaces. T. III.

это то изслѣдованіе Weingarten'a и послужило источникомъ теоремъ Guichard'a.

Доказательства теоремъ Guichard'a при помощи двухъ совершенно различныхъ методовъ появились почти одновременно; одно изъ нихъ принадлежитъ Bianchi и помѣщено въ Atti della R. Accademia dei Lincei (vol. VIII fasc. 4, 1899), что касается второго, то оно дано Darboux въ CXXVIII томѣ Comptes rendus (séances du 27 mars 1899).

Тѣмъ же теоремамъ и слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ нихъ, посвящено еще нѣсколько замѣтокъ обоихъ знаменитыхъ геометровъ; всѣ эти отдѣльныя замѣтки резюмированы въ двухъ большихъ мемуарахъ, а именно въ мемуарѣ Bianchi: Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante ¹⁾ и въ мемуарѣ Darboux: Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les transformations des surfaces à courbure totale constante ²⁾.

Однимъ изъ наиболѣе важныхъ и интересныхъ слѣдствій теоремъ Guichard'a является то, что зная одну изъ поверхностей minima или поверхностей съ постоянной кривизной, нормальныхъ къ конгруэнціи Guichard'a, мы тѣмъ самымъ будемъ знать и другую подобную поверхность.

Такимъ образомъ теорема Guichard'a приводитъ насъ къ нѣкоторому *дѣйствительному* преобразованію поверхностей minima и поверхностей съ постоянной, положительной или отрицательной кривизной.

Естественно было задаться вопросомъ, нельзя ли свести эти преобразованія послѣднихъ поверхностей къ уже извѣстнымъ преобразованіямъ Waescklund'a; на этотъ вопросъ пришлось отвѣтить утвердительно, а именно оказалось, что рассматриваемое преобразование можетъ быть разбито на два послѣдовательныхъ *мнимыхъ* преобразованія Waescklund'a.

Такимъ образомъ окольнымъ путемъ пришли къ частному рѣшенію вопроса о *дѣйствительныхъ* преобразованіяхъ поверхностей съ постоянной положительной кривизной—рѣшенію, которое, какъ мы видѣли, такъ долго ускользало отъ Bianchi и другихъ геометровъ.

Указаннымъ обстоятельствомъ однако не исчерпывается все значеніе теоремъ Guichard'a: дѣйствительно, теоремы эти привели къ нѣкоторому преобразованію Weingarten'овскихъ тройно-ортогональныхъ системъ ³⁾, наконецъ эти теоремы указали на весьма интересную связь, существующую между преобразованіями поверхностей съ постоянной кривизной и вопросомъ о деформаціяхъ поверхностей 2-го порядка.

¹⁾ Annali di Matematica. Serie 3, t. III, 1899.

²⁾ Annales Scientifiques de l'École normale supérieure 3 série, t. XVI, 1899.

³⁾ См. упомянутый выше мемуаръ Bianchi.

Именно оказалось, что геометрическимъ мѣстомъ точекъ пересѣченія соответственныхъ нормалей къ двумъ поверхностямъ постоянной кривизны, изъ которыхъ одна является какъ результатъ послѣдовательнаго примѣненія къ другой двухъ опредѣленнымъ образомъ связанныхъ между собою преобразованій Ваесклюд'а, будетъ поверхность, наложимая на нѣкоторую поверхность вращения 2-го порядка.

Интересъ, представляемый теоремами Guichard'а, побудилъ меня еще въ 1899 году, до ознакомленія съ работами Darboux и Bianchi, заняться ихъ доказательствомъ.

При выводѣ этихъ теоремъ я употребилъ методъ периморфїи такъ, что мое доказательство разнится отъ доказательствъ Darboux и Bianchi.

Какъ оказывается, лучи конгруэнціи Guichard'а лежатъ въ плоскостяхъ кривизны геодезическихъ линій нѣкоторыхъ поверхностей, наложимыхъ на поверхности вращения; при чемъ эти геодезическія линіи представляютъ изгибанія меридіановъ.

Какъ извѣстно изъ теоремы Weingarten'а, упомянутой нами немного выше, эти плоскости касаются нѣкоторой другой поверхности, наложимой тоже на поверхность вращения.

Такимъ образомъ, я естественно натолкнулся на слѣдующую задачу: *найти условія, при которыхъ конгруэнція прямыхъ, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ къ нѣкоторой поверхности S_0 и неизмѣнно съ этими плоскостями связанныхъ, остается конгруэнціей нормалей къ поверхностямъ минимума или постоянной кривизны при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S_0 ; при этомъ само собою разумъется, что касательныя плоскости къ S_0 въ свою очередь неизмѣнно связаны съ поверхностью S_0 .*

Полученное мною рѣшеніе этого вопроса было доложено Харьковскому Математическому Обществу въ засѣданіи 27 октября 1900 г.

Черезъ нѣсколько дней послѣ этого въ Харьковѣ былъ полученъ номеръ Atti della R. Accademia dei Lincei (Volume IX fasc. 6), въ которомъ приведены безъ доказательства аналогичныя теоремы въ замѣткѣ Bianchi: Sulla deformazione delle congruenze e sopra alcune classi di superficie applicabili; доказательствъ этихъ теоремъ Bianchi до сихъ поръ не опубликовалъ.

Хотя, какъ я уже сказалъ, теоремы эти были мнѣ извѣстны раньше, чѣмъ ихъ опубликовалъ Bianchi, тѣмъ не менѣе я называю ихъ *теоремами Bianchi*; эти теоремы читатель найдетъ въ 4-ой главѣ настоящаго изслѣдованія.

Доказательство теоремъ, обратныхъ теоремамъ Guichard'а и дающихъ съ одной стороны преобразование поверхностей съ постоянной кривизной, а съ другой, поверхности, наложимыя на по-

верхности 2-го порядка, мы находимъ въ упомянутомъ мемуарѣ Bianchi. Выводъ основныхъ уравненій, рѣшающихъ вопросъ, у Bianchi довольно сложенъ, при чемъ преобразования ихъ являются совершенно искусственными.

Употребленный мною методъ периморфіи значительно упрощаетъ самый выводъ уравненій, при чемъ эти уравненія сразу получаются въ той формѣ, къ которой Bianchi приводитъ ихъ искусственнымъ путемъ.

Доказательствъ теоремъ, обратныхъ теоремамъ Bianchi, въ упомянутомъ его мемуарѣ, само собою разумѣется, нѣтъ; теоремы эти безъ доказательствъ мы находимъ въ замѣткѣ Bianchi, помѣщенной въ IX томѣ Atti dela Acad. dei Lincei.

Въ ней же дано указаніе на выводъ второй изъ этихъ теоремъ, выводъ, къ которому я не могъ прійти самостоятельно.

Въ заключеніе приведу краткое содержаніе настоящаго изслѣдованія.

Глава первая посвящена выводу основныхъ свойствъ линейчатыхъ конгруэнцій; въ ней же разсмотрѣнъ рядъ частныхъ задачъ, играющихъ существенную роль въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи. Кромѣ того здѣсь я останавливаюсь нѣсколько подробнѣе на теоріи оптическихъ осей, разсмотрѣнныхъ впервые Darboux, при чемъ изслѣдую случай, когда эти оси представляютъ конгруэнціи нормалей—случай, насколько мнѣ извѣстно, не затронутый другими авторами.

Во второй главѣ изслѣдуются подробно фокальныя поверхности конгруэнцій; между прочимъ я вывожу извѣстную теорему Weingarten'a. Бóльшая часть главы посвящена вопросу о преобразованіяхъ поверхностей съ постоянной кривизной. Доказавши *перемѣстительный законъ* Bianchi для поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной, я при помощи его прихожу *прямымъ путемъ* къ нѣкоторому дѣйствительному преобразованію поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной.

При выводѣ перемѣстительнаго закона Bianchi, я ставлю болѣе общую задачу, а именно ищу, какимъ условіямъ должны подчиняться четыре постоянныхъ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, чтобы послѣдовательное примѣненіе преобразованій $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ приводило къ той же поверхности, что и послѣдовательное примѣненіе преобразованій $B_{\sigma_3}, B_{\sigma_4}$. Оказывается, что это возможно лишь въ случаѣ, когда $\sigma_3 = \sigma_2$ и $\sigma_4 = \sigma_1$ т. е. въ случаѣ разсмотрѣнномъ Bianchi.

Третья глава посвящена выводу теоремъ Guichard'a, при чемъ въ ней я указываю на связь между конгруэнціей Guichard'a и нѣкоторой циклической конгруэнціей; связь эта играетъ весьма важную роль при выводѣ теоремъ, обратныхъ теоремамъ Bianchi.

Въ четвертой главѣ я даю доказательство теоремъ Bianchi.

Пятая глава посвящена доказательству теоремъ, обратныхъ теоремамъ Guichard'a и Bianchi для случая поверхностей minima; здѣсь я нахожу интересное преобразование поверхностей minima и указываю на связь между этимъ преобразованиемъ и преобразованиемъ Thybaut, рассмотрѣннымъ имъ въ упомянутомъ выше мемуарѣ Sur la déformation du paraboloidе etc. Кроме того я даю новый выводъ извѣстной теоремы Bonnet о присоединенныхъ поверхностяхъ minima. Преобразование основныхъ уравнений, рѣшающихъ поставленные въ началѣ этой главы вопросы, къ системѣ линейныхъ уравнений находится при помощи свойствъ конгруэнции круговъ, рассмотрѣнной въ третьей главѣ.

Въ шестой и седьмой главахъ рассмотрѣны теоремы, обратныя теоремамъ Guichard'a и Bianchi, относящіяся къ поверхностямъ съ постоянной кривизной. Пользуясь результатами 2-й главы я показываю, какимъ образомъ полученныя преобразования этихъ поверхностей сводятся къ преобразованиямъ Waesklund'a.

Теперь позволю себѣ сказать нѣсколько словъ о томъ методѣ, которымъ я пользуюсь въ настоящемъ изслѣдованіи, а именно о методѣ *периморфіи*.

Какъ мнѣ кажется, преимущество его зиждется на томъ обстоятельстве, что въ немъ система координатъ тѣсно и непосредственно связана съ изучаемой поверхностью или конгруэнціей, между тѣмъ, какъ всякая неподвижная система координатъ представляетъ нѣчто паразитарное, ничѣмъ не связанное съ данной пространственной фигурой.

Далѣе, при употребленіи подвижнаго тріэдра роль поверхности сводится къ роли точки (начала координатъ), что и должно имѣть мѣсто въ дифференціальной геометріи.

Что касается упрековъ методу периморфіи, касающихся введенія кинематики въ геометрію, то вопросъ этотъ въ достаточной степени выясненъ профессоромъ Г. К. Суловымъ въ недавно появившейся статьѣ „Частныя геометрическія производныя отъ векторъ-функціи двухъ аргументовъ“ ¹⁾, къ которой и отсылаю читателя.

Скажемъ только, что въ методѣ периморфіи кинематика входитъ въ геометрію постольку, поскольку геометрія входитъ въ анализъ, когда мы говоримъ о движеніи перемѣнной по плоскости, кривой и т. д.; другими словами, здѣсь мы пользуемся только терминами кинематики.

Однако можно обойтись и безъ этого, какъ это дѣлаетъ Ribaucour въ своихъ мемуарахъ или, въ послѣднее время, Cesaro въ своихъ *Lezioni di geometria intrinseca* ²⁾.

¹⁾ Отчеты и протоколы физико-математическаго общества при Университетѣ св. Владиміра за 1900 годъ.

²⁾ См. также Laurent. *Traité d'analyse*, t. VII.

Что касается понятія о перемѣщеніи (въ зависимости отъ времени), то это понятіе, какъ показали изслѣдованія новѣйшихъ геометровъ Helmholtz'a, Lie, Poincaré и другихъ, тѣсно связано съ нашими пространственными представленіями; да къ тому же бесконечно-малыя перемѣщенія мы постоянно изслѣдуемъ въ дифференціальной геометріи; чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только вникнуть глубже хотя бы въ теорію кривизны линій и поверхностей.

Въ заключеніе считаю своимъ долгомъ выразить искреннюю благодарность Харьковскому Математическому Обществу, давшему мнѣ возможность напечатать настоящее сочиненіе.

Замѣчу слѣдующее сокращеніе, которымъ я пользуюсь во всемъ сочиненіи: при ссылкахъ на *Théorie générale des surfaces* Darboux и на *Vorlesungen über Differentialgeometrie* Bianchi я пишу просто Darboux, Bianchi.

ГЛАВА I.

Общая основа теории линейчатых конгруэнций.

§ 1. Под именем *линейчатой конгруэнции* мы будем подразумевать систему прямых в пространстве, уравнение которых зависит от двух произвольных параметров; прямые, принадлежащая данной линейчатой конгруэнции, назовем ее *лучами*.

Так как координаты точек любой поверхности могут быть выражены как функции двух независимых параметров, то мы всегда можем предположить, что между точками любой поверхности S и лучами любой линейчатой конгруэнции D существует *однозначная* зависимость, т. е. что каждой точке поверхности S соответствует одна прямая конгруэнции D и, наоборот, каждой прямой конгруэнции соответствует одна точка поверхности S .

Устанавливая произвольную зависимость между параметрами, мы получим на поверхности S некоторую кривую; этой кривой будет соответствовать система прямых конгруэнции D , зависящая от одного параметра, т. е. некоторая *линейчатая поверхность*.

Таким образом, всякой кривой поверхности S соответствует одна линейчатая поверхность, образованная лучами конгруэнции D и наоборот; линейчатую поверхность, образованную лучами конгруэнции D , будем называть просто *поверхностью конгруэнции D* .

В числе этих поверхностей конгруэнции, очевидно, могут быть и развертывающиеся поверхности. Кривые, соответствующие на поверхности S развертывающимся поверхностям конгруэнции D , назовем *главными кривыми поверхности S по отношению к конгруэнции D* .

Если мы будем иметь в виду *определенную* поверхность S и *определенную* конгруэнцию D , то эти кривые мы будем называть просто *главными кривыми*.

Докажем теперь, что всякая линейчатая конгруэнция имеет только две, действительные или мнимые, системы развертывающихся поверхностей или, другими словами, что на любой поверхности S существуют две, и только две, системы главных кривых по отношению к какой угодно линейчатой конгруэнции.

Не нарушая общности, мы можем предположить, что однозначное соответствие между лучами конгруэнции D и точками поверхности S таково, что каждой точкѣ поверхности S соответствует опредѣленный, проходящій черезъ нее, лучъ конгруэнции D . Конгруэнцію лучей, связанныхъ подобнымъ образомъ съ поверхностью S , назовемъ конгруэнціей лучей, *падающихъ* на поверхность S .

Каждой системѣ падающихъ лучей D , будетъ соответствовать система лучей *отраженныхъ* D' ; подъ послѣдними мы будемъ подразумѣвать лучи, симметричные съ D по отношенію къ соответственнымъ касательнымъ плоскостямъ къ поверхности S .

Въ нашемъ изслѣдованіи мы будемъ постоянно пользоваться подвижной системой прямоугольныхъ координатъ (T), плоскость xy которыхъ совпадаетъ съ касательными плоскостями къ нѣкоторой поверхности, а начало съ соответственной точкой касанія.

Положеніе такой системы координатъ зависитъ отъ двухъ параметровъ u , v .

Слѣдя Darboux, обозначимъ черезъ ξ , η проэкціи перемѣщеній начала координатъ (T) соответственно на оси x^{000} и y^{000} тѣхъ же координатъ въ предположеніи, что измѣняется одинъ параметръ u , проэкціи соответственнаго вращенія на оси x^{000} , y^{000} и z^{000} обозначимъ черезъ p , q , r . Тѣ же величины, соответствующія измѣняемости одного параметра v , обозначимъ черезъ ξ_1 , η_1 , p_1 , q_1 , r_1 .

Введенныя функціи не произвольны, а удовлетворяютъ шести уравненіямъ Codazzi-Mainardi:

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - q_1r, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - \eta_1 r,$$

$$\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - r_1p, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r\xi_1 - r_1\xi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - p_1q, \quad p\eta_1 - p_1\eta = q\xi_1 - q_1\xi.$$

Всѣ соответственныя формулы читатель найдетъ во II-мъ томѣ „Leçons sur la théorie générale des surfaces“ Darboux pp. 382—386.

Свяжемъ теперь опредѣленнымъ образомъ подобную систему координатъ съ упомянутой нами поверхностью S .

Уравненіе соответствующаго падающаго луча конгруэнции D по отношенію къ осямъ (T) будетъ

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma},$$

а слѣдовательно координаты любой его точки выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma.$$

Предположимъ, что мы отъ опредѣленной точки $M(u, v)$ поверхности S перешли въ точку $M'(u + du, v + dv)$ вдоль по *главной кривой*; тогда точка нашего луча, представляющая точку ребра возврата соответствующей развертывающейся поверхности, должна перемѣститься вдоль самого луча.

Проекціи перемѣщенія любой точки луча на оси T , какъ извѣстно будутъ

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi du + \xi_1 dv + \rho d \cos \alpha + \cos \alpha d \rho + (q du + q_1 dv) \rho \cos \gamma - (r du + r_1 dv) \rho \cos \beta \\ \delta y &= \eta du + \eta_1 dv + \rho d \cos \beta + \cos \beta d \rho + (r du + r_1 dv) \rho \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \rho \cos \gamma \\ \delta z &= \rho d \cos \gamma + \cos \gamma d \rho + (p du + p_1 dv) \rho \cos \beta - (q du + q_1 dv) \rho \cos \alpha. \end{aligned}$$

Для точки, соответствующей ребру возврата разсматриваемой развертывающейся поверхности, перемѣщенія эти должны удовлетворять соотношеніямъ

$$\delta x - \cos \alpha \delta \lambda = 0, \quad \delta y - \cos \beta \delta \lambda = 0, \quad \delta z - \cos \gamma \delta \lambda = 0, \quad (1)$$

гдѣ $\delta \lambda$ коэффициентъ пропорціональности.

Исключая изъ этихъ уравненій ρ и $d\rho = \delta \lambda$, мы получимъ очевидно дифференціальное уравненіе *главныхъ кривыхъ*; оно будетъ вида

$$\begin{vmatrix} \xi du + \xi_1 dv, \cos \alpha, d \cos \alpha + (q du + q_1 dv) \cos \gamma - (r du + r_1 dv) \cos \beta \\ \eta du + \eta_1 dv, \cos \beta, d \cos \beta + (r du + r_1 dv) \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \cos \gamma \\ 0, \cos \gamma, d \cos \gamma + (p du + p_1 dv) \cos \beta - (q du + q_1 dv) \cos \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Уравненіе это второй степени относительно $\frac{du}{dv}$, откуда, и заключаемъ, что черезъ данную точку поверхности проходитъ двѣ, дѣйствительныя или мнимыя, главныя кривыя.

Этимъ двумъ главнымъ кривымъ соответвуютъ двѣ развертывающіяся поверхности нашей конгруэнціи.

Чтобы найти координаты ихъ точекъ возврата, намъ нужно изъ уравненій (1) исключить du , dv и $d\rho = \delta \lambda$; тогда получимъ слѣдующее квадратное уравненіе для опредѣленія ρ

$$\left| \begin{array}{l} \xi + \rho \left(\frac{\partial \cos \alpha}{\partial u} + q \cos \gamma - r \cos \beta \right), \quad \xi_1 + \rho \left(\frac{\partial \cos \alpha}{\partial v} + q_1 \cos \gamma - r_1 \cos \beta \right), \quad \cos \alpha \\ \eta + \rho \left(\frac{\partial \cos \beta}{\partial u} + r \cos \alpha - p \cos \gamma \right), \quad \eta_1 + \rho \left(\frac{\partial \cos \beta}{\partial v} + r_1 \cos \alpha - p_1 \cos \gamma \right), \quad \cos \beta \\ \rho \left(\frac{\partial \cos \gamma}{\partial u} + p \cos \beta - q \cos \alpha \right), \quad \rho \left(\frac{\partial \cos \gamma}{\partial v} + p_1 \cos \beta - q_1 \cos \alpha \right), \quad \cos \gamma \end{array} \right| = 0 \quad (3)$$

Точки, принадлежащія ребрамъ возврата нашихъ развертывающихся поверхностей, носятъ названіе *фокальныхъ точекъ* даннаго луча, при чемъ изъ предыдущаго видно, что на каждомъ лучѣ существуютъ двѣ дѣйствительныя или мнимыя фокальныя точки.

Касательныя плоскости къ соответственнымъ развертывающимся поверхностямъ называются *фокальными плоскостями*

Наконецъ, геометрическое мѣсто фокальныхъ точекъ носить названіе *фокальныхъ поверхностей*; такихъ поверхностей для каждой конгруэнціи будетъ двѣ. Фокальныя поверхности мы можемъ еще разсматривать какъ геометрическое мѣсто реберъ возврата развертывающихся поверхностей конгруэнціи.

Изъ самаго опредѣленія фокальныхъ поверхностей явствуетъ, что всѣ лучи конгруэнціи касаются фокальныхъ поверхностей.

Какъ нетрудно видѣть, все изложенное является обобщеніемъ извѣстныхъ свойствъ нормалей къ поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ, что конгруэнція D состоитъ изъ нормалей къ поверхности S , т. е. что $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = 0$, то уравненіе (2) представитъ дифференціальное уравненіе линій кривизны; уравненіе (3) дастъ намъ радіусы кривизны поверхности S . Фокальными плоскостями въ этомъ случаѣ будутъ плоскости главныхъ сѣченій, а фокальными поверхностями эволюты поверхности S .

§ 2. Посмотримъ теперь, когда лучи нашей конгруэнціи D будутъ представлять систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ .

Для того, чтобы послѣднее обстоятельство имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы на каждомъ лучѣ существовала такая точка, перемѣщенія которой при всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ (u, v) были бы ортогональны къ соответствующему лучу.

Другими словами, если черезъ $\delta x, \delta y, \delta z$ обозначимъ проэкции перемѣщеній этой точки на оси (T) , то для всевозможныхъ значеній (du, dv) должно имѣть мѣсто соотношеніе

$$\delta x \cos \alpha + \delta y \cos \beta + \delta z \cos \gamma = 0. \quad (4)$$

Сдѣлаемъ теперь нѣкоторыя частныя предположенія относительно осей (T) и координатныхъ линій u , v , а именно предположимъ, что за линіи $v = \text{const}$ приняты кривыя, касательныя къ проэктіямъ лучей нашей конгруэнціи на соответственныя касательныя плоскости къ поверхности S ; эти проэктіи мы вмѣстѣ съ тѣмъ примемъ за оси $x^{0\alpha}$ координатъ (T). За кривыя $u = \text{const}$ примемъ кривыя, ортогональныя къ кривымъ $v = \text{const}$; касательныя къ нимъ будутъ осями $y^{0\beta}$ нашей системы (T).

Къ этому случаю мы перейдемъ, полагая въ формулахъ предыдущаго параграфа

$$\xi_1 = \eta = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

При послѣднихъ предположеніяхъ соотношеніе (4) приметъ видъ

$$dq + \xi \cos \alpha \, du = 0. \quad (5)$$

Такъ какъ это соотношеніе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ (du , dv), то отсюда заключаемъ, что искомое условіе будетъ

$$\frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0. \quad (6)$$

Прежде всего мы видимъ, что оно останется справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда мы замѣнимъ α черезъ $-\alpha$ и $\cos \alpha$ черезъ $k \cos \alpha$, гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Но измѣняя α на $-\alpha$, мы, очевидно, переходимъ отъ *падающихъ* лучей къ лучамъ *отраженнымъ*, замѣняя же $\cos \alpha$ черезъ $k \cos \alpha$, мы переходимъ отъ *падающихъ* лучей къ *преломленнымъ*; отсюда мы приходимъ къ знаменитой теоремѣ, найденной впервые для отраженныхъ лучей Malus'омъ, а для преломленныхъ Dupin'омъ и носящей названіе *теоремы Malus—Dupin'a: конгруэнція лучей, представляющая систему нормалей нѣкоторой поверхности, остается конгруэнціей нормалей по-слѣ какого-угодно числа отраженій и преломленій.*

Обращаясь еще къ условію (6), мы видимъ, что въ него входятъ только уголъ α и коэффициентъ линейнаго элемента поверхности S .

Допустимъ теперь, что конгруэнція D неизмѣнно связана съ поверхностью S ; если теперь мы будемъ какъ угодно деформировать поверхность S , то конгруэнція D при этомъ будетъ принимать различныя положенія D' , D'' Такъ какъ для всѣхъ этихъ конгруэнцій условіе (6) будетъ выполнено, то всѣ онѣ будутъ конгруэнціями нормалей.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ Beltrami: *если нѣкоторая линейчатая конгруэнція падающихъ лучей, неизмѣнно*

связанная съ нѣкоторой поверхностью S , представляетъ конгруэнцію нормалей, то она останется такой же при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S .

§ 3. Займемся теперь разсмотрѣніемъ слѣдующаго вопроса: когда главныя кривыя поверхности S по отношенію къ конгруэнціи падающихъ лучей D представляютъ систему сопряженныхъ кривыхъ.

Иначе тотъ же вопросъ можетъ быть формулированъ и такимъ образомъ: когда развертывающіяся поверхности конгруэнціи D соответствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S .

Уравненіе сопряженныхъ линій, какъ извѣстно, будетъ

$$-q\xi dudv + p_1\eta_1 dv^2 + p\eta_1 (dudv + dvdu) = 0;$$

уравненіе главныхъ кривыхъ въ данномъ случаѣ мы получимъ изъ (2), полагая $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\xi_1 = \eta = 0$; оно приметъ видъ

$$\begin{aligned} &\xi \sin \alpha (r \cos \alpha - p \sin \alpha) du^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - q_1 \right) dv^2 + \\ &+ (\xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha - \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} - q_1 \eta) dudv = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Поэтому искомое условіе, очевидно, будетъ

$$\sin \alpha \cos \alpha (p_1 r - p r_1) + q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} - q \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0. \quad (8)$$

Оно не измѣняется при замѣнѣ α черезъ $-\alpha$ т. е. при переходѣ отъ падающихъ къ отраженнымъ лучамъ.

Итакъ: если развертывающіяся поверхности падающихъ лучей соответствуютъ сопряженнымъ кривымъ отражающей поверхности S , то и развертывающіяся поверхности отраженныхъ лучей будутъ соответствовать сопряженнымъ кривымъ поверхности S .

Доказанная нами теорема принадлежитъ Malus'у.

§ 4. Главныя кривыя, соответствующія конгруэнціямъ падающихъ и отраженныхъ лучей, вообще говоря, различны. Посмотримъ, при какихъ условіяхъ онѣ совпадаютъ.

Дифференціальное уравненіе главныхъ кривыхъ отраженныхъ лучей мы получимъ, измѣняя въ (7) α на $-\alpha$; такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\begin{aligned} &\xi \sin \alpha (p \sin \alpha + r \cos \alpha) du^2 + \eta_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} + q_1 \right) dv^2 + \\ &+ (\xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + q_1 \eta) dudv = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Предположимъ сперва, что функціи p и q_1 отличны отъ нуля т. е., что кривыя (u, v) не представляютъ линій кривизны поверхности S .

Чтобы уравненія (7) и (9) были тождественны, необходимо и достаточно, чтобы имѣли мѣсто соотношенія:

$$\frac{r \cos \alpha - p \sin \alpha}{r \cos \alpha + p \sin \alpha} = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial v} - q_1}{\frac{\partial \alpha}{\partial v} + q_1} = \frac{\xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha - \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \eta_1 q}{\xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \eta_1 q}$$

или

$$\frac{p \sin \alpha}{r \cos \alpha} = \frac{q_1}{\frac{\partial \alpha}{\partial v}} = \frac{\xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 q}{\xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u}}. \quad (10)$$

Умножая числителя и знаменателя перваго отношенія на $\xi p_1 \sin \alpha$, втораго на $-q_1 \xi$ и третьяго на $-p$ и складывая полученныхъ числителей, найдемъ въ результатѣ нуль; отсюда заключаемъ, что и сумма полученныхъ знаменателей тоже равна нулю, т. е.

$$\xi \sin \alpha \cos \alpha (p_1 r - p r_1) - q_1 \xi \frac{\partial \alpha}{\partial v} - p \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0, \quad (11)$$

а это ничто иное, какъ наше условіе (8).

Комбинируя теперь два первыхъ отношенія въ выраженіи (10), мы получимъ

$$\eta_1 p \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - q_1 \eta_1 r \cos \alpha = 0$$

или на основаніи формуль Codazzi-Mainardi:

$$\frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0, \quad (12)$$

а это условіе показываетъ, что рассматриваемыя конгруэнціи представляютъ конгруэнціи нормалей.

Итакъ имѣемъ слѣдующую теорему.

Имѣемъ нѣкоторую конгруэнцію падающихъ лучей, плоскости паденія которыхъ не совпадаютъ съ главными сѣченіями отражающей поверхности S . Если развертывающіяся поверхности конгруэнцій падающихъ и отраженныхъ лучей соответствуютъ другъ другу, то 1) какъ падающіе, такъ и отраженные лучи составляютъ конгруэнціи нормалей къ нѣкоторымъ поверхностямъ и 2) развертывающіяся поверхности ихъ соответствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S .

Нетрудно показать, что справедлива и обратная теорема, а именно, что при соблюденіи двухъ послѣднихъ условій, развертывающіяся по-

верхности конгруэнцій падающихъ и отраженныхъ лучей соотвѣтствуютъ другъ другу.

Дѣйствительно, указанные условія выражаются аналитически соотношеніями (11) и (12).

Изъ послѣдняго имѣемъ

$$\frac{r \cos \alpha}{p \sin \alpha} = \frac{\partial \alpha}{q_1}.$$

Умножая числителя и знаменателя перваго отношенія на $\xi p_1 \sin \alpha$, а втораго на $-q\xi$, составляя производную пропорцію и принимая во вниманіе соотношеніе (11), мы легко прійдемъ къ условію (10).

§ 5. Мы оставили въ сторонѣ случай, когда плоскости паденія нашихъ лучей совпадаютъ съ главными сѣченіями отражающей поверхности S , т. е. случай, когда

$$p = q_1 = 0.$$

При послѣднихъ предположеніяхъ условія (10) приводятся къ одному

$$\xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 q = 0. \quad (13)$$

Обозначая черезъ R_1 и R_2 радіусы кривизны нашей поверхности и замѣчая, что

$$R_1 = -\frac{\xi}{q}, \quad R_2 = \frac{\eta_1}{p_1},$$

мы находимъ для угла α слѣдующее выраженіе

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \quad (14)$$

Очевидно, одинъ знакъ будетъ соотвѣтствовать падающимъ лучамъ, а другой отраженнымъ.

Легко видѣть, что лучи рассматриваемой конгруэнціи будутъ дѣйствительны лишь въ случаѣ, когда R_1 и R_2 одного знака т. е. когда Гауссовская кривизна поверхности въ данной точкѣ будетъ положительной; при томъ еще необходимо должно удовлетворяться условіе

$$|R_2| < |R_1|.$$

При выполненіи этихъ условій мы будемъ имѣть двѣ системы прямыхъ

$$y = 0, \quad z = \tan \alpha x; \quad y = 0, \quad z = -\tan \alpha x,$$

развертывающіяся поверхности которыхъ соотвѣтствуютъ другъ другу.

Если мы рассмотрим конгруэнции, составленные из аналогичных лучей, лежащих в плоскости другого главнаго сѣченія поверхности S , то получимъ опять двѣ системы прямыхъ, удовлетворяющихъ поставленнымъ условіямъ, а именно

$$x = 0, \quad z = \operatorname{tang}\beta y, \quad x = 0, \quad z = -\operatorname{tang}\beta y,$$

гдѣ

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Эти прямыя будутъ дѣйствительны при условіи, что Гауссовская кривизна поверхности S положительна и что $|R_1| < |R_2|$.

Мы видимъ, что второе условіе дѣйствительности послѣднихъ прямыхъ противорѣчитъ второму условію дѣйствительности прямыхъ, раньше разсмотрѣнныхъ нами.

Полученныя нами конгруэнціи впервые изслѣдованы Darboux и названы имъ конгруэнціями *оптическихъ осей поверхности S* .

Изъ предыдущаго заключаемъ, что каждая поверхность имѣетъ *четыре* системы оптическихъ осей.

Въ точкахъ поверхности, въ которыхъ кривизна ея положительна, двѣ оптическія оси, лежащія въ одной плоскости, дѣйствительны, а двѣ мнимы; въ точкахъ же, гдѣ Гауссовская кривизна отрицательна, всѣ четыре оптическія оси мнимы.

Для построенія оптическихъ осей въ данной точкѣ поверхности, въ которой Гауссовская кривизна положительна, поступимъ слѣдующимъ образомъ: найдемъ уравненіе прямого круглаго цилиндра, имѣющаго своей осью одну изъ оптическихъ осей и направляющій кругъ произвольнаго радіуса a ; уравненіе подобнаго цилиндра будетъ

$$\cos^2\alpha (z - \operatorname{tang}\alpha x)^2 + y^2 = a^2.$$

Уравненіе пересѣченія этого цилиндра съ касательной плоскостью къ S будетъ, очевидно,

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \frac{a^2}{R_2}, \quad z = 0.$$

а это эллипсъ, подобный Dupin'овской индикатрисѣ данной точки.

Такимъ образомъ *оптическая ось въ данной точкѣ поверхности, въ которой Гауссовская кривизна положительна, представляетъ ось круглаго цилиндра, пересѣкающаго соответственную касательную плоскость по индикатрисѣ Dupin'a, соответствующей точкѣ касанія.*

Послѣднюю теорему можно представить нѣсколько въ иной формѣ.

Уравнение эллипса, представляющего Dupin'овскую индикатрису, будетъ

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1,$$

уравнение фокальной съ нимъ гиперболы

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{R_1 - R_2} - \frac{z^2}{R_2} = \pm 1.$$

Асимптоты этой послѣдней, очевидно, дадутся уравненіемъ

$$y = 0, \quad z = \pm \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}} x,$$

а это ничто иное, какъ уравненіе нашихъ оптическихъ осей, откуда заключаемъ, что *дѣйствительныя оптическія оси представляютъ асимптоты фокальныхъ гиперболъ индикатрисы Dupin'a.*

§ 6. Хотя въ дальнѣйшемъ изложеніи намъ и не придется встрѣтиться съ оптическими осями, однако мы позволимъ себѣ остановиться нѣсколько на ихъ теоріи.

Дѣлаемъ мы это въ виду того, что эта интересная теорія, намѣченная только Darboux, насколько намъ извѣстно, до сихъ поръ не получила дальнѣйшаго развитія.

Вопросъ, которому мы посвятимъ настоящій параграфъ, заключается въ разсмотрѣніи условій, при которыхъ конгруэнція оптическихъ осей нѣкоторой поверхности представляетъ конгруэнцію нормалей.

Замѣчая, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\xi = -qR_1, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_1}}$$

мы можемъ представить условіе (6) въ видѣ

$$\frac{\partial (q \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_1 - R_2})}{\partial v} = 0$$

или еще

$$\frac{\partial \log (q \sqrt{R_1} \cdot \sqrt{R_1 - R_2})}{\partial v} = 0.$$

Пользуясь соотношеніемъ, вытекающимъ изъ формулъ Codazzi-Mainardi

$$\frac{\partial \log q}{\partial v} = \frac{1}{R_2 - R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v},$$

мы преобразуемъ это условіе въ слѣдующее:

$$\frac{1}{2R_1(R_2 - R_1)} \frac{\partial(R_1 R_2)}{\partial v} = \frac{1}{2R_1(R_2 - R_1)} \frac{\partial\left(\frac{1}{K}\right)}{\partial v} = 0,$$

гдѣ черезъ K мы обозначаемъ Гауссовскую кривизну поверхности S .

Отсюда заключаемъ, что K есть функція одного параметра u , другими словами, поверхность S такова, что вдоль линій кривизны, ортогональныхъ къ разсматриваемымъ оптическимъ осямъ, Гауссовская кривизна остается постоянной.

Для того, чтобы всѣ оптическія оси представляли конгруэнціи нормалей, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы кривизна K удовлетворяла условіямъ

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0$$

т. е. чтобы кривизна K была постоянна.

Итакъ *только для поверхностей постоянной кривизны всѣ конгруэнціи оптическихъ осей представляютъ конгруэнціи нормалей.*

Укажемъ еще на одну характерную особенность оптическихъ осей, представляющихъ конгруэнціи нормалей.

Обращаясь къ уравненіямъ, которымъ удовлетворяетъ въ этомъ случаѣ функція α , а именно къ уравненіямъ

$$\frac{\partial(\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0, \quad \xi p_1 \sin^2 \alpha + \eta_1 q = 0,$$

мы преобразуемъ первое изъ нихъ слѣдующимъ образомъ.

Если раскроемъ его, потомъ умножимъ на $p_1 \sin \alpha$ и примемъ во вниманіе второе уравненіе, то придемъ къ слѣдующему соотношенію:

$$r p_1 \cos \alpha - q \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0,$$

а это ничто иное, какъ условіе (8) третьяго параграфа, показывающее, что развертывающіяся поверхности нашей конгруэнціи соотвѣствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S .

Такимъ образомъ мы пришли къ слѣдующей теоремѣ: *если конгруэнція оптическихъ осей некоторой поверхности S представляетъ конгруэнцію нормалей, то развертывающіяся поверхности ея соотвѣтствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S .*

§ 7. Обратимся теперь опять къ изслѣдованіямъ § 3-го, а именно къ тому случаю, когда главные кривыя на поверхности S , соотвѣт-

ствующія нѣкоторой конгруэнціи D , представляютъ системы сопряженныхъ линій.

Допустимъ, что лучи конгруэнціи D неизмѣнно связаны съ поверхностью S ; предположимъ далѣе, что поверхность S деформируется какъ угодно, тогда конгруэнціи D обращается въ конгруэнціи $D', D'' \dots$

Посмотримъ теперь, при какихъ условіяхъ главныя кривыя соответствующихъ поверхностей $S', S'' \dots$ будутъ оставаться сопряженными кривыми.

Здѣсь черезъ $S', S'' \dots$ мы обозначаемъ различныя изгибанія поверхности S .

Прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію поставленнаго вопроса, остановимся нѣсколько на общихъ разсужденіяхъ, играющихъ существенную роль въ нашемъ изслѣдованіи.

Какъ извѣстно, опредѣленіе всѣхъ поверхностей, имѣющихъ данный линейный элементъ или представляющихъ всевозможныя деформации нѣкоторой данной поверхности S приводится къ интегрированію уравненій Codazzi-Mainardi.

Общій интегралъ этихъ уравненій, очевидно, заключаетъ *два* произвольныхъ функціи.

Пусть теперь для нѣкоторой поверхности S существуетъ опредѣленная зависимость между функціями p, q, p_1, q_1

$$f(p, q, p_1, q_1) = 0.$$

Пользуясь уравненіями Codazzi-Mainardi, мы всегда можемъ исключить изъ этой зависимости двѣ какихъ либо функціи, положимъ p, q , и представить ее въ видѣ

$$F(p_1, q_1) = 0.$$

Предположимъ теперь, что послѣдняя зависимость должна имѣть мѣсто при *всевозможныхъ* деформацияхъ поверхности S . Нетрудно показать, что это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда эта зависимость удовлетворяется *тождественно*.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивши противное, мы изъ даннаго соотношенія опредѣлимъ одну изъ функцій p_1, q_1 черезъ другую; для опредѣленія же послѣдней функціи мы будемъ имѣть *два* уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Допуская даже, что эти уравненія сведутся къ одному, мы и тогда получимъ, что при *всевозможныхъ* деформацияхъ поверхности S функціи p, q, p_1, q_1 зависятъ отъ *одной* произвольной функціи — результатъ, очевидно, невѣрный.

Послѣ этихъ замѣчаній перейдемъ къ рѣшенію нашей задачи.

Исключая изъ соотношенія (8) p и q помощью уравненій Codazzi-Mainardi

$$q_1 \xi + p \eta_1 = 0, \quad \xi \eta_1 K = p q_1 - p_1 q,$$

гдѣ K кривизна поверхности, мы приведемъ это соотношеніе къ виду

$$p_1 r \sin \alpha \cos \alpha + q_1 \left(\frac{r_1 \xi}{\eta_1} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) + \frac{\xi \eta_1 K}{p_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\xi}{\eta_1} \frac{q_1^2}{p_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

Въ силу соображеній, приведенныхъ выше, это соотношеніе должно удовлетворяться тождественно, независимо отъ значенія функцій p_1, q_1 .

Такимъ образомъ мы приходимъ къ уравненіямъ

$$r \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad r_1 \xi \cos \alpha \sin \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0. \quad (15)$$

Исключая очевидныя рѣшенія $\alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = 0$, т. е. случаи, когда наша конгруэнція представляетъ либо конгруэнцію нормалей къ S , либо конгруэнцію касательныхъ къ ней, мы найдемъ слѣдующія рѣшенія, выбравъ при этомъ соотвѣтственнымъ образомъ параметры u, v :

$$\xi = 1, \quad \alpha = \varphi(u), \quad \eta_1 = k \cot \alpha = k \omega(u), \quad (16)$$

гдѣ φ и ω произвольныя функціи, а k постоянная величина.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ линейный элементъ поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = du^2 + k^2 \omega^2(u) dv^2$$

т. е. поверхность S наложима на поверхность вращенія.

Если мы черезъ r_0 обозначимъ радіусъ параллели соотвѣтствующей поверхности вращенія, для которой $r_0 = \eta_1$, то на основаніи послѣдняго изъ соотношеній (16), мы видимъ, что уголъ α , составляемый лучомъ нашей конгруэнціи съ касательной къ меридіану, проходящему черезъ соотвѣтствующую точку паденія луча, связанъ съ радіусомъ параллели, проходящей черезъ ту же точку, соотношеніемъ

$$r_0 \tan \alpha = k = \text{const.} \quad (17)$$

Такимъ образомъ находимъ слѣдующую теорему:

Черезъ каждую точку нѣкоторой поверхности вращенія проводимъ въ плоскостяхъ меридіановъ прямыя, составляющія съ соотвѣтственными касательными къ меридіанамъ углы α ; послѣдніе углы опредѣляются изъ соотношенія (17), въ которомъ r_0 представляетъ радіусъ параллели, проходящей черезъ соотвѣтственную точку поверхности S . Предположимъ, что полученная такимъ образомъ конгруэнція D неизмѣнно связана съ поверхностью S . Если теперь будемъ деформировать какъ угодно поверхность S , то главныя линіи поверхностей S по отношенію къ конгруэнціямъ, получаемымъ изъ D , будутъ сопряженными линіями. Тѣмъ же

свойством будут обладать конгруэнции D' , полученные из конгруэнции D путем отражения от соответствующих поверхностей S .

Справедливость послѣдняго утверждения явствует изъ того, что уголъ β , составленный отраженнымъ лучемъ съ соответственной касательной къ меридіану, равенъ $-\alpha$, а слѣдовательно и для него имѣетъ мѣсто соотношение

$$r_0 \operatorname{tang} \beta = -k = \text{const.}$$

§ 8. Въ заключение этой главы рѣшимъ еще одну частную задачу, весьма важную для послѣдующаго изслѣдованія.

Положимъ, что нѣкоторая конгруэнція лучей D , падающихъ на нѣкоторую поверхность S и неизмѣнно съ нею связанныхъ, представляетъ систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ .

Какъ мы видѣли въ § 2, въ такомъ случаѣ отраженные лучи D' будутъ нормальны къ нѣкоторой поверхности Σ_1 .

Изъ результатовъ, полученныхъ въ томъ же §-ѣ слѣдуетъ, что всѣ конгруэнции, получаемыя изъ D и D' при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S , будутъ системами нормалей нѣкоторыхъ поверхностей.

Пусть для нѣкоторой формы поверхности S , поверхности Σ и Σ_1 связаны между собою такой зависимостью, что асимптотическимъ линіямъ одной соответствуютъ асимптотическія линіи другой.

Является вопросъ, когда подобное соотвѣтствіе между поверхностями Σ и Σ_1 сохранится при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S .

Прежде всего выведемъ дифференціальныя уравненія асимптотическихъ линій поверхностей Σ и Σ_1 , исходя изъ извѣстнаго свойства этихъ кривыхъ, заключающагося въ томъ, что онѣ ортогональны къ своимъ сферическимъ изображеніямъ.

Координаты соответственной точки поверхности Σ будутъ

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = 0, \quad z = \rho \sin \alpha,$$

гдѣ на основаніи § 2 функціи ρ и α удовлетворяются уравненіемъ

$$\frac{d\rho}{du} + \xi \cos \alpha = 0, \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0. \quad (18)$$

Координаты соответственной точки поверхности Σ_1 получимъ, измѣняя α на $-\alpha$.

Возьмемъ теперь нѣкоторую произвольную неподвижную точку O и въ ней помѣстимъ начало подвижной системы координатъ (T'), оси которой остаются постоянно параллельными соответственнымъ осямъ системы (T).

Координаты сферического изображения соответственной точки поверхности Σ по отношению къ осямъ (T') будутъ

$$x_1 = \cos\alpha, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \sin\alpha.$$

Если приращенія (du, dv) соотвѣтствуютъ перемѣщенію по поверхности Σ вдоль асимптотической линіи и если черезъ $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ обозначимъ проэкции на оси (T) или (T') перемѣщеній соотвѣтственной точки поверхности Σ и ея сферического изображенія, то по свойству асимптотическихъ линій

$$\delta x \delta x_1 + \delta y \delta y_1 + \delta z \delta z_1 = 0. \quad (19)$$

Ясно, что послѣднее уравненіе и представить дифференціальное уравненіе искомымъ асимптотическимъ линіямъ поверхности Σ .

Дифференціальное уравненіе тѣхъ же линій для поверхности Σ_1 , получимъ изъ (19), замѣняя вездѣ α черезъ $-\alpha$.

Замѣчая, что

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi du + \cos\alpha d\rho - \rho \sin\alpha (d\alpha - q du - q_1 dv), \\ \delta y &= \eta_1 dv + \rho[(r du + r_1 dv) \cos\alpha - (p du + p_1 dv) \sin\alpha], \\ \delta z &= \sin\alpha d\rho + \rho \cos\alpha (d\alpha - q du - q_1 dv) \end{aligned}$$

и что

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= -\sin\alpha (d\alpha - q du - q_1 dv), \\ \delta y_1 &= (r du + r_1 dv) \cos\alpha - (p du + p_1 dv) \sin\alpha, \\ \delta z_1 &= \cos\alpha (d\alpha - q du - q_1 dv), \end{aligned}$$

мы послѣ несложныхъ вычисленій приведемъ уравненіе (19) къ виду

$$(M \pm N) du^2 + (M_1 \pm N_1) dv^2 + (M_2 \pm N_2) dudv = 0,$$

гдѣ M, M_1, M_2 четныя, а N, N_1, N_2 нечетныя функціи отъ α , а именно

$$M = -\xi \sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \rho \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \rho q^2 + \rho r^2 \cos^2 \alpha + \rho p^2 \sin^2 \alpha,$$

$$N = \xi q \sin\alpha - 2\rho q \frac{\partial \alpha}{\partial u} - 2\rho r p \cos\alpha \sin\alpha,$$

$$M_1 = \eta_1 r_1 \cos\alpha + \rho \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \rho q_1^2 + \rho r_1^2 \cos^2 \alpha + \rho p_1^2 \sin^2 \alpha,$$

$$N_1 = -\eta_1 p_1 \sin\alpha - 2\rho q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial v} - 2\rho r_1 p_1 \cos\alpha \sin\alpha,$$

$$M_2 = -\xi \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} + 2\rho \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + 2\rho q q_1 + \eta_1 r \cos \alpha + 2\rho r r_1 \cos^2 \alpha + 2\rho p p_1 \sin^2 \alpha,$$

$$N_2 = \xi q_1 \sin \alpha - 2\rho q_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} - 2\rho q \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \eta_1 p \sin \alpha - 2\rho r p_1 \cos \alpha \sin \alpha - 2\rho r_1 p \cos \alpha \sin \alpha.$$

Нижнимъ знакамъ соотвѣтствуетъ уравненіе ассимптотическихъ кривыхъ поверхности Σ_1 .

