Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet.

Par A. M. Liapounoff.

La méthode proposée par M. Neumann pour le problème de Dirichlet a été dans ces derniers temps l'objet de nombreuses recherches, parmi lesquelles il faut surtout signaler celles de M. Zaremba, de M. Stekloff et de M. Korn. Ces recherches, provoquées par celles de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XX), ont amené à une large extension de la méthode en ce qui concerne la surface qui sert de frontière au domaine considéré. Mais il reste encore à faire une extension en ce qui concerne les valeurs que doit prendre sur la surface la fonction harmonique cherchée, car à l'égard de ces valeurs on a dû faire une certaine restriction.

Il est vrai que M. Korn cherche à se débarrasser de cette restriction *). Mais les théorèmes dont il se sert à cet effet ne me semblent pas, sinon exacts, au moins assez clairs pour ne pas soulever des doutes.

Dans ce qui suit, je me propose de montrer, comment l'extension dont il s'agit se déduit de quelques résultats que j'ai obtenus dans le Mémoire *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques*, t. IV, 1898).

Au lieu de la méthode elle-même, je considérerai le principe qui lui sert de base et que j'ai appelé dans le Mémoire cité *principe de Neumann*. C'est ce principe qu'il faut établir en toute généralité, car la méthode de Neumann en découle immédiatement sans aucune démonstration.

1. Commençons par rappeler, en quoi consiste le principe de Neumann.

Soient: E une région de l'espace, ne s'étendant pas à l'infini, et S la surface qui lui sert de frontière.

*) *Abhandlungen zur Potentialtheorie.* Berlin, 1901. (*Voir* Abhandlung 5, p. 64 et Abh. 1, p. 5—11, 19—23).

Nous supposerons que cette surface consiste d'une seule nappe fermée ayant une aire finie et admettant, en tout point, un plan tangent déterminé.

Soient: p et p' deux points de cette surface, r leur distance mutuelle et φ' l'angle que fait la normale *intérieure* (c'est-à-dire, dirigée vers E) au point p' avec la direction $p'p$.

En entendant par ds' un élément superficiel contenant le point p' et par f' la valeur en p' d'une fonction f définie pour les points de S, nous allons considérer des intégrales de la forme

$$\int \frac{f' \cos\varphi' \, ds'}{r^2}, \tag{1}$$

l'intégration étant étendue à toute la surface considérée.

Cette intégrale est ce qu'on appelle la *valeur directe* en p du potentiel de la double couche donné par la formule

$$\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2}$$

où R désigne la distance du point p' à un point P qui ne se trouve pas sur S et Φ' l'angle de la normale en p' avec la direction $p'P$.

L'intégrale (1), qui dépend de la position du point p, définira une nouvelle fonction sur S. Si la fonction f est continue, cette fonction le sera aussi, et la même chose aura lieu dans un cas plus général, celui où la fonction f est seulement limitée et telle que l'intégrale

$$\int f \, ds \; ^{*)}$$

étendue à S ait un sens comme limite de somme, conformément à la définition ordinaire. Si f est dans ce cas, nous dirons que c'est une fonction intégrable sur S.

Cela posé, soit v_0 une fonction donnée quelconque intégrable sur S. Cette fonction étant substituée à la place de f, l'intégrale (1) divisée par 2π représentera une fonction que nous désignerons par v_1. En appliquant le même procédé à v_1, nous en déduirons une nouvelle fonction v_2. De même, en partant de v_2, nous obtiendrons v_3, et ainsi de suite.

De cette manière nous parviendrons à une suite indéfinie de fonctions

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots, \tag{2}$$

---

*) Dans cette formule, ainsi qu'en d'autres analogues, nous entendons par ds un élément superficiel contenant le point p, auquel se rapporte la valeur de la fonction à intégrer.

liées entre elles par les équations de la forme

$$v_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v'_{m-1}\cos\varphi' ds'}{r^2},$$

où v'_{m-1} désigne la valeur au point p' de la fonction v_{m-1}. C'est à cette suite que se rapporte le principe en question que l'on peut énoncer ainsi:

Quelle que soit la fonction v_0, on a, en tout point de la surface,

$$|v_{m+1} - v_m| < L\lambda^m, \tag{3}$$

L, λ étant certaines constantes positives indépendantes du nombre m, dont la seconde, λ, est moindre que 1 et ne dépend point du choix de v_0.