Ясно, что условія соотвѣтствія ассимптотическихъ линій на поверхностяхъ Σ и Σ_1 будутъ вида

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1} = \frac{M_2}{N_2}$$

и представляютъ два квадратныхъ уравненія относительно функции ρ .

Самихъ уравненій вслѣдствіе ихъ сложности мы выписывать не будемъ.

Исключая изъ этихъ уравненій помощью уравненій Codazzi-Mainardi функции p и p_1 , замѣчая, что въ силу разсужденій § 7 полученные уравненія должны удовлетворяться независимо отъ значеній функций q и q_1 , мы придемъ къ слѣдующимъ условіямъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0, \quad r = 0, \quad \xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0, \\ 2\rho^2 \left[r_1 \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \xi \eta_1 K \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right] - \rho \xi \sin \alpha \left(3r_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \xi \eta_1 K \sin \alpha \right) - \\ - \xi \eta_1 \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

здѣсь черезъ K обозначена Гауссовская кривизна поверхности S .

Къ этимъ уравненіямъ мы должны присоединить еще уравненія (18).

На основаніи перваго изъ условій (20), выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u , можемъ положить

$$\alpha = u.$$

Второе изъ этихъ условій, а именно $r = 0$, показываетъ, что ξ есть функция одного параметра u и что слѣдовательно линіи $v = \text{const}$ геодезическія.

Пользуясь третьимъ условіемъ, находимъ, что при соотвѣтственномъ выборѣ параметра v можемъ положить

$$\eta_1 = k \cotang u,$$

гдѣ k постоянная.

Отсюда заключаемъ, что поверхности S наложимы на поверхности вращения.

Послѣднее изъ условій (20) даетъ намъ для ρ два значенія

$$\rho_1 = \frac{\xi \sin u}{2}, \quad \rho_2 = \frac{\xi^2 \cos u}{\frac{d\xi}{du} + 3\xi \cotang u}. \quad (21)$$

Разсмотримъ оба эти случая отдѣльно.

Для опредѣленія функции ξ можетъ служить первое изъ уравненій (18).

Въ первомъ случаѣ уравненіе это принимаетъ видъ

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{du} + 3 \frac{\cos u}{\sin u} = 0,$$

откуда для ξ находимъ выраженіе

$$\xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

гдѣ a постоянная.

Итакъ въ этомъ случаѣ линейный элементъ поверхности S будетъ вида

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^6 u} du^2 + k^2 \cotang^2 u dv^2.$$

Какъ увидимъ впоследствии, поверхность S наложима на *параболоидъ вращения*.

Во второмъ случаѣ для опредѣленія ξ поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Опредѣляя изъ перваго изъ уравненій (18) $\cos u$ и вставляя его значеніе въ уравненіе (21), получимъ

$$\frac{d \log(\rho \xi)}{du} = -3 \cotang u,$$

откуда

$$\rho \xi = \frac{a}{\sin^3 u},$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная.

Подставляя полученное значеніе ξ въ первое изъ уравненій (18), мы приведемъ его къ виду

$$\rho \frac{d\rho}{du} + \frac{a \cos u}{\sin^3 u} = 0,$$

откуда легко найдемъ, что

$$\varrho^2 = \frac{a}{\sin^2 u} + m,$$

гдѣ m новая постоянная.

Зная теперь ϱ , мы найдемъ выраженіе для ξ , а именно

$$\xi = \frac{a}{\sin^2 u \sqrt{a + m \sin^2 u}}.$$

Такимъ образомъ линейный элементъ поверхности S будетъ

$$ds^2 = \frac{a^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} du^2 + k^2 \cotang^2 u dv^2.$$

Въ дальнѣйшемъ мы увидимъ, что соотвѣтственные поверхности въ зависимости отъ значеній постоянныхъ m и a будутъ наложимы на пять различныхъ поверхностей вращенія, а именно: 1) при $m > 0$ и $a > 0$ поверхность S наложима на *двуполый гиперболоидъ вращенія*; 2) при $m > 0$ и $a < 0$ на *эллипсоидъ вращенія около большой оси*; 3) при $m > 0$ и $a > -m > 0$ — на *гиперболическій синусоидъ вращенія*, уравненіе котораго

$$x^2 + y^2 = (a + m) \sinh^2 \frac{z}{\sqrt{-m}};$$

4) при $m < 0$ и $0 < a < -m$ на *укороченный или удлинненный катеноидъ*, уравненіе котораго

$$x^2 + y^2 = -(m + a) \cosh^2 \frac{z}{\sqrt{-m}}$$

и, наконецъ, 5) при $m < 0$ и $a = -m$ — на *логарифмическую поверхность вращенія*, уравненіе которой

$$2z = \sqrt{-m} \log(x^2 + y^2).$$

Эти поверхности вмѣстѣ съ параболоидомъ вращенія мы будемъ называть *основными поверхностями вращенія*.

Конгруэнціи падающихъ и отраженныхъ лучей, рассмотрѣнныя нами въ этомъ параграфѣ, мы назовемъ *присоединенными къ нимъ конгруэнціями*.

Резюмируя результаты, полученные нами въ этомъ параграфѣ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *если предположимъ, что при всевозможныхъ деформацияхъ одной изъ основныхъ поверхностей вращенія S съ нею неизмѣнно связаны присоединенныя конгруэнціи падающихъ и отраженныхъ лучей D и D' , то на поверхностяхъ Σ и Σ_1 , ортогональныхъ соотвѣтственно къ лучамъ конгруэнцій D и D' асимптотическія линіи соотвѣтствуютъ другъ другу.*

Г Л А В А II.

Фокальные поверхности линейчатой конгруэнции. Теорема Weingarten'a. Преобразования поверхностей постоянной кривизны.

§ 1. Въ предыдущей главѣ мы опредѣлили фокальныя поверхности какъ геометрическое мѣсто реберъ возврата всѣхъ развертывающихся поверхностей конгруэнции.

Въ настоящей главѣ мы познакомимся ближе съ нѣкоторыми свойствами этихъ фокальныхъ поверхностей.

Изъ самого ихъ опредѣленія слѣдуетъ, что всѣ лучи конгруэнции касаются своихъ фокальныхъ поверхностей.

Примемъ одну изъ этихъ поверхностей за поверхность S предыдущей главы; согласно принятымъ тамъ условіямъ, лучи нашей конгруэнции совпадутъ съ осями x^{000} подвижной системы координатъ (T) .

Найдемъ фокальныя точки нашей конгруэнции и соответствующія ей главныя кривыя поверхности S .

Выберемъ опредѣленную точку O поверхности S ; если теперь мы дадимъ параметрамъ u, v приращенія du, dv , соответствующія перемѣщенію точки O по одной изъ главныхъ кривыхъ, то перемѣщеніе соответствующей фокальной точки рассматриваемаго луча нашей конгруэнции, по самому опредѣленію фокальныхъ точекъ, будетъ направлено вдоль луча т. е. вдоль оси x^{000} ; другими словами, проэкции ея перемѣщенія на оси y^{000} и z^{000} будутъ равны нулю.

Если (x, o, o) будутъ координаты соответственной фокальной точки, а $\delta x, \delta y, \delta z$ проэкции ея перемѣщеній на оси (T) , то въ рассматриваемомъ случаѣ

$$\delta y = \eta_1 dv + (rdu + r_1 dv)x = 0, \quad \delta z = -(qdu + q_1 dv)x = 0.$$

Отсюда находимъ два значенія для x :

$$x = 0, \quad x = \frac{q\eta_1}{rq_1 - r_1q}; \quad (1)$$

что касается дифференціальныхъ уравненій двухъ соответствующихъ главныхъ кривыхъ, то они будутъ

$$dv = 0, \quad qdu + q_1 dv = 0. \quad (2)$$

Первое рѣшеніе для x , даетъ точку O поверхности S , второе— точку O_1 второй фокальной поверхности, которую мы будемъ обозначать черезъ S_1 .

Обѣ эти поверхности совпадутъ, когда q будетъ равно нулю т. е. когда линіи $v = \text{const}$ будутъ *асимптотическими линіями*.

Этотъ случай мы оставимъ въ сторонѣ.

Замѣчая теперь, что уравненіе сопряженныхъ линій на поверхности S

$$-q\delta du\delta u + p_1\eta_1 dv\delta v + p\eta_1 (du\delta v + dv\delta u) = 0$$

удовлетворится тождественно, если положимъ въ немъ

$$dv = 0, \quad q\delta u + q_1\delta v = 0,$$

мы приходимъ къ заключенію, что на *фокальныхъ поверхностяхъ главныхъ кривыхъ представляютъ сопряженные линіи*.

Къ тому же результату мы могли бы прійти прямо, замѣтивъ, что уравненіе (8) предыдущей главы удовлетворяется при α равномъ нулю.

§ 2. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію *фокальныхъ плоскостей* нашей конгруэнціи.

Возьмемъ на оси x^{000} нѣкоторую точку $(x, 0, 0)$; касательная плоскость въ этой точкѣ къ линейчатой поверхности, которую опишетъ ось x при измѣненіи параметровъ (u, v) на величины du, dv , соответствующія перемѣщенію начала координатъ вдоль опредѣленной кривой, будетъ

$$z = \text{tang}\theta y,$$

гдѣ $\text{tang}\theta$ опредѣляется изъ условія

$$\text{tang}\theta = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-x(q\delta u + q_1\delta v)}{\eta_1\delta v + x(r\delta u + r_1\delta v)}.$$

Полагая, что начало координатъ перемѣстилось вдоль одной изъ главныхъ кривыхъ (2) или, что то же, что ось x описала развертывающуюся поверхность, мы получимъ, что при $q\delta u + q_1\delta v = 0$ и $\delta v = 0$ значенія $\text{tang}\theta$ будутъ соответственно

$$\text{tang}\theta_1 = 0, \quad \text{tang}\theta_2 = -\frac{q}{r},$$

а слѣдовательно уравненія соответственныхъ фокальныхъ плоскостей будутъ

$$z = 0, \quad qy + rz = 0. \quad (3)$$

Отсюда видимъ, что первая фокальная плоскость касается поверхности S .

Обозначая через δx , δy , δz проекции перемещений второй фокальной точки, легко найдемъ, что для всевозможныхъ значенийъ du , dv имѣеть мѣсто соотношение

$$q\delta y + r\delta z = 0$$

т. е. что вторая фокальная плоскость касается второй фокальной поверхности.

Такимъ образомъ фокальныя поверхности мы можемъ разсматривать какъ обертки фокальныхъ плоскостей.

Положимъ теперь, что наша конгруэнция представляетъ конгруэнцию нормалей къ некоторой поверхности Σ т. е., что на каждомъ лучѣ ея существуетъ такая точка $(x, 0, 0)$, перемещения которой ортогональны къ соответственному лучу при какихъ угодно бесконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ u , v .

Условіе, что проекции перемещений этой точки на ось x^{000} равны нулю, будетъ

$$dx + \xi du = 0, \quad (4)$$

откуда находимъ, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta_1 r = 0; \quad (5)$$

последнее условіе показываетъ, что кривыя $v = \text{const}$ *геодезическія кривыя* поверхности S , которая представляетъ, очевидно, одну изъ полъ эволюты поверхности Σ

Итакъ *конгруэнция нормалей представляютъ касательныя къ геодезическимъ линіямъ своихъ фокальныхъ поверхностей.*

Обращаясь къ уравненіямъ фокальныхъ плоскостей и исключая случай $q = 0$, находимъ, что для конгруэнции нормалей $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ т. е. *фокальныя плоскости взаимно перпендикулярны.*

Координаты соответственной точки второй фокальной поверхности будутъ въ этомъ случаѣ

$$x = -\frac{\eta_1}{r_1}, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad (6)$$

Обращаясь къ исключенному нами случаю, когда $q = 0$, мы видимъ, что тогда кривыя $v = \text{const}$ обратятся въ прямыя, такъ какъ онѣ должны быть одновременно и геодезическими и асимптотическими линіями поверхности S .

Последняя поверхность будетъ линейчатой; ея прямолинейныя образующія $v = \text{const}$ будутъ представлять лучи нашей конгруэнции.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ линейчатая конгруэнція дегенерируетъ въ линейчатую поверхность.

Легко показать, что поверхность Σ , нормальная къ лучамъ конгруэнціи обратится въ кривую линію.

Въ самомъ дѣлѣ, проэкции перемѣщеній ея соотвѣтственной точки $(x, 0, 0)$ будутъ

$$\delta x = 0, \quad \delta y = (\eta_1 + r_1 x) dv, \quad \delta z = -q_1 x dv,$$

откуда видимъ, что при $v = \text{const}$ имѣемъ $\delta x = \delta y = \delta z = 0$.

Изъ послѣдняго обстоятельства и слѣдуетъ, что Σ обратится въ кривую линію.

Этотъ случай мы совершенно исключаемъ изъ нашего изслѣдованія.

§ 3. Какъ извѣстно, Weingarten первый обратилъ вниманіе на весьма интересный классъ поверхностей, характеризуемыхъ тѣмъ, что между ихъ радіусами кривизны въ каждой точкѣ существуетъ нѣкоторая зависимость съ постоянными коэффициентами ¹⁾.

Поверхности эти обыкновенно называютъ поверхностями W .

Если черезъ R_1 и R_2 обозначимъ радіусы кривизны какой-либо поверхности, то условіе, что она принадлежитъ къ классу поверхностей W , аналитически выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial R_2}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

Положимъ теперь, что разсмотрѣнная нами въ предыдущихъ параграфахъ конгруэнція представляетъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности W .

Посмотримъ, какимъ условіямъ будетъ подчиняться при этомъ фокальная поверхность S .

Въ силу условія $\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0$ мы можемъ всегда положить функцію ξ равной единицѣ.

Обозначимъ черезъ x_1 абсциссу соотвѣтственной точки нашей поверхности W ; она опредѣлится изъ уравненія (4) предыдущаго параграфа, а именно:

$$x_1 = -(u + c),$$

гдѣ c произвольная постоянная.

¹⁾ Weingarten. Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist (Journal de Crelle t. LXII).

Не нарушая общности, мы можем положить $c=0$, такъ какъ различнымъ значеніямъ c будутъ соответствовать параллельныя между собою поверхности W .

Если по предыдущему черезъ R_1 и R_2 обозначимъ радіусы кривизны разсматриваемой поверхности W , а черезъ ϱ_1 и ϱ_2 абсциссы фокальныхъ точекъ луча, то на основаніи (6) будемъ имѣть

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = -\frac{\eta_1}{r_1} = -\frac{\eta_1}{\frac{\partial \eta_1}{\partial u}},$$

а слѣдовательно для R_1 и R_2 найдемъ слѣдующія выраженія

$$R_1 = x_1 - \varrho_1 = -u, \quad R_2 = x_1 - \varrho_2 = -u + \frac{\eta_1}{\frac{\partial \eta_1}{\partial u}}.$$

При этихъ значеніяхъ R_1 и R_2 условіе (7) приметъ видъ:

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial v} = 0,$$

или слѣдовательно

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u} \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \eta_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ для η_1 слѣдующее выраженіе

$$\eta_1 = UV,$$

гдѣ U функція одного параметра u , а V —одного параметра v .

Выбравши приличнымъ образомъ параметръ v , мы можемъ положить функцію V равнойъ единицѣ.

Итакъ линейный элементъ поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2 \quad (8)$$

т. е. поверхность S наложима на поверхность вращенія. Такимъ образомъ мы пришли къ теоремѣ Weingarten'a.

Теорема Weingarten'a. Эволюты поверхностей W наложимы на поверхности вращенія.

Нетрудно доказать и обратную теорему, а именно: если поверхность S наложима на поверхность вращенія, то касательныя къ кривымъ, являющимся изгибаніями меридіановъ поверхности вращенія, представляютъ систему нормалей къ некоторой поверхности W ; это обстоятельство имѣетъ мѣсто при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S .

Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что линейный элементъ поверхности S приведенъ къ формѣ (8), мы непосредственно убѣждаемся, что касательныя къ кривымъ $v = \text{const}$ представляютъ систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ .

Радиусы кривизны этой поверхности дадутся выраженіями

$$R_1 = -u, \quad R_2 = -u + \frac{U}{U'}. \quad (9)$$

Исключая изъ этихъ выраженій параметръ u , найдемъ определенную зависимость съ постоянными коэффициентами между R_1 и R_2 .

Такъ какъ эта зависимость вполне определяется видомъ функціи U , представляющей коэффициентъ линейнаго элемента поверхности S , то она останется неизмѣнной при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S .

§ 4. Итакъ мы видимъ, что зная нѣкоторую поверхность съ линейнымъ элементомъ (8), мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ соответственную поверхность W .

Наоборотъ, если будетъ имѣть нѣкоторую определенную поверхность W , то тѣмъ самымъ опредѣлимъ поверхность вращенія, на которую наложима эволюта данной поверхности W .

Въ самомъ дѣлѣ, если радиусы кривизны R_1 и R_2 поверхности W связаны соотношеніемъ

$$f(R_1, R_2) = 0,$$

то исключая R_1, R_2 изъ этого соотношенія и соотношеній (9), мы найдемъ дифференціальное уравненіе перваго порядка для опредѣленія U .

Разберемъ здѣсь два простыхъ примѣра.

Положимъ, что данная поверхность W поверхность минимума, т. е., что между ея радиусами кривизны имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$R_1 + R_2 = 0.$$

Для опредѣленія U , получимъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{2u},$$

откуда $U = k\sqrt{u}$, гдѣ k постоянная.

Линейный элементъ поверхности S будетъ

$$ds^2 = du^2 + k^2 u dv^2,$$

а это, какъ извѣстно, линейный элементъ поверхности, наложимой на эволюту катеноида.

Положимъ теперь, что поверхность W — поверхность съ постоянной кривизной $\frac{1}{m}$, тогда

$$R_1 R_2 = m.$$

Для опредѣленія функціи U имѣемъ уравненіе

$$\frac{U'}{U} = \frac{u}{u^2 - m},$$

откуда

$$U = \sqrt{u^2 - m}.$$

Линейный элементъ поверхности S будетъ вида

$$ds^2 = du^2 + (u^2 - m) dv^2.$$

Если $m < 0$, т. е. если соответственная поверхность W имѣетъ отрицательную кривизну, то, какъ это легко видѣть, поверхность S наложима на катеноидъ.

Въ случаѣ $m > 0$ она наложима на поверхность вращения

$$z = \int \frac{(1 - k^2)r^2 + mk^4}{\sqrt{(k^2r^2 - mk^4)[(1 - k^2)r^2 + mk^4]}} dr,$$

гдѣ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

§ 5. Перейдемъ ко второй фокальной поверхности S_1 .

Нетрудно показать, что и она, какъ это впрочемъ ясно и à priori, наложима на поверхность вращения.

Координаты ея соответственной точки будутъ

$$x = -\frac{\eta_1}{\frac{d\eta_1}{du}}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

при чемъ здѣсь $\eta_1 = U$.

Проекціи ея перемѣщеній на оси (T), очевидно, будутъ

$$\delta x = -\frac{\eta_1 \frac{d^2\eta_1}{du^2}}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2} du, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \frac{\eta_1}{\frac{d\eta_1}{du}} (q du + q_1 dv),$$

а слѣдовательно ея линейный элементъ имѣетъ форму

$$ds_1^2 = \frac{\eta_1^2 \left(\frac{d^2\eta_1}{du^2}\right)^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^4} du^2 + \frac{\eta_1^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du}\right)^2} (q du + q_1 dv)^2.$$

Легко теперь показать, что въ данномъ случаѣ выраженіе $\eta_1(qdu + q_1dv)$ представляетъ полный дифференціалъ нѣкоторой функціи w ; въ самомъ дѣлѣ условіе полного дифференціала

$$\frac{\partial(\eta_1 q)}{\partial v} = \frac{\partial(\eta_1 q_1)}{\partial u}$$

обращается въ слѣдующее

$$q + \eta_1 p = 0,$$

а это одно изъ уравненій Codazzi-Mainardi.

Такимъ образомъ линейный элементъ поверхности S_1 можетъ быть представленъ въ видѣ

$$ds_1^2 = \frac{\eta_1^2 \left(\frac{d^2 \eta_1}{du^2} \right)^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du} \right)^4} du^2 + \frac{dw^2}{\left(\frac{d\eta_1}{du} \right)^2}. \quad (10)$$

Такъ какъ здѣсь η_1 функція только одного параметра u , то отсюда слѣдуетъ, что поверхность S_1 наложима на поверхность вращения.

Двѣ поверхности S и S_1 , наложимыя на поверхности вращения и представляющія двѣ полы эволюты нѣкоторой поверхности W , носятъ названіе *дополнительныхъ* другъ къ другу поверхностей.

§ 6. Сдѣлаемъ теперь небольшое отступленіе и выведемъ формулы, которыми намъ придется часто пользоваться.

Пусть имѣемъ нѣкоторую подвижную систему прямоугольныхъ координатъ (T) , положеніе которой зависитъ отъ двухъ параметровъ u, v .

Проекціи перемѣщенія начала этихъ координатъ на ихъ оси въ предположеніи, что измѣняется одинъ параметръ u , обозначимъ черезъ ξ, η, ζ ; проекціи на тѣ же оси соответственнаго вращения обозначимъ черезъ p, q, r . Тѣ же величины, относящіяся къ измѣняемости одного параметра v , обозначимъ черезъ $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1$.

Выберемъ опредѣленное положеніе осей (T) и затѣмъ дадимъ параметрамъ u, v приращенія du, dv .

Оси (T) при этомъ примутъ новое положеніе, которое мы обозначимъ черезъ (T') .

Найдемъ теперь зависимость между координатами (x, y, z) какой-либо точки по отношенію къ (T) и ея координатами (x', y', z') по отношенію къ (T') .

Возьмемъ произвольную неподвижную точку пространства M ; условіе ея неподвижности выразится тѣмъ, что проекціи ея перемѣ-

щений δx , δy , δz при всевозможныхъ измѣненіяхъ параметровъ u , v будутъ равны нулю т. е.

$$\delta x = dx + \xi du + \xi_1 dv + (qdu + q_1 dv)z - (rdu + r_1 dv)y = 0,$$

$$\delta y = dy + \eta du + \eta_1 dv + (rdu + r_1 dv)x - (pdu + p_1 dv)z = 0,$$

$$\delta z = dz + \zeta du + \zeta_1 dv + (pdu + p_1 dv)y - (qdu + q_1 dv)x = 0.$$

Здѣсь dx , dy , dz проеціи перемѣщенной нашей точки по отношенію къ осямъ координатъ т. е. до бесконечно-малыхъ высшихъ порядковъ они представляютъ величины $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$.

Отсюда мы и получаемъ искомыя формулы преобразованія:

$$x' = x - (\xi du + \xi_1 dv) - (qdu + q_1 dv)z + (rdu + r_1 dv)y,$$

$$y' = y - (\eta du + \eta_1 dv) - (rdu + r_1 dv)x + (pdu + p_1 dv)z, \quad (11)$$

$$z' = z - (\zeta du + \zeta_1 dv) - (pdu + p_1 dv)y + (qdu + q_1 dv)x.$$

§ 7. Послѣ этого отступленія перейдемъ къ выводу дифференціального уравненія сопряженныхъ кривыхъ на поверхности S_1 , дополнительной къ поверхности S съ линейнымъ элементомъ (8).

Возьмемъ на поверхности S нѣкоторую точку O ; соответственная точка дополнительной поверхности S_1 пусть будетъ O_1 .

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1 получимъ, полагая $r = 0$ во второмъ изъ уравненій (3); оно будетъ,

$$y = 0.$$

Перейдемъ теперь по нѣкоторой кривой изъ точки O въ точку O' , этому переходу будутъ соответствовать приращенія параметровъ du , dv ; точку, соответствующую на поверхности S_1 , точкѣ O' , обозначимъ черезъ O_1' .

Оси (T) примутъ положеніе (T') ; по отношенію къ этимъ послѣднимъ осямъ уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1' , очевидно, будетъ

$$y' = 0,$$

а слѣдовательно на основаніи формулъ предыдущаго §^a уравненіе ея по отношенію къ осямъ (T) имѣетъ видъ

$$y - r_1 dvx + (pdu + p_1 dv)z - \eta_1 dv = 0.$$

Предѣльное положеніе прямой пересѣченія этой плоскости съ плоскостью $y = 0$ представляетъ, какъ извѣстно, касательную къ кривой, сопряженной съ кривой $O_1 O_1'$.

Уравненія этой прямой таковы:

$$y = 0, \quad r_1 dvx - (pdu + p_1 dv)z + \eta_1 dv = 0.$$

Обозначимъ теперь черезъ $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ проэкции перемѣщенія точки O_1 по поверхности S_1 въ направленіи, сопряженномъ съ $O_1 O_1'$; соотвѣтственныя приращенія параметровъ обозначимъ черезъ δu , δv ; тогда дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности S_1 будетъ

$$r_1 d\delta_1 x - (p\delta u + p_1 \delta v) \delta_1 z = 0$$

или слѣдовательно

$$q\xi d\delta u \delta v - p_1 \eta_1 d\delta v \delta u - p\eta_1 (d\delta u \delta v + \delta v d\delta u) = 0, \quad (12)$$

а это уравненіе сопряженныхъ кривыхъ поверхности S .

Итакъ: *дополнительныя поверхности связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ одной соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ другой.*

Иначе эту теорему можно выразить такимъ образомъ: *на двухъ дополнительныхъ поверхностяхъ ассимптотическія линіи соотвѣтствуютъ другъ другу.*

Послѣднее слѣдуетъ изъ того, что мы получимъ дифференціальное уравненіе ассимптотическихъ линій на поверхности S_1 , полагая въ уравненіи (12) $d\delta u = \delta u$, $d\delta v = \delta v$; полученное такимъ образомъ уравненіе тождественно съ уравненіемъ ассимптотическихъ кривыхъ поверхности S .

§ 8. Разсмотримъ теперь одну частную задачу, играющую весьма важную роль въ теоріи поверхностей съ постоянной Гауссовской кривизной.

Предположимъ, что поверхность S , представляющая одну изъ фокальныхъ поверхностей нѣкоторой конгруэнціи нормалей, дѣйствительна.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ разстояніе между соотвѣтственными точками поверхности S и другой фокальной поверхности S_1 той же конгруэнціи будетъ величиной постоянной m .

Величинѣ m будемъ приписывать какъ дѣйствительныя, такъ и комплексныя значенія, т. е. будемъ предполагать, что поверхность S_1 дѣйствительная или мнимая.

Такъ какъ на основаніи (6) координаты соотвѣтственной точки поверхности S_1 будутъ

$$x = -\frac{\eta_1}{r_1}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

то, полагая $\xi = 1$, для опредѣленія η_1 въ данномъ случаѣ имѣемъ дифференціальное уравненіе

$$m \frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \eta_1 = 0,$$

откуда, выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ v , найдемъ, что

$$\eta_1 = e^{-\frac{u}{m}}. \quad (13)$$

Итакъ линейный элементъ поверхности S выражается слѣдующимъ образомъ:

$$ds^2 = du^2 + e^{-\frac{2u}{m}} dv^2,$$

откуда заключаемъ, что поверхность S имѣетъ постоянную Гауссовскую кривизну $-\frac{1}{m^2}$.

Такъ какъ мы предполагаемъ, что S поверхность дѣйствительная, то число $\frac{1}{m^2}$ должно быть числомъ дѣйствительнымъ, а это возможно лишь тогда, когда m будетъ дѣйствительнымъ либо чисто мнимымъ.

Въ первомъ случаѣ поверхность S будетъ имѣть отрицательную, а во второмъ—положительную кривизну.

Такимъ образомъ видимъ, что только въ случаѣ, когда кривизна поверхности S отрицательна, вторая фокальная поверхность S_1 будетъ дѣйствительной.

Такъ какъ поверхность S наложима на поверхность вращенія и такъ какъ кривыя $v = \text{const}$ представляютъ изгибанія меридіановъ, то по теоремѣ Weingarten'а, рассматриваемая нами конгруэнція нормалей представляетъ систему нормалей къ нѣкоторой поверхности W .

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что поверхности S и S_1 *дополнительныя*.

Поэтому линейный элементъ поверхности S_1 получимъ изъ (10), полагая $\eta_1 = e^{-\frac{u}{m}}$; онъ будетъ

$$ds_1^2 = du^2 + m^2 e^{\frac{2u}{m}} dv^2,$$

а это тоже линейный элементъ поверхности съ постоянной кривизной $-\frac{1}{m^2}$.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *если конгруэнція нормалей такова, что разстояніе между фокальными точками каждаго луча равно постоянной m , то 1) лучи конгруэнціи нормальны къ нѣкоторой поверхности W и 2) Гауссовская кривизна ея фокальныхъ поверхностей равна постоянной $-\frac{1}{m^2}$.*

Переходъ отъ поверхности постоянной кривизны къ ея дополнительной въ случаѣ, разсмотрѣнномъ нами, носить названіе *преобразования Bianchi или дополнительнаго преобразования*.

Не останавливаясь на этомъ преобразованіи, перейдемъ къ болѣе общему преобразованію поверхностей, указанному впервые Bäcklund'омъ для поверхностей постоянной отрицательной кривизны ¹⁾.

Къ этому преобразованію приводитъ насъ рѣшеніе задачи, являющейся обобщеніемъ задачи, рѣшенной нами въ настоящемъ параграфѣ.

§ 9. Задачу предыдущаго параграфа мы можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ: изслѣдовать свойства фокальныхъ поверхностей нѣкоторой конгруэнціи при условіи, что 1) разстояніе между соответственными точками обѣихъ фокальныхъ поверхностей величина постоянная m и 2) что уголъ между фокальными плоскостями равенъ $\frac{\pi}{2}$.

Обобщеніе, которое мы сдѣлаемъ, относится ко второму изъ указанныхъ условій, а именно: мы предположимъ, что уголъ между фокальными плоскостями равенъ нѣкоторой постоянной $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

По предыдущему постояннымъ m и σ будемъ давать какъ дѣйствительныя, такъ и комплексныя значенія.

Замѣчая, что на основаніи (1) разстояніе между соответственными точками поверхностей S и S_1 равно $\frac{q\eta_1}{rq_1 - qr_1}$ и что уравненія фокальныхъ плоскостей разсматриваемой конгруэнціи

$$z = 0, \quad qy + rz = 0,$$

мы выразимъ аналитически наши условія слѣдующимъ образомъ

$$q = -r \cotang \sigma, \quad \eta_1 q = m(rq_1 - qr_1). \quad (14)$$

Рѣшая эти уравненія относительно q и q_1 , получимъ

$$q = -r \cotang \sigma, \quad q_1 = -\cotang \sigma \left(r_1 + \frac{\eta_1}{m} \right),$$

откуда, пользуясь формулами Codazzi-Mainardi, легко найдемъ, что

$$\frac{pq_1 - p_1q}{\sin^2 \sigma} = -\frac{\xi \eta_1 \cotang^2 \sigma}{m^2}.$$

¹⁾ Bäcklund. Om ytor med konstant negativ krökning (Lunds Univ Arsskrift, 19. Bd. 1883).

Такъ какъ выраженіе $\frac{\rho q_1 - p_1 q}{\xi \eta_1}$ представляетъ Гауссовскую кривизну K поверхности S , то послѣднее соотношеніе можетъ быть написано въ слѣдующей формѣ

$$K = -\frac{\cos^2 \sigma}{m^2} = \text{const.} \quad (15)$$

Итакъ и въ этомъ случаѣ кривизна фокальной поверхности S постоянна.

Найдемъ Гауссовскую кривизну второй фокальной поверхности S_1 .

Для этого поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе нормали къ поверхности S_1 въ соответственной точкѣ, какъ легко видѣть, будетъ

$$x = m, \quad y \sin \sigma + z \cos \sigma = 0.$$

Координаты центровъ кривизны поверхности S_1 будутъ

$$x = m, \quad y = \rho \cos \sigma, \quad z = -\rho \sin \sigma,$$

гдѣ ρ опредѣлится изъ условія, что перемѣщеніе соответствующаго центра кривизны будетъ направлено вдоль нормали, когда мы дадимъ параметрамъ u, v приращенія du, dv , соответствующія какой-либо линіи кривизны поверхности S_1 .

Такимъ образомъ для подобныхъ приращеній имѣемъ:

$$\delta x = 0, \quad \sin \sigma \delta y + \cos \sigma \delta z = 0. \quad (16)$$

Исключая изъ этихъ соотношеній отношеніе $\frac{du}{dv}$, найдемъ квадратное уравненіе относительно ρ , корнями котораго будутъ значенія радиусовъ кривизны поверхности S_1 въ соответственной точкѣ.

Уравненіе это будетъ

$$\frac{m \eta_1 \cos \sigma}{m} \rho^2 - (\rho_1 \xi - m \eta_1 \cotang \sigma) \rho - \frac{m \rho \eta_1}{\cos \sigma} = 0.$$

Такъ какъ Гауссовская кривизна поверхности S_1 равна $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$, гдѣ ρ_1 и ρ_2 корни послѣдняго уравненія, то для нея найдемъ выраженіе

$$K_1 = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = -\frac{\cos^2 \sigma}{m^2} = K;$$

отсюда видимъ, что кривизна поверхности S_1 тоже постоянна и равна кривизнѣ поверхности S .

Итакъ: если конгруэнція лучей такова, что разстояніе между фокальными точками каждаго луча и уголъ между фокальными плоскостя-

ми постоянны, то ея фокальныя поверхности имѣютъ одну и ту же постоянную кривизну.

Изъ выраженія (15) видимъ, что постоянныя m и σ могутъ быть одновременно дѣйствительными лишь въ томъ случаѣ, когда кривизна фокальныхъ поверхностей отрицательна.

Переходъ отъ поверхности постоянной отрицательной кривизны S къ поверхности S_1 , составляющей съ нею другую фокальную поверхность разсмотрѣнной нами конгруэнціи, носить названіе *преобразованія Bäcklund'a*.

Сами линейчатая конгруэнціи въ этомъ случаѣ называются *псевдосферическими конгруэнціями*.

§ 10. Исключая q изъ уравненій (16), мы, очевидно, получимъ дифференціальное уравненіе линій кривизны поверхности S_1 .

Уравненіе это въ силу соотношеній (14) будетъ:

$$\left| \begin{array}{cc} \xi du, & \frac{\eta_1 \cos \sigma}{m} dv \\ \frac{m}{\sin \sigma} (r du + r_1 dv) + \frac{\eta_1 dv}{\sin \sigma}, & p du + p_1 dv \end{array} \right| = 0$$

или, наконецъ,

$$p \xi du^2 + (p_1 \xi + q \eta_1) du dv + q_1 \eta_1 dv^2 = 0,$$

а это дифференціальное уравненіе линій кривизны на поверхности S .

Итакъ: *если разстояніе между фокальными точками лучей нѣкоторой линейчатой конгруэнціи и уголъ между ея фокальными плоскостями постоянны, то на фокальныхъ поверхностяхъ конгруэнціи линіи кривизны соответствуютъ другъ другу.*

§ 11. Въ § 7 мы доказали болѣе общую теорему, относящуюся къ дополнительнымъ поверхностямъ, а именно, что каждой системѣ сопряженныхъ кривыхъ одной поверхности соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ другой.

Посмотримъ, не имѣетъ ли мѣста эта теорема для разсматриваемыхъ нами теперь конгруэнцій.

При выводѣ дифференціального уравненія сопряженныхъ кривыхъ поверхности S_1 будемъ пользоваться тѣмъ же методомъ, который мы употребили въ § 7.

Возьмемъ опять двѣ соотвѣтственные точки поверхностей S и S_1 ; первую изъ нихъ обозначимъ черезъ O , вторую черезъ O_1 .

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1 будетъ

$$z = \cotang \sigma y.$$

Давая параметрамъ u, v приращения du, dv мы передвинемся изъ точки O въ точку O' , при чемъ точка O_1 перейдетъ по поверхности S_1 въ точку O_1' .

Оси (T) примутъ при этомъ положеніе (T') ; уравненіе касательной плоскости къ поверхности S_1 въ точкѣ O_1' по отношенію къ послѣднимъ осямъ будетъ

$$z' = \cotang \sigma \cdot y'.$$

То же уравненіе по отношенію къ (T) имѣетъ видъ ¹⁾

$$z - (pdu + p_1 dv)y + (qdu + q_1 dv)x = \cotang \sigma [y - (rdu + r_1 dv)x + (pdu + p_1 dv)z].$$

Уравненіе прямой, проходящей черезъ начало координатъ (T) и параллельной касательной къ кривой, сопряженной съ кривой $O_1 O_1'$, будетъ

$$[(qdu + q_1 dv) + \cotang \sigma (rdu + r_1 dv)]x - (pdu + p_1 dv)y - \cotang \sigma (pdu + p_1 dv)z = 0,$$

$$z = \cotang \sigma \cdot y;$$

поэтому, если черезъ $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$ обозначимъ проэкции перемѣщеній по поверхности S_1 въ направленіи, сопряженномъ съ направленіемъ $O_1 O_1'$, то искомое дифференціальное уравненіе сопряженныхъ линий получимъ, подставляя въ первое уравненіе $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z$ вмѣсто x, y, z .

Обозначая соотвѣтственные приращения параметровъ черезъ $\delta u, \delta v$, замѣчая, что

$$\delta_1 x = \xi \delta u, \quad \delta_1 y = \eta \delta v + (r\delta u + r_1 \delta v) m, \quad \delta_1 z = -(q\delta u + q_1 \delta v) m$$

и воспользовавшись уравненіями Codazzi-Mainardi и соотношеніями (14), мы приведемъ это уравненіе къ виду

$$pq\delta u \delta u + p_1 q_1 \delta v \delta v + p q_1 (\delta u \delta v + \delta v \delta u) = 0.$$

Послѣднее уравненіе представляетъ дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ поверхности S .

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если фокальныя разстоянія лучей нѣкоторой конгруэнции и уголъ между ея фокальными плоскостями постоянны, то каждой системѣ сопряженныхъ кривыхъ одной фокальной поверхности соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ другой.

Иначе ту же теорему можно формулировать и такъ: на фокальныхъ поверхностяхъ разсматриваемыхъ конгруэнцій ассимптотическія линіи соотвѣтствуютъ другъ другу.

¹⁾ См. § 6 этой главы.

§ 12. Перейдемъ теперь къ болѣе подробному разсмотрѣнію Bäcklund'овскаго преобразованія.

Для этой цѣли воспользуемся нѣсколько иной системой координатъ, а именно на поверхности S , кривизну которой, не нарушая общности, положимъ равной -1 , за координатныя кривыя примемъ линіи кривизны $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Координаты (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы оси x и y касались соотвѣтственно кривыхъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$

Какъ извѣстно ¹⁾, въ этомъ случаѣ мы можемъ положить

$$\xi = \cos\omega, \quad \eta_1 = \sin\omega, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = \cos\omega, \quad q = \sin\omega$$

$$r = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha};$$

здѣсь функція ω удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega \cos\omega. \quad (17)$$

Послѣднее условіе представляетъ ничто иное, какъ условіе, что кривизна поверхности S равна -1 .

Разсмотримъ конгруэнцію касательныхъ къ поверхности S , составляющихъ съ осью x уголъ θ ; уравненіе такой касательной по отношенію къ (T) будетъ

$$z = 0, \quad x \sin\theta - y \cos\theta = 0. \quad (18)$$

Уголъ θ постараемся подобрать такимъ образомъ, чтобы выбранная нами конгруэнція прямыхъ (18) удовлетворяла двумъ условіямъ: 1) разстояніе между ея фокальными точками m должно быть постоянно и 2) уголъ $\frac{\pi}{2} - \theta$ между ея фокальными плоскостями тоже долженъ быть постояннымъ.

Очевидно, одной изъ фокальныхъ поверхностей нашей конгруэнціи будетъ поверхность S , что же касается координатъ соотвѣтственной точки O_1 другой фокальной поверхности S_1 , то онѣ будутъ

$$x = m \cos\theta, \quad y = m \sin\theta, \quad z = 0.$$

Дадимъ параметрамъ α , β приращенія $d\alpha$, $d\beta$, соотвѣтствующія перемѣщенію по поверхности S вдоль одной изъ главныхъ кривыхъ ея по отношенію къ разсматриваемой конгруэнціи.

¹⁾ Darboux. Théorie des surfaces t. III pp. 377—378.

Выберемъ ту изъ главныхъ кривыхъ, которой соотвѣтствуетъ перемѣщеніе точки O_1 вдоль прямой (18); если черезъ δx , δy , δz обозначимъ проэкціи перемѣщеній точки O_1 , то рассматриваемое перемѣщеніе будетъ характеризоваться двумя соотношеніями

$$\sin\theta\delta x - \cos\theta\delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

которыя должны быть совмѣстны.

Замѣчая, что

$$\begin{aligned} \delta x &= \cos\omega d\alpha - m\sin\theta d\theta - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) m\sin\theta, \\ \delta y &= \sin\omega d\beta + m\cos\theta d\theta + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) m\cos\theta, \\ \delta z &= m(\cos\omega \sin\theta d\beta - \sin\omega \cos\theta d\alpha), \end{aligned} \quad (19)$$

мы приведемъ эти соотношенія къ виду

$$\begin{aligned} \left[m \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \right) - \sin\theta \cos\omega \right] d\alpha + \left[m \left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \right) + \cos\theta \sin\omega \right] d\beta &= 0, \\ \sin\omega \cos\theta d\alpha - \cos\omega \sin\theta d\beta &= 0. \end{aligned}$$

Условіемъ ихъ совмѣстности будетъ, очевидно, уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка относительно функціи θ :

$$\begin{aligned} \left[m \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \right) - \cos\omega \sin\theta \right] \cos\omega \sin\theta + \\ + \left[m \left(\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \right) + \sin\omega \cos\theta \right] \sin\omega \cos\theta &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Перейдемъ къ выводу втораго условія.

Уравненіе всякой плоскости, проходящей черезъ прямую (18), будетъ вида

$$\sin\theta x - \cos\theta y + kz = 0,$$

гдѣ k произвольный множитель.

Опредѣлимъ k такимъ образомъ, чтобы соотвѣтственная плоскость представляла фокальную плоскость нашей конгруэнціи.

На прямой (18) возьмемъ произвольную точку P съ координатами

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = 0.$$

Дадимъ параметрамъ (α, β) приращенія $d\alpha, d\beta$, тогда прямая (18) опишетъ нѣкоторую линейчатую поверхность; точка P при этомъ, очевидно, перемѣстится въ касательной плоскости къ этой поверхности, проведенной въ точкѣ P .

Поэтому для опредѣленія множителя k , соотвѣствующаго послѣдней плоскости, имѣемъ соотношеніе

$$\sin\theta\delta x - \cos\theta\delta y + k\delta z = 0,$$

откуда, подставляя вмѣсто δx , δy , δz ихъ значенія, получимъ

$$k = \frac{\rho \left(d\theta + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta \right) - \sin\theta \cos\omega d\alpha + \cos\theta \sin\omega d\beta}{\rho (\cos\omega \sin\theta d\beta - \sin\omega \cos\theta d\alpha)}.$$

Предположимъ теперь, что приращенія $d\alpha$, $d\beta$ соотвѣтствуютъ передвиженію начала координатъ (T) вдоль главной кривой т. е., другими словами, положимъ, что при этомъ измѣненіи параметровъ прямая (18) описываетъ развертывающуюся поверхность.

Какъ извѣстно, касательная плоскость къ развертывающейся поверхности будетъ одна и та же вдоль всей образующей; слѣдовательно въ этомъ случаѣ коэффициентъ k не долженъ зависѣть отъ значенія ρ .

Отсюда для фокальной плоскости имѣемъ слѣдующія условія

$$d\theta + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta - k (\cos\omega \sin\theta d\beta - \sin\omega \cos\theta d\alpha) = 0,$$

$$\sin\theta \cos\omega d\alpha - \cos\theta \sin\omega d\beta = 0.$$

Эти условія будутъ совмѣстны, когда θ будетъ удовлетворять уравненію

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} + k\cos\theta \sin\omega \right] \cos\theta \sin\omega +$$

$$+ \left[\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - k\sin\theta \cos\omega \right] \sin\theta \cos\omega = 0. \quad (21)$$

Постоянная k представляетъ, какъ это легко видѣть, $\cot\alpha\eta$ угла, составляемаго рассматриваемой фокальной плоскостью съ плоскостью $z = 0$ т. е. въ данномъ случаѣ $k = \tan\sigma$.

Въ § 9 мы видѣли, что при данной кривизнѣ поверхности S между угломъ σ и постоянной m существуетъ соотношеніе (15). Въ данномъ случаѣ это соотношеніе приметъ форму

$$m^2 = \cos^2\sigma;$$

слѣдовательно, обозначая черезъ μ постоянную, связанную съ m соотношеніемъ

$$\mu^2 + m^2 = 1, \quad (22)$$

мы можемъ представить k въ видѣ $\frac{\mu}{m}$.

Рѣшая теперь уравненія (19) и (20) относительно производныхъ $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \theta}{\partial \beta}$, придемъ къ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= -\frac{\mu \cos \theta \sin \omega}{m} + \frac{\sin \theta \cos \omega}{m}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= \frac{\mu \sin \theta \cos \omega}{m} - \frac{\cos \theta \sin \omega}{m}. \end{aligned} \quad (23)$$

Легко показать, что эти уравненія будутъ совмѣстны.

Для упрощенія вычисленій введемъ вмѣсто параметровъ α , β параметры u , v

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2};$$

какъ нетрудно замѣтить, кривыя $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ представляютъ ассимптотическія лініи поверхности S .

При этой замѣнѣ переменныхъ уравненія (23) преобразуются въ слѣдующія:

$$\frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \mu}{m} \sin(\theta - \omega), \quad \frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial v} = \frac{1 - \mu}{m} \sin(\theta + \omega); \quad (24)$$

что касается уравненія (17), которому удовлетворяетъ функція ω , то оно обратится въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega. \quad (25)$$

Теперь уже простымъ дифференцированіемъ убѣдимся, что условіемъ совмѣстности уравненій (24) будетъ уравненіе (25).

Если изъ (24) исключимъ ω , то получимъ для θ уравненіе

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \sin \theta \cos \theta,$$

или въ прежнихъ параметрахъ α , β

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} = \sin \theta \cos \theta. \quad (26)$$

Принимая во вниманіе соотношенія (23), мы найдемъ слѣдующія выраженія для проэкцій перемѣщенія точки O_1 поверхности S_1 :

$$\begin{aligned} \delta x &= \cos \theta (\cos \theta \cos \omega + \mu \sin \theta \sin \omega) d\alpha + \sin \theta [\cos \theta \sin \omega - \mu \sin \theta \cos \omega] d\beta, \\ \delta y &= \cos \theta (\sin \theta \cos \omega - \mu \cos \theta \sin \omega) d\alpha + \sin \theta (\sin \theta \sin \omega + \mu \cos \theta \cos \omega) d\beta, \\ \delta z &= -m \cos \theta \sin \omega d\alpha + m \sin \theta \cos \omega d\beta. \end{aligned} \quad (27)$$

Поэтому, если обратимъ вниманіе на соотношеніе (22), то для линейнаго элемента поверхности S_1 получимъ выраженіе

$$ds_1^2 = \cos^2\theta d\alpha^2 + \sin^2\theta d\beta^2. \quad (28)$$

При этой формѣ линейнаго элемента условіе (26) показываетъ, что Гауссовская кривизна поверхности S_1 равна -1 .

Такъ какъ на основаніи теоремы § 10 кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ представляютъ линіи кривизны поверхности S_1 , то изъ формы линейнаго элемента (28) и изъ того же уравненія (26) видно, что функція θ играетъ для поверхности S_1 ту же роль, что функція ω для поверхности S .

Если мы въ полученныхъ соотношеніяхъ положимъ $\sigma = 0$, а слѣдовательно $m = 1$, $\mu = 0$, то найдемъ формулы для *преобразованія Bianchi*.

§ 13. Займемся теперь доказательствомъ замѣчательной теоремы Bianchi, названной имъ *перемѣстительнымъ закономъ*.

Сущность этой теоремы заключается въ слѣдующемъ.

Какъ мы видѣли въ предыдущихъ параграфахъ, всякое преобразование Bäcklund'a характеризуется нѣкоторой постоянной σ .

Будемъ обозначать символически черезъ B_σ Bäcklund'овское преобразование, помощью котораго мы переходимъ отъ одной поверхности постоянной отрицательной кривизны къ другой, при чемъ характеристической постоянной этого преобразованія будетъ σ .

Возьмемъ теперь двѣ какихъ угодно постоянныхъ σ_1 и σ_2 .

Теорема Bianchi состоитъ въ томъ, что примѣняя послѣдовательно къ нѣкоторой поверхности постоянной отрицательной кривизны S два преобразованія B_{σ_1} , B_{σ_2} , мы придемъ къ той же поверхности, къ которой приводятъ тѣ же преобразованія, но примѣненные въ обратномъ порядкѣ.

Символически теорему Bianchi можно выразить слѣдующимъ образомъ:

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_2} B_{\sigma_1}.$$

Мы поставимъ себѣ болѣе общую задачу, а именно посмотримъ, какимъ условіямъ должны удовлетворять четыре Bäcklund'овскихъ преобразованія B_{σ_1} , B_{σ_2} , B_{σ_3} , B_{σ_4} , чтобы послѣдовательное примѣненіе къ нѣкоторой поверхности S постоянной отрицательной кривизны двухъ преобразованій B_{σ_1} , B_{σ_2} , приводило къ той же поверхности S_2 , что и послѣдовательное примѣненіе къ S преобразованій B_{σ_3} , B_{σ_4} .

Другими словами, рѣшимъ вопросъ, когда возможно символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4}.$$

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ. Черезъ S_1 обозначимъ поверхность, къ которой мы перейдемъ отъ данной поверхности S при

помощи преобразования B_{σ_1} ; через S_3 обозначимъ поверхность, получаемую изъ S помощью преобразования B_{σ_3} .

Наконецъ черезъ S_2 обозначимъ ту поверхность, къ которой перейдемъ отъ S_1 помощью преобразования B_{σ_1} , либо отъ S_3 помощью преобразования B_{σ_4} .

Мы пока допускаемъ существованіе подобной поверхности S_2 , а потомъ выведемъ условія, при которыхъ она на самомъ дѣлѣ существуетъ.

Линейные элементы поверхностей S_1 , S_3 , S_2 , отнесенныхъ къ линиямъ кривизны, пусть будутъ соотвѣтственно

$$ds_1^2 = \cos^2\theta_1 d\alpha^2 + \sin^2\theta_1 d\beta^2, \quad ds_3^2 = \cos^2\theta_3 d\alpha^2 + \sin^2\theta_3 d\beta^2,$$

$$ds_2^2 = \cos^2\Omega d\alpha^2 + \sin^2\Omega d\beta^2.$$

Функции θ_1 , θ_3 , Ω , по предыдущему, должны удовлетворять уравненію вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sin f \cos f,$$

гдѣ

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Наконецъ положимъ, что

$$m_h = \cos\sigma_h, \quad \mu_h = \sin\sigma_h,$$

гдѣ h принимаетъ значенія 1, 2, 3, 4.

Найдемъ координаты по отношенію къ (T) соотвѣтственной точки поверхности S_2 .

Замѣтимъ прежде всего, что \cos 'ы угловъ a , b , c и a' , b' , c' , составляемыхъ касательными къ кривымъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ въ соотвѣтственныхъ точкахъ поверхности S_1 съ осми координатъ (T) , будутъ имѣть на основаніи (27) слѣдующій видъ: для касательныхъ къ кривымъ $\beta = \text{const}$

$$\cos a = \cos\omega \cos\theta_1 + \mu_1 \sin\omega \sin\theta_1, \quad \cos b = \cos\omega \sin\theta_1 - \mu_1 \sin\omega \cos\theta_1,$$

$$\cos c = -m_1 \sin\omega,$$

для касательныхъ къ кривымъ $\alpha = \text{const}$:

$$\cos a_1 = \sin\omega \cos\theta_1 - \mu_1 \cos\omega \sin\theta_1, \quad \cos b_1 = \sin\omega \sin\theta_1 + \mu_1 \cos\omega \cos\theta_1,$$

$$\cos c_1 = m_1 \cos\omega.$$

Для касательныхъ къ тѣмъ же кривымъ, проведеннымъ на поверхности S_3 будемъ имѣть аналогичныя выраженія, въ которыхъ только индексъ 1 долженъ быть замѣненъ индексомъ 3.

Проекціи радіуса вектора, соединяющаго соотвѣтственныя точки поверхностей S_1 и S_2 на касательныя къ линіямъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности S_1 , будутъ $m_2 \cos \Omega$ и $m_2 \sin \Omega$; поэтому искомыя координаты соотвѣтственной точки поверхности S_2 будутъ

$$\begin{aligned} x_2 &= m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_1 \cos (\Omega - \omega) - \mu_1 m_2 \sin \theta_1 \sin (\Omega - \omega), \\ y_2 &= m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_1 \cos (\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 \cos \theta_1 \sin (\Omega - \omega), \\ z_2 &= m_1 m_2 \sin (\Omega - \omega). \end{aligned} \quad (29)$$

Если будемъ разсматривать S_2 какъ результатъ послѣдовательнаго примѣненія преобразованій B_{σ_3} , B_{σ_4} , то тѣ же координаты должны быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x_2 &= m_3 \cos \theta_3 + m_4 \cos \theta_3 \cos (\Omega - \omega) - \mu_3 m_4 \sin \theta_3 \sin (\Omega - \omega), \\ y_2 &= m_3 \sin \theta_3 + m_4 \sin \theta_3 \cos (\Omega - \omega) + \mu_3 m_4 \cos \theta_3 \sin (\Omega - \omega), \\ z_2 &= m_3 m_4 \sin (\Omega - \omega). \end{aligned} \quad (30)$$

Сравнивая выраженія (29) и (30), мы получимъ прежде всего, что

$$m_1 m_2 = m_3 m_4; \quad (31)$$

кромѣ того найдемъ слѣдующія уравненія для опредѣленія функціи Ω :

$$\begin{aligned} (m_2 \cos \theta_1 - m_4 \cos \theta_3) \cos (\Omega - \omega) + (\mu_3 m_4 \sin \theta_3 - \mu_1 m_2 \sin \theta_1) \sin (\Omega - \omega) &= \\ = m_3 \cos \theta_3 - m_1 \cos \theta_1, \\ (m_2 \sin \theta_1 - m_4 \sin \theta_3) \cos (\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \cos \theta_1 - \mu_3 m_4 \cos \theta_3) \sin (\Omega - \omega) &= \\ = m_3 \sin \theta_3 - m_1 \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Послѣднія два уравненія будутъ совмѣстны, если опредѣленныя изъ нихъ функціи $\sin (\Omega - \omega)$ и $\cos (\Omega - \omega)$ будутъ удовлетворять соотношенію

$$\sin^2 (\Omega - \omega) + \cos^2 (\Omega - \omega) = 1.$$

Выраженія для $\sin (\Omega - \omega)$ и $\cos (\Omega - \omega)$, какъ легко видѣть, таковы:

$$\begin{aligned} \sin (\Omega - \omega) &= \frac{m_3 (\mu_3 - \mu_1) \sin (\theta_1 - \theta_3)}{m_2 (1 - \mu_1 \mu_3) - m_1 m_2 m_3 \cos (\theta_1 - \theta_3)}, \\ \cos (\Omega - \omega) &= \frac{m_3 (1 - \mu_1 \mu_3) \cos (\theta_1 - \theta_3) - m_1 m_3^2}{m_2 (1 - \mu_1 \mu_3) - m_1 m_2 m_3 \cos (\theta_1 - \theta_3)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Возводя обѣ части этихъ выраженій въ квадратъ и складывая полученныя выраженія, мы должны въ суммѣ получить единицу; послѣднее условіе ведетъ къ соотношенію

$$\begin{aligned} & m_3^2 (\mu_3 - \mu_1)^2 + m_1^2 m_3^4 - 2m_1 m_3^3 (1 - \mu_1 \mu_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) + \\ & + m_3^2 [(1 - \mu_1 \mu_3)^2 - (\mu_3 - \mu_1)^2] \cos^2(\theta_1 - \theta_3) = \\ = & m_2^2 (1 - \mu_1 \mu_3)^2 - 2m_1 m_2^2 m_3 (1 - \mu_1 \mu_3) \cos(\theta_1 - \theta_3) + m_1^2 m_2^2 m_3^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_3); \end{aligned}$$

это соотношеніе должно быть простымъ тождествомъ.

Отсюда мы приходимъ къ единственному условію

$$m_3^2 = m_2^2. \quad (33)$$

Сопоставляя это условіе съ (31), мы приходимъ къ слѣдующимъ зависимостямъ:

$$m_4 = \pm m_1, \quad m_3 = \pm m_2$$

Такъ какъ между постоянными μ_h и m_h существуетъ соотношеніе $m_h^2 + \mu_h^2 = 1$, то отсюда заключаемъ, что

$$\mu_4 = \pm \mu_1, \quad \mu_3 = \pm \mu_2; \quad (34)$$

знаки здѣсь должны быть взяты такимъ образомъ, чтобы функція Ω , опредѣленная изъ выраженій (32), удовлетворяла уравненіямъ

$$\frac{\partial(\Omega + \theta_1)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_2}{m_2} \sin(\Omega - \theta_1), \quad \frac{\partial(\Omega - \theta_1)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_2}{m_2} \sin(\Omega + \theta_1), \quad (35)$$

$$\frac{\partial(\Omega + \theta_3)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_4}{m_4} \sin(\Omega - \theta_3), \quad \frac{\partial(\Omega - \theta_3)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_4}{m_4} \sin(\Omega + \theta_3),$$

въ силу однихъ только уравненій

$$\frac{\partial(\theta_1 + \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_1}{m_1} \sin(\theta_1 - \omega), \quad \frac{\partial(\theta_1 - \omega)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_1}{m_1} \sin(\theta_1 + \omega), \quad (36)$$

$$\frac{\partial(\theta_3 + \omega)}{\partial u} = \frac{1 + \mu_3}{m_3} \sin(\theta_3 - \omega), \quad \frac{\partial(\theta_3 - \omega)}{\partial v} = \frac{1 - \mu_3}{m_3} \sin(\theta_3 + \omega).$$

Положимъ, сперва, что $m_4 = m_1$, $m_3 = m_2$; тогда нетрудно показать, что

$$\text{tang} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{1 - \mu_1 \mu_3 - m_1 m_3} \text{tang} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}. \quad (37)$$

Опредѣляя отсюда $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial u}$, $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial v}$, подставляя ихъ значенія въ (35) и принимая въ соображеніе уравненія (36), мы уви-

димъ, что уравненія (35) удовлетворяются тождественно лишь при условіи, что

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1. \quad (38)$$

Допустимъ теперь, что $m_3 = -m_2$ и $m_4 = -m_1$; тогда получимъ

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_1 - \mu_3}{1 - \mu_1 \mu_3 + m_1 m_3} \operatorname{cotang} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}. \quad (39)$$

И въ этомъ случаѣ непосредственной подстановкой убѣдимся, что уравненія (35) удовлетворяются при условіи

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Нетрудно свести второй изъ этихъ случаевъ къ первому; въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно будетъ вмѣсто функціи θ_3 ввести функцію

$$\theta'_3 = \theta_3 + \pi.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что для того, чтобы имѣло мѣсто символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4},$$

постоянныя m_h и μ_h , характеризующія каждое изъ преобразованій B_{σ_h} , должны быть связаны соотношеніями

$$m_3 = m_2, \quad m_4 = m_1, \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Замѣчая, что $m_h = \cos \sigma_h$, $\mu_h = \sin \sigma_h$, мы видимъ, что послѣднія соотношенія можно замѣнить слѣдующими:

$$\sigma_4 = \sigma_1, \quad \sigma_3 = \sigma_2.$$

Выраженіе (37) при этомъ приметъ видъ

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\cos \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}{\sin \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}} \operatorname{tang} \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \quad (40)$$

Резюмируя все сказанное, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Для того, чтобы два послѣдовательно примененныхъ Вэйклиндовскихъ преобразованія B_{σ_3} , B_{σ_4} привели къ той же поверхности, что и два послѣдовательныхъ преобразованія B_{σ_1} , B_{σ_2} , необходимо и достаточно, чтобы постоянныя σ , характеризующія каждое изъ этихъ преобразованій, были связаны соотношеніями

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

Символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_2} B_{\sigma_1},$$

къ которому мы приходимъ такимъ образомъ, и представляетъ перемѣстительный законъ *Bianchi*.

Теоремъ *Bianchi* можно дать слѣдующую геометрическую интерпретацію.

Возьмемъ четырехугольникъ, вершины котораго лежатъ въ соответственныхъ точкахъ поверхностей постоянной отрицательной кривизны -1 , и коего двѣ противоположныхъ стороны равны постоянной $\sin\sigma_1$, а двѣ другія постоянной $\sin\sigma_2$.

Полученный четырехугольникъ можетъ двигаться въ пространствѣ такимъ образомъ, что его стороны останутся неизмѣнной длины въ то время, какъ его вершины будутъ описывать четыре псевдосферическихъ поверхности съ кривизной -1 ; при этомъ каждыя двѣ его стороны опредѣляютъ касательную плоскость къ поверхности, описываемой точкой ихъ пересѣченія, проведенную въ этой точкѣ.

§ 14. Во всѣхъ нашихъ разсужденіяхъ мы не налагали никакого ограниченія на постоянныя σ , другими словами, эти постоянныя могли принимать какъ дѣйствительныя, такъ и комплексныя значенія.

Въ послѣднемъ случаѣ, очевидно, функціи θ , Ω будутъ, вообще говоря, вида $\varphi + i\psi$, гдѣ φ и ψ функціи дѣйствительныхъ переменныхъ; вмѣстѣ съ тѣмъ поверхности S_n , получаемые при этихъ преобразованіяхъ будутъ мнимыми.

Нетрудно однако показать, основываясь на теоремѣ *Bianchi*, что въ случаѣ, когда постоянныя σ_1 и σ_2 будутъ комплексными сопряженными, поверхность S_2 можетъ быть дѣйствительной при соответственномъ выборѣ постоянныхъ въ интегралахъ уравненій (36).

Въ самомъ дѣлѣ, подобравъ соответственнымъ образомъ эти постоянныя, мы всегда можемъ предположить, что функціи θ_1 и θ_3 комплексныя сопряженные т. е., что

$$\theta_1 = \varphi + i\psi, \quad \theta_3 = \varphi - i\psi.$$

Полагая кромѣ того $\sigma_1 = a + bi$, а слѣдовательно $\sigma_2 = a - bi$, мы изъ (40) найдемъ для опредѣленія Ω выраженіе

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega - \omega}{2} = -\frac{\cos a}{\sinh b} \operatorname{tang} \psi,$$

откуда видимъ, что при ω дѣйствительномъ будетъ дѣйствительной и функція Ω .

Въ силу нашихъ условій постоянныя m_1 и m_2 , μ_1 и μ_2 будутъ комплексными сопряженными.

Пользуясь теоремой Bianchi, мы можем представить координаты поверхности S_2 въ видѣ

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_3}{2} + \\ &+ \cos(\Omega - \omega) \frac{m_2 \cos \theta_1 + m_1 \cos \theta_3}{2} - \sin(\Omega - \omega) \frac{\mu_1 m_2 \sin \theta_1 + \mu_2 m_1 \sin \theta_3}{2}, \\ y_2 &= \frac{m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_3}{2} + \\ &+ \cos(\Omega - \omega) \frac{m_2 \sin \theta_1 + m_1 \sin \theta_3}{2} + \sin(\Omega - \omega) \frac{\mu_1 m_2 \cos \theta_1 + \mu_2 m_1 \cos \theta_3}{2}, \\ z_2 &= m_1 m_2 \sin(\Omega - \omega), \end{aligned}$$

а это все величины дѣйствительныя.

Итакъ, *последовательное применение двухъ комплексныхъ сопряженныхъ преобразований Bäcklund'a приводитъ къ некоторой дѣйствительной поверхности.*

§ 15. Обратимся теперь къ болѣе детальному разсмотрѣнiю преобразований поверхностей съ постоянной *положительной* кривизной. Опять, не нарушая общности, можемъ положить эту кривизну равной $+1$.

Отнесемъ разсматриваемую поверхность S къ линиямъ кривизны $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$, при чемъ оси координатъ (T), аналогично предыдущему, выберемъ такъ, чтобы ось x^{063} касалась кривыхъ $\beta = \text{const}$, а ось y^{063} — кривыхъ $\alpha = \text{const}$. При этомъ выборѣ координатъ, основныя величины, характеризующія нашу поверхность, будутъ ¹⁾

$$\begin{aligned} \xi &= \cosh \omega, \quad \eta_1 = \sinh \omega, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = -\cosh \omega, \quad q = \sinh \omega, \\ r &= -\frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \quad r_1 = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

при чемъ функція ω представляетъ интеграль дѣфференціального уравненія

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0. \quad (41)$$

Послѣднее уравненіе представляетъ ничто иное, какъ условіе, что кривизна нашей поверхности равна $+1$.

Разсмотримъ, какъ и въ § 12, конгруэнцію касательныхъ, составляющихъ съ осью x^{063} уголъ $i\theta$; уравненіе такой касательной по отношенію къ соответствующимъ осямъ (T) будетъ, очевидно,

$$z = 0, \quad x i \sinh \theta - y \cosh \theta = 0. \quad (42)$$

¹⁾ Darboux, t. III, p. 385.

Снова постараемся подобрать уголъ $i\theta$ такимъ образомъ, чтобы 1) разстояніе между фокальными точками нашей конгруэнціи было величиной постоянной, равной mi и 2) чтобы уголъ $\frac{\pi}{2} - \sigma$ между ея фокальными плоскостями былъ тоже постояненъ.

Одной изъ фокальныхъ поверхностей нашей конгруэнціи будетъ поверхность S , что же касается другой S_1 , то координаты ея точекъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ

$$x = m \operatorname{icosh} \theta, \quad y = -m \operatorname{sinh} \theta, \quad z = 0.$$

Мы не будемъ приводить здѣсь всѣхъ разсужденій, необходимыхъ для вывода дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяетъ функція θ , такъ какъ это было бы простымъ повтореніемъ разсужденій § 12.

Поэтому приведемъ здѣсь только окончательные результаты.

Замѣтимъ, что, какъ мы видѣли въ § 9, постоянная m и уголъ σ связаны зависимостью

$$m^2 = \cos^2 \sigma.$$

Если теперь черезъ μ обозначимъ постоянную, удовлетворяющую условію

$$\mu^2 + m^2 = 1, \quad (43)$$

то для опредѣленія функціи θ получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= \frac{\mu i \operatorname{sinh} \omega \operatorname{cosh} \theta}{m} - \frac{i \operatorname{cosh} \omega \operatorname{sinh} \theta}{m}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= -\frac{\mu \operatorname{cosh} \omega \operatorname{sinh} \theta}{m} + \frac{\operatorname{sinh} \omega \operatorname{cosh} \theta}{m}. \end{aligned} \quad (44)$$

Нетрудно показать, что эти уравненія совмѣстны; для упрощенія вычисленій введемъ новые параметры

$$u = \frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - i\beta}{2};$$

тогда уравненіе (41), которому удовлетворяетъ функція ω , преобразуется въ слѣдующее:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \operatorname{sinh} \omega \operatorname{cosh} \omega = 0. \quad (45)$$

Что касается уравненій, служащихъ для опредѣленія функціи θ , то они будутъ

$$\frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial u} = i \frac{\mu - 1}{m} \operatorname{sinh}(\theta + \omega), \quad \frac{\partial(\theta + \omega)}{\partial v} = -i \frac{1 + \mu}{\partial v} \operatorname{sinh}(\theta - \omega). \quad (46)$$

Теперь уже простымъ дифференцированиемъ убѣдимся, что уравненія эти совмѣстны въ силу условія (45).

Кромѣ того, исключая изъ нихъ функцію ω , мы приходимъ къ уравненію, которому удовлетворяетъ функція θ , а именно

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \sinh \theta \cosh \theta = 0. \quad (47)$$

Принимая во вниманіе уравненія (44), мы найдемъ для проэкцій перемѣщенной соотвѣтственной точки поверхности S_1 слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} \delta x &= \cosh \theta (\cosh \omega \cosh \theta - \mu \sinh \omega \sinh \theta) d\alpha + \\ &+ i \sinh \theta [\sinh \omega \cosh \theta - \mu \cosh \omega \sinh \theta] d\beta, \\ \delta y &= i \cosh \theta (\cosh \omega \sinh \theta - \mu \sinh \omega \cosh \theta) d\alpha + \\ &+ \sinh \theta [\mu \cosh \omega \cosh \theta - \sinh \omega \sinh \theta] d\beta, \\ \delta z &= -m i \cosh \theta \sinh \omega d\alpha + m \sinh \theta \cosh \omega d\beta; \end{aligned} \quad (48)$$

отсюда видимъ, что линейный элементъ поверхности S_1 будетъ вида

$$ds_1^2 = \cosh^2 \theta d\alpha^2 + \sinh^2 \theta d\beta^2.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (47), которому удовлетворяетъ функція θ и помня, что кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ линіи кривизны поверхности S_1 , мы видимъ, что эта функція играетъ ту же роль для поверхности S_1 , что функція ω для поверхности S .

§ 16. Перейдемъ теперь къ доказательству закона *перемѣстительности Bäcklund* для поверхностей съ постоянной положительной Гауссовской кривизной.

Опять будемъ обозначать черезъ B_σ преобразование, аналогичное Bäcklund'овскому, и характеризуемое постоянной σ .

Займемся рѣшеніемъ вопроса, когда возможно символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4},$$

т. е. когда можно перейти отъ нѣкоторой поверхности постоянной положительной кривизны S къ такой же поверхности S_2 путемъ послѣдовательнаго примѣненія двухъ преобразованій B_{σ_1} , B_{σ_2} или двухъ преобразованій B_{σ_3} , B_{σ_4} .

Обозначимъ черезъ S_1 , S_3 поверхности, къ которымъ мы переходимъ отъ поверхности S путемъ соотвѣтственныхъ преобразованій B_{σ_1} , B_{σ_3} ; линейные элементы ихъ пусть будутъ

$$ds_1^2 = \cosh^2 \theta_1 d\alpha^2 + \sinh^2 \theta_1 d\beta^2, \quad ds_3^2 = \cosh^2 \theta_3 d\alpha^2 + \sinh^2 \theta_3 d\beta^2.$$

Линейный элемент поверхности S_2 , къ которой мы приходимъ отъ поверхности S_1 путемъ преобразования B_{σ_2} , или отъ S_3 путемъ преобразования B_{σ_4} , обозначимъ слѣдующимъ образомъ:

$$ds_2^2 = \cosh^2 \Omega d\alpha^2 + \sinh^2 \Omega d\beta^2.$$

Функции $\theta_1, \theta_3, \Omega$ будутъ интегралами уравненія вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \sinh f \cosh f = 0.$$

Мы предположимъ сперва à priori существованіе поверхности S_2 , а потомъ выведемъ условія, при которыхъ она дѣйствительно существуетъ.

Путемъ тѣхъ же разсужденій, что и въ § 13, мы найдемъ для координатъ соотвѣтственной точки поверхности S_2 , разсматриваемой, какъ преобразование поверхности S_1 , слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} x_2 &= m_1 i \cosh \theta_1 + m_2 i \cosh \theta_1 \cosh(\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 i \sinh \theta_1 \sinh(\Omega - \omega), \\ y_2 &= -m_1 \sinh \theta_1 - m_2 \sinh \theta_1 \cosh(\Omega - \omega) - \mu_1 m_2 \cosh \theta_1 \sinh(\Omega - \omega), \\ z_2 &= -m_1 m_2 \sinh(\Omega - \omega). \end{aligned} \quad (49)$$

Координаты той же точки въ предположеніи, что S_2 преобразование поверхности S_3 , будутъ такого же вида, но только вездѣ придется при этомъ замѣнить m_1, m_2, θ_1 соотвѣтственно черезъ m_3, m_4, θ_3 .

Сравнивая полученные такимъ образомъ выраженія, придемъ къ слѣдующимъ условіямъ:

$$m_1 m_2 = m_3 m_4 \quad (50)$$

и

$$\begin{aligned} (m_2 \cosh \theta_1 - m_4 \cosh \theta_3) \cosh(\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \sinh \theta_1 - \mu_3 m_4 \sinh \theta_3) \sinh(\Omega - \omega) = \\ = m_3 \cosh \theta_3 - m_1 \cosh \theta_1, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} (m_2 \sinh \theta_1 - m_4 \sinh \theta_3) \cosh(\Omega - \omega) + (\mu_1 m_2 \cosh \theta_1 - \mu_3 m_4 \cosh \theta_3) \sinh(\Omega - \omega) = \\ = m_3 \sinh \theta_3 - m_1 \sinh \theta_1. \end{aligned}$$

Опредѣленные отсюда функции $\cosh(\Omega - \omega)$ и $\sinh(\Omega - \omega)$ должны удовлетворять соотношенію

$$\cosh^2(\Omega - \omega) - \sinh^2(\Omega - \omega) = 1. \quad (52)$$

Рѣшая уравненія (51) относительно $\cosh(\Omega - \omega)$ и $\sinh(\Omega - \omega)$, найдемъ, что

$$\cosh(\Omega - \omega) = \frac{m_3 [(1 - \mu_1 \mu_3) \cosh(\theta_1 - \theta_3) - m_1 m_3]}{m_2 [1 - \mu_1 \mu_3 - m_1 m_3 \cosh(\theta_1 - \theta_3)]}, \quad (53)$$

$$\sinh(\Omega - \omega) = \frac{m_3 (\mu_3 - \mu_1) \sinh(\theta_1 - \theta_3)}{m_2 [1 - \mu_1 \mu_3 - m_1 m_3 \cosh(\theta_1 - \theta_3)]};$$

подставляя эти значенія въ условіе (52), мы должны получить простое тождество; произведя несложныя вычисленія, мы прійдемъ къ заключенію, что условіе (52) удовлетворится тождественно, если положимъ

$$m_2^2 = m_3^2,$$

или слѣдовательно

$$m_3 = \pm m_2, \quad m_4 = \pm m_1. \quad (54)$$

Если черезъ μ_h обозначимъ такія величины, которыя связаны съ соотвѣтственной величиной m_h соотношеніемъ

$$\mu_h^2 + m_h^2 = 1,$$

то изъ условій (54), заключаемъ, что

$$\mu_3 = \pm \mu_2, \quad \mu_4 = \pm \mu_1, \quad (55)$$

при чемъ каждой комбинаціи (54) можетъ соотвѣтствовать четыре комбинаціи (55).

Посмотримъ теперь, какіе же знаки въ условіяхъ (54) и (55) будутъ соотвѣтствовать нашему вопросу. Эти знаки должны быть такъ подобраны, чтобы уравненія, служащія для опредѣленія функціи Ω

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega - \theta_1)}{\partial u} &= i \frac{\mu_2 - 1}{m_2} \sinh(\Omega + \theta_1), & \frac{\partial(\Omega - \theta_3)}{\partial u} &= i \frac{\mu_4 - 1}{m_4} \sinh(\Omega + \theta_3), \\ \frac{\partial(\Omega + \theta_1)}{\partial v} &= -i \frac{\mu_2 + 1}{m_2} \sinh(\Omega - \theta_1), & \frac{\partial(\Omega + \theta_3)}{\partial v} &= -i \frac{\mu_4 + 1}{m_4} \sinh(\Omega - \theta_3), \end{aligned} \quad (56)$$

удовлетворялись въ силу однихъ только уравненій

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\theta_1 - \omega)}{\partial u} &= i \frac{\mu_1 - 1}{m_1} \sinh(\theta_1 + \omega), & \frac{\partial(\theta_3 - \omega)}{\partial u} &= i \frac{\mu_3 - 1}{m_3} \sinh(\theta_3 + \omega), \\ \frac{\partial(\theta_1 + \omega)}{\partial v} &= -i \frac{\mu_1 + 1}{m_1} \sinh(\theta_1 - \omega), & \frac{\partial(\theta_3 + \omega)}{\partial v} &= -i \frac{\mu_3 + 1}{m_3} \sinh(\theta_3 - \omega). \end{aligned} \quad (57)$$

Положимъ сперва, что $m_3 = m_2$, $m_4 = m_1$, тогда изъ (53) найдемъ, что

$$\operatorname{tanh} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{1 - m_1 m_3 - \mu_1 \mu_3} \operatorname{tanh} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}. \quad (58)$$

Опредѣляя отсюда производныя $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial u}$, $\frac{\partial(\Omega-\omega)}{\partial v}$, подставляя ихъ значенія въ (56) и принимая во вниманіе уравненія (57), мы найдемъ, что уравненія (56) удовлетворяются тождественно лишь при условіи

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1. \quad (59)$$

Допустимъ теперь, что $m_3 = -m_2$, $m_4 = -m_1$; тогда изъ (53) получимъ, что

$$\operatorname{tanh} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{1 - \mu_1 \mu_3 + m_1 m_3} \operatorname{cotanh} \frac{\theta_1 - \theta_3}{2}. \quad (60)$$

И въ этомъ случаѣ, непосредственной подстановкой убѣждаемся, что между постоянными μ_h должны существовать соотношенія

$$\mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Послѣдній случай легко сведемъ къ первому, если вмѣсто функціи θ_3 будемъ разсматривать функцію

$$\theta'_3 = \theta_3 + \pi i.$$

Такимъ образомъ видимъ, что для того, чтобы символическое равенство

$$B_{\sigma_1} B_{\sigma_2} = B_{\sigma_3} B_{\sigma_4}$$

имѣло мѣсто необходимо и достаточно, чтобы постоянныя $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ были связаны соотношеніями

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

Итакъ для того, чтобы два послѣдовательно примѣненныхъ преобразованія $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ приводили къ той же поверхности, что и два послѣдовательно примѣненныхъ преобразованія $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$, необходимо и достаточно, чтобы постоянныя σ , характеризующія каждое изъ этихъ преобразованій, были связаны соотношеніями

$$\sigma_3 = \sigma_2, \quad \sigma_4 = \sigma_1.$$

§ 17. Изслѣдованія предыдущаго параграфа представляютъ особый интересъ въ томъ отношеніи, что даютъ возможность найти действительное преобразование поверхностей съ постоянной положительной кривизной—преобразование, для отысканія котораго дѣлалась масса тщетныхъ попытокъ и къ частному случаю котораго, какъ мы увидимъ впоследствии, пришли окольнымъ путемъ.

Въ настоящемъ параграфѣ мы попытаемся найти подобныя преобразованія, исходя при этомъ изъ доказанной нами теоремы Bianchi.

Допустимъ, что существуютъ два такихъ преобразованія $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$, что примѣняя ихъ послѣдовательно къ нѣкоторой дѣйствительной поверхности S , мы придемъ къ дѣйствительной же поверхности S_2 .

Принимая во вниманіе теорему Bianchi и выраженія (49), мы можемъ представить координаты соответственной точки поверхности S_2 въ видѣ

$$x_2 = \frac{i(m_1 \cosh \theta_1 + m_3 \cosh \theta_3)}{2} + \frac{i(m_2 \cosh \theta_1 + m_4 \cosh \theta_3)}{2} \cosh(\Omega - \omega) +$$

$$+ \frac{i(\mu_1 m_2 \sinh \theta_1 + \mu_3 m_4 \sinh \theta_3)}{2} \sinh(\Omega - \omega),$$

$$y_2 = -\frac{m_1 \sinh \theta_1 + m_3 \sinh \theta_3}{2} - \frac{m_2 \sinh \theta_1 + m_4 \sinh \theta_3}{2} \cosh(\Omega - \omega) -$$

$$-\frac{\mu_1 m_2 \cosh \theta_1 + \mu_3 m_4 \cosh \theta_3}{2} \sinh(\Omega - \omega),$$

$$z_2 = -m_1 m_2 \sinh(\Omega - \omega),$$

при чемъ здѣсь

$$m_3 = m_2, \quad m_4 = m_1, \quad \mu_3 = \mu_2, \quad \mu_4 = \mu_1.$$

Мы предполагаемъ à priori, что функція $\Omega - \omega$ и всѣ координаты x_2, y_2, z_2 дѣйствительны.

Отсюда заключаемъ, что между постоянными m_1, m_2 существуетъ слѣдующая зависимость, что если

$$m_1 = a + bi,$$

то $m_2 = \mp a \pm bi$.

Введемъ здѣсь слѣдующія обозначенія:

$$\cosh \theta_1 = A + Bi, \quad \sinh \theta_1 = L + Mi, \quad \mu_4 = \mu_1 = h + ik,$$

$$\cosh \theta_3 = A_3 + B_3 i, \quad \sinh \theta_3 = L_3 + M_3 i, \quad \mu_3 = \mu_2 = h_3 + ik_3.$$

По нашему условію координаты x_2, y_2, z_2 дѣйствительны, а потому мы можемъ предположить, что функціи

$$m_1 \cosh \theta_1 + m_2 \cosh \theta_3, \quad m_2 \cosh \theta_1 + m_1 \cosh \theta_3, \quad \mu_1 m_2 \sinh \theta_1 + \mu_2 m_1 \sinh \theta_3$$

чисто-мнимыя, а функціи

$$m_1 \sinh \theta_1 + m_2 \sinh \theta_3, \quad m_2 \sinh \theta_1 + m_1 \sinh \theta_3, \quad \mu_1 m_2 \cosh \theta_1 + \mu_2 m_1 \cosh \theta_3$$

дѣйствительны.

Отсюда уже нетрудно заключить, что онѣ удовлетворяютъ этимъ условіямъ, если положимъ

$$A_3 = \pm A, \quad B_3 = \mp B, \quad L_3 = \mp L, \quad M_3 = \pm M, \quad h_3 = -h, \quad k_3 = k;$$

такимъ образомъ мы можемъ составить слѣдующую таблицку:

$$\begin{aligned} \cosh\theta_1 &= A + Bi, & \sinh\theta_1 &= L + Mi, & m_1 &= a + bi, & \mu_1 &= h + ik, & (62) \\ \cosh\theta_3 &= \pm A \mp Bi, & \sinh\theta_3 &= \mp L \pm Mi, & m_3 &= \mp a \pm bi, & \mu_3 &= -h + ik. \end{aligned}$$

Если положимъ теперь, что

$$\theta_1 = \varphi_1 + i\psi_1, \quad \theta_3 = \varphi_3 + i\psi_3$$

и замѣтимъ, что

$$\begin{aligned} \cosh\theta &= \cosh(\varphi + i\psi) = \cosh\varphi \cos\psi + i\sinh\varphi \sin\psi, \\ \sinh\theta &= \sinh(\varphi + i\psi) = \sinh\varphi \cos\psi + i\cosh\varphi \sin\psi, \end{aligned}$$

то первые два столбца нашей таблицки дадутъ намъ слѣдующія зависимости:

$$\begin{aligned} \cosh\varphi_3 \cos\psi_3 &= \pm \cosh\varphi_1 \cos\psi_1, & \sinh\varphi_3 \sin\psi_3 &= \mp \sinh\varphi_1 \sin\psi_1, \\ \sinh\varphi_3 \cos\psi_3 &= \mp \sinh\varphi_1 \cos\psi_1, & \cosh\varphi_3 \sin\psi_3 &= \pm \cosh\varphi_1 \sin\psi_1, \end{aligned} \quad (63)$$

откуда для верхнихъ знаковъ имѣемъ

$$\varphi_3 = -\varphi_1, \quad \psi_3 = \psi_1, \quad (64)$$

а для нижнихъ

$$\varphi_3 = -\varphi_1, \quad \psi_3 = \psi_1 + \pi. \quad (65)$$

Посмотримъ, даютъ ли эти значенія φ_3 и ψ_3 рѣшеніе нашей задачи.

Прежде всего покажемъ, что если при выбранныхъ нами значеніяхъ m_1, μ_1 функція $\theta_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ представляетъ интеграль уравненій (44), то функція $\theta_3 = \varphi_3 + i\psi_3$ будетъ интеграломъ уравненій того же вида, въ которыхъ мы только замѣнимъ m_1, μ_1 черезъ m_3 и μ_3 , причѣмъ этимъ послѣднимъ постояннымъ припишемъ значенія (62).

Подставляя въ уравненія (44) вмѣсто m_1, μ_1 ихъ значенія (62) и отдѣляя дѣйствительныя и мнимыя части, мы придемъ къ слѣдующимъ тождествамъ, если вставимъ въ эти уравненія вмѣсто θ значеніе θ_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} (a^2 + b^2) &= (bh - ka) \sinh\omega \cosh\varphi_1 \cos\psi_1 - \\ &- (ah + bk) \sinh\varphi_1 \sin\psi_1 \sinh\omega - b \cosh\omega \sinh\varphi_1 \cos\psi_1 + a \cosh\omega \sin\psi_1 \cosh\varphi_1, \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) (a^2 + b^2) &= (ah - bk) \sinh\omega \cosh\varphi_1 \cos\psi_1 + \\ &+ (bh - ak) \sinh\varphi_1 \sin\psi_1 \sinh\omega - a \cosh\omega \sinh\varphi_1 \cos\psi_1 - b \sin\psi_1 \cosh\varphi_1 \cosh\omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} (a^2 + b^2) &= -(ah + bk) \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cos \psi_1 + \\ &+ (ak - bh) \cosh \omega \sin \psi_1 \cosh \varphi_1 + a \sinh \omega \cosh \varphi_1 \cos \psi_1 + b \sinh \omega \sinh \varphi_1 \sin \psi_1, \\ \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \right) (a^2 + b^2) &= (bh - ak) \cosh \omega \sinh \varphi_1 \cos \psi_1 - \\ &- (ah + bk) \cosh \omega \sin \psi_1 \cosh \varphi_1 + a \sinh \omega \sinh \varphi_1 \sin \psi_1 - b \sinh \omega \cosh \varphi_1 \cos \psi_1. \end{aligned}$$

Теперь уже легко видѣть, что эти равенства останутся тождествами при соответственной замѣнѣ φ_1 , ψ_1 , a , b , h , k черезъ $-\varphi_1$, ψ_1 , $-a$, b , $-h$, k либо черезъ $-\varphi_1$, $\psi_1 + \pi$, a , $-b$, $-h$, k .

Теперь намъ остается только посмотрѣть, будетъ ли при этихъ условіяхъ функція Ω дѣйствительной.

Обращаясь къ выраженію (58), мы при первомъ предположеніи найдемъ, что

$$\operatorname{tanh} \frac{\Omega - \omega}{2} = \frac{-2h}{1 + a^2 + b^2 + h^2 + k^2} \operatorname{tanh} \varphi_1.$$

Если вспомнимъ, что $m_1 = \cos \sigma_1$, $\mu_1 = \sin \sigma_1$, и положимъ $\sigma_1 = \alpha + \beta i$, то, легко найдемъ, что

$$\operatorname{tanh} \frac{\Omega - \omega}{2} = -\frac{\sin \alpha}{\cosh \beta} \operatorname{tanh} \varphi_1.$$

Такъ какъ модуль обоихъ множителей правой части меньше единицы, то отсюда заключаемъ, что $\frac{\Omega - \omega}{2}$ дѣйствительная функція.

Обращаясь ко второму случаю, мы точно также найдемъ, что

$$\operatorname{tanh} \frac{\Omega - \omega}{2} = -\frac{\cosh \beta}{\sin \alpha} \operatorname{cotanh} \varphi_1.$$

Такъ какъ модули обоихъ множителей правой части больше единицы, то въ этомъ случаѣ мы приходимъ къ противорѣчію съ нашимъ предположеніемъ о дѣйствительности функціи $\Omega - \omega$.

Наконецъ, если теперь, черезъ $\bar{\sigma}_1$ обозначимъ величину, сопряженную съ σ_1 и замѣтимъ, что $m_1 = \cos \sigma_1$, $\mu_1 = \sin \sigma_1$, $m_2 = \cos \sigma_2$, $\mu_2 = \sin \sigma_2$, то придемъ къ слѣдующей теоремѣ.

Два послѣдовательно примѣненныхъ преобразованія B_{σ_1} и $B_{\pi + \bar{\sigma}_1}$ даютъ намъ дѣйствительное преобразование поверхностей съ постоянной положительной кривизной.

ГЛАВА III.

Теоремы Guichard'a.

§ 1. Въ § 3 предыдущей главы мы вывели замѣчательную теорему Weingarten'a, сущность которой заключается въ слѣдующемъ.

Если имѣемъ нѣкоторую поверхность S , представляющую изгибаніе поверхности вращения, то касательныя къ кривымъ, являющимся изгибаніемъ меридіановъ, будутъ нормальны къ нѣкоторой опредѣленной поверхности W .

Такъ какъ характеръ зависимости между радіусами кривизны послѣдней поверхности вполне опредѣляется формой линейнаго элемента поверхности вращения, на которую наложима поверхность S , то при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S , касательныя къ изгибаніямъ меридіановъ будутъ нормальными поверхностями W одного и того же класса.

Въ 1899 году Guichard далъ безъ доказательства теоремы, являющіяся обобщеніемъ теоремы Weingarten'a для двухъ частныхъ случаевъ ¹⁾.

Задача, поставленная Guichard'омъ, можетъ быть сформулирована слѣдующимъ образомъ.

Имѣемъ нѣкоторую поверхность S и неизмѣнно съ нею связанную конгруэнцію падающихъ лучей D , представляющую систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ .

Допустимъ, что поверхность Σ принадлежитъ къ поверхностямъ W т. е., что ея радіусы кривизны связаны опредѣленной зависимостью

$$f(R_1, R_2) = 0 \quad (1)$$

съ постоянными коэффициентами.

Спрашивается, какимъ условіямъ должны удовлетворять отражающая поверхность S и конгруэнція D , чтобы при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S лучи конгруэнціи D оставались нормальными къ поверхностямъ Σ , радіусы кривизны которыхъ связаны между собою тѣмъ же соотношеніемъ (1).

¹⁾ Comptes rendus de l'académie des sciences 1899 (23 janvier).

Къ рѣшенію этой задачи въ случаяхъ, разсмотрѣнныхъ Guichard'омъ, когда упомянутыя поверхности Σ представляютъ поверхности minima или поверхности съ постоянной Гауссовской кривизной т. е. когда соотношение (1) имѣеть одну изъ двухъ формъ

$$R_1 + R_2 = 0, \quad R_1 R_2 = m = \text{const},$$

мы и приступимъ.

По прежнему будемъ пользоваться подвижной системой координатъ (T) , связанной опредѣленнымъ образомъ съ поверхностью S .

За плоскость xy примемъ касательную плоскость къ поверхности S , за плоскость xz плоскость паденія лучей конгруэнціи D .

За кривыя $v = \text{const}$ примемъ кривыя, касательныя къ нашимъ осямъ x^{000} , а за кривыя $u = \text{const}$ ихъ ортогональныя траекторіи.

Въ этихъ предположеніяхъ уравненіе луча конгруэнціи D по отношенію къ соответственнымъ осямъ (T) будетъ

$$y = 0, \quad \sin \alpha x - \cos \alpha z = 0;$$

координаты любой точки этого луча будутъ

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = 0, \quad z = \rho \sin \alpha,$$

а слѣдовательно проэкции ея перемѣщеній на оси (T) таковы:

$$\delta x = \xi du + d(\rho \cos \alpha) + (q du + q_1 dv) \rho \sin \alpha,$$

$$\delta y = \eta_1 dv + (r du + r_1 dv) \rho \cos \alpha - (p du + p_1 dv) \rho \sin \alpha,$$

$$\delta z = d(\rho \sin \alpha) - (g du + g_1 dv) \rho \cos \alpha.$$

Чтобы наши лучи были нормальны къ нѣкоторой поверхности Σ , необходимо и достаточно, какъ это мы видѣли въ первой главѣ, чтобы всевозможныя перемѣщенія нѣкоторой точки M ($l \cos \alpha, 0, l \sin \alpha$) удовлетворяли соотношенію

$$\cos \alpha \delta x + \sin \alpha \delta z = 0,$$

или

$$dl + \xi \cos \alpha du = 0. \tag{2}$$

Изъ послѣдняго соотношенія, слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0. \tag{3}$$

Разстояніе фокальныхъ точекъ лучей нашей конгруэнціи отъ начала координатъ (T) получимъ, исключая du и dv изъ соотношеній

$$\delta y = 0, \quad \sin \alpha \delta x - \cos \alpha \delta z = 0;$$

уравненіе, корнями котораго будутъ указанная разстоянія, имѣеть форму:

$$\begin{aligned} & \varrho^2 \left[-r_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + r_1 q \cos \alpha + p_1 \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - p_1 q \sin \alpha + r \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \right. \\ & \left. - p \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - r q_1 \cos \alpha + p q_1 \sin \alpha \right] + \varrho \left[\xi r_1 \sin \alpha \cos \alpha - \xi p_1 \sin^2 \alpha - \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \eta_1 q \right] + \\ & + \xi \eta_1 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если черезъ ϱ_1 и ϱ_2 обозначимъ корни этого уравненія, а черезъ l разстояніе отъ начала координатъ (T) соответственной точки M поверхности Σ , нормальной къ лучамъ D , то радіусы кривизны поверхности Σ , очевидно, дадутся выраженіями

$$R_1 = l - \varrho_1, \quad R_2 = l - \varrho_2. \quad (5)$$

§ 2. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію задачи Guichard'a въ случаѣ, когда поверхность Σ — поверхность minima т. е. когда радіусы кривизны ея связаны соотношеніемъ

$$R_1 + R_2 = 0.$$

На основаніи (5) это соотношеніе приметъ видъ

$$2l - (\varrho_1 + \varrho_2) = 0, \quad (6)$$

гдѣ l опредѣляется изъ уравненія (2).

Опредѣляя изъ (4) сумму корней $\varrho_1 + \varrho_2$ и исключая изъ соотношенія (6) при помощи уравненій Codazzi-Mainardi функции p , q , мы дадимъ этому соотношенію слѣдующую форму:

$$\begin{aligned} & - 2lr_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2l\xi \eta_1 K \sin \alpha + \xi r_1 \sin \alpha - \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2lr \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \\ & - \frac{1}{p_1} \left[2lr_1 \xi \eta_1 K \cos \alpha + \xi \eta_1^2 K \right] - \frac{q_1^2}{p_1} \left[2lr_1 \frac{\xi}{\eta_1} \cos \alpha + \xi \right] + \\ & + p_1 \left[2l \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi \sin^2 \alpha \right] + q_1 \left[2l \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\xi}{\eta_1} - 2lr \cos \alpha \right] = 0; \end{aligned}$$

здѣсь черезъ K мы обозначили Гауссовскую кривизну поверхности S .

Послѣднее соотношеніе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S ; но такъ какъ оно представляетъ нѣкоторую зависимость между функциями p_1 , q_1 , то на основаніи разсужденій, приведенныхъ нами въ § 7 главы I, оно должно удовлетворяться тождественно при всевозможныхъ значеніяхъ p_1 , q_1 .