L'inégalité (3) étant établie, il en résultera que v_m, m croissant indéfiniment, tendra vers une certaine limite, et il est facile d'établir, dans des suppositions bien générales à l'égard de la surface, que cette limite ne peut être qu'une constante.

Soit C cette constante.

Nous aurons, quel que soit m,

$$C = v_m + (v_{m+1} - v_m) + (v_{m+2} - v_{m+1}) + \cdots$$

et par suite, en vertu de (3),

$$|v_m - C| < L\lambda^m(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots) = \frac{L}{1-\lambda}\lambda^m.$$

Donc, L_1 étant une certaine constante positive, il viendra

$$|v_m - C| < L_1\lambda^m. \tag{4}$$

C'est sous cette forme que j'ai employé le principe de Neumann dans le Mémoire cité plus haut. Maintenant je préfère de le considérer sous la forme (3).

2. Récemment M. Stekloff est parvenu à établir le principe de Neumann dans des suppositions bien générales à l'égard de la surface, mais *sous la restriction que la fonction v_0 est susceptible de se présenter sous forme du potentiel d'une simple couche, répandue sur la surface considérée d'une manière continue.*

C'est précisément ce cas que j'ai considéré dans mon Mémoire, où le principe de Neumann m'a servi de point de départ, mais où *je ne l'ai employé que dans la supposition ci-dessus à l'égard de* v_0 *).

A présent, dans les mêmes suppositions à l'égard de la surface que celles admises par M. Stekloff, je me propose de montrer que, *si le principe de Neumann est établi sous la restriction signalée à l'égard de* v_0, *il est exact en toute généralité.*

Quant aux suppositions que je ferai, l'une d'entre elles a été déjà énoncée plus haut et les autres se réduiront à celles-ci:

I. On peut assigner une longueur D, telle que, un point quelconque p de la surface S étant pris pour centre de la sphère de rayon D, une parallèle à la normale à S en p ne puisse rencontrer S, à l'intérieur de la sphère, qu'en un seul point;

II. ϑ étant l'angle compris entre 0 et π que font entre elles les normales intérieures en des points p et p' de S et r la distance pp', on peut assigner au rapport $\frac{\vartheta}{r}$ une limite supérieure indépendante de la position des points p et p'.

Dans ces suppositions, je pourrai me servir des résultats obtenus dans mon Mémoire, où certaines propositions ont été établies même dans des suppositions un peu plus générales.

3. Conjointement avec le principe de Neumann, nous allons considérer un autre principe analogue, celui qui sert de base à la méthode connue de Robin relative au problème électrostatique.

En retenant les notations du n° 1, désignons par φ l'angle que fait la normale intérieure au point p avec la direction pp', et partant d'une

---

*) Quelques passages des Travaux contenant des renvois à mon Mémoire me donnent lieu à soupçonner que je n'ai pas été bien compris. On dit que, partant du principe de Neumann dans le cas des surfaces non-convexes, j'ai cru possible de me fonder sur les recherches de M. Poincaré. Mais moi, je ne l'ai dit nulle part et je ne vois pas, d'où pouvait-on tirer cette conclusion. Si j'ai cité le Mémoire de M. Poincaré, ce fut bien naturel, car les nouvelles ressources que donnait cet important Mémoire ne laissaient aucun doute sur la possibilité d'une démonstration générale du principe en question. Mais, pour obtenir cette démonstration, il fallait encore chercher à modifier l'analyse de M. Poincaré de manière à la rendre indépendante de certains postulats qui y étaient admis et dont quelques-uns coïncidaient avec les propositions que je voulais établir. Je ne pouvais donc pas me fonder sur les recherches de M. Poincaré, et d'ailleurs je n'en avais pas besoin, car *tout ce que je voulais faire se réduisait à signaler certaines conclusions, auxquelles on pourrait parvenir, si le principe de Neumann était déjà établi pour la surface considérée, soit qu'elle soit convexe ou non.*

fonction quelconque k_0, intégrable sur S, formons une suite indéfinie de fonctions

$$k_0, \quad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots,$$

se déterminant successivement par la formule

$$(5) \qquad k_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k'_{m-1}\cos\varphi\, ds'}{r^2},$$

où k'_{m-1} désigne la valeur de k_{m-1} au point p' et l'intégration s'étend à toute la surface considérée.

Cela posé, le nouveau principe, que nous appellerons *principe de Robin*, s'énoncera ainsi:

Quelle que soit la fonction k_0, on a, en tout point de la surface,

$$(6) \qquad |k_{m+1} - k_m| < M\mu^m,$$

M, μ étant certaines constantes positives indépendantes du nombre m, dont la seconde, μ, est moindre que 1 et ne dépend point du choix de k_0.

Si l'on parvient à établir l'inégalité (6), on pourra conclure que la fonction k_m tendra, m croissant indéfiniment, vers une certaine limite, et cela uniformément pour tous les points de la surface.

Soit k cette limite, qui représentera une certaine fonction continue sur S et vérifiant l'équation

$$(7) \qquad k = \frac{1}{2\pi}\int \frac{k'\cos\varphi\, ds'}{r^2}$$

où k' est la valeur de k en p' *).

Nous aurons

$$k = k_m + (k_{m+1} - k_m) + (k_{m+2} - k_{m+1}) + \ldots,$$

d'où, en vertu de (6),

$$|k_m - k| < M\mu^m(1 + \mu + \mu^2 + \ldots) = \frac{M}{1-\mu}\mu^m,$$

et par suite

$$(8) \qquad |k_m - k| < M_1\mu^m,$$

M_1 étant une certaine constante positive.

---

*) En général, étant considérée une fonction quelconque f d'un seul point de S, sa valeur en p' sera désignée par f'.

C'est une nouvelle forme du principe de Robin.

On aperçoit une analogie complète entre ce principe et le principe de Neumann. Seulement la limite k de k_m, en général, n'est pas une constante: c'est une fonction qui représente la densité d'une couche électrique en *distribution naturelle* à la surface considérée.

Il est facile de s'assurer que l'on a, quel que soit m,

$$\int k_m ds = \int k_0 ds,$$

les intégrations s'étendant à toute la surface.

Par suite, si l'on a

$$\int k_0 \, ds = 0,$$

il viendra

$$\int k \, ds = 0.$$

Or, on sait que dans ce cas l'équation (7) ne peut être vérifiée, qu'en supposant $k = 0$ pour tous les points de la surface.

Donc, si l'on a

$$\int k_0 ds = 0,$$

l'inégalité (8) prendra la forme

$$|k_m| < M_1 \mu^m,$$

ce qui fait voir que la série

$$k_0 \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3 \pm \ldots$$

sera convergente, et cela absolument et uniformément pour tous les points de la surface.

4. Supposons que le principe de Neumann soit déjà établi dans le cas, où l'on a

$$v_0 = \int \frac{k'_0 \, ds'}{r}, \tag{9}$$

k_0 étant une fonction quelconque *continue* sur la surface.

Alors, comme il a été montré dans le Mémoire cité plusieurs fois, on pourra établir le principe de Robin en toute généralité.

Nous l'avions montré en partant de l'inégalité (4).

Signalons sommairement, comment pourrait-on le faire, si l'on ne voulait se servir que de l'inégalité (3).

Avant tout on remarquera que la formule (9) entraîne, pour toutes les valeurs de m, des formules de la même forme

$$v_m = \int \frac{k'_m \, ds'}{r},$$

où les k_m vérifient les équations de la forme (5) *).

Maintenant posons

$$k_{m+1} - k_m = h_m, \quad v_{m+1} - v_m = u_m. \quad {\scriptstyle (m=0,1,2,\ldots)}$$

Alors il viendra: d'une part

$$u_m = \int \frac{h'_m \, ds'}{r}, \quad h_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{h'_{m-1} \cos\varphi \, ds'}{r^2}$$

et d'autre part

$$u_m = \frac{1}{2\pi} \int \frac{u'_{m-1} \cos\varphi' \, ds'}{r^2}.$$

Par suite, la condition (3) prenant la forme

$$|u_m| < L\lambda^m,$$

qui est un cas particulier de (4), les raisonnements développés dans notre Mémoire nous conduiront à une inégalité de la forme

$$|h_{m+1} - h_m| < M' \mu^m,$$

analogue à celle (6).