Такимъ образомъ, если поставленная нами задача допускаетъ рѣшенія, то функціи ξ , η_1 , α , l должны удовлетворять слѣдующимъ уравненіямъ:

$$-2lr_1 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2l\xi\eta_1 K \sin \alpha + \xi r_1 \sin \alpha - \eta_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + 2lr \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0, \quad (7)$$

$$\xi\eta_1 K [2lr_1 \cos \alpha + \eta_1] = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\xi}{\eta_1} [2lr_1 \cos \alpha + \eta_1] = 0, \quad (9)$$

$$\sin \alpha \left[2l \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi \sin \alpha \right] = 0, \quad (10)$$

$$\frac{2l}{\eta_1} \left[\xi \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} - r\eta_1 \cos \alpha \right] = 0; \quad (11)$$

къ этимъ уравненіямъ мы должны еще присоединить уравненія (2) и (3) предыдущаго §^a, а именно:

$$dl + \xi \cos \alpha du = 0, \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

Всю совокупность уравненій (2), (3) и (7) — (11) назовемъ для краткости уравненіями (E).

Мы видимъ, что уравненія (8) и (9) тождественны, а потому мы будемъ имѣть шесть уравненій (E).

Исключимъ пока случай $\alpha = \text{const}$.

Обращаясь къ уравненіямъ (3) и (11), получимъ, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0;$$

первое изъ этихъ уравненій показываетъ, что кривыя $v = \text{const}$ геодезическія; что касается второго, то выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u , мы на основаніи его можемъ положить

$$\alpha = u. \quad (12)$$

Исключая изъ уравненій (2) и (10) функцію l , получимъ уравненіе для опредѣленія ξ , а именно:

$$\frac{d\xi}{\xi} = - \frac{3 \cos u du}{\sin u},$$

откуда, интегрируя, найдемъ

$$\xi = \frac{a}{\sin^3 u}, \quad (13)$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная.

Обращаясь теперь къ уравненію (10), мы получимъ изъ него слѣдующее выраженіе для l :

$$2l = \frac{a}{\sin^2 u}. \quad (14)$$

Если подставимъ въ уравненіе (9) вмѣсто α , ξ , l найденныя для нихъ значенія и замѣтимъ, что $r_1 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \eta_1}{\partial u}$, то для опредѣленія η_1 получимъ дифференціальное уравненіе

$$\sin u \cos u \frac{\partial \eta_1}{\partial u} + \eta_1 = 0.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ, что

$$\eta_1 = M(v) \cotang u,$$

гдѣ $M(v)$ произвольная функція параметра v ; нетрудно видѣть, что, выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ v , мы можемъ положить функцію $M(v)$ равнойъ постоянной величинѣ k .

Подставляя всѣ полученныя значенія функцій ξ , η_1 , α , l въ уравненіе (7), увидимъ, что оно тождественно удовлетворяется.

Такимъ образомъ видимъ, что наша задача допускаетъ опредѣленное рѣшеніе.

Линейный элементъ поверхности S имѣетъ видъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \cotang^2 u dv^2; \quad (15)$$

отсюда заключаемъ, что поверхность S наложима на нѣкоторую поверхность вращенія.

Чтобы найти уравненіе соотвѣтствующей поверхности вращенія, мы должны, какъ извѣстно, привести линейный элементъ (15) къ виду

$$ds^2 = [1 + (\varphi'(r_0))^2] dr_0^2 + r_0^2 dv_1^2, \quad (16)$$

тогда уравненіе искомой поверхности вращенія будетъ

$$z = \varphi(r_0),$$

при чемъ, конечно, за ось z -ося принята ось вращенія, а r_0^2 равно $x^2 + y^2$.

Сравнивая выраженія (15) и (16), мы можемъ положить

$$v_1 = \frac{kv}{a} \quad r_0^2 = a^2 \cotang^2 u,$$

а отсюда уже, замѣчая, что $dr_0 = -\frac{adu}{\sin^2 u}$, найдемъ, что

$$1 + [\varphi'(r_0)]^2 = \frac{1}{\sin^2 u} = 1 + \frac{r_0^2}{a^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ, что искомая поверхность вращенія представляетъ *параболоидъ*, уравненіе котораго

$$z = \frac{r_0^2}{2a} = \frac{x^2 + y^2}{2a}. \quad (17)$$

Примемъ этотъ параболоидъ вращенія за начальную форму поверхности S ; какъ легко видѣть, плоскостями паденія лучей соотвѣтственной конгруэнціи D будутъ плоскости меридіановъ.

По самому своему опредѣленію уголъ $\alpha = u$ представляетъ уголъ, составляемый лучами нашей конгруэнціи съ касательными къ меридіанамъ, проведенными въ соотвѣтственныхъ точкахъ паденія лучей.

Съ другой стороны, изъ соотношенія

$$r_0 = a \cotang u, \quad (18)$$

легко заключить, что u есть уголъ касательной къ меридіану съ фокуснымъ радіусомъ векторомъ точки касанія.

Отсюда ясно, что для выбранной нами начальной формы поверхности S всѣ лучи соотвѣтственной конгруэнціи D проходятъ черезъ фокусъ параболоида вращенія.

Выраженіе (14) для разстоянія между соотвѣтственными точками поверхностей S и Σ будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$l = \frac{a^2 + r_0^2}{2a}. \quad (19)$$

Обращаясь къ уравненіямъ (E), мы замѣчаемъ, что всѣ они не измѣнятся при замѣнѣ α черезъ $-\alpha$ т. е. при переходѣ отъ конгруэнціи падающихъ лучей D къ конгруэнціи отраженныхъ лучей D_1 ; поверхность мѣніа, связанную съ конгруэнціей D_1 такъ, какъ Σ связана съ D , будемъ обозначать черезъ Σ_1 .

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ *первой теоремѣ Guichard'a*.

Соединимъ всѣ точки параболоида вращенія

$$2az = x^2 + y^2 = r_0^2$$

съ фокусомъ; полученная конгруэнція прямыхъ D представитъ систе-

му нормалей некоторой поверхности минимума Σ . Расстояние соответственных точек параболоида и поверхности Σ будетъ

$$l = \frac{a^2 + r_0^2}{2a}.$$

Если теперь мы будемъ какъ угодно деформировать рассматриваемый параболоидъ и неизмѣнно съ нимъ связанную конгруэнцію D , то послѣдняя будетъ нормальна къ соответственнымъ поверхностямъ минимума Σ во все время деформации. Подобнымъ же свойствомъ будетъ обладать конгруэнция D_1 , неизмѣнно связанная съ деформирующейся поверхностью и представляющая систему отраженныхъ отъ нея лучей, если за падающіе лучи примемъ лучи конгруэнции D . Точки поверхности минимума Σ_1 , нормальной къ лучамъ конгруэнции D_1 , симметричны съ точками Σ относительно касательныхъ плоскостей поверхности S , проведенныхъ въ точкахъ паденія соответственныхъ лучей. Черезъ S обозначены изгибания нашего параболоида.

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе, указывающее на интересную зависимость, которая существуетъ между поверхностями минимума Σ и Σ_1 , нормальными соответственно къ лучамъ конгруэнцій D и D_1 .

Уравненіе касательной плоскости въ соответственныхъ точкахъ этихъ поверхностей будетъ

$$x \cos \alpha \pm y \sin \alpha - l = 0,$$

гдѣ верхній знакъ относится къ поверхности Σ , а нижній къ поверхности Σ_1 .

Принимая во вниманіе полученные нами значенія α и l , мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ;

Расстояние точекъ одной изъ поверхностей минимума Σ и Σ_1 , соответственно нормальныхъ къ лучамъ конгруэнцій D и D_1 , отъ касательной плоскости, проведенной къ другой поверхности въ соответственной точкѣ, равно постоянной $|a|$.

Мы исключили пока изъ нашего изслѣдованія случай $\alpha = \text{const}$.

Обращаясь къ уравненіямъ (E), видимъ, что въ этомъ случаѣ можно положить $\xi = 1$; далѣе изъ уравненія (10) имѣемъ, что $\sin \alpha = 0$, т. е. $\alpha = 0$, другими словами лучи нашей конгруэнции касаются поверхности S , а это случай, рассмотрѣнный Weingarten'омъ и разобранный нами въ § 4 предыдущей главы.

§ 3. Перейдемъ теперь къ случаю, когда конгруэнция падающихъ лучей D остается нормальной къ поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной $\frac{1}{m}$ при всевозможныхъ деформацияхъ отражающей поверхности S .

На основаніи выражений (5) соотношение $R_1 R_2 = m$ приметъ видъ

$$(l^2 - m) - l(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1 \varrho_2 = 0;$$

на основаніи уравненія (4) и уравненій Codazzi-Mainardi мы послѣ исключенія изъ него функций p_1, q_1 приведемъ его къ виду:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \alpha}{\partial u} [(l^2 - m) r_1 \cos \alpha + l \eta_1] + (l^2 - m) \xi \eta_1 K \sin \alpha + \\ & + (l^2 - m) r \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} + l \xi r_1 \cos \alpha \sin \alpha + \xi \eta_1 \sin \alpha - \frac{1}{p_1} [(l^2 - m) r_1 \xi \eta_1 K \cos \alpha + \\ & + l \xi \eta_1^2 K] - \frac{q_1^2}{p_1} \left[(l^2 - m) \frac{\xi r_1 \cos \alpha}{\eta_1} + \xi l \right] + p_1 \left[(l^2 - m) \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} - \xi l \sin^2 \alpha \right] + \\ & + q_1^2 \left[(l^2 - m) \frac{\xi \sin \alpha}{\eta_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - (l^2 - m) r \cos \alpha \right] = 0. \end{aligned}$$

Здѣсь по предыдущему K обозначаетъ Гауссовскую кривизну поверхности S .

Это выраженіе должно представлять изъ себя тождество, справедливое для всевозможныхъ значеній p_1, q_1 ; поэтому функции ξ, η_1, α, l должны удовлетворять уравненіямъ

$$(l^2 - m) \xi \eta_1 K \sin \alpha + (l^2 - m) r \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} + l r_1 \xi \sin \alpha \cos \alpha + \xi \eta_1 \sin \alpha = 0, \quad (20)$$

$$\xi \eta_1 K [(l^2 - m) r_1 \cos \alpha + l \eta_1] = 0, \quad (21)$$

$$\sin \alpha \left[(l^2 - m) \frac{\partial \alpha}{\partial u} - l \xi \sin \alpha \right] = 0, \quad (22)$$

$$(l^2 - m) \left[\sin \alpha \frac{\xi}{\eta_1} \frac{\partial \alpha}{\partial v} - r \cos \alpha \right] = 0; \quad (23)$$

къ этимъ уравненіямъ мы опять должны присоединить уравненія (2) и (3) настоящей главы т. е. уравненія

$$dl + \xi \cos \alpha du = 0, \quad \frac{\partial (\xi \cos \alpha)}{\partial v} = 0.$$

По предыдущему совокупность уравненій (2), (3) и (20) — (23) будемъ называть уравненіями (E).

Оставляя въ сторонѣ случай $\alpha = \text{const}$ и обращаясь къ уравненіямъ (3) и (23), найдемъ, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0.$$

Изъ перваго заключаемъ, что кривыя $v = \text{const}$ геодезическія на поверхности S ; далѣе, подобравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u , мы на основаніи втораго изъ этихъ уравненій можемъ положить

$$\alpha = u. \quad (24)$$

Опредѣляя изъ (22) функцію ξ и подставляя ея значеніе въ уравненіе (2), получимъ для опредѣленія функціи l слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{l dl}{l^2 - m} + \frac{\cos u du}{\sin u} = 0;$$

интегрируя его, найдемъ, что

$$l^2 - m = \frac{a}{\sin^2 u}, \quad (25)$$

гдѣ черезъ a обозначена постоянная интеграціи.

Изъ послѣдняго выраженія имѣемъ, что

$$l = \frac{\sqrt{a + m \sin^2 u}}{\sin u},$$

а потому для дѣйствительныхъ поверхностей Σ должно имѣть мѣсто неравенство

$$a + m \sin^2 u > 0. \quad (26)$$

Зная выраженіе для l , легко найдемъ значеніе ξ , а именно:

$$\xi = \frac{a}{\sin^2 u \sqrt{a + m \sin^2 u}}. \quad (27)$$

Обращаясь къ уравненію (21), мы при помощи (22) и найденныхъ нами значеній ξ , l , α , приведемъ его къ виду

$$\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = - \frac{1}{\sin u \cos u};$$

отсюда, выбравши приличнымъ образомъ параметръ v , придемъ къ слѣдующему выраженію для функціи η_1 :

$$\eta_1 = k \cotang u,$$

гдѣ k постоянная.

Подставляя полученные нами значенія функцій ξ , η_1 , α , l въ уравненіе (20), увидимъ, что оно удовлетворяется тождественно.

Для линейнаго элемента поверхности S въ данномъ случаѣ, мы получили выраженіе

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} + k^2 \cotang^2 u dv^2, \quad (29)$$

откуда заключаемъ, что поверхность S наложима на поверхность вращенія.

Найдемъ уравненіе одной изъ соответственныхъ поверхностей вращенія, при чемъ замѣтимъ, что давая постоянной k какія угодно значенія, мы будемъ получать различныя поверхности вращенія, наложимыя одна на другую.

При рѣшеніи послѣдняго вопроса намъ прійдется рассмотретьъ два случая: 1) когда кривизна поверхности Σ положительна и 2) когда она отрицательна.

Разсмотримъ первый случай т. е. случай, когда $m = n^2 > 0$.

При этомъ мы можемъ сдѣлать относительно постоянной a два предположенія, а именно мы можемъ положить $a > 0$ и $a < 0$.

Въ случаѣ $a > 0$ неравенство (26) удовлетворяется при всевозможныхъ значеніяхъ a .

Сравнимъ теперь выраженіе (29) для линейнаго элемента поверхности S съ общимъ выраженіемъ для линейнаго элемента поверхности вращенія

$$ds^2 = [1 + (\varphi'(r_0))^2] dr_0^2 + r_0^2 dv_1^2;$$

какъ легко видѣть, мы можемъ положить

$$v = v_1, \quad r_0 = k \cotangu,$$

откуда найдемъ, что

$$1 + [\varphi'(r_0)]^2 = \frac{a^2 r_0^2 + a^2 k^2}{k^2 [a r_0^2 + k^2 (a + n^2)]},$$

или, рѣшая относительно $[\varphi'(r_0)]^2$

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{(a^2 - k^2 a) r_0^2 + k^2 [a^2 - k^2 (a + n^2)]}{k^2 [a r_0^2 + k^2 (a + n^2)]}.$$

Замѣчая, что при условіи $a > 0$ величина $a + n^2$ всегда положительна, мы можемъ положить

$$k^2 = \frac{a^2}{a + n^2}$$

и тогда выражение для $[\varphi'(r_0)]^2$ приметъ видъ

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2 r_0^2}{a(r_0^2 + a)}.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, мы получимъ уравненіе искомой поверхности вращения

$$\frac{z^2}{n^2} - \frac{x^2 + y^2}{a} = 1.$$

откуда заключаемъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ поверхность S наложима на двуполый гиперболоидъ вращения.

Перейдемъ ко второму случаю, когда при $m = n^2 > 0$ постоянная a отрицательна.

Въ силу неравенства (26) по абсолютной величинѣ a должно быть меньше m т. е.

$$a + n^2 > 0. \quad (30)$$

Разсуждая совершенно аналогично, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, мы можемъ опредѣлить постоянную k^2 слѣдующимъ образомъ:

$$k^2 = \frac{a^2}{a + n^2},$$

а тогда для опредѣленія соотвѣтственной функціи $\varphi(r_0)$ получимъ дифференціальное уравненіе

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2 r_0^2}{-a(-a - r_0^2)}.$$

Полагая $-a = b^2 > 0$, легко получимъ уравненіе искомой поверхности вращения

$$\frac{z^2}{n^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

а это эллипсоидъ вращения.

Итакъ поверхность S во второмъ случаѣ наложима на эллипсоидъ вращения.

Такъ какъ въ силу неравенства (30) величина n^2 больше величины b^2 , то ось вращения совпадаетъ съ большою осью эллипса.

Изъ соотношенія $r_0 = k \cot \alpha$, имѣющаго мѣсто въ обоихъ случаяхъ, подставляя вмѣсто k его значеніе, легко заключить, что α есть уголъ касательной къ меридіану съ фокуснымъ радіусомъ векторомъ точки касанія. Съ другой стороны $\alpha = a$ представляетъ уголъ, состав-

ляемый съ той же касательной лучемъ соотвѣтственной конгруэнціи D , проведеннымъ черезъ точку касанія.

Поэтому, если предположимъ, что начальной формой поверхности S служитъ одна изъ полученныхъ нами поверхностей вращения 2-го порядка, то изъ предыдущаго заключаемъ, что всѣ лучи соотвѣтственной конгруэнціи D будутъ проходить черезъ одинъ какой либо изъ фокусовъ соотвѣтственной поверхности 2-го порядка.

Обращаясь къ выраженію для разстоянія l соотвѣтственныхъ точекъ поверхностей S и Σ , найдемъ для него слѣдующее выраженіе:

$$l^2 = (a + n^2) \frac{r_0^2}{a} + (a + n^2)$$

или слѣдовательно

$$l^2 = \frac{z^2 (a + n^2)}{n^2}.$$

Замѣчая, что величина радіуса вектора меридіана будетъ

$$d^2 = \left(n \pm \frac{\sqrt{n^2 + a}}{n} z \right)^2,$$

мы видимъ, что

$$d = \pm (l \pm n),$$

при чемъ верхній знакъ передъ скобками соотвѣтствуетъ эллипсу, нижній гиперболѣ.

Отсюда заключаемъ, что разстояніе соотвѣтственной точки поверхности Σ отъ фокуса поверхности 2-го порядка, лежащаго на нормали къ Σ , величина постоянная, равная n , если кривизну поверхности Σ обозначимъ черезъ $\frac{1}{n^2}$.

Обращаясь къ уравненіямъ (E) , замѣтимъ, что они не измѣнятся при замѣнѣ α черезъ $-\alpha$, т. е. при переходѣ отъ конгруэнціи падающихъ лучей D къ конгруэнціи отраженныхъ лучей D_1 .

По прежнему поверхность, связанную съ послѣдней конгруэнціей такъ, какъ Σ связана съ D , будемъ обозначать черезъ Σ_1 .

Резюмируя все сказанное, приходимъ ко второй теоремѣ *Guichard'a*.

Имѣемъ двуполый гиперболоидъ вращения съ действительной осью равной $2n$, или эллипсоидъ вращения около большей оси, длина которой равна $2n$. Соединимъ всѣ точки разсматриваемой поверхности съ однимъ изъ ея фокусовъ; полученная такимъ образомъ линейчатая конгруэнція D будетъ нормальна къ некоторой поверхности Σ съ постоянной Гауссовской кривизной $\frac{1}{n^2}$. Если теперь будемъ какъ угодно деформировать дан-

ную поверхность вращения, при чемъ предположимъ, что лучи конгруэнции D неизмѣнно съ нею связаны, то эти лучи во все время деформации будутъ нормальны къ соответственнымъ поверхностямъ Σ постоянной кривизны $\frac{1}{n^2}$. Другую подобную конгруэнцию D_1 получимъ, соединяя точки нашихъ поверхностей вращения съ другимъ фокусомъ. Какъ легко видѣть, точки соответствующихъ ей поверхностей Σ_1 будутъ симметричны съ точками поверхностей Σ относительно касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ S , проведенныхъ въ точкахъ паденія соответствующихъ лучей. Черезъ S мы обозначаемъ изгибанія нашихъ поверхностей вращения 2-го порядка. Если теперь мы будемъ разсматривать поверхности, образованныя точками лучей D , которыя совпадаютъ съ фокусомъ соответственной поверхности вращения, то на основаніи известной теоремы Bonnet ¹⁾, онѣ, какъ параллельныя къ поверхностямъ Σ постоянной Гауссовской кривизны $\frac{1}{n^2}$, будутъ имѣть постоянную среднюю кривизну, равную $\frac{1}{n}$. Тѣмъ же свойствомъ будутъ обладать поверхности, точки которыхъ симметричны съ точками разсматриваемыхъ поверхностей относительно касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ S .

§ 4. Обратимся теперь къ случаю, когда кривизна поверхностей Σ отрицательна, т. е. къ случаю, когда

$$m = -n^2 < 0.$$

Выраженіе для разстоянія между соответственными точками поверхностей S и Σ будетъ въ настоящемъ случаѣ

$$l = \frac{\sqrt{a - n^2 \sin^2 u}}{\sin u},$$

а потому для дѣйствительныхъ поверхностей Σ должно имѣть мѣсто неравенство

$$a - n^2 \sin^2 u > 0. \quad (31)$$

Изъ послѣдняго неравенства заключаемъ, что постоянная a должна быть положительной; относительно нея мы можемъ сдѣлать три предположенія

$$a > n^2, \quad a < n^2, \quad a = n^2.$$

Разсмотримъ всѣ эти три случая отдѣльно.

¹⁾ Bonnet. Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée (Journal de l'École Polytechnique XLII cahier p. 77).

Выраженіе для $[\varphi'(r_0)]^2$ будетъ, по прежнему, вида

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{(a^2 - k^2a)r_0^2 + k^2(a^2 - k^2a) + h^4n^2}{k^2[a(r_0^2 + k^2) - n^2k^2]}. \quad (32)$$

Въ первомъ случаѣ, т. е. когда $a > n^2$, если бы мы пожелали выбрать k подобно предыдущему такимъ образомъ, чтобы независящій отъ r_0 членъ въ числительѣ обратился въ нуль, то мы бы нашли для $[\varphi'(r_0)]^2$ выраженіе вида

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{-n^2}{a(r_0^2 + a^2)} < 0,$$

т. е. получили бы мнимую поверхность вращенія 2-го порядка.

Что касается двухъ послѣднихъ случаевъ, то во второмъ изъ нихъ мы должны были бы положить $k^2 = 0$, что невозможно, а въ первомъ мы нашли бы для k^2 выраженіе

$$k^2 = \frac{a^2}{a - n^2} < 0;$$

величина k была бы мнимой и мы опять пришли бы къ мнимымъ поверхностямъ 2-го порядка.

Поэтому выберемъ k^2 такъ, чтобы въ выраженіи (32) для $[\varphi'(r_0)]^2$ коэффициентъ при r_0^2 въ числительѣ обратился въ нуль.

При этомъ условіи для k^2 найдемъ значеніе

$$k^2 = a > 0,$$

а потому выраженіе для $[\varphi'(r_0)]^2$ приведется къ виду

$$[\varphi'(r_0)]^2 = \frac{n^2}{r_0^2 + a - n^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\text{при } a > n^2, \quad r_0 = \sqrt{a - n^2} \frac{e^{\frac{z}{n}} - e^{-\frac{z}{n}}}{2} = \sqrt{a - n^2} \sinh \frac{z}{n},$$

$$\text{при } a < n^2, \quad r_0 = \sqrt{n^2 - a} \frac{e^{\frac{z}{n}} + e^{-\frac{z}{n}}}{2} = \sqrt{n^2 - a} \cosh \frac{z}{n},$$

$$\text{при } a = n^2, \quad r_0 = e^{\frac{z}{n}}.$$

Въ послѣднемъ случаѣ меридіаномъ искомой поверхности вращенія будетъ служить логариѳмика, асимптота которой совпадаетъ съ осью вращенія; во второмъ меридіаномъ служить укороченная или удлиненная (въ зависимости отъ того будетъ ли $\sqrt{n^2 - a} \lesseqgtr 1$) цѣпная линія.

Въ упомянутомъ нами въ введеніи мемуарѣ Bianchi называетъ полученныя поверхности вращенія соотвѣтственно *гиперболическимъ синусоидомъ, укороченнымъ или удлиненнымъ катеноидомъ и логариѳмической поверхностью вращенія.*

Итакъ мы приходимъ къ *третьей теоремѣ Guichard'a.*

Имѣемъ одну изъ поверхностей вращенія, уравненія которыхъ

$$x^2 + y^2 = (a - n^2) \sinh^2 \frac{z}{n}, \quad x^2 + y^2 = (n^2 - a) \cosh^2 \frac{z}{n}, \quad x^2 + y^2 = e^{\frac{2z}{n}}.$$

Въ плоскостяхъ меридіановъ черезъ каждую точку этихъ поверхностей проведемъ прямая, составляющія съ касательными къ меридіанамъ, построеннымъ въ тѣхъ же точкахъ, уголъ u , *cotang* котораго слѣдующимъ образомъ выражается черезъ координаты точки касанія

$$\text{cotangu} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a}}.$$

Полученная такимъ образомъ конгруэнція прямыхъ D представитъ систему нормалей нѣкоторой поверхности Σ съ постоянной Гауссовской кривизной $-\frac{1}{n^2}$. Если теперь будемъ какъ угодно деформировать нашу поверхность вращенія, при чемъ предположимъ, что лучи конгруэнціи D неизмѣнно съ нею связаны, то эти лучи во все время деформации будутъ нормальны къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ Σ съ постоянной отрицательной кривизной $-\frac{1}{n^2}$. Подобнымъ же свойствомъ будутъ обладать конгруэнціи лучей D_1 , отраженныхъ отъ деформирующей поверхности. Точки соотвѣтствующей имъ поверхности Σ_1 постоянной кривизны будутъ симметричны съ точками поверхностей Σ относительно касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ поверхностямъ S въ точкахъ паденія соотвѣтственныхъ лучей. Черезъ S мы обозначаемъ изгибанія данныхъ поверхностей вращенія.

Выраженіе для разстоянія l между соотвѣтственными точками S и Σ будетъ, какъ легко видѣть,

$$l = \sqrt{r_0^2 + a - n^2}.$$

Въ случаѣ, когда $a = n^2$ найдемъ слѣдующее интересное построеніе.

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ $l = r_0$; далѣе изъ уравненія меридіана $z = n \log r_0$ и соотношенія $r_0 = k \cot \alpha = n \cot \alpha$ находимъ, что $\frac{dz}{dr_0} = \cot \alpha$, откуда заключаемъ, что радіусы параллелей совпадаютъ съ лучами конгруэнціи D . Что касается поверхности Σ , то нетрудно убѣдиться, что въ случаѣ, когда поверхность S представляетъ логарифмическую поверхность вращенія, она представляетъ ничто иное, какъ геометрическое мѣсто центровъ параллелей т. е. ось вращенія.

Такимъ образомъ будемъ имѣть слѣдующую теорему.

Будемъ какъ угодно деформировать логарифмическую поверхность вращенія

$$2z = n \log (x^2 + y^2),$$

при чемъ предположимъ, что съ нею неизмѣнно связана конгруэнція лучей D , совпадающихъ съ радіусами параллелей. Въ такомъ случаѣ геометрическимъ мѣстомъ точекъ, совпадавшихъ вначалѣ съ осью вращенія, будутъ поверхности Σ съ постоянной Гауссовской кривизной $-\frac{1}{n^2}$, ортогональныя къ лучамъ соответственной конгруэнціи D .

Намъ остается только рассмотреть оставленный пока въ сторонѣ случай, когда $\alpha = \text{const}$.

Изъ уравненій (E) находимъ, что при l отличномъ отъ нуля, (случай, который предполагаемъ à priori) α равно 0, а это указываетъ на то, что прямыя конгруэнціи D касаются поверхности S .

Такимъ образомъ приходимъ къ Weingarten'овскому случаю, рассмотрѣнному нами въ § 4 предыдущей главы.

§ 5. Изъ предыдущаго видимъ, что для всѣхъ поверхностей вращенія, на которыя наложимы наши поверхности S , между угломъ α , составленнымъ лучами конгруэнціи D съ касательными, проведенными къ меридіанамъ въ точкѣ паденія луча, и радіусомъ параллели, проходящей черезъ ту же точку, существуетъ соотношение

$$r_0 \tan \alpha = k = \text{const}.$$

Обращаясь къ результатамъ § 7 главы I, видимъ, что въ этомъ случаѣ главныя кривыя поверхности S по отношенію къ конгруэнціямъ D и D_1 будутъ сопряженными кривыми, при чемъ онѣ останутся сопряженными при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S .

Далѣе, такъ какъ конгруэнціи D и D_1 представляютъ конгруэнціи нормалей, то въ силу разсужденій § 4 той же I главы, главныя кривыя поверхности S по отношенію къ конгруэнціямъ D и D_1 совпадаютъ.

Наконецъ, изъ самого опредѣленія главныхъ линій явствуетъ, что онѣ въ данномъ случаѣ соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны поверхностей Σ и Σ_1 , нормальныхъ соотвѣтственно къ лучамъ конгруэнцій D и D_1 .

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, имѣющей фундаментальное значеніе при доказательствѣ теоремъ, обратныхъ теоремамъ Guichard'a.

Линіи кривизны поверхностей Σ и Σ_1 , нормальныхъ соотвѣтственно къ падающимъ и отраженнымъ лучамъ D и D_1 , разсматриваемымъ въ теоремахъ Guichard'a, соотвѣтствуютъ другъ другу и некоторой системѣ сопряженныхъ кривыхъ на соотвѣтственной отражающей поверхности S .

§ 6. Замѣчая, что линейные элементы поверхностей S приводятся къ двумъ формамъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \cotang^2 u dv^2, \quad ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} + k^2 \cotang^2 u dv^2,$$

мы видимъ, что все наши поверхности вращения S представляютъ основныя поверхности вращения, съ которыми мы встрѣтились въ § 8 главы I, при чемъ конгруэнціи D и D_1 будутъ присоединенными къ нимъ конгруэнціями.

Въ виду этого мы можемъ высказать слѣдующую теорему.

Асимптотическія линіи на поверхностяхъ Σ и Σ_1 , разсматриваемыхъ въ теоремахъ Guichard'a, соотвѣтствуютъ другъ другу.

§ 7. Укажемъ теперь на интересную связь, существующую между разсмотрѣнной нами задачей Guichard'a и нахожденіемъ нѣкоторой циклической линейчатой конгруэнціи т. е. конгруэнціи, составленной изъ осей круговъ, нормальныхъ къ безчисленному множеству поверхностей.

Изъ разсужденій настоящей главы ясно, что существуетъ система круговъ, ортогональныхъ къ поверхностямъ Σ и Σ_1 и имѣющихъ центры въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ поверхности S .

Координаты точекъ какого либо изъ этихъ круговъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ

$$x = x_0 + r_0 \cos t, \quad y = 0, \quad z = r_0 \sin t,$$

гдѣ

$$x_0 = \frac{\cos u}{l}, \quad r_0 = l \operatorname{tang} u, \quad (33)$$

а t уголъ, составляемый соотвѣтственнымъ радіусомъ круга съ положительнымъ направленіемъ оси x -ося.

Если какая либо точка M этого круга описываетъ поверхность, ортогональную къ разсматриваемой конгруэнціи круговъ, то проэціи ея перемѣщеній на оси (T) должны удовлетворять соотношенію

$$\sin t dx - \cos t dz = 0$$

при какихъ угодно значеніяхъ du , dv .

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ x_0 и r_0 функции одного параметра u , то послѣднее соотношеніе приведется къ виду

$$Udu + Vdv + Tdt = 0, \quad (34)$$

гдѣ

$$U = qr_0 + qx_0 \cos t + \left(\xi + \frac{dx_0}{du} \right) \sin t,$$

$$V = q_1 (r_0 + x_0 \cos t),$$

$$T = -r_0.$$

Какъ извѣстно, соотношеніе (34) будетъ удовлетворяться при всевозможныхъ значеніяхъ du , dv , если будетъ тождественно удовлетворяться соотношеніе

$$U \left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v} \right) + V \left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) + T \left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} \right) = 0,$$

которое въ настоящемъ случаѣ приводится къ виду

$$A \sin t + B \cos t + C = 0,$$

при чемъ

$$A = 0, \quad B = -q_1 \left[r_0 \xi + x_0 \frac{dr_0}{du} + \frac{r_0 x_0 r_1 \xi}{\eta_1} \right], \quad C = -q_1 \left[x_0 \left(\xi + \frac{dx_0}{du} \right) + \frac{r_0^2 r_1 \xi}{\eta_1} \right].$$

Чтобы наши круги были ортогональны къ безчисленному множеству поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы функции A , B , C обращались тождественно въ нуль ¹⁾, т. е. чтобы удовлетворялись уравненія

$$r_0 \xi \eta_1 + x_0 \eta_1 \frac{dr_0}{du} + r_0 x_0 r_1 \xi = 0, \quad \eta_1 x_0 \xi + \eta_1 x_0 \frac{dx_0}{du} + r_0^2 r_1 \xi = 0. \quad (35)$$

Подставляя сюда значенія ξ , η_1 , r_0 , x_0 для каждаго изъ разсмотрѣнныхъ нами въ этой главѣ случаевъ, увидимъ, что во всѣхъ этихъ случаяхъ уравненія (35) удовлетворяются. Если кромѣ того замѣтимъ, что условія (35) не зависятъ отъ функций p , q , p_1 , q_1 , то прійдемъ къ слѣдующей интересной теоремѣ.

Со всякой поверхностью S , наложенной на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія, неизмѣнно связана нѣкоторая циклическая конформация, остающаяся циклической при всевозможныхъ деформацияхъ поверхности S .

¹⁾ См. Bianchi p. 341.

ГЛАВА IV.

Теоремы Bianchi.

§ 1. Въ предыдущей главѣ мы показали, что, если черезъ точки какой либо поверхности S , наложимой на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія, проведемъ соотвѣтственнымъ образомъ прямыя, то получимъ конгруэнцію нормалей къ нѣкоторой поверхности *минима* или къ нѣкоторой поверхности съ постоянной Гауссовской кривизной.

Лучи разсматриваемой конгруэнціи, неизмѣнно связанные съ поверхностью S и остающіеся нормальными къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ *минима* или поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S , лежатъ въ плоскостяхъ кривизны опредѣленной системы геодезическихъ кривыхъ G поверхности S , представляющихъ изгибанія меридіановъ. Но изъ общей теоріи фокальныхъ поверхностей мы знаемъ, что послѣднія плоскости касаются поверхности S_0 , *дополнительной* къ S , т. е. поверхности, которая вмѣстѣ съ S представляетъ двѣ фокальныя поверхности конгруэнціи касательныхъ къ геодезическимъ кривымъ G .

Такимъ образомъ лучи конгруэнціи, разсмотрѣнной въ предыдущей главѣ, мы можемъ разсматривать какъ прямыя, лежащія въ касательныхъ плоскостяхъ поверхности S_0 .

Отсюда естественно задать себѣ вопросъ, при какихъ условіяхъ лучи нѣкоторой конгруэнціи D , лежащія въ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 и неизмѣнно связанные съ этими плоскостями, будутъ нормальны къ поверхностямъ *минима* или поверхностямъ постоянной кривизны при всевозможныхъ деформаціяхъ поверхности S_0 ; при этомъ мы предполагаемъ, что касательныя плоскости къ S_0 неизмѣнно связаны съ самой поверхностью S_0 .

Очевидно, мы получимъ одно изъ рѣшеній нашего вопроса, разсматривая поверхности S_0 , *дополнительныя* къ поверхностямъ S , наложимымъ на основныя поверхности вращенія.

Исчерпаются-ли этимъ путемъ всѣ рѣшенія поставленнаго вопроса? Дальнѣйшее изслѣдованіе покажетъ, что нѣтъ.

Итакъ мы приходимъ къ разсмотрѣнiю конгруэнцiй, составленныхъ изъ прямыхъ, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 .

Подобныя конгруэнцiи были впервые изслѣдованы Ribaucour'омъ въ его извѣстномъ мемуарѣ „Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes“¹⁾.

Въ этомъ мемуарѣ онъ разсматриваетъ деформации поверхностей, при которыхъ касательныя плоскости къ этимъ поверхностямъ предполагаются неизмѣнно съ ними связанными; подобныя деформации, съ которыми намъ придется постоянно встрѣчаться въ настоящей главѣ, мы для краткости будемъ называть *деформациями Ribaucour'a*, или *деформациями (R)*.

На поверхности S_0 выберемъ координатныя линiи слѣдующимъ образомъ: за линiи $v = \text{const}$ примемъ кривыя, касательныя къ которымъ параллельны соотвѣтственнымъ лучамъ нашей конгруэнцiи D ; за кривыя $u = \text{const}$ примемъ кривыя, ортогональныя къ линiямъ $v = \text{const}$.

Оси (T) выберемъ такъ, чтобы ось x^{oos} касалась кривыхъ $v = \text{const}$, ось y^{oos} — кривыхъ $u = \text{const}$.

При этихъ предположенiяхъ уравненiе какого либо луча разсматриваемой конгруэнцiи D по отношенiю къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будетъ

$$y = h,$$

гдѣ h нѣкоторая функцiя отъ u, v .

Проекцiи перемѣщенiя какой либо точки $M(x, h, o)$ нашего луча на соотвѣтственныя оси будутъ

$$\begin{aligned} \delta x &= \xi du + dx - (rdu + r_1 dv) h, \\ \delta y &= \eta_1 dv + dh + (rdu + r_1 dv) x, \\ \delta z &= (pdu + p_1 dv) h - (qdu + q_1 dv) x. \end{aligned} \quad (1)$$

Если точка M описываетъ поверхность, ортогональную къ лучамъ D , то при всевозможныхъ измѣненiяхъ параметровъ u, v проекцiи ея перемѣщенiй на ось x^{oos} равны нулю.

Такимъ образомъ для подобной точки должно имѣть мѣсто соотношенiе

$$\delta x = dx + \xi du - (rdu + r_1 dv) h = 0 \quad (2)$$

каковы бы ни были значенiя du, dv .

¹⁾ Journal de mathématiques pures et appliquées 4 série t. 7.

Отсюда видимъ, что функции ξ , h , r , r_1 должны удовлетворять соотношенію

$$\frac{\partial(rh - \xi)}{\partial v} = \frac{\partial(r_1 h)}{\partial u}. \quad (3)$$

Въ условіе это, необходимое и достаточное для того, чтобы конгруэнція D представляла конгруэнцію нормалей, не входятъ функции p , q , p_1 , q_1 , а потому оно будетъ имѣть мѣсто при всевозможныхъ деформацияхъ нашей поверхности S_0 , если только предположимъ, что лучи D неизмѣнно связаны съ соответственными касательными плоскостями поверхности S_0 .

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ Ribaucour'a.

Если лучи некоторой конгруэнціи D , лежащія въ касательныхъ плоскостяхъ некоторой поверхности S_0 и неизмѣнно съ ними связанные, представляютъ конгруэнцію нормалей, то они сохраняютъ последнее свойство при всевозможныхъ деформацияхъ (R) поверхности S_0 .

Найдемъ теперь фокальныя точки нашихъ конгруэнцій. Мы опредѣлимъ ихъ изъ того условія, что если параметрамъ u , v дадимъ приращенія du , dv , соответствующія главнымъ кривымъ поверхности S_0 по отношенію къ конгруэнціи D , то перемѣщеніе соответственной фокальной точки будетъ направлено вдоль самого луча; другими словами, проэкція этого перемѣщенія на оси y и z будутъ равны нулю.

Обозначая черезъ ϱ абсциссу соответственной фокальной точки, мы на основаніи (1) выразимъ наши условія слѣдующимъ образомъ:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u} + r\varrho\right) du + \left(\frac{\partial h}{\partial v} + r_1\varrho + \eta_1\right) dv = 0,$$

$$(ph - q\varrho) du + (p_1h - q_1\varrho) dv = 0.$$

Исключая изъ послѣднихъ уравненій ϱ , получимъ дифференціальное уравненіе главныхъ кривыхъ; исключая же du , dv , найдемъ квадратное уравненіе для опредѣленія абсциссъ фокальныхъ точекъ; послѣднее уравненіе очевидно будетъ вида:

$$\begin{aligned} \varrho^2(q_1r - qr_1) + \varrho \left[r_1ph - q \left(\frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right) - rp_1h + q_1 \frac{\partial h}{\partial u} \right] + \\ + ph \left(\frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right) - p_1h \frac{\partial h}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

§ 2. Перейдемъ теперь къ выводу условій, при которыхъ наша конгруэнція D будетъ представлять систему нормалей къ поверхностямъ *minima* или къ поверхностямъ постоянной Гауссовской кривизны, какимъ бы деформациямъ Ribaucour'a мы ни подвергали поверхность S_0 .

Начнемъ съ разсмотрѣнія перваго случая, т. е. случая, когда конгруэнція D нормальна къ поверхностямъ minima Σ .

Если абсциссу соответствующей точки этой послѣдней поверхности обозначимъ черезъ x , а ея радиусы кривизны черезъ R_1 и R_2 , то найдемъ для R_1 и R_2 слѣдующія выраженія:

$$R_1 = x - \rho_1, \quad R_2 = x - \rho_2,$$

гдѣ ρ_1, ρ_2 корни уравненія (4).

Условіе, что поверхность Σ поверхность minima, очевидно, будетъ вида:

$$R_1 + R_2 = 2x - (\rho_1 + \rho_2) = 0,$$

или на основаніи (4), послѣ исключенія при помощи уравненій Codazzi-Mainardi функцій p, q :

$$q_1 \left[2xr + \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi r_1 h}{\eta_1} \right] - p_1 r h + \frac{\xi \eta_1 K}{p_1} \left[2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right] + \frac{\xi q_1^2}{p_1} \left[2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right] = 0;$$

здѣсь черезъ K обозначена Гауссовская кривизна поверхности S_0 .

Такъ какъ послѣднее условіе должно имѣть мѣсто при всевозможныхъ деформацияхъ (R) поверхности S_0 , то оно, какъ мы уже видѣли раньше, должно удовлетворяться независимо отъ значеній функцій p_1, q_1 .

Отсюда находимъ слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять функцій ξ, η_1, x, h :

$$2xr + \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi r_1 h}{\eta_1} = 0, \quad (5)$$

$$2xr_1 + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 = 0, \quad (6)$$

$$hr = 0. \quad (7)$$

Къ этимъ уравненіямъ мы должны присоединить уравненія (3) и (2), а именно:

$$\frac{\partial (rh - \xi)}{\partial v} = \frac{\partial (r_1 h)}{\partial u}, \quad dx = (rh - \xi) du + r_1 h dv.$$

Оставляя въ сторонѣ случай, когда $h=0$, т. е. случай Weingarten'a, когда лучи конгруэнціи касаются поверхности S_0 , мы имѣемъ, что

$$r = 0,$$

т. е., что кривыя $v = \text{const}$ геодезическія; при соотвѣтственномъ выборѣ параметра u можемъ положить

$$\xi = a = \text{const}, \quad (8)$$

гдѣ a какая угодно напередъ заданная постоянная.

Принимая во вниманіе послѣднее обстоятельство, мы приведемъ уравненіе (3) къ виду:

$$\frac{\partial (r_1 h)}{\partial u} = 0,$$

откуда заключаемъ, что

$$r_1 h = \frac{\omega^2(v)}{2}, \quad (9)$$

гдѣ $\omega(v)$ неизвѣстная пока функція.

Обращаясь къ уравненію (5), мы видимъ, что при $r = 0$ оно обращается въ

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial u};$$

выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ v , мы можемъ положить

$$h = \eta_1. \quad (10)$$

Подставляя это значеніе h въ уравненіе (9) и интегрируя его, легко найдемъ слѣдующее выраженіе для η_1 :

$$\eta_1^2 = a [\omega'(v) u + \omega_1(v)], \quad (11)$$

гдѣ $\omega_1(v)$ опять пока неизвѣстная функція отъ v .

Принимая во вниманіе выраженія (8) и (9) и интегрируя уравненіе (2), мы приходимъ къ слѣдующему выраженію для x :

$$x = -au + \frac{\omega(v)}{2} + k, \quad (12)$$

гдѣ k постоянная.

Если теперь подставимъ въ уравненіе (6) найденныя нами значенія ξ , η_1 , h , x , то получимъ слѣдующее выраженіе:

$$au\omega''(v) + \omega'(v)\omega(v) + 2k\omega'(v) + a\omega_1'(v) + 2a\omega_1(v) = 0;$$

послѣднее соотношеніе должно представлять простое тождество, а потому мы получаемъ слѣдующія уравненія для опредѣленія функцій ω и ω_1 :

$$\omega''(v) = 0, \quad \omega'(v)\omega(v) + 2k\omega'(v) + a\omega_1'(v) + 2a\omega_1(v) = 0.$$

Интегрируя первое изъ нихъ, найдемъ, что

$$\omega(v) = mv + n,$$

гдѣ m и n постоянныя.

Подставляя это значеніе $\omega(v)$ во второе изъ полученныхъ уравненій, найдемъ линейное дифференціальное уравненіе 1-го порядка относительно ω_1 , интеграломъ котораго будетъ служить функція

$$\omega_1(v) = ge^{-2v} - \frac{m^2}{2a}v + \frac{m^2}{4a} - \frac{mn + 2km}{2a};$$

здѣсь g новая постоянная.

Такимъ образомъ для η_1^2 мы найдемъ слѣдующее значеніе:

$$\eta_1^2 = a \left[mu - \frac{m^2}{2a}v + ge^{-2v} + \frac{m^2}{4a} - \frac{mn + 2km}{2a} \right].$$

Постоянной a , какъ мы видѣли раньше, можетъ быть приписано какое угодно значеніе; выберемъ ее такъ, чтобы имѣло мѣсто соотношеніе $\frac{m^2}{2a} = m$, т. е. положимъ

$$2a = m,$$

тогда, вводя вмѣсто v параметръ $v_1 = -v$, мы приведемъ линейный элементъ нашей поверхности къ виду

$$ds^2 = a^2 du^2 + a^2 [2(u + v_1) + ge^{2v_1} + 2c] dv^2,$$

гдѣ

$$2c = a - n - 2k.$$

Наконецъ, если вмѣсто u введемъ параметръ $u_1 = u + c$, то для линейнаго элемента поверхности S_0 найдемъ окончательно слѣдующее выраженіе:

$$ds^2 = a^2 \{ du_1^2 + [2(u_1 + v_1) + ge^{2v_1}] dv^2 \}.$$

Обращаясь къ выраженіямъ для функцій ω , x , h , мы найдемъ для нихъ слѣдующія значенія въ параметрахъ u_1 , v_1 :

$$\omega(v) = -2av_1 + n, \quad x = -a(u_1 + v_1) + \frac{a}{2}, \quad h = a \sqrt{2(u_1 + v_1) + ge^{2v_1}}. \quad (13)$$

Поверхность S_0 принадлежитъ къ классу поверхностей, найденныхъ впервые Weingarten'омъ ¹⁾ и характеризуемыхъ линейнымъ элементомъ вида

$$ds^2 = du_1^2 + 2[u_1 + \psi'(v_1)] dv_1^2.$$

¹⁾ Comptes rendus t. CXII p. 607, 706; Darboux t. IV pp. 308—337.

Если известна одна поверхность съ этимъ линейнымъ элементомъ, то опредѣленіе всѣхъ поверхностей, наложимыхъ на нее, сводится къ опредѣленію поверхности, обладающей тѣмъ свойствомъ, что радіусы кривизны ея ρ' , ρ'' въ любой точкѣ и разстояніе p начала координатъ отъ касательной плоскости въ той же точкѣ связаны соотношеніемъ

$$\rho' + \rho'' = -2p - \psi''(p).$$

Такимъ образомъ приходимъ къ первой теоремѣ *Bianchi*.

Если линейчатая конгруэнція D , составленная изъ лучей, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ некоторой поверхности S_0 и неизмѣнно съ этими плоскостями связанныхъ, остается нормальной къ поверхностямъ *minima* при всевозможныхъ деформацияхъ (R) поверхности S_0 , то послѣдняя наложима на поверхность *Weingarten*'а съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = a^2 \{ du_1^2 + [2(u_1 + v_1) + ge^{2v_1}] dv_1^2 \}.$$

Прямая конгруэнціи D параллельна касательнымъ къ кривымъ $v = \text{const}$, при чемъ разстояніе h каждою луча D отъ соответственной касательной таково:

$$h = a \sqrt{2(u_1 + v_1) + ge^{2v_1}}.$$

Въ нашемъ изслѣдованіи мы предполагали, что всѣ постоянныя интеграціи m , n , g отличны отъ нуля.

Легко видѣть, что обращеніе въ нуль постоянной n не будетъ представлять никакого интереса.