Or, on a

$$\int h_0 \, ds = \int k_1 \, ds - \int k_0 \, ds = 0.$$

---

*) Cette conclusion résulte immédiatement de la considération de la formule connue de Green qui sert à exprimer la fonction harmonique au moyen des valeurs sur la surface de la fonction elle-même et de sa dérivée normale. Dans mon Mémoire, où je voulais établir le principe de Robin dans des suppositions, à l'égard de la surface, un peu plus générales qu'ici, j'ai dû, pour pouvoir appliquer la formule de Green, introduire une certaine restriction à l'égard de la fonction k_0. Ici cette restriction est inutile, puisque, dans les conditions actuelles, on peut établir ladite formule par la considération des surfaces parallèles, ainsi que je l'ai signalé dans mon Mémoire à une autre occasion.

Donc, en vertu de ce qui à été montré au numéro précédent, nous aurons aussi une inégalité de la forme

$$|h_m| < M\mu^m,$$

qui n'est autre chose que l'inégalité (6).

Nous avons imposé à la fonction k_0 la condition d'être continue. Mais il est facile de s'en débarrasser.

En effet, quelle que soit la fonction k_0 que nous supposons toujours intégrable sur S, la fonction k_1 sera continue et, par suite, pourra jouer le rôle de k_0 dans la démonstration.

De cette manière nous parvenons à la conclusion que *le principe de Robin est une conséquence nécessaire du principe de Neumann.*

La réciproque est encore vraie, car on voit immédiatement que le principe de Robin conduit au principe de Neumann pour ce qui concerne le cas, où la fonction initiale v_0 est susceptible de se présenter sous forme du potentiel d'une simple couche à densité continue, et cela suffit, comme nous allons le montrer ici, pour établir ce principe en général.

5. Avant tout, il convient de signaler une autre forme pour la restriction ci-dessus à l'égard de v_0, sous laquelle nous supposons établi le principe de Neumann.

Soit f une fonction, telle que, pour tous les points de la surface S, on ait

$$f = \int \frac{\sigma' \, ds'}{r}, \tag{10}$$

σ étant une fonction continue sur S.

Alors l'intégrale

$$\int \frac{\sigma' \, ds'}{R},$$

tant pour le domaine intérieur à S, que pour celui extérieur, représentera la fonction harmonique se réduisant sur S à f, et comme cette fonction admet, sur la surface, des dérivées normales régulières *), nous pouvons conclure que le potentiel de la double couche

$$\int \frac{f' \cos \Phi' \, ds'}{R^2} \tag{11}$$

sera dans le même cas; car, d'après ce qui a été montré dans notre Mémoire, c'est à cela que se réduit la condition, nécessaire et suffisante

*) Pour ce qui concerne l'expression *dérivée normale régulière,* je renverrai à mon Mémoire (Journ. de Math., 5 série, t. IV, pages 246, 247 et 285).

pour que la fonction harmonique, définie par sa valeur f sur S, admette des dérivées normales régulières sur cette surface.

D'ailleurs il est facile d'établir directement que, si l'intégrale (11) admet des dérivées normales régulières sur S, la fonction f est susceptible de se présenter sous la forme (10).

Pour le montrer, il n'y a qu'à répéter les raisonnements développés dans notre Mémoire.

Soit $2\pi L$ la valeur commune, en un point p de S, des deux dérivées normales, intérieure et extérieure, de l'intégrale (11) *), ces dérivées étant supposées régulières sur S.

En supposant que dans la définition de ces dérivées intervient la direction de la normale *intérieure*, considérons l'équation

$$h + \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = L, \tag{12}$$

h étant une fonction inconnue.

Admettons provisoirement que l'on ait réussi à obtenir une solution continue de cette équation.

En désignant cette solution par H, posons

$$\int \frac{H' \, ds'}{R} = V_e$$

et désignons par W l'intégrale (11).