Посмотримъ теперь, какое вліяніе окажетъ на наши результаты обращеніе въ нуль постоянной g .

Линейный элементъ поверхности S_0 приметъ въ этомъ случаѣ слѣдующую форму:

$$ds^2 = a^2 [du_1^2 + 2(u_1 + v_1) dv_1^2].$$

Легко видѣть, что наша поверхность S_0 наложима на поверхность вращенія, при чемъ кривыя $u_1 + v_1 = \text{const}$ соответствуютъ параллелямъ поверхности вращенія, а ихъ ортогональныя траекторіи меридіанамъ ¹⁾.

¹⁾ Справедливость нашего утвержденія явствуетъ изъ того, что всѣ поверхности съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = f(au + bv) du^2 + \varphi(au + bv) dv^2,$$

гдѣ a и b постоянныя, наложимы на поверхности вращенія. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ, какъ кривизна K , такъ и дифференціальныя параметры $\Delta_1 K$ и $\Delta_2 K$ будутъ функциями отъ $au + bv$, а слѣдовательно $\Delta_1 K = \omega(K)$, $\Delta_2 K = \omega_1(K)$, а это имѣетъ мѣсто для поверхностей, наложимыхъ на поверхности вращенія. Далѣе, такъ какъ кривыя $K = \text{const}$ представляютъ изгибанія параллелей и такъ какъ $K = F(au + bv)$, то отсюда слѣдуетъ, что кривыя $au + bv = \text{const}$ соответуютъ параллелямъ.

Постараемся поэтому привести нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = a^2 [M(\lambda) d\lambda^2 + N(\lambda) d\varphi^2],$$

гдѣ

$$\lambda = 2(u_1 + v_1). \quad (14)$$

Кривыя $\varphi = \text{const}$ представляютъ ортогональныя траекторіи кривыхъ $\lambda = \text{const}$, поэтому мы найдемъ ихъ уравненіе, интегрируя уравненіе

$$\nabla(\lambda, \varphi) = 0,$$

гдѣ ∇ извѣстный смѣшанный инвариантъ.

Интегрированіе послѣдняго уравненія приводится къ интегрированію линейнаго уравненія

$$\frac{du_1}{dv_1} - 2u_1 = 2v_1,$$

а потому для φ мы получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\varphi = [2(u_1 + v_1) + 1] e^{-2v_1} = (\lambda + 1) e^{-2v_1}. \quad (15)$$

Опредѣляя изъ (14) и (15) u_1, v_1 какъ функціи λ и φ , мы приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = a^2 \left[\frac{\lambda d\lambda^2}{4(\lambda + 1)} + (1 + \lambda) \frac{d\varphi^2}{4\varphi^2} \right]. \quad (16)$$

Найдемъ теперь линейный элементъ поверхности S , дополнительной къ данной поверхности S_0 относительно конгруэнціи касательныхъ къ геодезическимъ кривымъ $\varphi = \text{const}$.

Въ § 5 главы II мы видѣли, что если линейный элементъ нѣкоторой поверхности можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

то линейный элементъ дополнительной поверхности будетъ вида

$$ds_1^2 = \frac{\left[U \frac{d^2 U}{du^2} \right]^2}{\left[\frac{dU}{du} \right]^4} du^2 + \frac{dw^2}{\left[\frac{dU}{du} \right]^2}.$$

При этомъ если координаты точекъ первой поверхности будутъ x, y, z , то координаты соответственныхъ точекъ второй поверхности будутъ

$$x_1 = x - \alpha \frac{U}{U'}, \quad y = y_1 - \alpha' \frac{U}{U'}, \quad z = z_1 - \alpha'' \frac{z}{z'},$$

гдѣ α , α' , α'' \cos 'ы угловъ, составляемыхъ касательными къ кривымъ $v = \text{const}$, проведеннымъ на первой поверхности, съ осями координатъ.

Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$dw^2 = a^2 \frac{\lambda d\lambda^2}{4(\lambda + 1)}, \quad U^2 = a^2(\lambda + 1),$$

а потому для дополнительной поверхности найдемъ

$$ds_1^2 = a^2 \left[\frac{\lambda + 1}{4\lambda} d\lambda^2 + \frac{\lambda}{4} dw^2 \right].$$

Сравнивая это выраженіе для линейнаго элемента съ общимъ выраженіемъ линейнаго элемента поверхностей вращенія

$$ds_1^2 = [1 + (f'(r_0))^2] dr_0^2 + r_0^2 dv^2,$$

найдемъ, что

$$v = \frac{w}{2}, \quad r_0^2 = a^2 \lambda,$$

а потому для опредѣленія $f(r_0)$ будемъ имѣть дифференціальное уравненіе

$$[f'(r_0)]^2 = \frac{r_0^2}{a^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, найдемъ уравненіе искомой поверхности вращенія

$$z = f(r_0) = \frac{x^2 + y^2}{2a},$$

а это параболоидъ вращенія.

Итакъ дополнительная поверхность S къ нашей поверхности S_0 представляетъ поверхность, наложимую на параболоидъ вращенія.

Покажемъ теперь, что лучи нашей конгруэнціи D проходятъ черезъ соотвѣтственныя точки поверхности S , т. е., что наша конгруэнція *присоединенная* конгруэнція поверхности S .

Замѣтимъ, что \cos ' угла θ , составляемаго кривыми $\varphi = \text{const}$ съ кривыми $u_1 = \text{const}$, т. е. съ осями $y^{\text{оос}}$ нашей системы подвижныхъ координатъ (T) будетъ

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2(u_1 + v_1) + 1}},$$

кромѣ того разстояніе соотвѣтственныхъ точекъ поверхностей S_0 и S , равное $\frac{U}{U'}$, будетъ

$$\delta = a \sqrt{2(u_1 + v_1) + 1} \cdot \sqrt{2(u_1 + v_1)}.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что ордината соотвѣтственной точки поверхности S будетъ

$$y = \delta \cos \theta = a \sqrt{2(u_1 + v_1)} = h,$$

откуда видимъ, что эта точка лежитъ на соотвѣтственномъ лучѣ конгруэнціи D .

Обратимся наконецъ къ тому случаю, когда $m = 0$; тогда будемъ имѣть слѣдующія значенія для функций $\omega(v)$ и $\omega_1(v)$:

$$\omega(v) = n, \quad \omega_1(v) = ge^{-2v}.$$

Положимъ постоянную a равнойъ единицѣ, тогда для функций ξ , η_1 , h , x найдемъ, какъ легко видѣть, слѣдующія выраженія:

$$\xi = 1, \quad \eta_1 = \sqrt{ge^{-v}}, \quad x = -u + \frac{n + 2k}{2}, \quad h = \sqrt{ge^{-v}},$$

откуда заключаемъ, что линейный элементъ поверхности S_0 будетъ вида:

$$ds^2 = du^2 + ge^{-2v} dv^2,$$

т. е. поверхность S_0 *развертывающаяся*.

Проекціи перемѣщеній соотвѣтственной точки поверхности Σ на основаніи выраженій (1) будутъ:

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = (pdu + p_1dv)h - (qdu + q_1dv)x,$$

откуда заключаемъ, что въ этомъ случаѣ поверхность Σ обращается въ кривую, представляющую ортогональную траекторію касательныхъ плоскостей нашей развертывающейся поверхности S_0 .

§ 3. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію условий, при которыхъ лучи нашей конгруэнціи D при всевозможныхъ деформацияхъ (R) поверхности S_0 остаются нормальными къ поверхностямъ съ постоянной Гауссовской кривизной $\frac{1}{m}$.

Придерживаясь обозначеній двухъ предыдущихъ параграфовъ, мы приходимъ къ слѣдующему условію:

$$R_1 R_2 = (x - \varrho_1)(x - \varrho_2) = m,$$

гдѣ ϱ_1 , ϱ_2 корни уравненія (4), а x абсцисса соотвѣтственной точки поверхности Σ .

На основаніи уравненія (4) и уравненій Codazzi-Mainardi, при помощи которыхъ мы можемъ исключить функции p , q , мы приведемъ наше условіе къ слѣдующему виду:

$$q_1 \left[(x^2 - m)r + x \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi h}{\eta_1} \left(r_1 x + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right) \right] - p_1 h \left(r x + \frac{\partial h}{\partial u} \right) + \\ + \left(\frac{\xi \eta_1 K}{p_1} + \frac{\xi q_1^2}{\eta_1 p_1} \right) \left[r_1 (x^2 - m) + x \frac{\partial h}{\partial v} + x \eta_1 \right] = 0;$$

здѣсь по прежнему черезъ K обозначена Гауссовская кривизна поверхности S_0 .

Послѣднее соотношеніе должно, по условію нашей задачи, удовлетворяться независимо отъ значеній функций p_1, q_1 ; поэтому оно разбивается на рядъ слѣдующихъ уравненій:

$$r(x^2 - m) + x \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\xi h}{\eta_1} \left(r_1 x + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right) = 0, \quad (17)$$

$$r_1(x^2 - m) + x \frac{\partial h}{\partial v} + x \eta_1 = 0, \quad (18)$$

$$h \left(r x + \frac{\partial h}{\partial u} \right) = 0. \quad (19)$$

къ которымъ мы должны присоединить уравненія (2) и (3), а именно:

$$dx = (rh - \xi) du + r_1 h dv, \quad \frac{\partial (rh - \xi)}{\partial v} = \frac{\partial (r_1 h)}{\partial u}.$$

Предполагая, что h не равно нулю, т. е., что лучи нашей конгруэнціи не касаются поверхности S_0 , мы на основаніи (19) приведемъ уравненіе (17) къ виду:

$$rm + \frac{\xi h}{\eta_1} \left(r_1 x + \frac{\partial h}{\partial v} + \eta_1 \right) = 0; \quad (20)$$

въ силу же послѣдняго уравненія уравненіе (18) обратится въ слѣдующее:

$$r \eta_1 x + r_1 \xi h = 0. \quad (21)$$

Такимъ образомъ рѣшеніе нашего вопроса сводится къ интегрированію системы уравненій (2), (3), (19), (20), (21).

Комбинируя уравненія (19) и (21), найдемъ, что

$$\eta_1 \frac{\partial h}{\partial u} = h \frac{\partial \eta_1}{\partial u},$$

откуда при соответственномъ выборѣ параметра v имѣемъ

$$h = \eta_1. \quad (22)$$

Если примем во вниманіе это значеніе h , то уравненіе (19) обратится въ слѣдующее:

$$r = -\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\frac{1}{x} \frac{\partial \eta_1}{\partial u}; \quad (23)$$

отсюда легко найдемъ, что

$$\frac{\partial x}{\partial u} = rh - \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1 h = \frac{\eta_1}{\xi} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \frac{x}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v}. \quad (24)$$

Подставимъ эти значенія въ уравненіе (3), при чемъ для краткости положимъ

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \omega,$$

тогда послѣднее уравненіе обратится въ слѣдующее:

$$x \frac{\partial \omega}{\partial u} + \xi \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0. \quad (25)$$

Полученное отсюда значеніе x должно удовлетворять уравненію (2), или что то же, уравненіямъ (24).

Подставляя вмѣсто x полученное нами значеніе во второе изъ уравненій (24), найдемъ, что функція ω должна удовлетворить дифференціальному уравненію вида

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial \omega}{\partial v} \right] = 0;$$

выбравши соотвѣтственнымъ образомъ параметръ u , мы можемъ всегда положить, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial v} = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ для ω слѣдующее выраженіе:

$$\omega = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial v} = \varphi'(v - u), \quad (26)$$

гдѣ φ пока неизвѣстная функція.

Кромѣ того изъ (25) заключаемъ, что при нашемъ выборѣ параметра u

$$x = \xi. \quad (27)$$

Если теперь проинтегрируемъ уравненіе (26), то для ξ найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$\xi = e^{\varphi(v-u) + \psi(u)}; \quad (28)$$

функція $\psi(u)$ опредѣлится изъ условія:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = rh - \xi = -\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi,$$

которое въ данномъ случаѣ приводится къ виду

$$\psi'(u) = -1.$$

Отсюда находимъ, что

$$\psi(u) = -u + k,$$

гдѣ k произвольная постоянная.

Намъ остается опредѣлить только функціи η_1 и φ .

Обращаясь къ уравненію (21), мы напомнимъ его въ слѣдующей формѣ:

$$\eta_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = \xi \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

или принимая во вниманіе значеніе ξ

$$\frac{\partial (\eta_1^2)}{\partial u} = 2\varphi'(v-u) e^{2\varphi(v-u) - 2u + 2k};$$

интегрируя это уравненіе, мы найдемъ, что

$$\eta_1^2 = \gamma(v) + 2 \int \varphi'(v-u) e^{2[\varphi(v-u) - u + k]} du, \quad (29)$$

гдѣ $\gamma(v)$ нѣкоторая, пока неизвѣстная, функція отъ v .

Подставивъ теперь всѣ полученныя нами значенія функцій ξ , η_1 , x , h въ уравненіе (20), мы приведемъ его къ виду:

$$\begin{aligned} & (e^{2[\varphi(v-u) - u + k]} - m) \varphi'(v-u) + \gamma(v) + \frac{\gamma'(v)}{2} + \\ & + \int [2\varphi'^2(v-u) + \varphi''(v-u) + 2\varphi'(v-u)] e^{2\varphi(v-u) - 2u + 2k} du = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе по u получимъ:

$$m\varphi''(v-u) = 0,$$

откуда, такъ какъ m отлично отъ нуля (кривизну поверхности Σ мы предполагаемъ конечной), найдемъ:

$$\varphi(v-u) = n(v-u) + n_1, \quad (31)$$

при чемъ, какъ легко видѣть, не нарушая общности, можемъ положить $n_1 = 0$.

Если подставимъ это значеніе функціи φ въ уравненіе (30), то оно, послѣ простыхъ вычисленій, приведется къ виду:

$$\gamma'(v) + 2\gamma(v) - mn = 0.$$

Интегрируя послѣднее линейное уравненіе, найдемъ слѣдующее выраженіе для функціи $\gamma(v)$:

$$\gamma(v) = mn + be^{-2v},$$

гдѣ b постоянная.

Зная φ и γ мы легко найдемъ изъ (29) значеніе η_1 , а именно:

$$\eta_1^2 = mn + be^{-2v} - \frac{n}{n+1} e^{2nv-2(n+1)u+2k};$$

что касается функціи ξ , то она на основаніи (28) имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$\xi = e^{nv-(n+1)u+k}.$$

Такимъ образомъ линейный элементъ нашей поверхности S_0 будетъ слѣдующаго вида:

$$ds^2 = e^{2nv-2(n+1)u+2k} \left[be^{-2v} - \frac{n}{n+1} e^{2nv-2(n+1)u+2k} + mn \right] dv^2. \quad (32)$$

Вводя вмѣсто v параметръ v_1 , при чемъ

$$v_1 = v + \frac{k}{n},$$

мы приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = e^{2\tau} du^2 + \left[ge^{-2v_1} - \frac{n}{n+1} e^{2\tau} + mn \right] dv_1^2, \quad (33)$$

гдѣ

$$\tau = nv_1 - (n+1)u. \quad (34)$$

Наше выраженіе для ds^2 становится иллюзорнымъ, если мы постоянной n дадимъ значеніе -1 ; поэтому этотъ случай требуетъ болѣе детальнаго разсмотрѣнія.

Если $n = -1$, т. е. если функція $\varphi(v-u)$ имѣетъ значеніе

$$\varphi(v-u) = u - v,$$

то подставляя это значение $\varphi(v-u)$ въ уравненіе (30), мы получимъ для опредѣленія γ слѣдующее линейное уравненіе:

$$\gamma'(v) + 2\gamma(v) + 2(m - e^{-2v+2k}) = 0.$$

Интегрируя его, найдемъ для $\gamma(v)$ выраженіе

$$\gamma(v) = 2ve^{-2(v-k)} + be^{-2(v-k)} - m,$$

гдѣ b постоянная интеграціи.

Зная φ и γ , мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ η_1 и ξ , а именно:

$$\eta_1^2 = 2(v-u)e^{-2(v-k)} + be^{-2(v-k)} - m$$

и

$$\xi = e^{-v+k},$$

а потому линейный элементъ нашей поверхности S_0 въ этомъ случаѣ будетъ вида:

$$ds^2 = e^{-2(v-k)} du^2 + [2(v-u)e^{-2(v-k)} + be^{-2(v-k)} - m] dv^2. \quad (35)$$

Если введемъ новый параметръ v_1 , при чемъ

$$v = v_1 + k,$$

то нашъ линейный элементъ приведетъ къ виду:

$$ds^2 = e^{-2v_1} du^2 + [2(v_1-u)e^{-2v_1} + ge^{-2v_1} - m] dv_1^2. \quad (36)$$

Здѣсь черезъ g мы обозначили постоянную $2k + b$.

Поверхности, имѣющія линейный элементъ послѣдняго типа, играютъ весьма важную роль въ теоріи тройно-ортогональныхъ системъ Weingarten'a ¹⁾.

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Если нѣкоторая линейчатая конгруэнція D , лучи которой лежатъ въ соответственныхъ касательныхъ плоскостяхъ нѣкоторой поверхности S_0 и при томъ неизмѣнно связаны съ этими плоскостями, остается нормальной къ поверхностямъ Σ постоянной кривизны $\frac{1}{m}$ при всевозможныхъ деформацияхъ (R) поверхности S_0 , то линейный элементъ поверхности S_0 можетъ быть приведенъ къ одному изъ видовъ (33) и (36). Координаты соответственныхъ точекъ поверхности Σ по отношенію къ выбраннымъ нами осямъ (T) будутъ

$$x = \xi, \quad y = h = \eta_1,$$

¹⁾ См. Bianchi Кар. 20.

если через ξ^2 и η_1^2 обозначим коэффициенты линейного элемента (36) поверхности S_0 .

Намъ остается рассмотретьъ случай, когда поверхность S_0 наложима на поверхность вращения, и показать, что тогда она представляетъ поверхность, дополнительную къ одной изъ основныхъ поверхностей съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + m \sin^2 u)} + k^2 \cotang^2 u dv^2.$$

Поверхность S_0 будетъ, очевидно, наложима на поверхность вращения въ случаѣ, когда постоянную g , входящую въ выражение (33), положимъ равной нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ коэффициенты линейнаго элемента S_0 будутъ функциями τ , которое въ свою очередь представляетъ линейную функцию параметровъ u, v .

Кривыя $\tau = \text{const}$ будутъ изгибаниями параллелей, а ихъ ортогональныя траекторіи $\varphi = \text{const}$ изгибаниями меридіановъ.

Положимъ

$$\frac{e^{2\tau}}{m(n+1) - e^{2\tau}} = \lambda,$$

тогда дифференціальное уравненіе ортогональныхъ траекторій къ кривымъ $\tau = \text{const}$ приметъ видъ:

$$\lambda du + dv = 0,$$

или

$$dv - \frac{d\lambda}{2(1+\lambda)(n\lambda+n+1)} = 0.$$

Отсюда получаемъ уравненіе ортогональныхъ траекторій въ конечномъ видѣ, а именно:

$$\varphi = v - \int \frac{d\lambda}{2(1+\lambda)(n\lambda+n+1)} = c.$$

Примемъ за координатныя лініи на поверхности S_0 кривыя $\lambda = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$.

Какъ легко видѣть, линейный элементъ нашей поверхности приведется къ виду:

$$ds^2 = \frac{m d\lambda^2}{\lambda(1+\lambda)(n\lambda+n+1)} + \frac{mn(n\lambda+n+1)}{(n+1)(1+\lambda)} d\varphi^2.$$

На основаніи выраженія (10) главы II, линейный элемент поверхности S , составляющей вторую фокальную поверхность касательных къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, будетъ:

$$ds_1^2 = \frac{m(n\lambda + n + 1)}{4\lambda^3(1 + \lambda)} d\lambda^2 + \frac{m}{\lambda} dw^2.$$

Если теперь положимъ

$$\lambda = \frac{n + 1}{n} \text{tang}^2\theta,$$

то приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду:

$$ds^2 = \frac{mnd\theta^2}{\sin^4\theta [n + \sin^2\theta]} + k^2 \text{cotang}^2\theta dw^2,$$

гдѣ k постоянная.

Отсюда заключаемъ, что поверхность S наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращения.

Опредѣляя, какъ въ концѣ § 2, ординату соотвѣтственной точки поверхности S , найдемъ, что она равна h , т. е., что лучи нашей конгруэнціи проходятъ черезъ соотвѣтственныя точки поверхности S ; другими словами наша конгруэнція представляетъ изъ себя конгруэнцію, *присоединенную къ одной изъ поверхностей, наложимыхъ на определенную основную поверхность вращения.*

Если постоянной n дадимъ значеніе нуль, то, какъ нетрудно видѣть, поверхность S_0 будетъ развертывающейся, а поверхность Σ degenerируетъ въ кривую линію, ортогональную къ касательнымъ плоскостямъ поверхности S_0 .

ГЛАВА V.

Теорема, обратная первой теоремѣ Guichard'a. Одно преобразование поверхностей minima. Теорема, обратная первой теоремѣ Bianchi.

§ 1. Въ третьей главѣ мы видѣли, что, зная поверхность S , наложимую на параболоидъ вращения и имѣющую линейный элементъ вида

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \cotang^2 u dv^2, \quad (1)$$

гдѣ a и k постоянныя, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ двѣ поверхности minima Σ и Σ_1 .

Поверхности эти будутъ соотвѣтственно нормальны къ системамъ падающихъ и отраженныхъ лучей D и D_1 , представляющихъ конгруэнции, присоединенныя къ S . Лучи конгруэнцій D и D_1 лежатъ въ плоскостяхъ кривизны кривыхъ $v = \text{const}$ и составляютъ съ касательными къ этимъ кривымъ, проведенными въ соотвѣтственныхъ точкахъ паденія лучей, углы u и $-u$.

Разстоянія l точекъ поверхностей Σ и Σ_1 отъ соотвѣтственныхъ точекъ поверхности S выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ углы u :

$$2l = \frac{a}{\sin^2 u}. \quad (2)$$

Линіи кривизны поверхностей Σ и Σ_1 соотвѣтствуютъ одной и той же системѣ сопряженныхъ кривыхъ, проведенныхъ на поверхности S .

Положимъ теперь, что имѣемъ нѣкоторую поверхность minima Σ .

Въ настоящей главѣ мы покажемъ, что можно всегда найти на нормаляхъ къ Σ такія точки M , геометрическимъ мѣстомъ которыхъ будетъ поверхность S съ линейнымъ элементомъ (1), т. е. поверхность, наложимая на параболоидъ вращения; для этой поверхности S система нормалей къ Σ представляетъ присоединенную конгруэнцію.

Разъ будетъ найдена поверхность S , то тѣмъ самымъ мы опредѣлимъ вторую поверхность minima Σ_1 , которую мы можемъ считать нѣкоторымъ преобразованиемъ поверхности Σ .

Такимъ образомъ вопросъ о нахожденіи поверхности S , представляющей, очевидно, вопросъ обратный задачѣ Guichard'a, тѣсно связанъ съ вопросомъ о нѣкоторомъ преобразованіи поверхностей minima.

Далѣе, въ четвертой главѣ, мы видѣли, что зная нѣкоторую поверхность S_0 Weingarten'овскаго типа съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = du^2 + [2(u + v) + ge^{2v}] dv^2,$$

гдѣ g постоянная, мы найдемъ нѣкоторую поверхность minima Σ , нормальную къ конгруэнціи прямыхъ, лежащихъ въ касательныхъ плоскостяхъ поверхности S_0 и параллельныхъ соответственнымъ касательнымъ къ кривымъ $v = \text{const}$.

Представляетъ извѣстный интересъ обратный вопросъ, а именно, можно-ли найти для каждой поверхности minima Σ соответственную Weingarten'овскую поверхность, связанную съ Σ такимъ соотношеніемъ, какъ упомянутая поверхность S_0 .

Рѣшеніемъ этихъ двухъ вопросовъ, т. е. вопросовъ, обратныхъ задачамъ Guichard'a и Bianchi, мы и займемся въ настоящей главѣ.

§ 2. Итакъ предположимъ, что имѣемъ нѣкоторую поверхность minima Σ .

Отнесемъ ее къ линіямъ кривизны $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$; оси (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы ось x^{000} касалась кривыхъ $\beta = \text{const}$, а ось y^{000} кривыхъ $\alpha = \text{const}$.

Какъ извѣстно ¹⁾, линейный элементъ поверхности Σ въ этомъ случаѣ можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = \frac{\omega^2}{4} (d\alpha^2 + d\beta^2); \quad (3)$$

основныя величины, характеризующія нашу поверхность, будутъ

$$\xi = \eta_1 = -\frac{\omega}{2}, \quad p = q_1 = 0, \quad p_1 = q = \frac{1}{\omega}, \quad r = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \quad r_1 = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha},$$

при чемъ ω интегральнъ дифференціального уравненія

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2}. \quad (4)$$

Возьмемъ на нормали къ Σ какую либо точку $M(o, o, l)$; проэкции ея перемѣщеній на оси (T) будутъ

$$\delta x = \frac{2l - \omega^2}{2\omega} d\alpha, \quad \delta y = -\frac{2l + \omega^2}{2\omega} d\beta, \quad \delta z = dl. \quad (5)$$

¹⁾ Darboux. t. III p. 321.

Посмотримъ, нельзя-ли выбрать точку M такъ, чтобы она описала въ пространствѣ поверхность S , наложимую на параболоидъ вращения, и при томъ такую, чтобы нормали къ Σ представляли конгруэнцію, присоединенную къ S .

Для опредѣленія l имѣемъ два условія: первое—это зависимость (2) между l и угломъ u , составляемымъ нормалью къ Σ съ соответственной касательной плоскостью къ поверхности S ; второе—то, что линіи кривизны поверхности Σ соответствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S .

Выразимъ аналитически эти два условія и покажемъ, что они всегда совмѣстны.

Уравненіе касательной плоскости къ S по отношенію къ соответственнымъ осямъ (T) будетъ:

$$Mx + Ny + z - l = 0; \quad (6)$$

коэффициенты M и N опредѣлятся изъ условія

$$M\delta x + N\delta y + \delta z = 0,$$

гдѣ δx , δy , δz представляютъ проэкции перемѣщенной разсматриваемой точки.

Такъ какъ послѣднее соотношеніе имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$, то отсюда имѣемъ:

$$M = -\frac{2\omega}{2l - \omega^2} \frac{\partial l}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{2\omega}{2l + \omega^2} \frac{\partial l}{\partial \beta}. \quad (7)$$

Если черезъ u обозначимъ уголъ, составляемый нормалью къ Σ съ плоскостью (6), тогда очевидно найдемъ, что

$$\sin^2 u = \frac{1}{M^2 + N^2 + 1}.$$

Подставляя это значеніе $\sin^2 u$ въ соотношеніе (2), получимъ иско-
мое первое условіе, служащее для опредѣленія функціи l

$$M^2 + N^2 = \frac{2l - a}{a}. \quad (I)$$

Условіе (I) представляетъ дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 1-го порядка относительно l .

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Черезъ нѣкоторую неподвижную точку P пространства, принятую за начало подвижной системы координатъ (T_1), оси которой постоянно

параллельны соответственным осямъ координатъ (T), проведемъ плоскость, параллельную плоскости (6); уравнение ея относительно (T_1) будетъ

$$Mx + Ny + z = 0. \quad (8)$$

Дадимъ параметру α приращение $d\alpha$; оси (T_1) при этомъ примутъ положеніе (T'_1), точка M поверхности S передвинется вдоль кривой $\beta = \text{const}$ въ нѣкоторую точку M' ; уравнение плоскости, проходящей черезъ нашу точку P и параллельной касательной плоскости къ S въ точкѣ M' , по отношенію къ осямъ (T'_1) будетъ, очевидно

$$M'x' + N'y' + z' = 0; \quad (9)$$

гдѣ

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial \alpha} d\alpha, \quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Пересѣченіе плоскостей (8) и (9) дастъ намъ въ предѣлѣ направленіе, сопряженное съ кривой $\alpha = \text{const}$ на поверхности S .

Уравнение плоскости (9) по отношенію къ осямъ (T_1) получимъ, полагая ¹⁾

$$x' = x - \left(\frac{y}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{z}{\omega} \right) d\alpha, \quad y' = y + \frac{x}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha, \quad z' = z + \frac{x}{\omega} d\alpha,$$

а потому по отношенію къ осямъ (T_1) предѣльная прямая пересѣченія плоскостей (8) и (9) будетъ дана уравненіемъ (8) и уравненіемъ

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{N}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{1}{\omega} \right) x + \left(\frac{\partial N}{\partial \alpha} - \frac{M}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) y - \frac{Mz}{\omega} = 0.$$

Если кривыя $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ сопряженны на поверхности S , то послѣдняя прямая должна быть параллельна перемѣщенію нашей точки M вдоль кривой $\alpha = \text{const}$.

Написавши это условіе, приходимъ къ уравненію

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{M}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{MN}{\omega}; \quad (II)$$

уравненіе это въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно l ; въ раскрытой формѣ оно будетъ

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{2l + \omega^2}{2l - \omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial l}{\partial \alpha} - \frac{2l - \omega^2}{2l + \omega^2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial l}{\partial \beta} + \frac{8l}{(2l - \omega^2)(2l + \omega^2)} \frac{\partial l}{\partial \alpha} \frac{\partial l}{\partial \beta}.$$

¹⁾ См. формулы (11) § 6 гл. II.

Уравнение (II) мы можем представить въ нѣсколько иной формѣ, а именно, пользуясь выраженіями (7) для M и N , можем привести это уравнение къ виду

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = \frac{N}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{MN}{\omega}. \quad (\text{III})$$

§ 3. Дальнѣйшая задача сводится къ доказательству совмѣстности уравненій (I) и (II) или, что то же, уравненій (I) и (III).

Предположимъ, что послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто; въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравнение (I) по α и вставимъ въ полученное уравнение вмѣсто $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ его значеніе (II), тогда найдемъ, что

$$M \left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{N}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{N^2}{\omega} + \frac{2l - \omega^2}{2a\omega} \right] = 0.$$

Исключая пока случай $M = 0$, получимъ, что

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = -\frac{N}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{N^2}{\omega} - \frac{2l - \omega^2}{2a\omega}. \quad (\text{IV})$$

Наконецъ дифференцируя уравнение (I) по β , пользуясь выраженіемъ (III) для $\frac{\partial M}{\partial \beta}$ и исключая случай $N = 0$, найдемъ еще слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -\frac{M}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{M^2}{\omega} + \frac{2l + \omega^2}{2a\omega}. \quad (\text{V})$$

Итакъ, если наши уравненія (I) и (II) совмѣстны, то должны быть совмѣстны уравненія (II)—(V), т. е. должны удовлетворяться тождественно соотношенія

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Въ справедливости послѣднихъ тождествъ легко убѣдиться простымъ дифференцированіемъ выраженій (II)—(V), если при томъ примемъ во вниманіе соотношеніе (I) и вспомнимъ, что ω интеграль уравненія

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

Если теперь, перенесемъ всѣ члены въ уравненіи (I) въ лѣвую часть и обозначимъ полученную лѣвую часть, черезъ L , то въ силу уравненій (II)—(V), будемъ имѣть, что производная $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что $L = \text{const}$.

Для совмѣстности уравненій (II)—(V) эта постоянная должна равняться нулю.

Уравненія (II)—(V) представляютъ три уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно l ; если они совмѣстны, то они имѣютъ въ извѣстной области голоморфный интеграль, опредѣляемый начальными значеніями функцій l , $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Для совмѣстности уравненій (II)—(V) эти начальныя значенія должны удовлетворять соотношенію $L_0 = 0$, гдѣ черезъ L_0 обозначимъ значеніе функціи L , когда вставимъ въ нее вмѣсто функцій l , $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ ихъ начальныя значенія.

Принимая теперь во вниманіе, что постоянная a выбрана нами произвольно видимъ, что въ наше выраженіе для l будетъ входить три произвольныхъ постоянныхъ a , l_0 , $\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)_0$, а потому поверхностей S , удовлетворяющихъ двумъ нашимъ условіямъ будетъ ∞^3 .

§ 4. Покажемъ теперь, что всѣ найденныя нами поверхности S наложимы на параболоидъ вращенія.

Обращаясь къ выраженіямъ (5) проэкцій перемѣщеній точки M поверхности S , мы получимъ для линейнаго элемента этой поверхности слѣдующее выраженіе:

$$ds_0^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \left[\frac{(2l - \omega^2)^2}{4\omega^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha} \right)^2 \right] d\alpha^2 + \\ + 2 \frac{\partial l}{\partial \alpha} \frac{\partial l}{\partial \beta} d\alpha d\beta + \left[\frac{(2l + \omega^2)^2}{4\omega^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \right)^2 \right] d\beta^2.$$

Если поверхность S представляетъ одну изъ искомыхъ поверхностей, наложимыхъ на параболоидъ вращенія, то на ней кривыя $l = \text{const}$ должны быть геодезическими параллелями, т. е. дифференціальный параметръ $A_1(l)$, относительно линейнаго элемента ds_0^2 долженъ быть функціей одного l ¹⁾.

Составляя этотъ параметръ, найдемъ, что

$$A_1(l) = \frac{2l - a}{2l}.$$

¹⁾ Bianchi. p. 159.

Какъ известно ¹⁾, дифференціаль дуги геодезическихъ линий, ортогональныхъ къ кривымъ $l = \text{const}$, будетъ

$$d\theta = \sqrt{\frac{2l}{2l-a}} dl;$$

линейный же элементъ поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2 du^2.$$

Для опредѣленія функціи σ , найдемъ выраженіе для геодезической кривизны линий $l = \text{const}$, пользуясь известной формулой Bonnet:

$$\frac{1}{\rho_{gl}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{F \frac{\partial l}{\partial \beta} - G \frac{\partial l}{\partial \alpha}}{H} + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{F \frac{\partial l}{\partial \alpha} - E \frac{\partial l}{\partial \beta}}{H} \right\},$$

гдѣ

$$H = \sqrt{E \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha} \right)^2 - 2F \frac{\partial l}{\partial \alpha} \frac{\partial l}{\partial \beta} + G \left(\frac{\partial l}{\partial \beta} \right)^2},$$

а E, F, G коэффициенты линейнаго элемента разсматриваемой поверхности S .

Воспользовавшись уравненіями (I)—(V) и вводя вмѣсто l переменное u по формулѣ

$$2l = \frac{a}{\sin^2 u},$$

мы послѣ всѣхъ вычисленій приходимъ къ уравненію

$$-\frac{1}{\rho_{gl}} = \frac{\partial \log \sigma}{\partial u} = -\frac{1}{\sin u \cos u},$$

откуда найдемъ, что

$$\sigma = k \cotang u,$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Замѣчая, что

$$d\theta = \sqrt{\frac{2l}{2l-a}} dl = -\frac{adu}{\sin^3 u},$$

представимъ линейный элементъ нашей поверхности S въ видѣ

¹⁾ Bianchi, p. 160.

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^6 u} + k^2 \cotang^2 u dv^2,$$

откуда заключаемъ, что эта поверхность наложима на параболоидъ вращения.

Чтобы доказать, что конгруэнція нормалей къ Σ представляетъ конгруэнцію, присоединенную къ S , намъ остается доказать, что на поверхности S кривыя $l = \text{const}$ ортогональны къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соотвѣтственные нормали къ S и Σ .

Уравненіе какой-либо изъ этихъ плоскостей по отношенію къ соотвѣтственной системѣ координатъ (T) , будетъ очевидно

$$Nx - My = 0.$$

Проекціи перемѣщеній точки M поверхности S вдоль кривой $l = \text{const}$ будутъ

$$\delta x = \frac{2l - \omega^2}{2\omega} d\alpha, \quad \delta y = \frac{2l + \omega^2}{2\omega} \frac{\frac{\partial l}{\partial \alpha}}{\frac{\partial l}{\partial \beta}} d\beta, \quad \delta z = 0,$$

или на основаніи (7)

$$\delta x = \frac{2l - \omega^2}{2\omega} d\alpha, \quad \delta y = -\frac{2l - \omega^2}{2\omega} \frac{M}{N}, \quad \delta z = 0,$$

откуда имѣемъ

$$-\frac{M}{\delta y} = \frac{N}{\delta x},$$

а это и есть требуемое условіе.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности минимума Σ соотвѣтствуетъ ∞^3 поверхностей S , наложимыхъ на параболоидъ вращения, при чемъ нормали къ Σ составляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S .

§ 5. Мы исключили изъ нашего изслѣдованія случай, когда $M=0$ или $N=0$; рассмотримъ его подробнѣе.

Положимъ сперва, что $M=0$; обращаясь къ уравненію (III), видимъ, что въ этомъ случаѣ либо $N=0$, либо $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$.

Первое предположеніе не даетъ намъ рѣшенія задачи, ибо тогда мы найдемъ, что $l = \text{const}$ и $u = \text{const}$, а такого рѣшенія задача Guichard'a очевидно не допускаетъ. Что касается второго предположенія, то оно показываетъ, что въ этомъ случаѣ поверхность Σ — поверхность

вращения, а такъ какъ она еще и поверхность minima, то слѣдовательно она представляетъ *катеноидъ*.

Всѣ уравненія (I)—(V) сводятся къ одному уравненію (I), которое въ данномъ случаѣ будетъ обыкновеннымъ дифференціальнымъ уравненіемъ 1-го порядка.

Интеграль его заключаетъ одну произвольную постоянную; если присоединимъ къ ней еще произвольную постоянную a , то увидимъ, что поверхностей S , удовлетворяющихъ нашимъ условіямъ будетъ ∞^2 .

Линейный элементъ этихъ поверхностей будетъ вида:

$$ds_0^2 = \frac{(2l - \omega^2)^2}{4\omega^2} d\alpha^2 + \left[\frac{(2l + \omega^2)^2}{4\omega^2} + \left(\frac{dl}{d\beta} \right)^2 \right] d\beta^2.$$

Такъ какъ l и ω функции одного параметра β , то уже изъ самой формы линейнаго элемента видимъ, что поверхность S наложима на поверхность вращения. При помощи того же анализа, что и въ предыдущемъ параграфѣ, мы убѣдимся, что поверхность S наложима на параболоидъ вращения.

Далѣе помощью весьма простыхъ разсужденій можно показать, что поверхность S будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ поверхностью вращения.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ разстояніе l между соотвѣтственными точками поверхностей S и Σ функция одного параметра β , то оно не мѣняется при перемѣщеніяхъ по этимъ поверхностямъ вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$; другими словами, перемѣщенія вдоль какой-либо кривой $\beta = \text{const}$ на поверхностяхъ S и Σ будутъ параллельны между собою.

Но такъ какъ на катеноидѣ Σ кривыя $\beta = \text{const}$, какъ параллели, представляютъ окружности, то и на поверхности S онѣ будутъ окружностями.

Наконецъ, такъ какъ онѣ представляютъ на послѣдней поверхности изгибанія параллелей, то отсюда уже ясно, что поверхность S въ этомъ случаѣ *поверхность вращения*.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякому катеноиду Σ соотвѣтствуетъ ∞^2 поверхностей вращения S , наложимыхъ на параболоидъ вращения, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ поверхностямъ S .

§ 6. Изъ первой теоремы Guichard'a мы знаемъ, что геометрическимъ мѣстомъ точекъ, симметричныхъ съ точками поверхности Σ относительно соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхности S , будетъ нѣкоторая поверхность minima Σ_1 .

Покажемъ теперь это, не прибѣгая къ теоремѣ Guichard'a.

Разсмотримъ геометрическое мѣсто Σ_1 точекъ, симметричныхъ съ точками поверхности Σ относительно касательныхъ плоскостей къ S т. е. относительно плоскостей

$$Mx + Ny + z - l = 0.$$

Координаты разсматриваемой точки будутъ, очевидно,

$$x = \frac{2lM}{M^2 + N^2 + 1}, \quad y = \frac{2lN}{M^2 + N^2 + 1}, \quad z = \frac{2l}{M^2 + N^2 + 1},$$

или, на основаніи соотношенія (I)

$$x = aM, \quad y = aN, \quad z = a. \quad (10)$$

Отсюда заключаемъ, что *расстояние точекъ поверхности Σ_1 отъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ къ поверхности Σ въ соответственныхъ точкахъ, величина постоянная.*

Найдемъ выраженіе для линейнаго элемента поверхности Σ_1 .

Проекціи перемѣщеній точки (10) на соответственныя оси (T) будутъ:

$$\delta x = -\frac{\omega}{2} d\alpha + adM + \frac{a}{\omega} d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) aN,$$

$$\delta y = -\frac{\omega}{2} d\beta + adN + \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) aM - \frac{a}{\omega} d\beta,$$

$$\delta z = \frac{a}{\omega} (Nd\beta - Md\alpha),$$

или на основаніи уравненій (II)–(V)

$$\delta x = \frac{1}{\omega} (aN^2 + a - l) d\alpha + \frac{aMN}{\omega} d\beta,$$

$$\delta y = -\frac{aMN}{\omega} d\alpha + \frac{1}{\omega} (l - a - aM^2) d\beta, \quad (11)$$

$$\delta z = -\frac{aM}{\omega} d\alpha + \frac{aN}{\omega} d\beta.$$

Если теперь примемъ во вниманіе соотношеніе (I), то для линейнаго элемента поверхности Σ_1 найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds_1^2 = \frac{\omega_1^2}{4} (d\alpha^2 + d\beta^2), \quad (12)$$

гдѣ черезъ ω_1 мы обозначили функцію, опредѣляемую выраженіемъ

$$\frac{\omega_1^2}{4} = \frac{l^2}{\omega^2}. \quad (13)$$

Уравненіе касательной плоскости къ нашей поверхности Σ_1 , какъ легко видѣть, будетъ

$$aM(x - aM) + aN(y - aN) + (a - l)(z - a) = 0,$$

или на основаніи соотношенія (I)

$$aMx + aNy + (a - l)z - al = 0; \quad (14)$$

отсюда видимъ, что разстояніе соотвѣтственной точки поверхности Σ отъ плоскости (14) равно

$$\delta = \frac{|al|}{\sqrt{a^2M^2 + a^2N^2 + (a - l)^2}} = |a|,$$

т. е. равно той же постоянной величинѣ $|a|$, которая представляетъ разстояніе соотвѣтственной точки поверхности Σ_1 отъ касательной плоскости къ Σ .

Такимъ образомъ мы видимъ, что соотношеніе между поверхностями Σ и Σ_1 взаимное.

Остается намъ показать, что поверхность Σ_1 поверхность minima и что ассимптотическія линіи и линіи кривизны поверхности Σ_1 соотвѣтствуютъ ассимптотическимъ линіямъ и линіямъ кривизны поверхности Σ .

Для доказательства этихъ положеній воспользуемся методомъ, которымъ мы уже пользовались не разъ и которымъ намъ придется еще часто пользоваться.

Примемъ нѣкоторую неподвижную точку P за начало координатъ (T_1), оси которыхъ остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T). Черезъ точку P проведемъ плоскость, параллельную касательной плоскости (14) къ поверхности Σ_1 ; уравненіе этой плоскости по отношенію къ (T_1) таково:

$$aMx + aNy + (a - l)z = 0. \quad (15)$$

Дадимъ параметрамъ α , β приращенія $d\alpha$, $d\beta$; тогда оси (T_1) примутъ положеніе (T'_1); по отношенію къ (T'_1) уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку P и параллельной соотвѣтственной касательной плоскости къ Σ_1 , будетъ

$$aM'x' + aN'y' + (a - l)z' = 0,$$

гдѣ

$$M' = M + dM, \quad N' = N + dN, \quad l' = l + dl.$$

Уравненіе той же плоскости по отношенію къ (T_1) въ силу извѣстныхъ формулъ преобразованія координатъ ¹⁾, будетъ:

$$Hx + Ky + Lz = 0, \quad (16)$$

гдѣ

$$H = \left(a N^2 + a - 2l + \frac{\omega^2}{2} \right) d\alpha + a M N d\beta,$$

$$K = - a M N d\alpha + \left(\frac{\omega^2}{2} - a + 2l - a M^2 \right) d\beta,$$

$$L = a \left(l - a - \frac{\omega^2}{2} \right) d\alpha + a \left(a - l - \frac{\omega^2}{2} \right) d\beta.$$

Прямая пересѣченія плоскостей (15) и (16) параллельна направленію, сопряженному на поверхности Σ_1 съ тѣмъ, которое характеризуется измѣненіемъ параметровъ α , β на величины $d\alpha$, $d\beta$.

Если черезъ $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ обозначимъ проэкціи перемѣщенія по кривой, сопряженной съ кривой $(d\alpha, d\beta)$, то отсюда заключаемъ, что условіе

$$H\delta_1 x + K\delta_1 y + L\delta_1 z = 0, \quad (17)$$

представляетъ, какъ легко видѣть, ничто иное, какъ дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ, проведенныхъ на поверхности Σ_1 .

Если теперь, черезъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ обозначимъ приращенія параметровъ, соотвѣтствующія перемѣщенію $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$, то на основаніи уравненія (I) приведемъ уравненіе (17) къ виду:

$$d\alpha\delta\alpha - d\beta\delta\beta = 0. \quad (18)$$

Послѣднее уравненіе вмѣстѣ съ тѣмъ представляетъ уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на данной поверхности Σ ; такимъ образомъ, мы приходимъ къ заключенію, что *всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ_1 и наоборотъ.*

Эту же теорему можно выразить нѣсколько иначе, а именно: *асимптотическія линіи поверхностей Σ и Σ_1 соотвѣтствуютъ другъ другу.*

Наконецъ, легко видѣть, что уравненіе (18) удовлетворяется при $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$; но такъ какъ эти кривыя ортогональны на Σ_1 , то слѣдовательно онѣ представляютъ на ней линіи кривизны.

¹⁾ См. § 6 гл. II.

Итакъ *линіи кривизны на поверхностяхъ Σ и Σ_1 соответствуютъ другъ другу.*

Уравненіе ассимптотическихъ линій на поверхностяхъ Σ и Σ_1 будетъ:

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0,$$

а потому, полагая

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

мы напишемъ уравненіе ассимптотическихъ линій въ видѣ

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}.$$

Примемъ за координатныя линіи на поверхности Σ_1 послѣднія кривыя; тогда линейный элементъ нашей поверхности приведется къ формѣ:

$$ds_1^2 = \frac{\omega_1^2}{4}(du^2 + dv^2);$$

отсюда видно, что ассимптотическія линіи на поверхности Σ_1 ортогональны, а слѣдовательно *поверхность Σ_1 поверхность мініма.*

Итакъ *интегрированіе уравненій (I) — (V) приводитъ къ преобразованію поверхности мініма Σ въ другую поверхность мініма Σ_1 . Поверхности Σ и Σ_1 связаны между собою такимъ образомъ, что разстояніе точекъ одной изъ нихъ отъ касательныхъ плоскостей, проведенныхъ въ соответственныхъ точкахъ къ другой, постоянно. Кроме того линіямъ кривизны и ассимптотическимъ линіямъ одной поверхности соответствуютъ линіи кривизны и ассимптотическія линіи другой.*

§ 7. Какъ показалъ Bonnet ¹⁾, со всякой поверхностью мініма связана опредѣленнымъ образомъ нѣкоторая другая поверхность мініма, называемая *присоединенной* (surface adjointe) къ первой.

Между двумя *присоединенными* поверхностями мініма существуютъ слѣдующія соотношенія: 1) онѣ наложимы другъ на друга; 2) касательныя плоскости къ нимъ, проведенныя въ соответственныхъ точкахъ параллельны, и 3) касательныя къ соответственнымъ кривымъ, проведенныя въ соответственныхъ точкахъ, взаимно перпендикулярны.

Обозначимъ черезъ Σ^0 , Σ_1^0 двѣ поверхности мініма, присоединенныя соответственно къ поверхностямъ Σ и Σ_1 предыдущаго параграфа.

Посмотримъ, какое соотношеніе существуетъ между этими поверхностями Σ^0 и Σ_1^0 .