Alors, eu égard aux propriétés connues des potentiels des simples couches, nous parviendrons à la conclusion que la dérivée normale extérieure de la fonction $V_e - W$ sera égale à zéro pour tous les points de la surface S, et de là, cette dérivée étant régulière, nous pouvons conclure que, *pour tous les points de l'espace extérieur* par rapport à S, on aura

$$V_e = W. \tag{13}$$

Pareillement, si nous considérons l'équation

$$h - \frac{1}{2\pi}\int \frac{h' \cos\varphi \, ds'}{r^2} = -L, \tag{14}$$

en admettant que l'on en ait obtenu une solution continue K, nous arriverons à la conclusion que, V_i étant défini par la formule

*) Quelle que soit la fonction continue f, si l'une des deux dérivées normales du potentiel (11) existe, l'autre existera aussi et lui sera égale. *Voir* le Mémoire cité, pages 298, 299 (remarque).

$$\int \frac{K' ds'}{R} = V_i,$$

la dérivée normale intérieure de la fonction $V_i - W$ sera égale à zéro en tout point de S. Donc, cette dérivée étant régulière, la fonction $V_i - W$ conservera une valeur constante dans l'espace intérieur par rapport à S.

D'ailleurs on pourra toujours choisir K de telle manière que cette valeur constante soit égale à zéro.

En effet, ayant trouvé une solution de l'équation (14), on peut en obtenir une infinité, en ajoutant à cette solution diverses solutions de l'équation (7), et ces dernières sont telles que l'intégrale

$$\int \frac{k' ds'}{R}$$

représente, dans l'espace intérieur à S, une quantité constante susceptible d'une valeur arbitraire.

Donc nous pouvons supposer que la solution K ait été choisie de manière à avoir

$$V_i = W \tag{15}$$

pour tous les points de l'espace intérieur à S.

Maintenant supposons que les points, auxquels se rapportent les formules (13) et (15), se rapprochent indéfiniment vers un point p de la surface S.

En vertu des propriétés connues des potentiels des doubles couches, la formule (13) se réduira, à la limite, à

$$\int \frac{H' ds'}{r} = \int \frac{f' \cos\varphi' ds'}{r^2} - 2\pi f,$$

et la formule (15) deviendra

$$\int \frac{K' ds'}{r} = \int \frac{f' \cos\varphi' ds'}{r^2} + 2\pi f.$$

Par suite, en posant

$$\frac{1}{4\pi}(K - H) = \sigma,$$

on aura bien la formule (10).

Il ne reste qu'à montrer que les équations (12) et (14) sont possibles.

A cet effet, considérons la suite indéfinie de fonctions

$$h_0,\quad h_1,\quad h_2,\quad h_3,\ \ldots,$$

liées entre elles par les équations de la forme

$$h_m = \frac{1}{2\pi}\int \frac{h'_{m-1}\cos\varphi\, ds'}{r^2},$$

en supposant

$$h_0 = L.$$

Par la définition même de la quantité L, nous aurons

$$\int L\, ds = 0.$$

Par suite, comme nous l'avons déjà remarqué, toutes les séries de la forme

$$\pm h_0 \pm h_1 \pm h_2 \pm \cdots$$

seront convergentes et leur convergence sera uniforme sur S. D'ailleurs, tous les h_m représenterons des fonctions continues, puisque, les dérivées normales du potentiel (11) étant régulières, L sera une fonction continue.

De là on voit que la série

$$h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \ldots$$

représentera une fonction continue vérifiant l'équation (12) et que la série

$$-h_0 - h_1 - h_2 - h_3 - \ldots$$

représentera une fonction continue qui vérifiera l'équation (14).

Nous pouvons donc poser

$$H = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + \cdots,$$

$$K = k - h_0 - h_1 - h_2 - \cdots,$$

k étant une solution convenablement choisie de l'équation (7).

6. En vertu de ce que nous venons de montrer, la restriction imposée à la fonction v_0 peut être présentée sous cette forme:

Les dérivées normales du potentiel

$$\int \frac{v'_0 \cos\Phi'\, ds'}{R^2} \tag{16}$$

existent et sont régulières sur la surface.

Or on peut signaler une condition assez simple, sinon nécessaire, du moins suffisante, pour que cette circonstance ait certainement lieu.