¹⁾ Note sur la théorie générale des surfaces (Comptes rendus t. XXXVII p. 529—532); см. также Darboux. t. I p. 322.

Предварительно ~~однако~~ рассмотрим поверхности, связанные съ какой-либо поверхностью Σ такимъ образомъ, что касательныя плоскости въ соотвѣтственныхъ точкахъ этихъ поверхностей и поверхности Σ параллельны между собою, а касательныя, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ къ соотвѣтственнымъ кривымъ на искомымъ поверхностяхъ и на поверхности Σ , взаимно ортогональны.

Покажемъ, что всѣ искомыя поверхности будутъ поверхностями Σ и что въ числѣ ихъ будутъ присоединенныя къ Σ поверхности.

Выберемъ произвольную неподвижную точку P за начало подвижныхъ координатъ (T_1) , оси которыхъ остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T) ; послѣднія оси связаны съ поверхностью Σ такимъ образомъ, какъ мы условились въ § 1-мъ настоящей главы.

Искомыя поверхности будутъ представлять обертки плоскостей, уравненія которыхъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будутъ вида:

$$z = z_0, \quad (19)$$

гдѣ z_0 нѣкоторая функція отъ α и β .

Нормали къ искомымъ поверхностямъ представляютъ линейчатыя конгруэнціи, лучи которыхъ параллельны соотвѣтственнымъ осямъ z -осямъ координатъ (T_1) ; уравненіе какого-либо луча по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T_1) будетъ

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

гдѣ x_0, y_0 нѣкоторыя функціи отъ α, β .

Постараемся опредѣлить изъ поставленныхъ нами условій функціи x_0, y_0, z_0 .

Сохраняя всѣ обозначенія предыдущихъ параграфовъ, мы найдемъ слѣдующія выраженія для проэкцій перемѣщеній какой-либо точки (x, y, z) на оси (T_1) :

$$\begin{aligned} \delta x &= dx + \frac{z}{\omega} d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) y, \\ \delta y &= dy + \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) x - \frac{z}{\omega} d\beta, \\ \delta z &= dz + \frac{y}{\omega} d\beta - \frac{x}{\omega} d\alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

Такъ какъ перемѣщенія точки (x_0, y_0, z_0) , принадлежащей искомой оберткѣ плоскостей (19), при какихъ угодно бесконечно-малыхъ

измѣненіяхъ параметровъ α , β происходятъ въ плоскости (19), то слѣдовательно для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$ проекція этихъ перемѣщеній на ось z^{000} равны нулю, т. е.

$$dz_0 + \frac{y_0}{\omega} d\beta - \frac{x_0}{\omega} d\alpha = 0,$$

откуда заключаемъ, что

$$x_0 = \omega \frac{\partial z_0}{\partial \alpha}, \quad y_0 = -\omega \frac{\partial z_0}{\partial \beta}. \quad (21)$$

Обратимся теперь ко второму условію; мы можемъ выразить его слѣдующимъ образомъ: перемѣщенія вдоль соответственныхъ кривыхъ, проведенныхъ на искомой оберткѣ и на поверхности Σ взаимно ортогональны.

Такъ какъ проекція перемѣщеній соответственной точки поверхности Σ на оси (T_1), очевидно, будутъ

$$\delta x = -\frac{\omega}{2} d\alpha, \quad \delta y = -\frac{\omega}{2} d\beta, \quad \delta z = 0,$$

то второе изъ нашихъ условій приведется къ тремъ слѣдующимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial \alpha} + \frac{z_0}{\omega} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} y_0 &= 0, \\ \frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0 + \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} x_0 &= 0, \\ \frac{\partial y_0}{\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} x_0 - \frac{z_0}{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Второе изъ условій (22) удовлетворяется тождественно въ силу соотношеній (21); что же касается перваго и послѣдняго условій (22), то въ силу тѣхъ же соотношеній (21) они обратятся въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha^2} &= -\frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} - \frac{z_0}{\omega^2}, \\ \frac{\partial^2 z_0}{\partial \beta^2} &= \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} - \frac{z_0}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Такимъ образомъ видимъ, что искомыя поверхности будутъ существовать, если уравненія (23) будутъ совмѣстны.

Докажемъ поэтому, что эти уравненія совмѣстны; дифференцируя первое изъ нихъ по β и принимая во вниманіе, что ω интеграль уравненія

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2},$$

легко найдемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} \right] = 0.$$

Точно также, дифференцируя второе изъ уравненій (23) по α , получимъ, что

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} \right] = 0,$$

откуда заключаемъ, что если наши уравненія (23) совмѣстны, то z_0 удовлетворяетъ и уравненію

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial \alpha \partial \beta} = - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_0}{\partial \beta} + \frac{k}{2}, \quad (24)$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Теперь уже простымъ дифференцированіемъ убѣждаемся, что уравненія (23) и (24) совмѣстны при какихъ угодно значеніяхъ постоянной k , такъ какъ значенія, получаемыя для $\frac{\partial^3 z_0}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$ и $\frac{\partial^3 z_0}{\partial \alpha \partial \beta^2}$ изъ этихъ уравненій, одинаковы.

Обращаясь къ выраженіямъ (21), легко найдемъ, что уравненіе (24) можно написать въ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0 = - \frac{\partial y_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} x_0 = \frac{k \omega}{2}. \quad (25)$$

Замѣчая теперь, что въ силу условій (22) проекціи перемѣщеній точки (x_0, y_0, z_0) на оси (T_1) будутъ

$$\delta x = \left(\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0 \right) d\beta, \quad \delta y = - \left(\frac{\partial x_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_0 \right) d\alpha, \quad \delta z = 0,$$

мы для линейнаго элемента нашей обертки найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds_0^2 = \frac{k^2 \omega^2}{4} (d\alpha^2 + d\beta^2),$$

откуда заключаемъ, что всѣ поверхности, которыя мы получимъ, давая k всевозможныя значенія, будутъ гомотетичны съ поверхностью Σ . Въ случаѣ, когда k равно ± 1 , найдемъ нѣкоторыя поверхности Σ^0 , наложимыя на поверхность Σ .

Найдемъ радіусы кривизны и линіи кривизны полученныхъ нами поверхностей, которыя для краткости будемъ обозначать черезъ Σ_k .

На основаніи уравненій (22) и (25) проэкции перемѣщеній любой точки, лежащей на лучѣ $x = x_0$, $y = y_0$ или, что то же, точки на нормали къ Σ_k , будутъ

$$\delta x = \frac{z - z_0}{\omega} d\alpha + \frac{k\omega}{2} d\beta, \quad \delta y = -\frac{k\omega}{2} d\alpha + \frac{z_0 - z}{\omega} d\beta, \quad \delta z = d(z - z_0).$$

Если приращенія параметровъ ($d\alpha$, $d\beta$) соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны поверхности Σ_k , то перемѣщеніе соотвѣтственнаго центра кривизны этой поверхности будетъ направлено вдоль нормали къ Σ_k ; другими словами, для разсматриваемаго перемѣщенія центра кривизны имѣемъ:

$$\delta x = \frac{z - z_0}{\omega} d\alpha + \frac{k\omega}{2} d\beta = 0, \quad \delta y = -\frac{k\omega}{2} d\alpha + \frac{z_0 - z}{\omega} d\beta = 0. \quad (26)$$

Исключая отсюда z , найдемъ дифференціальное уравненіе линій кривизны поверхности Σ_k ; оно будетъ вида:

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0,$$

откуда заключаемъ, что *линіямъ кривизны поверхности Σ_k соотвѣтствуютъ ассимптотическія линіи поверхности Σ .*

Замѣчая далѣе, что $z - z_0$ въ данномъ случаѣ представляетъ величину соотвѣтственнаго радіуса кривизны поверхности Σ_k и исключая изъ (26) отношеніе $\frac{d\alpha}{d\beta}$, найдемъ, что

$$(z - z_0)^2 = \frac{k^2\omega^4}{4};$$

отсюда заключаемъ, что поверхность Σ_k представляетъ поверхность мініма, а слѣдовательно, если положимъ $k = \pm 1$, то соотвѣтственныя поверхности Σ^0 будутъ *присоединенными* поверхностями данной поверхности Σ .

Резюмируя полученные нами результаты, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ: *поверхности Σ_k , связанныя съ нѣкоторой поверхностью мініма Σ такимъ образомъ, что касательныя плоскости, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ поверхностей Σ и Σ_k , параллельны между собою, а касательныя къ соотвѣтственнымъ кривымъ, проведенныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ, взаимно ортогональны, представляютъ поверхности мініма, гомететическія съ Σ ; линіи кривизны поверхностей Σ_k соотвѣтствуютъ ассимптотическимъ линіямъ поверхности Σ . Если*

коэффициентъ подобія k равенъ ± 1 , то соответствующія поверхности Σ_k представляютъ поверхности присоединенныя къ Σ .

§ 8. Въ предыдущемъ параграфѣ мы доказали, что для каждой поверхности минимума существуютъ присоединенныя поверхности, т. е. поверхности, связанныя определеннымъ образомъ съ данной поверхностью.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнiю поверхностей Σ^0 и Σ_1^0 , соответственно присоединенныхъ къ поверхностямъ Σ и Σ_1 , разсмотрѣннымъ нами въ § 6-мъ этой главы.

Координаты соответственной точки M поверхности Σ^0 по отношенiю къ осямъ (T_1) , на основанiи предыдущаго, будутъ:

$$x_0 = \omega \frac{\partial z_0}{\partial \alpha}, \quad y_0 = -\omega \frac{\partial z_0}{\partial \beta}, \quad z_0, \quad (27)$$

гдѣ z_0 удовлетворяетъ уравненiямъ (23) и (24), при чемъ въ послѣднемъ постоянной k приписано значенiе ± 1 .

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ представляетъ соответственную точку поверхности Σ_1^0 , присоединенной къ поверхности Σ_1 , при чемъ (x_1, y_1, z_1) координаты ея по отношенiю къ тѣмъ же осямъ (T_1) .

Поверхность Σ_1^0 характеризуется тѣмъ, что 1) ея касательная плоскость имѣетъ слѣдующее уравненiе:

$$aM(x - x_1) + aN(y - y_1) + (a - l)(z - z_1) = 0, \quad (28)$$

гдѣ M, N, l извѣстныя намъ функции; 2) если черезъ $\delta x, \delta y, \delta z$ обозначимъ проэкции перемѣщенiй точки поверхности Σ_1 , соответствующей точкѣ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ поверхности Σ_1^0 , то для всевозможныхъ значенiй $(d\alpha, d\beta)$ имѣетъ мѣсто соотношенiе

$$\delta x \delta x_1 + \delta y \delta y_1 + \delta z \delta z_1 = 0 \quad (29)$$

и, наконецъ, 3) линейный элементъ поверхности Σ_1^0 равенъ ¹⁾

$$ds_1^2 = \frac{l^2}{\omega^2} (d\alpha^2 + d\beta^2). \quad (30)$$

Кромѣ того, какъ мы знаемъ, линiямъ кривизны поверхности Σ_1^0 будутъ соответствовать ассимптотическiя кривыя поверхности Σ_1 , т. е. кривыя

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{const}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2} = \text{const}$$

¹⁾ См. § 6 выр. (12) и (13).

Постараемся, исходя изъ этихъ условій, опредѣлить координаты точки (x_1, y_1, z_1) поверхности Σ_1^0 .

Проекціи перемѣщеній нашей точки таковы:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{z_1}{\omega} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} y_1 \right) d\alpha + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \beta} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} y_1 \right) d\beta = A_1 d\alpha + B_1 d\beta, \\ \delta y_1 &= \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} x_1 \right) d\alpha + \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} x_1 - \frac{z_1}{\omega} \right) d\beta = A_2 d\alpha + B_2 d\beta, \quad (31) \\ \delta z_1 &= \left(\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{x_1}{\omega} \right) d\alpha + \left(\frac{\partial z_1}{\partial \beta} + \frac{y_1}{\omega} \right) d\beta = A_3 d\alpha + B_3 d\beta. \end{aligned}$$

Здѣсь для краткости черезъ $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ мы обозначаемъ коэффициенты при $d\alpha$ и $d\beta$ въ выраженіяхъ для $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$.

Такъ какъ перемѣщенія точки (x_1, y_1, z_1) при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β происходятъ въ плоскости (27), то отсюда имѣемъ два условія:

$$\begin{aligned} aMA_1 + aNA_2 + (a-l)A_3 &= 0, \\ aMB_1 + aNB_2 + (a-l)B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Если примемъ во вниманіе выраженія (11), то тогда условіе (29) разобьется на три слѣдующихъ условія:

$$\begin{aligned} A_1(l - aM^2) - A_2aMN - A_3aM &= 0, \\ B_1aMN + B_2(aN^2 - l) + B_3aN &= 0, \\ A_1aMN + A_2(aN^2 - l) + A_3aN + B_1(l - aM^2) - B_2aMN - B_3aM &= 0. \end{aligned}$$

Пользуясь уравненіями (32), мы приведемъ послѣднія соотношенія къ виду:

$$A_1 - MA_3 = 0, \quad B_2 - NB_3 = 0, \quad A_2 - NA_3 - B_1 + MB_3 = 0. \quad (33)$$

Теперь уже нетрудно привести наши соотношенія (32) и (33) къ виду:

$$\begin{aligned} A_1 - MA_3 = 0, \quad A_2 - \frac{aN^2 - l}{aN} A_3 = 0, \quad B_1 - \frac{aM^2 - l}{aM} B_3 = 0, \\ B_2 - NB_3 = 0, \quad MA_3 - NB_3 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Изъ уравненій (34) прежде всего имѣемъ, что

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0,$$

т. е., что кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ на поверхности Σ_1^0 ортогональны; далѣе на основаніи (34) и послѣдняго изъ нашихъ условій относительно поверхности Σ_1^0 имѣемъ, что

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \frac{l^2}{a^2 N^2} A_3^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = \frac{l^2}{a^2 M^2} B_3^2 = \frac{l^2}{\omega^2},$$

откуда заключаемъ, что

$$A_3 = \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{x_1}{\omega} = \pm \frac{aN}{\omega}, \quad B_3 = \frac{\partial z_1}{\partial \beta} + \frac{y_1}{\omega} = \pm \frac{aM}{\omega}.$$

Изъ послѣднихъ соотношеній находимъ, что

$$x_1 = \omega \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} \mp aN, \quad y_1 = -\omega \frac{\partial z_1}{\partial \beta} \pm aM. \quad (35)$$

Подставляя эти значенія x_1, y_1 въ уравненія (34), при чемъ воспользуемся нашими основными уравненіями (I)—(V), получимъ слѣдующія уравненія, которымъ должна удовлетворять функція z_1 :

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha^2} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \frac{z_1}{\omega^2},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} \pm \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \beta^2} = \frac{\partial \log \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \log \omega}{\partial \beta} \frac{\partial z_1}{\partial \beta} - \frac{z_1}{\omega^2}.$$

Мы видимъ, что уравненія, которымъ удовлетворяетъ функція z_1 , тождественны съ уравненіями (23) и (24), которымъ удовлетворяетъ функція z_0 , а потому соответственнымъ образомъ подобравши постоянныя интеграціи, мы можемъ положить

$$z_1 = z_0,$$

а тогда сравнивая выраженія (27) и (35), имѣемъ:

$$x_0 - x_1 = \pm aN, \quad y_0 - y_1 = \mp aM, \quad z_0 - z_1 = 0,$$

откуда находимъ, что

$$aM(x_0 - x_1) + aN(y_0 - y_1) + (a - l)(z_0 - z_1) = 0,$$

другими словами, точка (x_0, y_0, z_0) поверхности Σ^0 лежитъ въ касательной плоскости къ поверхности Σ_1^0 въ то время, какъ точка (x_1, y_1, z_1)

поверхности Σ_1^0 лежитъ въ касательной плоскости $z = z_0$ къ поверхности Σ^0 .

Отсюда заключаемъ, что прямыя, соединяющія соответственныя точки поверхностей Σ^0 и Σ_1^0 , касаются этихъ поверхностей. Иначе то же обстоятельство можно выразить слѣдующимъ образомъ: *поверхности Σ^0 и Σ_1^0 представляютъ фокальныя поверхности нѣкоторой линейчатой конгруэнции.*

Какъ мы видѣли, поверхности эти — поверхности minima, на которыхъ кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ представляютъ ассимптотическія линіи.

Такимъ образомъ мы пришли къ линейчатымъ конгруэнціямъ, характеризуемымъ тѣмъ что ассимптотическія линіи на ихъ фокальныхъ поверхностяхъ соответствуютъ другъ другу; такія конгруэнціи носятъ названіе *конгруэнцій W* по аналогіи съ конгруэнціями нормалей къ какой-либо поверхности W , между фокальными поверхностями которыхъ, какъ мы видѣли ¹⁾, существуетъ подобное соответствіе.

Случай, когда фокальныя поверхности конгруэнціи W представляютъ поверхности minima, т. е. случай, только что разсмотрѣнный нами, впервые подробно изслѣдованъ Thubaut въ интересномъ мемуарѣ *Sur la déformation du paraboloides et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* ²⁾, при чемъ Thubaut пришелъ къ этимъ конгруэнціямъ совершенно другимъ путемъ.

Мы не будемъ входить въ дальнѣйшія подробности относительно этихъ конгруэнцій, отсылая читателя къ упомянутому мемуару Thubaut; замѣтимъ только, что разсмотрѣннымъ нами путемъ приходятъ къ самымъ общимъ конгруэнціямъ, изслѣдованнымъ Thubaut.

Такъ какъ неподвижная точка P , служащая началомъ координатъ (T_1), выбрана нами совершенно произвольно, то отсюда заключаемъ, что поверхности minima, присоединенныя къ данной, опредѣляются въ пространствѣ до нѣкотораго поступательнаго перемѣщенія. Поэтому мы можемъ формулировать полученныя нами результаты слѣдующимъ образомъ: *присоединенныя къ поверхностямъ Σ и Σ_1 поверхности Σ^0 и Σ_1^0 могутъ быть путемъ поступательнаго перемѣщенія приведены въ такое положеніе, что онѣ будутъ фокальными поверхностями нѣкоторой конгруэнціи Thubaut.* Само собою разумѣется мы предполагаемъ, что поверхности Σ и Σ_1 связаны между собою такимъ образомъ, какъ въ § 6-мъ настоящей главы.

§ 9. Въ III главѣ нашего изслѣдованія мы видѣли, что наши поверхности minima Σ и Σ_1 нормальны къ нѣкоторой системѣ круговъ (K),

¹⁾ См. гл. II § 7.

²⁾ Annales de l'École normale supérieure. 1897 №№ 2, 3.

центры которых лежат въ соответственныхъ касательныхъ плоскостяхъ къ нѣкоторой опредѣленной поверхности S , наложимой на параболоидъ вращения ¹⁾.

Эти круги (K) въ то же время ортогональны къ безчисленному множеству поверхностей.

Послѣднее обстоятельство даетъ намъ возможность преобразовать уравненія (I)—(V) такимъ образомъ, что рѣшеніе задачъ, обратныхъ задачамъ Guichard'a и Bianchi, сведется къ интегрированію нѣкоторой системы *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядковъ.

Къ интегрированію подобной системы уравненій рѣшеніе первой изъ упомянутыхъ задачъ сведено впервые Bianchi въ рядѣ замѣтокъ въ Atti della Reale Accademia dei Lincei за 1899 годъ и въ его мемуарѣ Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante ²⁾.

При выводѣ этихъ уравненій знаменитый геометръ пользуется только аналитическими преобразованіями, хотя въ примѣчаніи къ упомянутому мемуару и указываетъ на связь между этими преобразованіями и упомянутымъ свойствомъ системы круговъ (K).

Въ дальнѣйшемъ мы и воспользуемся этимъ свойствомъ круговъ (K).

Центръ C одного изъ разсматриваемыхъ круговъ (K) представляетъ, какъ легко видѣть, точку пересѣченія трехъ соответственныхъ плоскостей: 1) плоскости касательной къ поверхности Σ , 2) плоскости касательной къ поверхности S и 3) плоскости, проходящей черезъ соответственные нормали къ поверхностямъ Σ , Σ_1 и S .

Уравненія этихъ плоскостей по отношенію къ соответственнымъ осямъ (T) будутъ, какъ мы видѣли,

$$z = 0, \quad Mx + Ny + z - l = 0, \quad Nx - My = 0,$$

а потому координаты центра (C) разсматриваемаго круга (K) будутъ:

$$x_0 = \frac{Ml}{M^2 + N^2} = \frac{aMl}{2l - a}, \quad y_0 = \frac{Nl}{M^2 + N^2} = \frac{aNl}{2l - a}, \quad z_0 = 0,$$

а радіусъ его

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{al}}{\sqrt{2l - a}}. \quad (36)$$

¹⁾ См. гл. III § 7.

²⁾ Annali di matematica. 1899.

Обозначимъ черезъ γ уголъ, составляемый отръзкомъ OC (черезъ O обозначено начало координатъ T , т. е. точка поверхности Σ) съ осью x -ою нашей системы (T), тогда

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a} M}{\sqrt{2l-a}}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{a} N}{\sqrt{2l-a}}. \quad (37)$$

Координаты соответственныхъ точекъ разсматриваемой окружности будутъ, очевидно,

$$\begin{aligned} x &= x_0 - r_0 \cos\gamma \cos t = r_0 \cos\gamma (1 - \cos t), \\ y &= y_0 - r_0 \sin\gamma \cos t = r_0 \sin\gamma (1 - \cos t), \\ z &= r_0 \sin t, \end{aligned}$$

гдѣ t уголъ, составляемый соответственнымъ радиусомъ круга съ отръзкомъ CO .

Возьмемъ на кругѣ нѣкоторую точку G и напишемъ условіе, что ея перемѣщенія ортогональны къ кругу (K).

Если обозначимъ черезъ δx , δy , δz проэкции перемѣщений точки G на оси (T), то послѣднее условіе будетъ вида:

$$\sin t \cos\gamma \delta x + \sin t \sin\gamma \delta y + \cos t \delta z = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто δx , δy , δz ихъ значенія, представимъ послѣднее выраженіе въ видѣ

$$A d\alpha + B d\beta + T dt = 0, \quad (38)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_0 \cos\gamma}{\omega} - \frac{r_0 \cos\gamma}{\omega} \cos t + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \alpha} - \frac{\omega \cos\gamma}{2} \right) \sin t, \\ B &= -\frac{r_0 \sin\gamma}{\omega} + \frac{r_0 \sin\gamma}{\omega} \cos t + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \beta} - \frac{\omega \sin\gamma}{2} \right) \sin t, \\ T &= r_0. \end{aligned}$$

Чтобы условіе (38) имѣло мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$ необходимо и достаточно, чтобы тождественно удовлетворялось соотношеніе

$$A \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + B \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) + T \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

Послѣднее выраженіе, какъ нетрудно убѣдиться, приводится къ виду:

$$P \sin t + Q \cos t + R = 0, \quad (39)$$

гдѣ

$$P = \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\omega \sin \gamma}{r_0} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\omega \cos \gamma}{r_0} \right) \right],$$

$$R = -Q = r_0^3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \gamma}{r_0 \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\cos \gamma}{r_0 \omega} \right) \right] + r_0 \sin \gamma \cos \gamma.$$

Такъ какъ разсматриваемая нами система круговъ ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей, другими словами, такъ какъ соотношеніе (39) имѣетъ мѣсто для безконечнаго числа значеній t , то необходимо, чтобы имѣли мѣсто соотношенія

$$P = 0, \quad R = -Q = 0.$$

Подставляя въ выраженія для P , Q , R вмѣсто γ , r_0 ихъ значенія (36) и (37), приведемъ эти уравненія къ виду:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{M\omega}{l} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{N\omega}{l} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{N}{\omega l} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{M}{\omega l} \right) = -\frac{MN}{l^2}. \quad (40)$$

Въ справедливости послѣднихъ уравненій можно убѣдиться при помощи уравненій (II) и (III).

Въ самомъ дѣлѣ, складывая уравненія (II) и (III), получимъ:

$$\frac{\partial (N\omega)}{\partial \alpha} + MN = \frac{\partial (M\omega)}{\partial \beta} - MN,$$

или еще

$$\frac{\partial (N\omega)}{\partial \alpha} + \frac{MN(2l - \omega^2)}{2l} = \frac{\partial (M\omega)}{\partial \beta} - \frac{MN(2l + \omega^2)}{2l};$$

принимая во вниманіе значенія M и N , мы напишемъ послѣднее уравненіе въ видѣ

$$\frac{1}{l} \frac{\partial (N\omega)}{\partial \alpha} - \frac{N\omega}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{1}{l} \frac{\partial (M\omega)}{\partial \beta} - \frac{M\omega}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \beta},$$

а это ничто иное, какъ первое изъ уравненій (40).

Если теперь, раздѣливши уравненія (II), (III) на ωl , сложимъ ихъ и придадимъ къ обѣимъ частямъ полученнаго равенства по

$$\frac{2l - \omega^2}{2\omega^2 l^2} NM - \frac{2l + \omega^2}{2\omega^2 l^2} NM = -\frac{MN}{l^2},$$

то найдемъ второе изъ уравненій (40).

Для насъ особенно интересно первое изъ уравненій (40); оно показываетъ, что мы можемъ положить

$$\frac{\omega M}{l} = \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\omega N}{l} = \frac{2}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta},$$

гдѣ φ нѣкоторая опредѣленная функція.

Если еще введемъ функцію ψ помощью соотношенія

$$\psi = \frac{\varphi}{l}, \tag{41}$$

то получимъ для M и N слѣдующія выраженія:

$$M = \frac{2}{\omega \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{2}{\omega \psi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \tag{42}$$

§ 10. Пользуясь уравненіями (I)—(V) легко вывести систему *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ, которымъ удовлетворяютъ функція φ и ψ .

Дифференцируя по α и β выраженіе (41) и подставляя въ полученныя такимъ образомъ выраженія вмѣсто производныхъ отъ функціи l ихъ значенія черезъ производныя отъ функціи φ , найдемъ, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{2}{\omega^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -\frac{2}{\omega^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \tag{VI}$$

Уравненіе (I) приметъ видъ

$$L = \frac{4}{\omega^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right] - \frac{2\varphi\psi}{a} + \psi^2 = 0. \tag{43}$$

Найдемъ выраженія для производныхъ отъ M и N черезъ производныя отъ φ и подставимъ полученныя такимъ образомъ значенія въ уравненія (II)—(V); если при этомъ примемъ во вниманіе уравненія (VI) и (43), то получимъ слѣдующія *линейныя* уравненія въ частныхъ производныхъ второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\omega^2 - 2a}{4a} \psi + \frac{\varphi}{2a}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \end{aligned} \tag{VII}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\omega^2 + 2a}{4a} \psi - \frac{\varphi}{2a}.$$

Если теперь составим различныя выраженія для $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta}$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta}$, то увидимъ, что уравненія (VI) и (VII) будутъ совмѣстны въ силу *одного только условія*

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Дифференцируя по α и β функцію L , представляющую лѣвую часть уравненія (43), видимъ, что въ силу уравненій (VI) и (VII) производныя $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю, а слѣдовательно

$$L = g = \text{const.}$$

Такимъ образомъ находимъ слѣдующее важное отличіе уравненій (II)—(V) и уравненій (VI) и (VII): въ то время, какъ для первыхъ уравненіе $L=0$ является *условіемъ* совмѣстности, для послѣднихъ—уравненіе $L=\text{const}$ является лишь *слѣдствіемъ* самихъ уравненій.

Ясно, въ чемъ кроется причина такого отличія: уравненія (VI) и (VII) *линейныя* въ то время, какъ функція L представляетъ нѣкоторую *квадратичную форму* относительно φ , ψ и производныхъ $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$; само собою разумѣется поэтому, что уравненіе $L=\text{const}$ не можетъ быть *условіемъ* совмѣстности уравненій (VI) и (VII).

Постоянная g , въ которую обращается функція L для интеграловъ нашихъ уравненій (VI) и (VII), опредѣляется начальными значеніями функцій φ , ψ , $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ при $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$; эти же начальныя значенія вмѣстѣ съ тѣмъ, вообще говоря, опредѣляютъ въ нѣкоторой области голоморфные интегралы уравненій (VI) и (VII).

Такимъ образомъ интегралы этихъ уравненій зависятъ отъ *четырехъ* произвольныхъ постоянныхъ φ_0 , ψ_0 , $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)_0$.

При рѣшеніи задачи, обратной задачѣ Guichard'a, мы должны подобрать эти постоянныя такимъ образомъ, чтобы функція L для интеграловъ нашихъ уравненій была равна нулю.

Такъ какъ эта функція однородна относительно φ , ψ , $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$, то изъ условія $L_0=0$ мы опредѣлимъ отношеніе двухъ изъ этихъ постоянныхъ къ третьей.

Если теперь замѣтимъ, что выраженіе для l можетъ быть представлено въ видѣ

$$l = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{A\varphi_0 + B\psi_0 + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0 + D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0}{A_1\varphi_0 + B_1\psi_0 + C_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_0 + D_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_0},$$

гдѣ $A, B, C, D \dots$ опредѣленныя функции отъ α, β , то отсюда видимъ, что въ выраженіе для l входитъ только *два* произвольныхъ постоянныхъ, если не считать еще постоянной a .

Такимъ образомъ приходимъ къ извѣстному уже намъ результату, что всякой поверхности minima Σ соотвѣтствуетъ, вообще говоря, ∞^3 поверхностей S , наложимыхъ на параболоидъ вращения.

Предполагая, что мы находимся въ условіяхъ теоремы, обратной теоремѣ Guichard'a, мы изъ соотношеній (42) находимъ, что

$$N \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - M \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что на поверхности Σ кривыя $\varphi = \text{const}$ ортогональны къ соотвѣтствующимъ плоскостямъ

$$Nx - My = 0,$$

т. е. къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ Σ и S .

При доказательствѣ первой теоремы Bianchi мы видѣли, что оберткой послѣднихъ плоскостей служить поверхность съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = a^2 du^2 + a^2 [2(u + v) + 2c] dv^2,$$

гдѣ a и c постоянныя, т. е. поверхность Weingarten'овскаго типа, наложимая на поверхность вращения.

Постараемся доказать это и въ настоящемъ случаѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ расширимъ нѣсколько условія нашей задачи, а именно: постараемся найти линейный элементъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ поверхности Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на этой поверхности; при этомъ допустимъ, что функция φ представляетъ интеграль уравненій (VI) и (VII), удовлетворяющій условію

$$\frac{4}{\omega^2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \right)^2 \right] - \frac{2\varphi\psi}{a} + \psi^2 = g, \quad (\text{VIII})$$

гдѣ g нѣкоторая постоянная.

§ 11. Уравненіе плоскости, линейный элементъ обертки которой мы ищемъ, будетъ по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} x - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} y = 0; \quad (44)$$

а потому координаты любой точки нашей плоскости таковы:

$$x = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t, \quad y = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t, \quad z, \quad (45)$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Координаты точки искомой обертки опредѣлимъ изъ условія, что ея перемѣщенія при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α , β происходятъ въ плоскости (44).

Если черезъ δx , δy , δz обозначимъ проэкции перемѣщеній искомой точки на оси (T), то условіе наше выразится аналитически слѣдующимъ образомъ:

$$A d\alpha + B d\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \delta y = 0.$$

Такъ какъ по нашему предположенію условіе это имѣеть мѣсто для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$, то оно распадается на два условія:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad (46)$$

изъ которыхъ мы сможемъ опредѣлить t и z .

Проэкции перемѣщеній нашей точки будутъ:

$$\begin{aligned} \delta x &= -\frac{\omega}{2} d\alpha + d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t\right) + \frac{z}{\omega} d\alpha - \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t, \\ \delta y &= -\frac{\omega}{2} d\beta + d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t\right) + \left(-\frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t - \frac{z}{\omega} d\beta, \quad (47) \\ \delta z &= dz + \frac{t}{\omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\beta - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравненіями (VI)—(VII) и оставляя въ сторонѣ случаи, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$, приведемъ уравненія (46) къ виду:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\omega} + \frac{t}{2a} \left[\frac{(\omega^2 - 2a)\psi}{2} + \varphi \right] &= \frac{\omega}{2}, \\ \frac{z}{\omega} - \frac{t}{2a} \left[\frac{(\omega^2 + 2a)\psi}{2} - \varphi \right] &= -\frac{\omega}{2}; \end{aligned}$$

отсюда находимъ, что

$$t = \frac{2a}{\psi\omega}, \quad z = \frac{a\psi - \varphi}{\psi},$$

а слѣдовательно координаты соответственной точки искомой обертки таковы:

$$x = \frac{2a}{\psi\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = \frac{2a}{\psi\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = \frac{a\psi - \varphi}{\psi}.$$

Подставляя эти значенія въ выраженія (47), найдемъ для проеэкцій перемѣщеній нашей точки слѣдующія выраженія:

$$\delta x = -\frac{2a}{\omega\psi^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\psi, \quad \delta y = -\frac{2a}{\omega\psi^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\psi, \quad \delta z = -d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) - \frac{a d\psi}{\psi}.$$

Если теперь примемъ во вниманіе соотношеніе (VIII), то для искомага линейнаго элемента, найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \left[\frac{2\varphi}{a\psi} - 1 + \frac{g}{\psi^2}\right] \frac{a^2 d\psi^2}{\psi^2} + \left[d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) + \frac{a d\psi}{\psi}\right]^2.$$

Полагая

$$\frac{d\psi}{\psi} = -dv, \quad d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) - adv = ad\theta,$$

откуда имѣемъ

$$\psi = e^{-v}, \quad \frac{1}{a} \frac{\varphi}{\psi} = \theta + v + \frac{1}{2},$$

приведемъ выраженіе для ds^2 къ виду

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 [2(\theta + v) + ge^{2v}]. \quad (48)$$

Мы видимъ отсюда, что искомая обертка представляетъ поверхность Weingarten'овскаго типа, съ которой мы встрѣтились въ § 2-мъ главы IV.

Роль координаты x упомянутаго §^a здѣсь будетъ играть координата z , которая равна

$$z = a - \frac{\varphi}{\psi} = \frac{a}{2} - a(\theta + v);$$

роль функціи h того же параграфа играетъ функція $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. функція

$$r = a \sqrt{2(\theta + v) + ge^{2v}}.$$

Такимъ образомъ видимъ, что полученная нами поверхность S_0 находится съ поверхностью Σ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся между собою въ первой теоремѣ Bianchi поверхности S_0 и Σ .

Какъ мы видѣли, интеграль φ системы дифференціальныхъ уравненій (VI) и (VII) включаетъ *четыре* произвольныхъ постоянныхъ; присоединяя къ нимъ еще постоянную a , приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, обратной первой теоремѣ Bianchi.

Всякой поверхности минимума Σ соответствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 Weingarten'овскаго типа съ линейнымъ элементомъ (48). Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій (VI) и (VII). Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ .

§ 12. Остается намъ сказать нѣсколько словъ объ исключенномъ нами изъ изслѣдованія случаѣ, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ или $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$.

Обращаясь къ уравненіямъ (VII) и полагая $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ равнымъ 0, мы находимъ, что это возможно лишь въ случаѣ, когда $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$, т. е. когда поверхность Σ катеноидъ. Кривыя $\varphi = \text{const}$ въ этомъ случаѣ представляютъ параллели, а слѣдовательно оберткой плоскостей, ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$ т. е. плоскостей меридіановъ, будетъ ось вращенія.

Итакъ въ этомъ случаѣ поверхность S_0 дегенерируетъ въ прямую линію.

Г Л А В А VI.

Теорема, обратная третьей теоремѣ Guichard'a. Преобразование поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной. Теорема, обратная второй теоремѣ Bianchi для поверхностей съ постоянной отрицательной кривизной.

§ 1. Въ предыдущей главѣ мы доказали теоремы, обратныя первымъ теоремамъ Guichard'a и Bianchi, и указали на одно интересное преобразование поверхностей minima.

Настоящая глава посвящена рѣшенію аналогичныхъ вопросовъ для поверхностей съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной.

Положимъ, что имѣемъ нѣкоторую поверхность Σ съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной; не нарушая общности, можемъ положить эту кривизну равной -1 .

Отнесемъ нашу поверхность къ линіямъ кривизны $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$; оси нашихъ координатъ (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы оси x^{000} касались кривыхъ $\beta = \text{const}$, а оси y^{000} — кривыхъ $\alpha = \text{const}$.

При этихъ предположеніяхъ основныя величины, характеризующія нашу поверхность Σ , будутъ имѣть слѣдующія значенія:

$$\xi = \cos\omega, \quad \eta_1 = \sin\omega, \quad r = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}, \quad r_1 = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha},$$

$$p = q_1 = 0, \quad p_1 = \cos\omega, \quad q = \sin\omega,$$

гдѣ ω интегралъ дифференціального уравненія

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2} = \sin\omega \cos\omega. \quad (1)$$

Линейный элементъ нашей поверхности при этомъ, очевидно, будетъ вида:

$$ds^2 = \cos^2\omega d\alpha^2 + \sin^2\omega d\beta^2.$$

Возьмемъ на нормали къ поверхности Σ , проведенной черезъ нѣкоторую точку O этой поверхности, точку $M(o, o, l)$; геометрическимъ

мѣстомъ этой точки при движеніи точки O по нашей поверхности Σ будетъ нѣкоторая поверхность S .

Обозначимъ черезъ u уголъ между нормалью къ Σ и касательной плоскостью къ S , проведенной въ соответственной точкѣ M .

Если поверхность S будетъ поверхностью, наложимой на одну изъ *основныхъ* поверхностей вращенія, и если при томъ конгруэнція нормалей къ Σ будетъ конгруэнціей *присоединенной* къ S , то между разстояніемъ l соответственныхъ точекъ поверхностей S и Σ и угломъ u должна существовать слѣдующая зависимость ¹⁾:

$$l^2 = \frac{a}{\sin^2 u} - 1, \quad (2)$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная.

Очевидно, что для дѣйствительности поверхности S эта постоянная должна быть положительной, т. е. $a > 0$.

Кромѣ того, какъ мы видѣли въ той же III главѣ, линіи кривизны поверхности Σ должны соответствовать сопряженнымъ линіямъ поверхности S .

Выразимъ эти оба условія аналитически.

Проекціи перемѣщеній точки $M(o, o, l)$ на соответственныя оси (T), какъ легко видѣть, будутъ:

$$\delta x = (\cos \omega + l \sin \omega) d\alpha, \quad \delta y = (\sin \omega - l \cos \omega) d\beta, \quad \delta z = dl. \quad (3)$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S въ точкѣ M пусть будетъ:

$$Mx + Ny - (z - l) = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты M, N опредѣлятся изъ условія, что перемѣщенія точки M при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α, β будутъ происходить въ плоскости (4), т. е. что для всевозможныхъ значеній $d\alpha, d\beta$ имѣетъ мѣсто соотношеніе

$$M\delta x + N\delta y - \delta z = 0.$$

Отсюда находимъ для нашихъ коэффициентовъ слѣдующія значенія:

$$M = \frac{1}{\cos \omega + l \sin \omega} \frac{\partial l}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{1}{\sin \omega - l \cos \omega} \frac{\partial l}{\partial \beta}. \quad (5)$$

Замѣчая, что $\sin u$ представляетъ \cos угла, составляемаго нормалью къ плоскости (4) съ осью z , мы напомнимъ наше условіе (2) въ видѣ

¹⁾ См. гл. III § 3.

$$M^2 + N^2 + 1 = \frac{l^2 + 1}{a}; \quad (I)$$

условіе это, какъ нетрудно видѣть, представляетъ уравненіе въ частныхъ производныхъ 1-го порядка относительно функціи l .

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Черезъ нѣкоторую неподвижную точку P пространства, служащую началомъ подвижной системы координатъ (T_1) , оси которой постоянно параллельны соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T) , проведемъ плоскость, параллельную плоскости (4); уравненіе этой плоскости по отношенію къ (T_1) будетъ:

$$Mx + Ny - z = 0. \quad (6)$$

Дадимъ параметру α приращеніе $d\alpha$; при этомъ координаты (T_1) примутъ положеніе (T'_1) ; соотвѣтственныя точки O и M поверхностей Σ и S перемѣстятся вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и прійдутъ въ положеніе O' и M' .

По отношенію къ осямъ (T'_1) уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку P и параллельной касательной плоскости къ S въ точкѣ M' , будетъ:

$$M'x' + N'y' - z' = 0, \quad (7)$$

гдѣ

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial \alpha} d\alpha, \quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Пересѣченіе плоскостей (6) и (7) дастъ намъ въ предѣлѣ направленіе, сопряженное съ кривой $\beta = \text{const}$ на поверхности S .

Уравненіе плоскости (7) по отношенію къ осямъ (T_1) получимъ, полагая ¹⁾

$$x' = x + \left(y \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - z \sin \omega \right) d\alpha, \quad y' = y - x \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha, \quad z' = z + x \sin \omega d\alpha,$$

а слѣдовательно предѣльная прямая пересѣченія плоскостей (6) и (7) будетъ дана уравненіемъ (6) и уравненіемъ

$$x \left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} - N \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \sin \omega \right] + y \left[\frac{\partial N}{\partial \alpha} + M \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right] - z M \sin \omega = 0.$$

Если теперь положимъ, что на поверхности S кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ сопряженныя, другими словами, что перемѣщеніе точки M

¹⁾ См. гл. II § 6.

вдоль кривой $\alpha = \text{const}$ параллельно послѣдней прямой, то получимъ наше второе условіе:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha} + M \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) (\sin \omega - \cos \omega l) - M \sin \omega \frac{\partial l}{\partial \beta} = 0,$$

которое въ силу (5) приводится къ виду:

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -M \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + MN \sin \omega. \quad (\text{II})$$

Это условіе представляетъ относительно функции l дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 2-го порядка, которое мы можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = -(\sin \omega - l \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial \beta} M + (\cos \omega + l \sin \omega) \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} N - (\cos 2\omega + l \sin 2\omega) MN.$$

Уравненіе (II) мы можемъ представить въ нѣсколько иной формѣ, а именно, дифференцируя выраженіе (5) для M по β и принимая во вниманіе только-что полученное нами выраженіе для $\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta}$, мы вмѣсто уравненія (II) получимъ тождественное съ нимъ уравненіе:

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = N \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - MN \cos \omega. \quad (\text{III})$$

§ 2. Теперь намъ остается показать, что уравненія (I) и (II) или, что то же, уравненія (I) и (III) совмѣстны.

Предположимъ, что послѣднее обстоятельство имѣетъ мѣсто; въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравненіе (I) по α и вставимъ въ полученное уравненіе вмѣсто $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ его значеніе (I); оставляя въ сторонѣ случай $M = 0$, найдемъ, что

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = N \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - N^2 \sin \omega + \frac{l(\cos \omega + l \sin \omega)}{a}. \quad (\text{IV})$$

Наконецъ, дифференцируя уравненіе (I) по β , пользуясь выраженіемъ (III) для $\frac{\partial M}{\partial \beta}$ и исключая случай $N = 0$, получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -M \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + M^2 \cos \omega + \frac{l(\sin \omega - l \cos \omega)}{a}. \quad (\text{V})$$

Итакъ, если наши уравненія (I), (II) и (III) совмѣстны, то должны быть совмѣстны уравненія (II)—(V) т. е. должны удовлетворяться тождественно соотношенія

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Въ справедливости послѣднихъ тождествъ легко убѣдиться простымъ дифференцированиемъ выражений (II)—(V), если при томъ примемъ во вниманіе соотношеніе (I) и вспомнимъ, что ω интеграль уравненія (1).

Если теперь перенесемъ всѣ члены въ уравненіи (I) въ лѣвую часть и обозначимъ лѣвую часть полученнаго такимъ образомъ уравненія черезъ L , то, въ силу уравненій (II) и (V) будемъ имѣть, что производныя $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что $L = \text{const}$ для интеграловъ уравненій (II)—(V).

Для совмѣстности уравненій (II)—(V) эта постоянная, какъ мы видѣли раньше, должна равняться нулю.

Уравненія (II)—(V), къ интегрированію которыхъ сводится рѣшеніе нашей задачи, представляютъ *три* уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно функціи l .

Если они будутъ совмѣстны, то они имѣютъ, вообще говоря, въ извѣстной области интеграль, опредѣляемый начальными значеніями функцій l , $\frac{\partial l}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial l}{\partial \beta}$ для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Для того, чтобы уравненія (II)—(V) были совмѣстны, эти начальныя значенія должны удовлетворять соотношенію $L_0 = 0$, гдѣ черезъ L_0 мы обозначаемъ значеніе функціи L при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

Принимая теперь во вниманіе, что постоянная a выбрана нами совершенно произвольно и подчинена единственному условію $a > 0$, видимъ, что въ наше выраженіе для l будетъ входить *три* произвольныхъ постоянныхъ: a , l_0 , $\left(\frac{\partial l}{\partial \alpha}\right)_0$, а потому число поверхностей S , удовлетворяющихъ двумъ нашимъ условіямъ, будетъ ∞^3 .

§ 3. Покажемъ теперь, что всѣ эти поверхности S наложимы на одну изъ *основныхъ* поверхностей вращенія т. е. имѣютъ линейный элементъ вида:

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a - \sin^2 u)} + k^2 \cotang^2 u dv^2,$$

гдѣ k постоянная.

Кромѣ того покажемъ, что система нормалей къ Σ представляетъ конгруэнцію, присоедиенную къ поверхностямъ S .

Если наши оба предположенія справедливы, то на поверхностяхъ S кривыя $l = \text{const}$ должны быть геодезическими параллелями, а въ такомъ случаѣ дифференціальный параметръ 1-го порядка $A_1(l)$, составленный относительно линейнаго элемента поверхности S , долженъ быть функцией только отъ l .

На основаніи выраженій (3) и (5) линейный элементъ поверхности S будетъ:

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\cos\omega + l\sin\omega)^2 (M^2 + 1) d\alpha^2 + \\ + 2(\sin\omega - l\cos\omega)(\cos\omega + l\sin\omega) MN d\alpha d\beta + (\sin\omega - l\cos\omega)^2 (N^2 + 1) d\beta^2.$$

Составляя дифференціальный параметръ $A_1(l)$, легко найдемъ, что

$$A_1(l) = \frac{M^2 + N^2}{M^2 + N^2 + 1} = \frac{l^2 + 1 - a}{l^2 + 1},$$

т. е., что $A_1(l)$ функция только отъ l .

Дифференціалъ длины дуги геодезическихъ кривыхъ, ортогональныхъ къ кривымъ $l = \text{const}$, будетъ

$$d\theta = \frac{dl}{\sqrt{A_1(l)}} = \sqrt{\frac{l^2 + 1}{l^2 + 1 - a}} dl.$$

Вводя вмѣсто l переменное u , связанное съ l соотношеніемъ (2), получимъ:

$$d\theta^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a - \sin^2 u)}.$$

Линейный элементъ нашей поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2 dv^2.$$

Функцию σ опредѣлимъ, вычисливъ по известной формулѣ Bonnet геодезическую кривизну линий $l = \text{const}$.

Такимъ образомъ для опредѣленія функции σ получимъ уравненіе:

$$-\frac{1}{\rho_{gl}} = \frac{d \log \sigma}{du} = -\frac{1}{\sin u \cos u},$$

откуда найдемъ, что

$$\sigma = k \cotang u,$$

гдѣ при соответственномъ выборѣ параметра v можемъ считать h постоянной.

Итакъ линейный элементъ нашей поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a - \sin^2 u)} + h^2 \cotang^2 u dv^2,$$

т. е. поверхность S наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращения: гиперболическій синусоидъ, укороченный или удлинённый катеноидъ или логариѳмическую поверхность вращения.

Эти три случая, какъ мы уже видѣли, будутъ характеризоваться значеніемъ постоянной a , а именно для перваго изъ нихъ $a > 1$, для втораго $a < 1$ и для третьяго $a = 1$.