En entendant par p le point variable, auquel se rapporte la valeur f d'une fonction désignée par la même notation, plaçons ce point dans une position quelconque sur la surface S et considérons l'ensemble des points μ de S dont la distance à p ne surpasse pas la longueur D figurant dans la première des deux conditions énoncées au n^0 2. La position de tout point μ de cet ensemble pouvant être définie sans ambiguïté par celle de sa projection sur le plan tangent à S en p, regardons la valeur f_μ de la fonction f en μ comme fonction des coordonnées polaires dans ce plan de la projection du point μ, le point p étant pris pour pôle. Puis, en entendant par ϱ le rayon vecteur et par ψ l'angle polaire de ladite projection, calculons l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f_\mu \, d\psi ,$$

dans la supposition qu'on ait attribué à ϱ une valeur fixe, assez petite pour que la condition $p\mu < D$ soit possible pour toutes les valeurs de ψ entre 0 et 2π. Alors la quantité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\mu \, d\psi = \bar{f}$$

représentera ce que nous appellerons *valeur moyenne de la fonction f au voisinage du point p à la distance ϱ de la normale en p.*

Dans le Mémoire que nous avons cité plusieurs fois, nous avons établi la proposition suivante:

En tout point de la surface, où la fonction continue f vérifie une inégalité de la forme

$$|\bar{f} - f| < A\varrho^{\alpha+1},$$

A, α étant des nombres positifs indépendants de ϱ, le potentiel

$$\int \frac{f' \cos\Phi' \, ds'}{R^2}$$

admet les dérivées normales. D'ailleurs, si la condition ci-dessus se trouve remplie pour tous les points de la surface avec des valeurs fixes de A et de α, ces dérivées seront régulières.

Donc, v_0 étant une fonction continue et $\bar{v}_0$ désignant sa valeur moyenne au voisinage du point p à la distance ϱ de la normale en p, si, pour toute position du point p sur la surface et indépendamment de la valeur de ϱ, on a

$$(17) \qquad |\bar{v}_0 - v_0| < A\varrho^{\alpha+1}$$

avec des valeurs positives fixes de A et de α, il sera certain que les dérivées normales du potentiel (16) existent et sont régulières.

Par suite, la condition (17) suffit pour que la fonction continue v_0 puisse être présentée sous la forme (9).

Donc, dans le cas de cette condition, nous pouvons regarder le principe de Neumann comme établi, et par cela même nous pouvons encore le regarder comme établi dans tous les cas, où, au lieu de v_0, une autre fonction quelconque de la suite (2) satisfait à une pareille condition.

Or nous allons montrer que la fonction v_2 vérifie toujours une inégalité de la forme en question,

$$|\bar{v}_2 - v_2| < A\varrho^{\alpha+1},$$

et cela quelle que soit la fonction v_0, continue ou discontinue, pourvu qu'elle soit intégrable.

C'est de cette manière que nous arriverons à l'extension requise du principe de Neumann.

7. Nous allons établir la proposition suivante:

Posons

$$\int \frac{f' \cos\varphi' \, ds'}{r^2} = w$$

et désignons par $\bar{w}$ la valeur moyenne de cette fonction au voisinage du point p à la distance ϱ de la normale en p. Toutes les fois que la fonction f vérifie une condition de la forme

$$|f - f'| < ar^{\alpha},$$

*a, α étant des nombres positifs indépendants de la position des points p et p', auxquels se rapportent les valeurs f et f', la fonction w, si l'on suppose $\alpha < 1$ *), vérifiera une condition de la forme*

$$|\bar{w} - w| < A\varrho^{\alpha+1},$$

où A est un nombre positif ne dépendant ni de ϱ, ni de la position du point p.

---

*) Il est évident que, si f ne se réduit pas à une constante, le nombre α ne peut pas surpasser 1, et que d'ailleurs on peut toujours supposer $\alpha < 1$.

Considérons un point quelconque p_0 de la surface et désignons par

$$f_0,\ w_0,\ \overline{w}_0,\ \varphi'_0,\ r_0$$

les valeurs que prennent les quantités

$$f,\ w,\ \overline{w},\ \varphi',\ r,$$

considérées comme fonctions du point p, lorsque ce point coïncide avec p_0.

Le point p_0 étant pris pour pôle des coordonnées polaires dans le plan tangent à la surface en p_0, soient ϱ et ψ le rayon vecteur et l'angle polaire de la projection du point p sur ce plan tangent.