Чтобы доказать, что нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S , намъ остается показать, что на послѣдней поверхности кривыя $l = \text{const}$ ортогональны къ плоскости, проходящей черезъ нормали къ поверхностямъ Σ и S .

Уравненіе послѣдней плоскости будетъ:

$$Nx - My = 0.$$

Проекціи перемѣщенія соответственной точки M поверхности S вдоль кривой $l = \text{const}$ будутъ на основаніи (3)

$$\delta x = (\cos \omega + l \sin \omega) d\alpha, \quad \delta y = -(\sin \omega - l \cos \omega) \frac{\frac{\partial l}{\partial \alpha}}{\frac{\partial l}{\partial \beta}} d\alpha, \quad \delta z = 0,$$

или, если примемъ во вниманіе выраженія (5)

$$\delta x = (\cos \omega + l \sin \omega) d\alpha, \quad \delta y = -(\cos \omega + l \sin \omega) \frac{M}{N} d\alpha, \quad \delta z = 0,$$

откуда имѣемъ, что

$$\frac{N}{\delta x} = -\frac{M}{\delta y},$$

а это и есть искомое условіе.

Такимъ образомъ, сопоставляя результаты настоящаго и предыдущаго параграфовъ, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной соответствуетъ ∞^3 поверхностей S , наложимыхъ на основныя поверхности вращения, при чемъ нормали къ Σ составляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S .

§ 4. Переходимъ къ разсмотрѣнію случаевъ, исключенныхъ нами, а именно, когда одна изъ функций M или N равна нулю.

Положимъ, что $M = 0$, тогда, обращаясь къ уравненію (III), находимъ, что либо $N = 0$, либо $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0$.

Первый случай не даетъ намъ рѣшенія нашей задачи, ибо тогда мы имѣли бы, что $l = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

Что касается второго условія, то оно указываетъ на то, что наша поверхность Σ поверхность вращенія.

Всѣ уравненія, служащія для опредѣленія функции l , сведутся къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію 1-го порядка (I).

Интеграль его заключаетъ одну произвольную постоянную; присоединяя еще къ ней постоянную a , видимъ, что поверхностей S , удовлетворяющихъ нашимъ двумъ условіямъ, въ этомъ случаѣ будетъ ∞^2 .

Пользуясь тѣми же разсужденіями, что и въ § 5 предыдущей главы, мы увидимъ, что поверхности S будутъ поверхностями вращенія.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности вращенія Σ съ постоянной отрицательной Гауссовской кривизной соответствуетъ ∞^2 поверхностей вращенія S , наложенныхъ на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ поверхностямъ S .

§ 5. Обратимся къ разсмотрѣнію поверхности Σ_1 , точки которой симметричны съ точками данной поверхности Σ относительно соответственныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхности S т. е. относительно плоскостей

$$Mx + Ny - z + l = 0.$$

Координаты соответственной точки O_1 поверхности Σ_1 будутъ, очевидно,

$$x = -\frac{2aM}{l^2 + 1}, \quad y = -\frac{2aN}{l^2 + 1}, \quad z = \frac{2al}{l^2 + 1}. \quad (8)$$

Найдемъ выраженіе для линейнаго элемента поверхности Σ_1 .

Проекціи перемѣщеній разсматриваемой точки O_1 на соответственныя оси (T), если примемъ во вниманіе наши уравненія (I) — (V), будутъ:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{(l^2 - 1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2 + 1} \left(\frac{2aM^2}{l^2 + 1} - 1 \right) d\alpha + \frac{(l^2 - 1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2 + 1} \frac{2aMN}{l^2 + 1} d\beta, \\ \delta y &= \frac{(l^2 - 1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2 + 1} \frac{2aMN}{l^2 + 1} d\alpha + \frac{(l^2 - 1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2 + 1} \left[\frac{2aN^2}{l^2 + 1} - 1 \right] d\beta, \quad (9) \\ \delta z &= \frac{(l^2 - 1)\cos\omega - 2l\sin\omega}{l^2 + 1} \frac{2aM}{l^2 + 1} d\alpha - \frac{(l^2 - 1)\sin\omega + 2l\cos\omega}{l^2 + 1} \frac{2aN}{l^2 + 1} d\beta. \end{aligned}$$

Линейный элемент нашей поверхности Σ_1 будетъ вида:

$$ds_1^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$

гдѣ

$$A = \frac{(l^2 - 1) \cos \omega - 2l \sin \omega}{l^2 + 1}, \quad B = \frac{(l^2 - 1) \sin \omega + 2l \cos \omega}{l^2 + 1}.$$

Замѣчая, что функции A , B удовлетворяютъ соотношенію

$$A^2 + B^2 = 1,$$

мы можемъ положить

$$A = \cos \Omega = \frac{(l^2 - 1) \cos \omega - 2l \sin \omega}{l^2 + 1}, \quad B = \sin \Omega = \frac{(l^2 - 1) \sin \omega + 2l \cos \omega}{l^2 + 1}, \quad (10)$$

гдѣ Ω дѣйствительная функція.

При этомъ предположеніи линейный элементъ поверхности Σ_1 представится въ слѣдующей формѣ:

$$ds_1^2 = \cos^2 \Omega d\alpha^2 + \sin^2 \Omega d\beta^2. \quad (11)$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности Σ_1 , какъ не трудно видѣть, будетъ:

$$2aMx + 2aNy + (l^2 + 1 - 2a)z + 2al = 0, \quad (12)$$

а слѣдовательно уравненіе соотвѣтственной нормали будетъ:

$$\frac{x + \frac{2alM}{l^2 + 1}}{2aM} = \frac{y + \frac{2alN}{l^2 + 1}}{2aN} = \frac{z - \frac{2al}{l^2 + 1}}{l^2 + 1 - 2a};$$

нормаль эта, какъ и слѣдовало ожидать, проходитъ черезъ соотвѣтственную точку $M(o, o, l)$ поверхности S .

Найдемъ теперь дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности S .

Для вывода его воспользуемся методомъ, употребленнымъ нами уже не одинъ разъ.

Примемъ нѣкоторую неподвижную точку P за начало координатъ (T_1) , оси которыхъ остаются постоянно параллельными соотвѣтственнымъ осямъ координатъ (T) .

Уравненіе по отношенію къ (T_1) плоскости, параллельной плоскости (12) и проходящей черезъ точку P , будетъ:

$$2aMx + 2aNy + (l^2 + 1 - 2a)z = 0. \quad (13)$$

Дадимъ параметрамъ α , β нѣкоторыя приращенія $d\alpha$, $d\beta$; координатныя оси (T_1) примуть при этомъ нѣкоторое положеніе (T'_1); точка O_1 поверхности Σ_1 перемѣстится по кривой, характеризуемой приращеніями параметровъ ($d\alpha$, $d\beta$) въ точку O'_1 .

По отношенію къ осямъ (T'_1) уравненіе плоскости, параллельной касательной плоскости къ поверхности Σ_1 въ точкѣ O'_1 , будетъ:

$$2aM'x' + 2aN'y' + (l'^2 + 1 - 2a)z' = 0,$$

гдѣ

$$M' = M + dM, \quad N' = N + dN, \quad l' = l + dl.$$

Относя это уравненіе къ прежнимъ осямъ (T_1), найдемъ, что уравненіе прямой, параллельной направленію, сопряженному съ кривой ($d\alpha$, $d\beta$), будетъ дано уравненіемъ (13) и уравненіемъ

$$Hx + Gy + Lz = 0,$$

гдѣ

$$H = 2adM - 2aN \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) + (l^2 + 1 - 2a) \sin \omega d\alpha,$$

$$G = 2adN + 2aM \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) - (l^2 + 1 - 2a) \cos \omega d\beta,$$

$$L = 2ldl - 2aM \sin \omega d\alpha + 2aN \cos \omega d\beta.$$

Если черезъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ обозначимъ приращенія параметровъ, соотвѣтствующія перемѣщенію точки O_1 по поверхности Σ_1 вдоль кривой, сопряженной съ тою, которая характеризуется приращеніями ($d\alpha$, $d\beta$), то послѣ несложныхъ вычисленій, пользуясь уравненіями (I)—(V), мы приведемъ исконое уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1 къ виду:

$$d\alpha\delta\alpha - d\beta\delta\beta = 0. \quad (14)$$

Послѣднее уравненіе представляетъ въ то же время дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ .

Итакъ мы приходимъ къ заключенію, что всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ соотвѣтствуетъ система сопряженныхъ кривыхъ поверхности Σ_1 .

Въ частности, линіямъ кривизны и асимптотическимъ линіямъ поверхности Σ соотвѣтствуютъ линіи кривизны и асимптотическія линіи поверхности Σ_1 .

Что касается асимптотическихъ линій, то это ясно само собою, что же касается линій кривизны, то въ силу послѣдняго уравненія (14)

линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ сопряженные кривые поверхности Σ_1 ; въ то же самое время онѣ ортогональны, какъ это явствуетъ изъ формы линейнаго элемента поверхности Σ_1 ; отсюда ясно, что эти кривые представляютъ линии кривизны поверхности Σ_1 .

Намъ остается показать, что поверхность Σ_1 имѣетъ постоянную отрицательную кривизну, равную -1 .

Обратимся опять къ координатамъ (T_1) , имѣющимъ начало въ неподвижной точкѣ P .

Изъ уравненія касательной плоскости къ поверхности Σ_1 видно, что координаты сферическаго изображенія точки O_1 поверхности Σ_1 по отношенію къ осямъ (T_1) будутъ:

$$x_1 = \frac{2aM}{l^2 + 1}, \quad y_1 = \frac{2aN}{l^2 + 1}, \quad z_1 = 1 - \frac{2a}{l^2 + 1}.$$

Проекціи перемѣщеній сферическаго изображенія на оси (T_1) или на оси (T) , очевидно, таковы:

$$\delta x_1 = -\sin\Omega \left(\frac{2a}{l^2 + 1} M^2 - 1 \right) d\alpha + \cos\Omega \frac{2aMN}{l^2 + 1} d\beta,$$

$$\delta y_1 = -\sin\Omega \frac{2aMN}{l^2 + 1} d\alpha + \cos\Omega \left(\frac{2a}{l^2 + 1} N^2 - 1 \right) d\beta,$$

$$\delta z_1 = -\sin\Omega \frac{2aM}{l^2 + 1} d\alpha - \cos\Omega \frac{2aN}{l^2 + 1} d\beta,$$

гдѣ $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ имѣютъ значенія (10).

Отсюда, замѣчая, что радиусы кривизны нашей поверхности Σ_1 представляютъ ничто иное, какъ величины отношеній $\frac{\delta x}{\delta x_1}, \frac{\delta y}{\delta y_1}, \frac{\delta z}{\delta z_1}$ при перемѣщеніяхъ вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, найдемъ, что

$$R_1 = -\cotang\Omega, \quad R_2 = tang\Omega,$$

а потому кривизна поверхности Σ_1 равна -1 .

Отсюда тоже слѣдуетъ, что функція Ω удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} = \sin\Omega \cos\Omega.$$

§ 6. Какъ мы только-что видѣли, наши поверхности постоянной отрицательной кривизны Σ и Σ_1 связаны другъ съ другомъ такимъ образомъ, что на нихъ линіямъ кривизны и асимптотическимъ линіямъ одной соотвѣтствуютъ линіи кривизны и асимптотическія линіи другой.

Если припомнимъ результаты, полученные во II главѣ нашего изслѣдованія, то увидимъ, что подобное же соотвѣтствіе существуетъ между поверхностями отрицательной кривизны, являющимися Ваесклунд'овскими преобразованиями какой-либо одной поверхности.

Естественнымъ поэтому является вопросъ: не представляютъ-ли поверхности Σ и Σ_1 преобразования одной какой-либо поверхности Σ_2 или, другими словами, нельзя-ли перейти отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_1 путемъ двухъ послѣдовательно примѣненныхъ преобразованій B_{σ_1} , B_{σ_2} .

Обращаясь къ § 13 второй главы и сохраняя всѣ обозначенія этого параграфа, при чемъ только для краткости вмѣсто θ_1 будемъ писать просто θ , мы должны имѣть въ случаѣ утвердительнаго отвѣта на поставленный вопросъ для координатъ точки O_1 поверхности Σ_1 слѣдующія выраженія:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2alM}{l^2 + 1} = [m_1 + m_2 \cos(\Omega - \omega)] \cos\theta - \mu_1 m_2 \sin(\Omega - \omega) \sin\theta, \\ y &= -\frac{2alN}{l^2 + 1} = [m_1 + m_2 \cos(\Omega - \omega)] \sin\theta + \mu_1 m_2 \sin(\Omega - \omega) \cos\theta, \quad (15) \\ z &= \frac{2al}{l^2 + 1} = m_1 m_2 \sin(\Omega - \omega). \end{aligned}$$

Здѣсь m_1 , μ_1 постоянныя, характеризующія преобразование B_{σ_1} , помощью котораго мы переходимъ отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_2 съ линейнымъ элементомъ

$$ds_2^2 = \cos^2\theta d\alpha^2 + \sin^2\theta d\beta^2.$$

Что касается постоянныхъ m_2 , μ_2 , то онѣ характеризуютъ преобразование B_{σ_2} , приводящее насъ отъ поверхности Σ_2 къ поверхности Σ_1 . Изъ выраженій (10) предыдущаго параграфа легко найдемъ, что

$$\sin(\Omega - \omega) = \frac{2l}{l^2 + 1}, \quad \cos(\Omega - \omega) = \frac{l^2 - 1}{l^2 + 1}. \quad (16)$$

Подставляя эти значенія въ выраженія (15), мы прежде всего видимъ, что

$$m_1 m_2 = a \quad (17)$$

и кромѣ того, что

$$\begin{aligned} -2alM &= [m_1(l^2 + 1) + m_2(l^2 - 1)] \cos\theta - 2m_2\mu_1 l \sin\theta, \\ -2alN &= [m_1(l^2 + 1) + m_2(l^2 - 1)] \sin\theta + 2m_2\mu_1 l \cos\theta. \end{aligned}$$

Опредѣленные такимъ образомъ функціи M и N должны удовлетворять нашимъ уравненіямъ (I)—(V); подставляя значенія M и N въ уравненіе (I), получимъ:

$$[(m_1 + m_2)^2 - 4a]l^4 + [2(m_1^2 - m_2^2) + 4m_2^2\mu_1^2 - 4a(1-a)]l^2 + (m_1 - m_2)^2 = 0.$$

Это соотношеніе должно быть простымъ тождествомъ, т. е. постоянныя m_1 , m_2 должны удовлетворять кромѣ соотношенія (17) еще соотношеніямъ

$$(m_1 + m_2)^2 = 4a; \quad m_1^2 - m_2^2 + 2m_2^2\mu_1^2 - 2a(1-a) = 0, \quad m_1 - m_2 = 0.$$

Легко видѣть, что эти соотношенія удовлетворятся, если положимъ

$$m_1 = m_2 = \pm \sqrt{a}, \quad \mu_1^2 = 1 - a. \quad (18)$$

Такъ какъ постоянныя μ_1 , m_1 , μ_2 , m_2 связаны соотношеніями

$$m_1^2 + \mu_1^2 = 1, \quad m_2^2 + \mu_2^2 = 1,$$

то въ силу послѣднихъ равенствъ имѣемъ, что $\mu_1^2 = \mu_2^2$, откуда $\mu_2 = \pm \mu_1$. Какой здѣсь нужно выбрать знакъ, покажетъ дальнѣйшее изслѣдованіе.

Въ силу только что полученныхъ условій, выраженія для M и N примутъ видъ:

$$m_1 M = \mu_1 \sin \theta - l \cos \theta, \quad m_1 N = -\mu_1 \cos \theta - l \sin \theta. \quad (19)$$

Нетрудно теперь простымъ дифференцированіемъ убѣдиться, что полученные нами выраженія для M и N удовлетворяютъ тождественно уравненіямъ (II)—(V), если только обратимъ вниманіе, что θ представляетъ интеграль системы дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = -\frac{\mu_1 \cos \theta \sin \omega}{m_1} + \frac{\sin \theta \cos \omega}{m_1},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{\mu_1 \sin \theta \cos \omega}{m_1} - \frac{\cos \theta \sin \omega}{m_1}. \quad (20)$$

Намъ остается показать, что полученная нами функція Ω удовлетворяетъ уравненіямъ, аналогичнымъ уравненіямъ (20), въ которыхъ нужно только замѣнить θ , ω , m_1 , μ_1 соответственно черезъ Ω , θ , m_2 , μ_2 .

Комбинируя полученные такимъ образомъ уравненія съ уравненіями (20), найдемъ, что Ω должно удовлетворять дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{m_1} (\mu_2 \cos \Omega + \mu_1 \cos \omega) \sin \theta + \frac{1}{m_1} (\sin \Omega + \sin \omega) \cos \theta,$$

$$\frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial \beta} = \frac{1}{m_1} (\mu_2 \sin \Omega + \mu_1 \sin \omega) \cos \theta - \frac{1}{m_1} (\cos \Omega + \cos \omega) \sin \theta;$$

здѣсь нами уже принято во вниманіе условіе $m_1 = m_2$.

Подставляя сюда вмѣсто $\sin \Omega$, $\cos \Omega$ и производныхъ $\frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial (\Omega - \omega)}{\partial \beta}$ ихъ значенія и исключая изъ полученныхъ выраженій $\cos \theta$ и $\sin \theta$ при помощи уравненій (19), приходимъ къ условіямъ:

$$(\mu_1 + \mu_2) (\mu_1 M - Nl) [\cos \omega (1 - l^2) + 2l \sin \omega] = 0,$$

$$(\mu_1 + \mu_2) (\mu_1 N + Ml) [\sin \omega (1 - l^2) - 2l \cos \omega] = 0.$$

Отсюда ясно, что искомое условіе будетъ:

$$\mu_1 + \mu_2 = 0. \quad (21)$$

Въ самомъ дѣлѣ ни одинъ изъ остальныхъ множителей не можетъ обратиться въ нуль, такъ какъ приравнивая ихъ нулю мы либо получимъ для l значеніе, не зависящее отъ значенія a — результатъ очевидно невозможный, либо найдемъ, что $l = \text{const}$, что тоже не даетъ рѣшенія нашей задачи.

Такимъ образомъ видимъ, что преобразование поверхности Σ въ поверхность Σ_1 можетъ быть достигнуто путемъ послѣдовательнаго примѣненія двухъ Bäcklund'овскихъ преобразованій B_{σ_1} и B_{σ_2} , характеризуемыхъ соотвѣтственно постоянными (m_1, μ_1) , $(m_1, -\mu_1)$.

Во II главѣ мы видѣли, что постоянныя m_1, μ_1, m_2, μ_2 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$m_1 = \cos \sigma_1, \quad \mu_1 = \sin \sigma_1, \quad m_2 = \cos \sigma_2, \quad \mu_2 = \sin \sigma_2,$$

при чемъ углы $\frac{\pi}{2} - \sigma_1, \frac{\pi}{2} - \sigma_2$ представляютъ углы между фокальными плоскостями соотвѣтственныхъ псевдосферическихъ линейчатыхъ конгруэнцій.

Изъ условій (18) и (21) заключаемъ, что въ рассматриваемомъ случаѣ постоянныя σ_1 и σ_2 связаны между собою соотношеніемъ

$$\sigma_2 = -\sigma_1.$$

Замѣчая далѣе, что постоянныя m_1 и μ_1 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$m_1 = \sqrt{a}, \quad \mu_1^2 = 1 - a,$$

гдѣ a дѣйствительная и при томъ положительная величина, мы видимъ, что углы σ_1, σ_2 при условіи $a < 1$ будутъ дѣйствительными; при $a = 1$, очевидно, будемъ имѣть два преобразованія Bianchi B_0 ; наконецъ при $a > 1$ наши преобразованія $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ будутъ мнимыми сопряженными; вотъ почему послѣдовательное ихъ примѣненіе приводитъ къ *отыскательной* поверхности Σ_1 ¹⁾.

Итакъ мы пришли къ слѣдующей теоремѣ.

Нормали къ какой либо поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной послѣ отраженія отъ поверхности S , которая наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращенія и для которой нормали къ Σ представляютъ присоединенную конгруэнцію, будутъ нормальны къ поверхности Σ_1 съ той же постоянной отрицательной кривизной. Отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_1 мы можемъ прийти путемъ послѣдовательнаго примѣненія двухъ Bäcklund'овскихъ преобразованій $B_{\sigma_1}, B_{-\sigma_1}$; при томъ, если поверхность S наложима на укороченный или удлиненный катеноидъ, оба эти преобразованія дѣйствительны, если она наложима на логарифмическую поверхность вращенія — эти преобразованія представляютъ преобразованія Bianchi, наконецъ, если S наложима на гиперболическій синусоидъ вращенія — преобразованія $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}$ мнимыя сопряженные.

§ 7. Въ предыдущей главѣ мы показали, какимъ образомъ можно свести рѣшеніе всѣхъ поставленныхъ тамъ вопросовъ къ интегрированію нѣкоторой системы *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка.

Пользуясь аналогичнымъ методомъ, можемъ сдѣлать это и въ разсматриваемомъ нами теперь случаѣ.

Для этого разсмотримъ систему круговъ (K), ортогональныхъ къ нашимъ поверхностямъ постоянной отрицательной кривизны Σ и Σ_1 и имѣющихъ центры въ соответственныхъ касательныхъ плоскостяхъ къ поверхности S .

Какъ мы видѣли въ III главѣ нашего изслѣдованія, эта конгруэнція круговъ будетъ ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей.

Центръ C какого-либо изъ этихъ круговъ представляетъ точку пересѣченія трехъ соответственныхъ плоскостей

$$z = 0, \quad Mx + Ny - z + l = 0, \quad Nx - My = 0;$$

дѣйствительно, первая изъ нихъ касается поверхности Σ , вторая поверхности S , а третья проходитъ черезъ нормали къ этимъ двумъ поверхностямъ, а слѣдовательно и черезъ нормаль къ поверхности Σ_1 .

¹⁾ См. гл. II § 14.

Такимъ образомъ координаты нашего центра C будутъ:

$$x_0 = -\frac{Ml}{M^2 + N^2} = \frac{-aMl}{l^2 + 1 - a}, \quad y_0 = \frac{-aNl}{l^2 + 1 - a}, \quad z_0 = 0,$$

а радиусъ его

$$r_0^2 = \frac{a^2 l^2 (M^2 + N^2)}{(l^2 + 1 - a)^2} = \frac{al^2}{l^2 + 1 - a}. \quad (22)$$

Обозначимъ начало нашихъ координатъ (T) черезъ O ; черезъ γ обозначимъ уголъ, составляемый отръзкомъ OC съ осью x -ою, тогда

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{a}M}{\sqrt{l^2 + 1 - a}}, \quad \sin\gamma = -\frac{\sqrt{a}N}{\sqrt{l^2 + 1 - a}}. \quad (23)$$

Если черезъ t обозначимъ уголъ, составляемый какимъ-либо радиусомъ круга съ отръзкомъ CO , тогда координаты соответственной точки нашего круга выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - r_0 \cos\gamma \cos t = r_0 \cos\gamma (1 - \cos t), \\ y &= y_0 - r_0 \sin\gamma \cos t = r_0 \sin\gamma (1 - \cos t), \\ z &= r_0 \sin t. \end{aligned} \quad (24)$$

Возьмемъ на кругѣ нѣкоторую точку G и напишемъ условіе, что ея перемѣщенія ортогональны къ кругу (K).

Если черезъ δx , δy , δz обозначимъ проэкции перемѣщеній точки G на оси (T), то послѣднее условіе будетъ вида:

$$\sin t \cos\gamma \delta x + \sin t \sin\gamma \delta y + \cos t \delta z = 0.$$

Подставляя сюда значенія δx , δy , δz , мы представимъ послѣднее выраженіе въ видѣ:

$$A d\alpha + B d\beta + T dt = 0, \quad (25)$$

гдѣ

$$A = r_0 \sin\omega \cos\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \alpha} + \cos\omega \cos\gamma \right) \sin t - r_0 \sin\omega \cos\gamma \cos t,$$

$$B = -r_0 \cos\omega \sin\gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \beta} + \sin\omega \sin\gamma \right) \sin t + r_0 \cos\omega \sin\gamma \cos t,$$

$$T = r_0.$$

Чтобы условіе (25) имѣло мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$, какъ извѣстно, необходимо и достаточно, чтобы тождественно удовлетворялось соотношеніе

$$A \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + B \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) + T \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) = 0.$$

Послѣднее выраженіе, какъ нетрудно убѣдиться, приводится къ слѣдующему виду:

$$P \sin t + Q \cos t + R = 0, \quad (26)$$

гдѣ

$$P = r_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\cos \omega \cos \gamma}{r_0} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \omega \sin \gamma}{r_0} \right) \right],$$

$$Q = -R = -r_0^3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \omega \sin \gamma}{r_0} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sin \omega \cos \gamma}{r_0} \right) \right] + r_0 \cos \gamma \sin \gamma.$$

Такъ какъ разсматриваемая нами система круговъ ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей, другими словами, такъ какъ соотношеніе (26) имѣетъ мѣсто для безчисленнаго множества значеній функціи t , то необходимо имѣютъ мѣсто соотношенія

$$P = 0, \quad Q = -R = 0.$$

Подставляя въ эти выраженія вмѣсто γ и r_0 ихъ значенія, мы приведемъ ихъ къ виду

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\cos \omega M}{l} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \omega N}{l} \right) \quad (27)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \omega N}{l} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sin \omega M}{l} \right) + \frac{MN}{l^2} = 0. \quad (28)$$

Въ справедливости послѣднихъ соотношеній легко убѣдиться при помощи нашихъ уравненій (II) и (III).

Въ самомъ дѣлѣ, комбинируя эти два уравненія мы получимъ:

$$\sin \omega \frac{\partial N}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} N \cos \omega - \sin^2 \omega M N = \cos \omega \frac{\partial M}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega}{\partial \beta} M \sin \omega + \cos^2 \omega M N;$$

дѣля обѣ части на l и прибавляя къ обѣимъ частямъ по $-\frac{MN \sin \omega \cos \omega}{l^2}$, мы легко придемъ къ соотношенію (27).

Для вывода соотношенія (28) поступимъ слѣдующимъ образомъ: умножимъ уравненіе (II) на $\frac{\cos\omega}{l}$, а уравненіе (III) на $\frac{\sin\omega}{l}$; складывая полученныя выраженія найдемъ, что

$$\frac{\cos\omega}{l} \frac{\partial N}{\partial \alpha} - \frac{\sin\omega}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} N + \frac{\sin\omega}{l} \frac{\partial M}{\partial \beta} + \frac{\cos\omega}{l} M = 0.$$

Прибавимъ теперь къ обѣимъ частямъ послѣдняго уравненія по $-\frac{MN}{l^2}$, при чемъ примемъ во вниманіе слѣдующее тождество:

$$\begin{aligned} \frac{MN}{l^2} &= \frac{MN(\cos^2\omega + l\sin\omega \cos\omega)}{l^2} + \frac{MN(\sin^2\omega - l\cos\omega \sin\omega)}{l^2} = \\ &= \frac{\cos\omega N}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \alpha} + \frac{\sin\omega M}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

тогда получимъ уравненіе (28).

Особый интересъ представляетъ для насъ уравненіе (27); оно показываетъ, что функціи $\frac{\cos\omega M}{l}$ и $\frac{\sin\omega N}{l}$ можно считать частными производными по α и β отъ одной и той же функціи, т. е.

$$\frac{\cos\omega M}{l} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\sin\omega N}{l} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta},$$

если кромѣ того введемъ функцію ψ при помощи соотношенія

$$\psi = \frac{\varphi}{l}, \quad (29)$$

то для функцій M и N найдемъ слѣдующія выраженія:

$$M = \frac{1}{\psi \cos\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{1}{\psi \sin\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \quad (30)$$

§ 8. Пользуясь уравненіями (I)—(V), легко вывести тѣ дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ, которымъ удовлетворяютъ функціи ψ и φ .

Дифференцируя по α и β выраженіе (29) и подставляя въ полученныя выраженія вмѣсто производныхъ отъ функціи l ихъ значенія черезъ производныя отъ функціи φ , найдемъ, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\operatorname{tang}\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \operatorname{cotang}\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \quad (VI)$$

Уравнение (I) приметъ теперь видъ

$$L = \frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{\varphi^2}{a} - \frac{(1-a)\psi^2}{a} = 0; \quad (\text{VII})$$

если, принявши во вниманіе это условіе, продифференцируемъ выраженія (30) для M и N по α и β и подставимъ полученныя значенія для производныхъ отъ этихъ функций въ уравненія (II)—(V), то легко найдемъ слѣдующія уравненія, которымъ удовлетворяютъ функции φ и ψ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\cos^2 \omega}{a} \varphi - \frac{1-a}{a} \psi \sin \omega \cos \omega,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (\text{VIII})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\sin^2 \omega}{a} \varphi + \frac{1-a}{a} \psi \sin \omega \cos \omega.$$

Если теперь составимъ различныя выраженія для

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta \partial \alpha^2},$$

то увидимъ, что уравненія наши (VI) и (VIII) будутъ совмѣстны въ силу *одного только* условія

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Дифференцируя по α и β функцию L , представляющую лѣвую часть уравненія (VII), мы увидимъ, что въ силу уравненій (VI) и (VIII) производныя $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю, слѣдовательно

$$L = g = \text{const.}$$

Такимъ образомъ уравненіе это является слѣдствіемъ уравненій (VI) и (VIII).

Постоянная g опредѣляется начальными значеніями функций ψ , φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$; эти же начальныя значенія опредѣляютъ, вообще говоря, голоморфные въ нѣкоторой области интегралы уравненій (VI) и (VII).

Какъ въ § 10 пятой главы мы убѣдимся, что въ случаѣ разсмотрѣнномъ нами въ предыдущихъ параграфахъ т. е. въ случаѣ, когда $g = 0$, выраженіе для функции l

$$l = \frac{\varphi}{\psi}$$

заключаетъ *два* произвольныхъ постоянныхъ, если не считать постоянной a .

Такимъ образомъ мы приходимъ къ извѣстному уже намъ результату, что всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной соответствуетъ ∞^3 поверхностей S , наложимыхъ на основныя поверхности вращения и связанныхъ опредѣленнымъ образомъ съ поверхностью Σ .

Предполагая, что мы находимся въ условіяхъ теоремы, обратной теоремѣ Guichard'a, мы изъ соотношеній (30) видимъ, что

$$M \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - N \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0,$$

откуда заключаемъ, что на поверхности Σ кривыя $\varphi = \text{const}$, гдѣ φ интеграль уравненій (VI) и (VIII), удовлетворяющій уравненію $L = 0$, ортогональны къ плоскостямъ

$$Nx - My = 0$$

т. е. къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соответственныя нормали къ поверхностямъ S и Σ .

При доказательствѣ второй теоремы Bianchi мы видѣли, что обертка послѣднихъ плоскостей представляетъ поверхность наложимую на поверхность вращения, линейный элементъ которой можетъ быть приведенъ къ виду

$$ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[a + \frac{a}{1-a} e^{2\tau} \right] dv^2,$$

гдѣ a постоянная, а

$$\tau = -av - (1-a)\theta.$$

Постараемся доказать это въ настоящемъ случаѣ, но вмѣстѣ съ тѣмъ нѣсколько расширимъ нашу задачу, а именно будемъ искать линейный элементъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на этой поверхности, при чемъ за φ примемъ интеграль уравненій (VI) и (VIII), удовлетворяющій соотношенію

$$L = g,$$

гдѣ g нѣкоторая произвольная постоянная.

§ 9. Итакъ пусть φ и ψ интегралы дифференціальныхъ уравне- ній (VI) и (VIII), удовлетворяющіе соотношенію

$$L = g.$$

Уравненіе по отношенію къ (T) соотвѣтственной плоскости, орто- гональной къ кривой $\varphi = \text{const}$ и проходящей черезъ нормаль къ Σ , будетъ

$$\cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0, \quad (31)$$

а потому координаты любой точки этой поверхности будутъ

$$x = \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Координаты точки, геометрическимъ мѣстомъ которой будетъ обертка плоскостей (31), мы опредѣлимъ изъ условія, что перемѣщенія ея при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α , β будутъ происходить въ плоскости (31).

Если черезъ δx , δy , δz обозначимъ проэкции перемѣщеній иско- мой точки на оси (T), то условіе наше выразится аналитически слѣ- дующимъ образомъ:

$$A d\alpha + B d\beta = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \delta x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \delta y = 0. \quad (32)$$

Такъ какъ по нашему предположенію условіе это имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ значеній $d\alpha$, $d\beta$, то оно распадается на два условія:

$$A = 0. \quad B = 0, \quad (33)$$

изъ которыхъ мы и сможемъ опредѣлить искомыя величины t и z .

Проэкции перемѣщеній нашей точки будутъ:

$$\delta x = \cos\omega d\alpha + d\left(t \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + z \sin\omega d\alpha - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\delta y = \sin\omega d\beta + d\left(t \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - z \cos\omega d\beta,$$

$$\delta z = dz + t \cos^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta - t \sin^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\alpha.$$

Если теперь воспользуемся основными уравнениями (VI) и (VIII) и оставимъ въ сторонѣ случаи $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$, то легко приведемъ наши условія (33) къ виду:

$$\begin{aligned} \cos \omega + t \left[\frac{\cos^2 \omega \sin \omega}{a} \varphi - \frac{1-a}{a} \psi \sin^2 \omega \cos \omega \right] + z \sin \omega &= 0, \\ \sin \omega + t \left[\frac{\sin^2 \omega \cos \omega}{a} \varphi + \frac{1-a}{a} \psi \cos^2 \omega \sin \omega \right] - z \cos \omega &= 0, \end{aligned}$$

откуда опредѣлимъ искомыя функціи t и z :

$$t = \frac{-a}{\varphi \sin \omega \cos \omega}, \quad z = \frac{(a-1)\psi}{\varphi}.$$

Такимъ образомъ координаты точекъ искомой обертки выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$x = -\frac{a}{\varphi \cos \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad y = -\frac{a}{\varphi \sin \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad z = \frac{(a-1)\psi}{\varphi}.$$

Отсюда уже, пользуясь уравнениями (VI) и (VIII), найдемъ слѣдующія выраженія для проэкцій перемѣщеній δx , δy , δz :

$$\delta x = \frac{a}{\varphi^2 \cos \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha + \frac{a}{\varphi^2 \cos \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) d\beta = \frac{a}{\varphi^2 \cos \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) d\varphi,$$

$$\delta y = \frac{a}{\varphi^2 \sin \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + \frac{a}{\varphi^2 \sin \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{a}{\varphi^2 \sin \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) d\varphi,$$

$$\delta z = \frac{\psi}{\varphi} \left[\frac{1-a}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi} \right].$$

Линейный элементъ разсматриваемой обертки будетъ, слѣдовательно, вида:

$$\begin{aligned} ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 &= \frac{a^2}{\varphi^4} \left[\frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right] d\varphi^2 + \\ &+ \frac{\psi^2}{\varphi^2} \left[\frac{1-a}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi} \right]^2; \end{aligned}$$

въ силу соотношенія

$$\frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 = g + \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1-a}{a} \psi^2,$$

онъ обратится въ слѣдующій:

$$ds^2 = \frac{n^2}{\varphi^4} \left[g - \frac{\varphi^2}{n} - \frac{1+n}{n} \psi^2 \right] d\varphi^2 + \frac{\psi^2}{\varphi^2} \left[\frac{1+n}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi} \right]^2,$$

гдѣ мы черезъ n обозначили величину $-a$.

Если теперь положимъ

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dv, \quad (1+n) \frac{d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} = (1+n) d\theta,$$

т. е. допустимъ, что

$$\varphi = e^v, \quad \psi = \frac{e^{(1+n)v - (1+n)\theta}}{1+n},$$

то мы приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду

$$ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[gn^2 e^{-2v} - n - \frac{n}{1+n} e^{2\tau} \right] dv^2, \quad (34)$$

гдѣ

$$\tau = nv - (n+1)\theta.$$

Отсюда видимъ, что наша поверхность представляетъ поверхность, съ которой мы встрѣтились во второй теоремѣ Bianchi.

Какъ легко видѣть, разстояніе какой-либо точки этой поверхности отъ соотвѣтственной касательной плоскости къ поверхности Σ равно координатѣ z , которая выразится слѣдующимъ образомъ черезъ θ и v :

$$z^2 = e^{2\tau};$$

разстояніе ρ между нормалью къ Σ и параллельной ей касательной къ нашей оберткѣ выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = gn^2 e^{-2v} - n - \frac{n}{n+1} e^{2\tau}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что полученная нами поверхность S_0 находится съ поверхностью Σ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся между собою поверхности S_0 и Σ во второй теоремѣ Bianchi.

Подобно тому, какъ въ § 11 предыдущей главы, мы придемъ къ теоремѣ, обратной второй теоремѣ Bianchi, а именно:

Всякой поверхности съ постоянной отрицательной кривизной Σ соотвѣтствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (34). Определение ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ диффе-

ренциальных уравнений въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка (VI) и (VIII). Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ .

§ 10. При выводѣ второй теоремы Bianchi, мы видѣли, что кромѣ поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (34), опредѣленнымъ образомъ связанныхъ съ поверхностями Σ постоянной отрицательной кривизны, съ тѣми же поверхностями Σ связаны аналогичнымъ образомъ и поверхности S_0 съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = e^{-2v} du^2 + [2(v - u)e^{-2v} + be^{-2v} - m] dv^2, \quad (35)$$

гдѣ b и m нѣкоторые постоянныя ¹⁾

Является теперь вопросъ, возможно ли найти для всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной поверхности S_0 , опредѣленнымъ образомъ связанная съ Σ и имѣющія линейный элементъ вида (35).

Для рѣшенія этого вопроса воспользуемся указаніями Bianchi, дающими возможность нѣсколько преобразовать наши уравненія (VI) и (VIII) ²⁾.

Преобразование это заключается въ слѣдующемъ.

Въ уравненія (VI) и (VIII), а также въ уравненіе

$$\frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 = g + \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1-a}{a} \psi^2 \quad (36)$$

вставимъ вмѣсто ψ функцію $\psi + c$, гдѣ c постоянная; при этой замѣнѣ уравненія (VI) очевидно не измѣнятся.

Затѣмъ положимъ

$$\left(\frac{1}{a} - 1 \right) c = n$$

и въ полученныхъ такимъ образомъ уравненіяхъ положимъ

$$\frac{1}{a} - 1 = 0,$$

при чемъ будемъ считать въ нихъ n независимой отъ a величиной.

Такимъ образомъ придемъ къ слѣдующей системѣ уравненій:

¹⁾ См. гл. IV § 3.

²⁾ Atti della R. A. dei Lincei t. IX fasc. 6.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \cos^2 \omega \varphi - n \sin \omega \cos \omega,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (\text{IX})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \sin^2 \omega \varphi + n \sin \omega \cos \omega,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\operatorname{tang} \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \operatorname{cotang} \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (\text{X})$$

$$L = \frac{1}{\cos^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 - \varphi^2 - 2n\psi = g. \quad (\text{XI})$$

Въ совмѣстности уравненій (IX) и (X) убѣдимся непосредственнымъ дифференцированиемъ, при чемъ, какъ легко видѣть, единственнымъ условіемъ совмѣстности будетъ условіе

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} = \sin \omega \cos \omega.$$

Далѣе, тоже непосредственнымъ дифференцированиемъ убѣждаемся, что функции $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю.

Подобно тому, какъ и при разсмотрѣніи уравненій (VI) и (VIII), мы увидимъ, что интегралы φ и ψ нашей системы (IX) и (X) будутъ зависѣть отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ, помощью которыхъ опредѣлится постоянная g , входящая въ уравненіе (XI).

Теперь постараемся найти обертку плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ поверхности S и ортогональныхъ къ соотвѣтственнымъ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ .

Уравненіе какой-либо изъ этихъ плоскостей по отношенію къ соотвѣтственнымъ осямъ (T) будетъ

$$\cos \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} x - \sin \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} y = 0, \quad (37)$$

а слѣдовательно координаты любой точки этой плоскости будутъ

$$x = \sin \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} t, \quad y = \cos \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} t, \quad z.$$

Функции t и z для точекъ искомой обертки получимъ изъ условія, что перемѣщенія этихъ точекъ при безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α , β будутъ происходить въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ (37).

Условіе это

$$A d\alpha + B d\beta = \cos\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \delta x - \sin\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \delta y = 0$$

разбивается на два

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Если вычислимъ выраженія для δx , δy и при этомъ воспользуемся уравненіями (IX) и (X), то тогда уравненія $A = 0$ и $B = 0$ приведутся къ виду

$$\cos\omega + t \sin\omega \cos\omega [\varphi \cos\omega - n \sin\omega] + z \sin\omega = 0,$$

$$\sin\omega + t \sin\omega \cos\omega [\varphi \sin\omega + n \cos\omega] - z \cos\omega = 0.$$

Отсюда легко найдемъ слѣдующія значенія для функцій t и z , соотвѣтствующія точкѣ искомой обертки

$$t = -\frac{1}{\varphi \sin\omega \cos\omega}, \quad z = -\frac{n}{\varphi};$$

такимъ образомъ координаты этой точки будутъ

$$x = -\frac{1}{\varphi \cos\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = -\frac{1}{\varphi \sin\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = -\frac{n}{\varphi}.$$

Проекціи перемѣщеній разсматриваемой точки на оси (T) будутъ въ силу уравненій (IX) и (X) вида

$$\delta x = \frac{1}{\varphi^2 \cos\omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right)^2 d\alpha + \frac{1}{\varphi^2 \cos\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta = \frac{1}{\varphi^2 \cos\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\varphi,$$

$$\delta y = \frac{1}{\varphi^2 \sin\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\alpha + \frac{1}{\varphi^2 \sin\omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \right)^2 d\beta = \frac{1}{\varphi^2 \sin\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\varphi,$$

$$\delta z = \frac{n d\varphi}{\varphi^2} - \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \left[\frac{n d\varphi}{\varphi} - d\varphi \right],$$

а потому линейный элементъ искомой поверхности будетъ

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{n d\varphi}{\varphi} - d\varphi \right]^2 + \frac{d\varphi^2}{\varphi^4} \left[\frac{1}{\cos^2\omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \right)^2 \right].$$

Если теперь обратимъ вниманіе на соотношеніе (XI), то приведемъ выраженіе для ds^2 къ виду

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{n d\varphi}{\varphi} - d\varphi \right]^2 + \frac{d\varphi^2}{\varphi^4} [g + \varphi^2 + 2n\varphi].$$

Полагая

$$0 = \frac{n d\varphi}{\varphi} - d\psi = n d\theta, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = dv,$$

а слѣдовательно

$$\psi = n(v - \theta), \quad \varphi = ne^v,$$

мы дадимъ нашему линейному элементу слѣдующую форму

$$ds^2 = e^{-2v} d\theta^2 + \left[1 + \frac{g}{n^2} e^{-2v} + 2(v - \theta) e^{-2v} \right] dv^2, \quad (38)$$

а это линейный элементъ вида (35).

Если выразимъ въ параметрахъ θ, v разстояніе z точки разсматриваемой обертки отъ соотвѣтственной касательной плоскости къ поверхности Σ и разстояніе $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ между нормалю къ Σ и параллельной ей касательной къ оберткѣ, то легко найдемъ для нихъ слѣдующія значенія

$$z^2 = e^{-2v}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 = 1 + \frac{g}{n^2} e^{-2v} + 2(v - \theta) e^{-2v}.$$

Такимъ образомъ и въ этомъ случаѣ теорема, обратная второй теоремѣ Bianchi для поверхности съ постоянной отрицательной кривизной нами доказана; теорему эту можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Всякой поверхности Σ съ постоянной отрицательной кривизной соотвѣтствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (38). Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го и 2-го порядка (IX) и (X). Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ .

Обращаясь къ случаямъ, когда одна изъ производныхъ $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ обращается въ нуль, мы, какъ и въ концѣ предыдущей главы, увидимъ, что это возможно лишь тогда, когда поверхность Σ поверхность вращенія. Въ этомъ случаѣ поверхность S_0 обратится въ ось вращенія.

ГЛАВА VII.

Теорема, обратная второй теоремѣ Guichard'a. Преобразование поверхностей съ постоянной положительной кривизной. Теорема, обратная второй теоремѣ Bianchi для поверхностей съ постоянной положительной кривизной.

§ 1. Намъ остается разсмотрѣть тѣ же вопросы, что и въ предыдущей главѣ, но только въ случаѣ, когда кривизна начальной поверхности Σ положительна; не нарушая общности, можемъ положить эту кривизну равной $+1$.

За координатныя линіи на поверхности Σ примемъ линіи кривизны $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$; координатныя оси (T) выберемъ такимъ образомъ, чтобы оси x^{000} касались кривыхъ $\beta = \text{const}$, а оси y^{000} кривыхъ $\alpha = \text{const}$.

Основные величины, характеризующія нашу поверхность Σ , будутъ ¹⁾:

$$\xi = \cosh \omega, \quad \eta_1 = \sinh \omega, \quad p_1 = -\cosh \omega, \quad q = \sinh \omega, \quad p = q_1 = 0,$$

$$r = -\frac{\partial \omega}{\partial \beta}, \quad r_1 = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha},$$

при чемъ ω представляетъ интегральное дифференціальное уравненіе

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0. \quad (1)$$

Линейный элементъ нашей поверхности, очевидно, будетъ

$$ds^2 = \cosh^2 \omega d\alpha^2 + \sinh^2 \omega d\beta^2.$$

Возьмемъ на нормали, проведенной къ Σ въ нѣкоторой точкѣ O , точку $M(o, o, l)$; геометрическимъ мѣстомъ этой точки будетъ нѣкоторая поверхность S .

¹⁾ Darboux, t. III, p. 385.

Через u обозначимъ уголъ, составляемый нормалью къ Σ съ касательной плоскостью къ S , проведенной въ соответственной точкѣ M .

Если поверхность S будетъ наложима на одну изъ основныхъ поверхностей вращения и если при томъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S , то, во первыхъ, между разстояніемъ l соответственныхъ точекъ O и M и угломъ u существуетъ соотношение

$$l^2 = \frac{a}{\sin^2 u} + 1, \quad (2)$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная, и, во вторыхъ, линіи кривизны поверхности Σ соответствуютъ сопряженнымъ кривымъ поверхности S ¹⁾.

Какъ легко видѣть, для дѣйствительности поверхности S постоянная a должна удовлетворять одному изъ двухъ условий: либо $a > 0$ либо $0 > a > -1$.

Первое имѣетъ мѣсто, когда $l^2 > 1$, а второе, когда $l^2 < 1$.

Проекціи перемѣщеній точки $M(o, o, l)$ на оси (T) будутъ:

$$\delta x = (\cosh \omega + l \sinh \omega) d\alpha, \quad \delta y = (\sinh \omega + l \cosh \omega) d\beta, \quad \delta z = dl. \quad (3)$$

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности S , проведенной въ точкѣ M , пусть будетъ

$$Mx + Ny - z + l = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты M и N опредѣляются изъ условия, что перемѣщенія точки M при всевозможныхъ бесконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ (α, β) должны происходить въ плоскости (4), т. е., что для всевозможныхъ значеній $d\alpha, d\beta$ имѣетъ мѣсто соотношение

$$M\delta x + N\delta y - \delta z = 0.$$

Отсюда для M и N находимъ слѣдующія значенія:

$$M = \frac{1}{\cosh \omega + l \sinh \omega} \frac{\partial l}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{1}{\sinh \omega + l \cosh \omega} \frac{\partial l}{\partial \beta}. \quad (5)$$

Такъ какъ $\sin u$ представляетъ ничто иное, какъ \cos угла, составляемаго нормалью къ плоскости (4) съ нормалью къ поверхности Σ , то мы напишемъ условіе (2) въ видѣ:

$$M^2 + N^2 + 1 = \frac{l^2 - 1}{a}. \quad (I)$$

¹⁾ См. гл. III § 3 и § 5.

Условіе это, какъ нетрудно видѣть, представляетъ дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 1-го порядка относительно функціи l .

Перейдемъ къ выводу второго условія.

Черезъ нѣкоторую неподвижную точку P пространства, служащую началомъ подвижной системы координатъ (T_1) , оси которой постоянно параллельны соответственнымъ осямъ координатъ (T) , проведемъ плоскость, параллельную плоскости (4); уравненіе этой плоскости по отношенію къ (T_1) будетъ

$$Mx + Ny - z = 0. \quad (6)$$

Дадимъ параметру α приращеніе $d\alpha$; при этомъ координатныя оси (T_1) примутъ положеніе (T'_1) ; соответственныя точки O и M поверхностей Σ и S перемѣстятся вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и прійдутъ въ положеніе O' и M' .

По отношенію къ осямъ (T'_1) уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку P и параллельной касательной плоскости къ S въ точкѣ M' , будетъ:

$$M'x' + N'y' - z' = 0, \quad (7)$$

гдѣ

$$M' = M + \frac{\partial M}{\partial \alpha} d\alpha, \quad N' = N + \frac{\partial N}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Пересѣченіе плоскостей (6) и (7) дастъ намъ въ предѣлѣ направленіе, сопряженное съ кривой $\beta = \text{const}$ на поверхности S .

Уравненіе плоскости (7) по отношенію къ осямъ (T_1) мы получимъ, полагая ¹⁾

$$x' = x - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta} y + z \sinh \omega \right) d\alpha, \quad y' = y + x \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha, \quad z' = z + x \sinh \omega d\alpha,$$

а слѣдовательно предѣльная прямая пересѣченія плоскостей (6) и (7) будетъ дана уравненіемъ (6) и уравненіемъ

$$x \left[\frac{\partial M}{\partial \alpha} + N \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \sinh \omega \right] + y \left[\frac{\partial N}{\partial \alpha} - M \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right] - z M \sinh \omega = 0.$$

Если теперь положимъ, что на поверхности S кривыя $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ сопряженныя, другими словами, что перемѣщеніе точки M вдоль кривой $\alpha = \text{const}$ параллельно послѣдней прямой, то получимъ наше второе условіе

¹⁾ См. гл. II § 6.

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \alpha} - M \frac{\partial \omega}{\partial \beta}\right) (\sinh \omega + l \cosh \omega) - M \sinh \omega \frac{\partial l}{\partial \beta} = 0,$$

которое въ силу (5) приводится къ виду:

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = M \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + MN \sinh \omega. \quad (\text{II})$$

Это условіе представляетъ относительно функции l дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 2-го порядка, которое мы можемъ написать въ видѣ:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} = (\sinh \omega + l \cosh \omega) \frac{\partial \omega}{\partial \beta} M + (\cosh \omega + l \sinh \omega) \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} N + (\cosh 2\omega + l \sinh 2\omega) MN.$$

Уравненіе (II) мы можемъ представить въ нѣсколько иной формѣ, а именно: дифференцируя выраженіе (5) для M по β и принимая во вниманіе только что полученное нами выраженіе для $\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta}$, мы вмѣсто уравненія (II) получимъ тождественное съ нимъ уравненіе

$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = N \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + MN \cosh \omega. \quad (\text{III})$$

§ 2. Теперь намъ остается показать, что уравненія (I) и (II) или, что то же, уравненія (I) и (III) совмѣстны.

Предположимъ, что послѣднее обстоятельство имѣеть мѣсто; въ этомъ предположеніи продифференцируемъ уравненіе (I) по α и вставимъ въ полученное уравненіе вмѣсто $\frac{\partial N}{\partial \alpha}$ его значеніе (I); оставляя въ сторонѣ случай $M = 0$, найдемъ, что

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = -N \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - N^2 \sinh \omega + \frac{l(\cosh \omega + l \sinh \omega)}{a}. \quad (\text{IV})$$

Наконецъ, дифференцируя уравненіе (I) по β , пользуясь выраженіемъ (III) для $\frac{\partial M}{\partial \beta}$ и исключая случай $N = 0$, получимъ еще слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = -M \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - M^2 \cosh \omega + \frac{l(\sinh \omega + l \cosh \omega)}{a}. \quad (\text{V})$$

Итакъ, если наши уравненія (I), (II) и (III) совмѣстны, то должны быть совмѣстны уравненія (II) — (V), т. е. должны удовлетворяться тождественно соотношенія

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 M}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 N}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Въ справедливости послѣднихъ тождествъ легко убѣдиться простымъ дифференцированиемъ выражений (II)—(V), если при томъ примемъ во вниманіе соотношеніе (I) и вспомнимъ, что ω удовлетворяетъ уравненію (1).

Если теперь перенесемъ всѣ члены въ уравненіи (I) въ лѣвую часть и обозначимъ лѣвую часть полученнаго такимъ образомъ уравненія черезъ L , то въ силу уравненій (II)—(V) найдемъ, что производныя $\frac{\partial L}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial L}{\partial \beta}$ тождественно равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

откуда заключаемъ, что для интеграла уравненій (II)—(V) функція L равна постоянной.

Для совмѣстности же уравненій (II)—(V) эта постоянная, какъ мы видѣли, должна равняться нулю.

Уравненія (II)—(V), къ интегрированію которыхъ сводится рѣшеніе нашей задачи, представляютъ *три* уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го порядка относительно функціи l .

Разсуждая совершенно такъ же, какъ и въ § 2 предыдущей главы, мы прійдемъ къ заключенію, что поверхностей S , удовлетворяющихъ двумъ нашимъ условіямъ, будетъ ∞^3 .

§ 3. Покажемъ теперь, что всѣ эти поверхности S наложимы на одну изъ *основныхъ* поверхностей вращенія съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + \sin^2 u)} + k^2 \cotang^2 u dv^2,$$

гдѣ k постоянная.

Кромѣ того покажемъ, что система нормалей къ Σ представляетъ конгруэнцію, *присоединенную* къ поверхностямъ S .

Если оба наши предположенія справедливы, то на поверхности S кривыя $l = \text{const}$ представляютъ геодезическія параллели.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, составимъ дифференціальныя параметръ $A_1(l)$ относительно линейнаго элемента поверхности S .

Линейный элементъ этотъ, какъ нетрудно видѣть, будетъ

$$ds_0^2 = (\cosh \omega + l \sinh \omega)^2 (M^2 + 1) d\alpha^2 + (\sinh \omega + l \cosh \omega)^2 (N^2 + 1) d\beta^2 + \\ + 2 (\cosh \omega + l \sinh \omega) (\sinh \omega + l \cosh \omega) M N d\alpha d\beta.$$

Составляя выраженіе для $A_1(l)$, найдемъ, что

$$A_1(l) = \frac{M^2 + N^2}{M^2 + N^2 + 1} = \frac{l^2 - 1 - a}{l^2 - 1}.$$

Дифференціалъ длины дуги геодезическихъ линій, ортогональныхъ къ кривымъ $l = \text{const}$, будетъ

$$d\theta = \sqrt{\frac{l^2 - 1}{l^2 - 1 - a}} dl.$$

Вводя переменное u , связанное съ l соотношеніемъ (2), получимъ:

$$d\theta^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + \sin^2 u)}.$$

Линейный элементъ поверхности S можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$ds_0^2 = d\theta^2 + \sigma^2 dv^2.$$

Функцию σ опредѣлимъ, вычисливъ по извѣстной формулѣ Bonnet геодезическую кривизну линій $l = \text{const}$.

Такимъ образомъ найдемъ, что

$$\sigma = k \cotang u,$$

гдѣ k постоянная.

Итакъ линейный элементъ нашей поверхности S можетъ быть приведенъ къ виду:

$$ds_0^2 = \frac{a^2 du^2}{\sin^4 u (a + \sin^2 u)} + k^2 \cotang^2 u dv^2,$$

а слѣдовательно въ зависимости отъ того, будетъ ли a положительнымъ или отрицательнымъ, поверхность S будетъ наложима либо на двуполый гиперболоидъ вращенія, либо на эллипсоидъ вращенія около большой оси.

Далѣе совершенно такъ же, какъ въ § 3 предыдущей главы, убѣдимся, что кривыя $l = \text{const}$ на поверхности S ортогональны къ плоскостямъ, проходящимъ черезъ соответственныя нормали къ поверхностямъ Σ и S .

Такимъ образомъ прійдемъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности Σ съ постоянной положительной Гауссовской кривизной соответствуетъ ∞^3 поверхностей S , наложимыхъ либо на двуполый гиперболоидъ вращенія, либо на эллипсоидъ вращенія около большой оси, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S .

Мы не будемъ останавливаться на исключенныхъ нами въ предыдущемъ изслѣдованіи случаяхъ, когда одна изъ функций M или N равна нулю.

Путемъ тѣхъ же разсужденій, что и въ § 4 предыдущей главы мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности вращения Σ съ постоянной положительной Гауссовской кривизной соответствуетъ ∞^2 поверхностей вращения S , наложимыхъ либо на двуполый гиперболоидъ вращения, либо на эллипсоидъ вращения около большой оси, при чемъ нормали къ Σ представляютъ конгруэнцію, присоединенную къ S .

§ 4. Переходимъ къ разсмотрѣнiю поверхности Σ_1 , точки которой симметричны съ точками данной поверхности Σ относительно соответственныхъ касательныхъ плоскостей къ поверхности S т. е. относительно плоскостей

$$Mx + Ny - z + l = 0.$$

Координаты соответственной точки O_1 поверхности Σ_1 будутъ, очевидно,

$$x = -\frac{2alM}{l^2 - 1}, \quad y = -\frac{2alN}{l^2 - 1}, \quad z = \frac{2al}{l^2 - 1}. \quad (8)$$

Найдемъ выраженiе для линейнаго элемента поверхности Σ_1 .

Проекции перемѣщенiй точки O_1 мы можемъ представить въ слѣдующей формѣ, если только примемъ во вниманiе уравненiя (I) — (V):

$$\delta x = \frac{\cosh \omega (1 + l^2) + 2l \sinh \omega}{l^2 - 1} \left[\frac{2aM^2}{l^2 - 1} - 1 \right] d\alpha + \frac{\sinh \omega (1 + l^2) + 2l \cosh \omega}{l^2 - 1} \frac{2aMN}{l^2 - 1} d\beta,$$

$$\delta y = \frac{\cosh \omega (1 + l^2) + 2l \sinh \omega}{l^2 - 1} \frac{2aMN}{l^2 - 1} d\alpha + \frac{\sinh \omega (1 + l^2) + 2l \cosh \omega}{l^2 - 1} \left[\frac{2aN^2}{l^2 - 1} - 1 \right] d\beta,$$

$$\delta z = -\frac{\cosh \omega (1 + l^2) + 2l \sinh \omega}{l^2 - 1} \frac{2aM}{l^2 - 1} d\alpha - \frac{\sinh \omega (1 + l^2) + 2l \cosh \omega}{l^2 - 1} \frac{2aN}{l^2 - 1} d\beta.$$

Линейный элементъ поверхности Σ_1 будетъ вида:

$$ds_1^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$

гдѣ

$$A = \frac{\cosh \omega (1 + l^2) + 2l \sinh \omega}{l^2 - 1}, \quad B = \frac{\sinh \omega (1 + l^2) + 2l \cosh \omega}{l^2 - 1}.$$

Замѣчая, что функци A , B удовлетворяютъ соотношенiю

$$A^2 - B^2 = 1,$$

мы можемъ найти такую дѣйствительную функцію Ω , чтобы

$$\cosh \Omega = \pm A, \quad \sinh \Omega = \pm B.$$

Линейный элемент поверхности Σ_1 будетъ при этомъ вида

$$ds_1^2 = \cosh^2 \Omega d\alpha^2 + \sinh^2 \Omega d\beta^2,$$

при чемъ Ω опредѣляется изъ выражений

$$\begin{aligned} \cosh \Omega &= \pm \frac{\cosh \omega (l^2 + 1) + 2l \sinh \omega}{l^2 - 1}, \\ \sinh \Omega &= \pm \frac{\sinh \omega (l^2 + 1) + 2l \cosh \omega}{l^2 - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здѣсь очевидно верхніе знаки нужно брать въ случаѣ, когда $l^2 > 1$, а нижніе, когда $l^2 < 1$.

Уравненіе касательной плоскости къ поверхности Σ_1 будетъ, какъ нетрудно видѣть:

$$2aMx + 2aNy + (l^2 - 1 - 2a)z + 2al = 0, \quad (10)$$

а слѣдовательно уравненіе нормали будетъ:

$$\frac{x + \frac{2alM}{l^2 - 1}}{2aM} = \frac{y + \frac{2alN}{l^2 - 1}}{2aN} = \frac{z - \frac{2al}{l^2 - 1}}{l^2 - 1 - 2a}.$$

Найдемъ теперь дифференціальныя уравненія сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1 .

Черезъ неподвижную точку P пространства, служащую началомъ подвижной системы координатъ (T_1) , оси которой постоянно параллельны осямъ (T) , проведемъ плоскость, параллельную касательной плоскости (10) къ поверхности Σ_1 ; уравненіе ея по отношенію къ (T_1) будетъ

$$2aMx + 2aNy + (l^2 - 1 - 2a)z = 0. \quad (11)$$

Дадимъ параметрамъ α, β приращенія $d\alpha, d\beta$; при этомъ оси (T_1) примутъ положеніе (T'_1) , а точка O_1 передвинется по нѣкоторой кривой (c) въ точку O'_1 .

По отношенію къ (T'_1) уравненіе плоскости, параллельной касательной плоскости къ Σ_1 въ точкѣ O'_1 и проходящей черезъ нашу неподвижную точку P , будетъ:

$$2aM'x' + 2aN'y' + (l'^2 - 1 - 2a)z' = 0,$$

гдѣ

$$M' = M + dM, \quad N' = N + dN, \quad l' = l + dl.$$

Если отнесем это уравнение къ прежнимъ осямъ (T_1), то легко найдемъ, что прямая, параллельная направлению, сопряженному съ кривой (c) на поверхности Σ_1 , будетъ дана уравненіемъ (11) и уравненіемъ

$$Hx + Gy + Lz = 0,$$

гдѣ

$$H = 2adM - 2a \left(-\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) N + (l^2 - 1 - 2a) \sinh \omega d\alpha,$$

$$G = 2adN + 2a \left(-\frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\beta \right) M + (l^2 - 1 - 2a) \cosh \omega d\beta,$$

$$L = 2ldl - 2aM \sinh \omega d\alpha - 2aN \cosh \omega d\beta.$$

Если черезъ $\delta\alpha$, $\delta\beta$ обозначимъ приращенія параметровъ, соотвѣтствующія перемѣщенію точки O_1 по поверхности Σ_1 вдоль кривой, сопряженной съ кривой (c), то послѣ несложныхъ вычисленій, пользуясь уравненіями (I)—(V), найдемъ дифференціальное уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1

$$d\alpha\delta\alpha - d\beta\delta\beta = 0.$$

Послѣднее уравненіе представляетъ въ то же время уравненіе сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ .

Итакъ мы видимъ, что всякой системѣ сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ будетъ соотвѣтствовать система сопряженныхъ кривыхъ на поверхности Σ_1 и наоборотъ.

Въ частности легко показать, что линіи кривизны и асимптотическія кривыя поверхности Σ соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны и асимптотическимъ кривымъ поверхности Σ_1 . Доказательство здѣсь то же, что и въ § 5 предыдущей главы.

Намъ остается показать, что поверхность Σ_1 имѣетъ постоянную Гауссовскую кривизну, равную $+1$.

Обратимся опять къ координатамъ (T_1), имѣющимъ начало въ неподвижной точкѣ P .

Изъ уравненія нормали къ поверхности Σ_1 ясно, что координаты сферическаго изображенія соотвѣтственной точки поверхности Σ_1 по отношенію къ (T_1) будутъ:

$$x_1 = \frac{2aM}{l^2 - 1}, \quad y_1 = \frac{2aN}{l^2 - 1}, \quad z_1 = 1 - \frac{2a}{l^2 - 1}.$$

Проекціи перемѣщеній сферическаго изображенія на оси (T_1) или что то же, на оси (T), очевидно, таковы:

$$\delta x_1 = \mp \sinh \Omega \left(\frac{2aM^2}{l^2 - 1} - 1 \right) d\alpha \mp \cosh \Omega \frac{2aMN}{l^2 - 1} d\beta,$$

$$\delta y_1 = \mp \sinh \Omega \frac{2aMN}{l^2 - 1} d\alpha \mp \cosh \Omega \left[\frac{2aN^2}{l^2 - 1} - 1 \right] d\beta,$$

$$\delta z_1 = \pm \sinh \Omega \frac{2aM}{l^2 - 1} d\alpha \pm \cosh \Omega \frac{2aN}{l^2 - 1} d\beta,$$

гдѣ $\sinh \Omega$ и $\cosh \Omega$ имѣютъ значенія (9).

Отсюда, замѣчая, что радиусы кривизны нашей поверхности Σ_1 представляютъ ничто иное, какъ величины отношеній $\frac{\delta x}{\delta \alpha}, \frac{\delta y}{\delta \beta}, \frac{\delta z}{\delta \alpha}$ при перемѣщеніяхъ вдоль кривыхъ $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, найдемъ, что

$$R_1 = -\text{cotangh} \Omega, \quad R_2 = -\text{tangh} \Omega,$$

а потому Гауссовская кривизна поверхности Σ_1 равна $+1$.

Отсюда тоже слѣдуетъ, что функція Ω удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2} + \sinh \Omega \cosh \Omega = 0.$$

§ 5. Соответствіе между поверхностями Σ и Σ_1 , какъ мы только что видѣли, аналогично тому, какое существуетъ между двумя преобразованиями одной и той-же поверхности постоянной положительной кривизны, рассмотрѣнными нами во II главѣ.

Въ виду этого постараемся найти, если можно, такую поверхность Σ_2 съ постоянной Гауссовской кривизной $+1$, преобразованиями которой были бы двѣ наши поверхности Σ и Σ_1 .

Сохраняя всѣ обозначенія § 16 второй главы, при чемъ для краткости будемъ только писать θ вмѣсто θ_1 , мы должны имѣть для координатъ x, y, z соответственной точки поверхности Σ_1 такія выраженія:

$$x = -\frac{2aM}{l^2 - 1} = i[m_1 \cosh \theta + m_2 \cosh \theta \cosh(\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 \sinh \theta \sinh(\Omega - \omega)],$$

$$y = -\frac{2aN}{l^2 - 1} = -[m_1 \sinh \theta + m_2 \sinh \theta \cosh(\Omega - \omega) + \mu_1 m_2 \cosh \theta \sinh(\Omega - \omega)], \quad (12)$$

$$z = \frac{2al}{l^2 - 1} = -m_1 m_2 \sinh(\Omega - \omega).$$

Здѣсь m_1, μ_1 постоянныя, характеризующія преобразование B_{σ_1} , помощью котораго мы переходимъ отъ поверхности Σ къ поверхности Σ_2 съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = \cosh^2 \theta d\alpha^2 + \sinh^2 \theta d\beta^2.$$

Что касается постоянных m_2 , μ_2 , то онѣ характеризуютъ преобразование B_{σ_2} , приводящее насъ отъ поверхности Σ_2 къ поверхности Σ_1 .

Изъ выражений (9) предыдущаго параграфа легко найдемъ, что

$$\sinh(\Omega - \omega) = \pm \frac{2l}{l^2 - 1}, \quad \cosh(\Omega - \omega) = \pm \frac{l^2 + 1}{l^2 - 1}, \quad (13)$$

при чемъ верхніе знаки, очевидно, соотвѣтствуютъ случаю когда $l^2 > 1$ т. е. когда наша постоянная $a > 0$, а нижніе—случаю, когда $l^2 < 1$ т. е. когда a удовлетворяетъ неравенствамъ $0 < a < -1$.

Подставляя эти значенія въ выраженія (12), мы приходимъ къ слѣдующимъ соотношеніямъ:

$$a = \mp m_1 m_2 \quad (14)$$

и

$$-2alM = i \{ [m_1(l^2 - 1) \pm m_2(l^2 + 1)] \cosh\theta \pm 2\mu_1 m_2 l \sinh\theta \},$$

$$2alN = [m_1(l^2 - 1) \pm m_2(l^2 + 1)] \sinh\theta \pm 2\mu_1 m_2 l \cosh\theta.$$

Опредѣленные такимъ образомъ функціи M и N должны удовлетворять уравненіямъ (I)—(V); подставляя эти значенія M и N въ уравненіе (I), получимъ:

$$l^4 [4a + (m_1 \pm m_2)^2] + 2l^2 [(m_2^2 - m_1^2 - 2a(1 + a) - 2\mu_1^2 m_2^2) + (m_1 \mp m_2)^2] = 0.$$

Это соотношеніе должно быть простымъ тождествомъ, а потому постоянныя m_1 , m_2 должны удовлетворять кромѣ соотношенія (14) еще соотношеніямъ

$$4a + (m_1 \pm m_2)^2 = 0, \quad m_1 \mp m_2 = 0, \quad a(1 + a) + \mu_1^2 m_2^2 = 0. \quad (15)$$

Сопоставляя полученные нами условія съ условіемъ (14), найдемъ, что

$$m_1 = \pm m_2 = \sqrt{-a}, \quad \mu_1^2 = \mu_2^2. \quad (16)$$

Принимая во вниманіе эти соотношенія, мы для M и N найдемъ слѣдующія выраженія:

$$m_1 M = i (l \cosh\theta + \mu_1 \sinh\theta), \quad (17)$$

$$m_1 N = - (l \sinh\theta + \mu_1 \cosh\theta)$$

Подставляя эти значенія въ уравненія (II)—(V), увидимъ, что они удовлетворяются тождественно, если только обратимъ вниманіе, что θ удовлетворяетъ системѣ дифференціальныхъ уравненій

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} &= \frac{\mu_1 i \sinh \omega \cosh \theta}{m_1} - \frac{i \cosh \omega \sinh \theta}{m_1}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \beta} - i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} &= -\frac{\mu_1 \cosh \omega \sinh \theta}{m_1} + \frac{\sinh \omega \cosh \theta}{m_1} \end{aligned} \quad (18)$$

Намъ остается показать, что полученная нами функция Ω удовлетворяетъ уравненіямъ, аналогичнымъ (18), въ которыхъ мы замѣнимъ θ , ω , m_1 , μ_1 соответственно черезъ Ω , θ , $m_2 = \pm m_1$, μ_2 .

Комбинируя полученные такимъ образомъ уравненія съ уравненіями (18), мы приведемъ уравненія, которымъ должна удовлетворять функция Ω къ виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial \alpha} &= \left[\frac{\mu_2 i \cosh \Omega}{\pm m_1} + \frac{\mu_1 i \cosh \omega}{m_1} \right] \sinh \theta - \left(\frac{i \sinh \Omega}{\pm m_1} + \frac{i \sinh \omega}{m_1} \right) \cosh \theta, \\ \frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial \beta} &= -\left[\frac{\mu_2 \sinh \Omega}{\pm m_1} + \frac{\mu_1 \sinh \omega}{m_1} \right] \cosh \theta + \left[\frac{\cosh \Omega}{\pm m_1} + \frac{\cosh \omega}{m_1} \right] \sinh \theta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда вмѣсто $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial(\Omega - \omega)}{\partial \beta}$, M , N , $\cosh \Omega$, $\sinh \Omega$ ихъ значенія, полученные въ двухъ послѣднихъ параграфахъ, мы приведемъ наши выраженія къ виду:

$$(\mu_1 + \mu_2) \cosh \Omega \sinh \theta = 0,$$

$$(\mu_1 + \mu_2) \sinh \Omega \cosh \theta = 0.$$

Легко видѣть, что единственнымъ условіемъ тождественнаго обращенія въ нуль этихъ выраженій будетъ:

$$\mu_1 + \mu_2 = 0,$$

такъ какъ въ другихъ случаяхъ мы получили бы для l выраженія, не зависящія отъ постоянной a — результатъ невозможный, если предположимъ, что a произвольно.

Итакъ, резюмируя полученные нами результаты, видимъ, что поверхность Σ_1 можетъ быть получена путемъ послѣдовательнаго примѣненія къ поверхности Σ двухъ преобразованій B_{σ_1} , B_{σ_2} , при чемъ постоянныя m_1 , m_2 , μ_1 , μ_2 этихъ преобразованій связаны между собою соотношеніями:

1) См. гл. II § 15.

при $a > 0$

$$m_1 = m_2 = \sqrt{-a} = ib, \quad \mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{1+b^2}$$

и при $a < 0$

$$m_1 = -m_2 = \sqrt{-a} = b < 1, \quad \mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{1-b^2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ результатами, полученными нами въ концѣ II главы, видимъ, что найденныя теперь нами преобразованія B_{σ_1} , B_{σ_2} принадлежать какъ разъ къ тѣмъ комплекснымъ преобразованіямъ, послѣдовательное примѣненіе которыхъ должно приводить къ дѣйствительной поверхности.

§ 6. Постараемся теперь свести рѣшеніе всѣхъ поставленныхъ нами въ этой главѣ вопросовъ къ интегрированію системы *линейныхъ* уравненій въ частныхъ производныхъ перваго и втораго порядковъ. Для этого преобразуемъ наши уравненія (II) — (V), воспользовавшись тѣмъ свойствомъ конгруэнціи круговъ, ортогональныхъ къ поверхностямъ Σ и Σ_1 и имѣющихъ центры въ соотвѣтственныхъ касательныхъ плоскостяхъ къ поверхности S , что она ортогональна къ безчисленному множеству поверхностей.

Центръ C одного какого-либо изъ этихъ круговъ представляетъ точку пересѣченія трехъ соотвѣтственныхъ плоскостей: касательныхъ плоскостей къ поверхностямъ Σ и S и плоскости, проходящей черезъ нормали къ этимъ двумъ поверхностямъ, т. е. плоскостей, уравненія которыхъ

$$z = 0, \quad Mx + Ny - z + l = 0, \quad Nx - My = 0;$$

Координаты этого центра будутъ слѣдовательно

$$x_0 = -\frac{Ml}{M^2 + N^2} = -\frac{aMl}{l^2 - 1 - a},$$

$$y_0 = -\frac{Nl}{M^2 + N^2} = \frac{-aNl}{l^2 - 1 - a}, \quad z_0 = 0,$$

а радіусъ r_0 соотвѣтственнаго круга

$$r_0^2 = \frac{a^2 l^2 (M^2 + N^2)}{(l^2 - 1 - a)^2} = \frac{al^2}{l^2 - 1 - a}. \quad (19)$$

Обозначимъ начало нашихъ координатъ черезъ O ; черезъ γ обозначимъ уголъ, составляемый отрѣзкомъ OC съ осью x -ою, тогда

$$\cos \gamma = -\frac{\sqrt{a} M}{\sqrt{l^2 - 1 - a}}, \quad \sin \gamma = -\frac{\sqrt{a} N}{\sqrt{l^2 - 1 - a}}. \quad (20)$$

Если через t обозначимъ уголъ, составляемый какимъ-либо радиусомъ круга съ отрѣзкомъ CO , тогда координаты соответственной точки разсматриваемаго круга будутъ

$$x = r_0 \cos \gamma (1 - \cos t), \quad y = r_0 \sin \gamma (1 - \cos t), \quad z = r_0 \sin t. \quad (21)$$

Если разсматриваемая точка описываетъ поверхность ортогональную къ кругамъ то ея перемѣщенія удовлетворяютъ при всевозможныхъ значеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$ соотношенію

$$\sin t \cos \gamma dx + \sin t \sin \gamma dy + \cos t dz = 0, \quad (22)$$

гдѣ δx , δy , δz представляютъ проэкции перемѣщеній нашей точки на соответственныя оси (T).

Если подставимъ вмѣсто этихъ проэцій ихъ значенія, то приведемъ выраженіе (22) къ виду

$$A d\alpha + B d\beta + T dt = 0, \quad (23)$$

гдѣ

$$A = r_0 \sinh \omega \cos \gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \alpha} + \cosh \omega \cos \gamma \right) \sin t - r_0 \sinh \omega \cos \gamma \cos t,$$

$$B = r_0 \cosh \omega \sin \gamma + \left(\frac{\partial r_0}{\partial \beta} + \sinh \omega \sin \gamma \right) \sin t - r_0 \cosh \omega \sin \gamma \cos t,$$

$$T = r_0.$$

Чтобы условіе (23) имѣло мѣсто при всевозможныхъ значеніяхъ $d\alpha$, $d\beta$, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось тождественно соотношеніе

$$A \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + B \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial t} \right) + T \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) = 0,$$

которое имѣетъ видъ

$$P \sin t + Q \cos t + R = 0,$$

гдѣ

$$P = r_0^2 \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\cosh \omega \cos \gamma}{r_0} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sinh \omega \sin \gamma}{r_0} \right],$$

$$Q = -R = r_0 \left[r_0^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\cosh \omega \sin \gamma}{r_0} - r_0^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\sinh \omega \cos \gamma}{r_0} - \sin \gamma \cos \gamma \right].$$

Такъ какъ наши круги ортогональны къ безчисленному множеству поверхностей, то слѣдовательно

$$P = 0, \quad Q = -R = 0.$$

Подставляя въ послѣднія уравненія вмѣсто γ и r_0 ихъ значенія (20) и (19), найдемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\cosh \omega M}{l} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sinh \omega N}{l}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\cosh \omega N}{l} - \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\sinh \omega M}{l} + \frac{MN}{l^2} = 0. \quad (24)$$

Въ справедливости послѣднихъ уравненій легко убѣдиться слѣдующимъ образомъ.

Комбинируя уравненія (II) и (III), получимъ:

$$\begin{aligned} \cosh \omega \frac{\partial M}{\partial \beta} + M \sinh \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - MN \cosh^2 \omega &= \\ = \sinh \omega \frac{\partial N}{\partial \alpha} + N \cosh \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - MN \sinh^2 \omega; \end{aligned}$$

если теперь раздѣлимъ обѣ части на l и прибавимъ къ нимъ по $-\frac{MN \sinh \omega \cosh \omega}{l^2}$, то легко придемъ къ первому изъ уравненій (24).

Для вывода второго изъ этихъ уравненій поступимъ такимъ образомъ: умножимъ уравненіе (III) на $\frac{\sinh \omega}{l}$ и изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія вычтемъ уравненіе (II), умноженное на $\frac{\cosh \omega}{l}$, тогда найдемъ

$$\frac{\sinh \omega}{l} \frac{\partial M}{\partial \beta} + M \frac{\cosh \omega}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\cosh \omega}{l} \frac{\partial N}{\partial \alpha} - N \frac{\sinh \omega}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = 0;$$

сложивъ теперь это уравненіе съ тождествомъ

$$-M \frac{\sinh \omega}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \beta} + N \frac{\cosh \omega}{l^2} \frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{MN}{l^2},$$

мы и получимъ второе изъ уравненій (24).

Первое изъ уравненій (24) показываетъ, что функціи $M \frac{\cosh \omega}{l}$ и $N \frac{\sinh \omega}{l}$ представляютъ частныя производныя одной и той же функціи т. е.

$$M \frac{\cosh \omega}{l} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad N \frac{\sinh \omega}{l} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta};$$

если теперь введемъ еще функцію ψ

$$\psi = \frac{\varphi}{l}, \quad (25)$$

то для M и N найдемъ слѣдующія выраженія

$$M = \frac{1}{\psi \cosh \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad N = \frac{1}{\psi \sinh \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \quad (26)$$

§ 7. Пользуясь уравненіями (I)—(V), легко найти тѣ дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ 2-го и 1-го порядка, которымъ удовлетворяютъ введенныя нами функціи φ и ψ .

Въ самомъ дѣлѣ, если подставимъ въ уравненіе (I) вмѣсто M и N ихъ значенія (26), то приведемъ его къ виду

$$L = \frac{1}{\cosh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1+a}{a} \psi^2 = 0, \quad (VI)$$

здѣсь черезъ L мы обозначаемъ лѣвую часть нашего уравненія.

Дифференцируя выраженіе (25) и принимая во вниманіе выраженія (26), легко найдемъ, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = -\operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \quad (VII)$$

Если теперь продифференцируемъ выраженія (26) по α и β , подставимъ въ уравненія (II)—(V) полученныя значенія функцій l , M , N и ихъ производныхъ, и кромѣ того примемъ во вниманіе уравненія (VI) и (VII), то найдемъ искомыя уравненія

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\cosh^2 \omega}{a} \varphi + \frac{a+1}{a} \psi \sinh \omega \cosh \omega,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = \operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (VIII)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = -\operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\sinh^2 \omega}{a} \varphi + \frac{a+1}{a} \psi \sinh \omega \cosh \omega.$$

Если теперь составимъ различныя выраженія для $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta^2}$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta \partial \alpha^2}$, то увидимъ, что уравненія наши (VII) и VIII) будутъ совмѣстны въ силу *одного только* условія

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0.$$

Дифференцируя по α и β функцию L , представляющую лѣвую часть уравненія (VI), мы найдемъ, что въ силу уравненій (VII) и (VIII) она тождественно равна нулю, а слѣдовательно

$$L = g = \text{const.}$$

Такимъ образомъ уравненіе

$$L = \frac{1}{\cosh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 - \frac{\varphi^2}{a} + \frac{1+a}{a} \psi^2 = g = \text{const.} \quad (\text{IX})$$

представляетъ *слѣдствіе* уравненій (VII) и (VIII).

Постоянная g опредѣляется начальными значеніями для $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ функций φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$, ψ ; эти же начальныя значенія опредѣляютъ, вообще говоря, голоморфныя въ нѣкоторой области интегралы уравненій (VII) и (VIII).

Какъ въ § 10 пятой главы мы убѣдимся, что въ случаѣ, разсмотрѣнномъ нами въ предыдущихъ параграфахъ, а именно, когда $g = 0$, выраженіе для функции l

$$l = \frac{\varphi}{\psi}$$

будетъ зависѣть отъ *двухъ* произвольныхъ постоянныхъ.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ изъ соотношеній (26) находимъ, что

$$M \frac{1}{\sinh \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - N \frac{1}{\cosh \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0,$$

откуда заключаемъ, что кривыя $\varphi = \text{const}$, гдѣ φ интеграль уравненій (VII) и (VIII), удовлетворяющій условію $L = 0$, проведенныя на поверхности Σ , ортогональны къ плоскостямъ

$$Nx - My = 0,$$

проходящимъ черезъ соотвѣтственныя нормали къ поверхностямъ Σ и S .

Какъ мы знаемъ изъ теоремы Bianchi ¹⁾, обертка послѣднихъ плоскостей должна быть наложима на поверхность вращенія съ линейнымъ элементомъ

$$ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[a - \frac{a}{1+a} e^{2\tau} \right] dv^2,$$

гдѣ a постоянная, а τ дается выраженіемъ

$$\tau = av - (a+1)\theta.$$

¹⁾ См. гл. IV § 3.

Вмѣсто того, чтобы доказывать послѣднее утверждение, мы найдемъ линейный элементъ обертки плоскостей, ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ . и проходящихъ черезъ нормали къ Σ , при чемъ за φ примемъ интеграль уравненій (VII) и (VIII), удовлетворяющій соотношенію (VI), гдѣ g какая угодно постоянная.

§ 8. Уравненіе разсматриваемой плоскости будетъ очевидно,

$$\cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0, \quad (27)$$

а потому координаты любой точки этой плоскости будутъ

$$x = \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Значенія параметра t и координаты z для соответствующей точки искомой обертки найдемъ изъ условія, что перемѣщенія этой точки при всевозможныхъ безконечно-малыхъ измѣненіяхъ параметровъ α , β будутъ происходить въ плоскости (27).

Проекція перемѣщеній нашей точки на оси (T) будутъ:

$$\delta x = \cosh\omega d\alpha + d\left(t \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + z \sinh\omega d\alpha - \left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$\delta y = \sinh\omega d\beta + d\left(t \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \left(-\frac{\partial\omega}{\partial\beta} d\alpha + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} d\beta\right) t \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + z \cosh\omega d\beta,$$

$$\delta z = dz - t \cosh^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\beta - t \sinh^2\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\alpha,$$

а потому уравненія, служащія для опредѣленія t и z , примутъ видъ:

$$\sinh\omega + \frac{t}{a} \sinh\omega \cosh\omega [\varphi \sinh\omega + (a+1)\psi \cosh\omega] + z \cosh\omega = 0,$$

$$\cosh\omega + \frac{t}{a} \sinh\omega \cosh\omega [\varphi \cosh\omega + (a+1)\psi \sinh\omega] + z \sinh\omega = 0.$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ, что

$$t = -\frac{a}{\varphi \sinh\omega \cosh\omega}, \quad z = \frac{(a+1)\psi}{\varphi},$$

а слѣдовательно координаты искомой точки будутъ:

$$x = -\frac{a}{\varphi \cosh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = -\frac{a}{\varphi \sinh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = \frac{(a+1)\psi}{\varphi};$$

проекціи ея перемѣщеній на основаніи уравненій (VII) и V(III) примутъ слѣдующій видъ:

$$\delta x = \frac{a}{\varphi^2 \cosh \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\varphi, \quad \delta y = \frac{a}{\varphi^2 \sinh \omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} d\varphi, \quad \delta z = -\frac{\psi}{\varphi} \left[\frac{(a+1) d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} \right].$$

Если примемъ теперь во вниманіе соотношеніе (IX), то для линейнаго элемента разсматриваемой поверхности найдемъ слѣдующее выраженіе:

$$ds^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = a^2 \left[\frac{\varphi^2}{a} - \frac{1+a}{a} \psi^2 + g \right] \frac{d\varphi^2}{\varphi^4} + \frac{\psi^2}{\varphi^2} \left[\frac{a+1}{\varphi} d\varphi - \frac{d\psi}{\psi} \right]^2.$$

Положимъ здѣсь

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = dv, \quad \frac{(1+a)d\varphi}{\varphi} - \frac{d\psi}{\psi} = (1+a)d\theta,$$

или, что то же,

$$\varphi = e^v, \quad \psi = \frac{e^{(1+a)v - (1+a)\theta}}{1+a},$$

тогда нашъ линейный элементъ приведемъ къ виду

$$ds^2 = e^{2\tau} d\theta^2 + \left[ga^2 e^{-2v} + a - \frac{a}{1+a} e^{2\tau} \right] dv^2, \quad (28)$$

гдѣ

$$\tau = av - (a+1)\theta.$$

Такъ же, какъ и въ § 9 предыдущей главы, убѣдимся, что найденная нами поверхность S_0 находится съ поверхностью Σ въ такомъ же отношеніи, въ какомъ находятся между собою поверхности S_0 и Σ во второй теоремѣ Bianchi.

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Всякой поверхности Σ съ постоянной положительной кривизной соответствуетъ ∞^5 поверхностей съ линейнымъ элементомъ (28). Опредѣленіе ихъ зависитъ отъ интегрированія системы дифференціальныхъ уравненій 1-го и 2-го порядка (VII) и (VIII). Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ .

§ 9. Посмотримъ теперь, какимъ образомъ находятся поверхности съ линейнымъ элементомъ вида

$$ds^2 = e^{-2v} du^2 + [2(v - u)e^{-2v} + be^{-2v} - m] dv^2, \quad (29)$$

которыя, какъ мы видѣли во второй теоремѣ Bianchi, связаны определеннымъ образомъ съ поверхностями постоянной кривизны.

Для этого опять воспользуемся приемомъ Bianchi для преобразования уравненій (VII), (VIII) и (IX), а именно: вставимъ въ эти уравненія вмѣсто ψ функцию $\psi + c$, гдѣ c постоянная.

Въ полученныхъ такимъ образомъ уравненіяхъ положимъ

$$\frac{(1 + a)c}{a} = n$$

и затѣмъ положимъ

$$\frac{1}{a} + 1 = 0,$$

при чемъ n будемъ считать независимой отъ a величиной.

Такимъ образомъ придемъ къ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \varphi \cosh^2 \omega + n \sinh \omega \cosh \omega,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = \operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad (X)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = -\operatorname{tanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \operatorname{cotanh} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \varphi \sinh^2 \omega + n \sinh \omega \cosh \omega.$$

Уравненія (VII) останутся безъ переменны, что же касается уравненія (IX), то оно приметъ видъ:

$$L = \frac{1}{\cosh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 \omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 + \varphi^2 + 2m\psi = g = \text{const.} \quad (XI)$$

Простымъ дифференцированиемъ убѣждаемся, что уравненія (VII), (X) и (XI) совместны въ силу единственнаго условія

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \sinh \omega \cosh \omega = 0.$$

Какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, найдемъ обертку плоскостей, ортогональныхъ къ соответственнымъ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведен-

нымъ на поверхности Σ , и проходящихъ черезъ нормали къ Σ т. е. плоскостей

$$\cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} x - \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} y = 0. \quad (30)$$

Координаты точекъ, лежащихъ въ этой плоскости, будутъ:

$$x = \sinh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} t, \quad y = \cosh\omega \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} t, \quad z,$$

гдѣ t произвольный параметръ.

Пользуясь тѣми же разсужденіями, что и раньше, мы для опредѣленія значений t и z , соответствующихъ точкѣ искомой обертки, найдемъ уравненія:

$$\cosh\omega + t \sinh\omega \cosh\omega (n \sinh\omega - \varphi \cosh\omega) + z \sinh\omega = 0,$$

$$\sinh\omega + t \sinh\omega \cosh\omega (n \cosh\omega - \varphi \sinh\omega) + z \cosh\omega = 0;$$

отсюда легко получимъ, что

$$t = \frac{1}{\varphi \sinh\omega \cosh\omega}, \quad z = -\frac{n}{\varphi},$$

а потому координаты соответственной точки нашей обертки будутъ

$$x = \frac{1}{\varphi \cosh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \quad y = \frac{1}{\varphi \sinh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \quad z = -\frac{n}{\varphi}.$$

Проекціи ея перемѣщеній на оси (T), очевидно, таковы:

$$\delta x = -\frac{1}{\varphi^2 \cosh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} d\varphi, \quad \delta y = -\frac{1}{\varphi^2 \sinh\omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} d\varphi, \quad \delta z = \frac{1}{\varphi} \left[d\psi + \frac{n d\varphi}{\varphi} \right],$$

а потому на основаніи (XI) линейный элементъ разсматриваемой поверхности будетъ

$$ds^2 = \frac{1}{\varphi^2} \left[d\psi + \frac{n d\varphi}{\varphi} \right]^2 + [g - \varphi^2 - 2n\varphi] \frac{d\varphi^2}{\varphi^4}.$$

Если теперь положимъ

$$\frac{n d\varphi}{\varphi} + d\psi = n d\theta, \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = dv,$$

а слѣдовательно

$$\psi = -n(v - \theta) \quad \varphi = ne^v,$$

то приведемъ нашъ линейный элементъ къ виду

$$ds^2 = e^{-2v} d\theta^2 + \left[\frac{g}{n^2} e^{-2v} - 1 + 2(v - \theta) e^{-2v} \right] dv^2, \quad (31)$$

откуда заключаемъ, что поверхность наша имѣетъ тотъ же линейный элементъ, что и поверхность S_0 , рассматриваемая въ теоремѣ Bianchi.

Такимъ образомъ такъ же, какъ и въ концѣ предыдущей главы, мы приходимъ къ теоремѣ, обратной второй теоремѣ Bianchi, а именно:

Всякой поверхности Σ съ постоянной положительной кривизной соответствуетъ ∞^5 поверхностей S_0 съ линейнымъ элементомъ (31). Определение ихъ зависитъ отъ интегрированія системы линейныхъ дифференциальныхъ уравненій 1-го и 2-го порядка (IX) и (X). Поверхности S_0 представляютъ обертки плоскостей, проходящихъ черезъ нормали къ Σ и ортогональныхъ къ кривымъ $\varphi = \text{const}$, проведеннымъ на поверхности Σ .

Мы не будемъ останавливаться на случаѣ, когда одна изъ производныхъ $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ обратится въ нуль: результаты изслѣдованія этого случая тождественны съ полученными нами въ концѣ предыдущей главы.

Замѣченныя опечатки.

Стр.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
49	3 снизу	snivis	suisvis
49	2 „	daus	dans
51	15 сверху	d'optiques géométriques	d'optique géométrique
51	30 „	Lipzig	Leipzig
55	5 снизу	1913	19 Bd.
55	13 „	найта	найти
63	3 „	ихъ точекъ	соотвѣтственной точки ребра
63	9 „	$-(qdu + p_1 dv) \cos \alpha$	$-(qdu + q_1 dv) \cos \alpha$
66	15 сверху	$-q_1 \eta$	$-q \eta_1$
71	10 снизу	$rp_1 \cos \alpha - q \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0$	$rp_1 \cos \alpha \sin \alpha - q \frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0$
73	13 сверху	гдѣ φ и ω	гдѣ φ , а слѣдова- тельно и ω ,
86	6 „	q	q_1
93	9 „	$(pdu + pdv_1) z$	$(pdu + p_1 dv) z$
103	22 „	получаемые	получаемыя
105	1 снизу	$-i \frac{1 + \mu}{\partial v}$	$-i \frac{1 + \mu}{m}$
112	12 „	дѣйствительныя	дѣйствительная
115	4 сверху	$-\eta_1 q$	$+\eta_1 q$
115	9 снизу	$\xi r_1 \sin \alpha$	$\xi r_1 \sin \alpha \cos \alpha$
116	4 сверху	$\xi r_1 \sin \alpha$	$\xi r_1 \sin \alpha \cos \alpha$
119	20 „	$\pm y \sin \alpha$	$\pm z \sin \alpha$
121	4 снизу	$\eta_1 = k \cot \alpha$	$\eta_1 = k \cot \alpha$ (28)
124	16 сверху	$d = \pm (l \pm n)$	$d_1 = \pm (n - l) \quad d_2 = n + l$
126	7 „	$-n^2$	$-n^2 r_0^2$
129	6 снизу	$x_0 = \frac{\cos u}{l}$	$x_0 = \frac{l}{\cos u}$
134	14 сверху	$\frac{\xi q_1^2}{p_1}$	$\frac{\xi q_1^2}{\eta_1 p_1}$

Стр.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
136	13 снизу	$2c =$	$2ac =$
138	1 "	$z = z_1 - \alpha'' \frac{z}{z'}$	$z = z_1 - \alpha'' \frac{U}{U'}$
142	11 сверху	уравненію	уравненію
144	5 "	— mn	— $2mn$
146	1 "	линейнаго элемента (36)	линейнаго элемента (33) или (36)
155	13 "	$\delta y = \frac{2l + \omega^2 \frac{\partial l}{\partial \alpha}}{2\omega \frac{\partial l}{\partial \beta}} d\beta$	$\delta y = \frac{2l + \omega^2 \frac{\partial l}{\partial \alpha}}{2\omega \frac{\partial l}{\partial \beta}} d\alpha$
155	15 "	$\delta y = -\frac{2l + \omega^2 M}{2\omega N}$	$\delta y = -\frac{2l + \omega^2 M}{2\omega N} d\alpha$
155	3 и 2 снизу	задача Guichard'a очевидно не допускаетъ	наши уравненія очевидно не допускаютъ
159	9 сверху	вмѣсто $d\alpha$, $d\beta$	нужно $Md\alpha$, $Nd\beta$
176	10 снизу	$a^2[2(\theta + v) + ge^{2v}]$	$a^2[2(\theta + v) + ge^{2v}] dv^2$
194	7 снизу	$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \omega N}{l} \right)$	$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \omega N}{l} \right)$
195	4 сверху	$\frac{\cos \omega}{l} M$	$\frac{\cos \omega}{l} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} M$
198	8 "	поверхности	плоскости
213	15 "	$d\alpha d\alpha - d\beta d\beta = 0$	$d\alpha d\alpha + d\beta d\beta = 0$