Nous aurons

$$\overline{w}_0 - w_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (w - w_0)\, d\psi$$

en supposant que, dans la fonction à intégrer, l'on ait attribué à ϱ une valeur fixe assez petite, et quant à cette fonction, qui est donnée par la formule

$$w - w_0 = \int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right) f'\, ds',$$

nous pourrons la présenter sous la forme

$$w - w_0 = \int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)(f' - f_0)\, ds',$$

puisque, d'après un théorème connu,

$$\int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right) ds' = 0,$$

quelles que soient les positions des points p et p_0.

Nous allons chercher une limite supérieure pour la quantité

$$|\overline{w}_0 - w_0|.$$

A cet effet, nous devrons nous occuper d'abord de la fonction $w - w_0$ et, pour faciliter notre recherche, nous allons décomposer l'intégrale, par laquelle nous venons d'exprimer $w - w_0$, en trois intégrales, étendues à trois portions de la surface définies de la manière suivante.

Concevons une surface cylindrique de révolution C ayant pour axe la normale au point p_0 et désignons la portion de la surface S découpée par C au voisinage de p_0 par S'_0 et tout le reste de S par S'. Pour rayon de cette surface cylindrique, nous prendrons une longueur fixe qD, en entendant par q une fraction assez petite, pour que la portion S'_0 se trouve toute entière à l'intérieur de la sphère de rayon D ayant pour centre le point p_0 (n⁰ 2).

Imaginons ensuite une nouvelle surface cylindrique de révolution, ayant le même axe et correspondant à un rayon δ plus petit que qD. Cette surface décomposera S'_0 en deux portions: celle intérieure, que nous désignerons par S_0, et celle extérieure, qui sera désignée par S_1.

De cette manière la surface S se décomposera en trois portions S_0, S_1, S', et en désignant les intégrales de la forme

$$\int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2}-\frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)(f'-f_0)\,ds'$$

étendues à ces portions respectivement par J_0, J_1, J', nous aurons

$$w-w_0=J_0+J_1+J'.$$

Pour aller plus loin, nous devons signaler certaines inégalités qui résultent des suppositions que nous avons faites à l'égard de la surface (n⁰ 2).

8. Soient n et n' les directions des normales intérieures aux points p et p'.

En vertu de la supposition II, le rapport

$$\frac{\operatorname{tang}(n,\,n')}{r},$$

pour des valeurs assez petites de r, ne surpassera pas une certaine limite, quelle que soit d'ailleurs la position des points p et p', et nous pouvons prendre pour D une longueur assez petite, pour que l'on ait

$$\operatorname{tang}(n,\,n')<\frac{r}{D},$$

toutes les fois que $r<D$.

Cela posé, prenons le point p_0 pour origine des coordonnées rectangulaires, en dirigeant l'axe des z suivant la normale intérieure en ce point, et désignons par x, y, z les coordonnées du point p et par r la distance p_0p. En vertu de la supposition I, z sera une fonction uniforme de x, y, tant que $\mathrm{r}<D$, et nous aurons

$$\operatorname{tang}(n,\,z)=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Par suite, en supposant $\mathrm{r} < D$, nous aurons

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} < \frac{\mathrm{r}}{D}.$$

Or, si l'on pose

$$x = \varrho \cos\psi\,, \quad y = \varrho \sin\psi$$

et que l'on régarde z comme fonction de ϱ et de ψ, il viendra

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 < \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Donc, dans la supposition $\mathrm{r} < D$, on aura

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right| < \frac{\mathrm{r}}{D} < 1$$

et par suite

$$|z| < \varrho, \quad \mathrm{r} = \sqrt{\varrho^2 + z^2} < \sqrt{2}\,\varrho.$$

De là on déduit

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right| < \sqrt{2}\,\frac{\varrho}{D}\,,$$

ce qui donne

(18) $$|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\varrho^2}{D}.$$

Remarquons qu'en vertu de cette inégalité il vient

$$|r\cos\varphi'| < \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{r^2}{D}\,,$$

toutes les fois que $r < D$; et comme, pour $r < D$,

$$\cos(n,\, n') > \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

on aura, dans la même supposition,

(19) $$|\cos\varphi'| < \frac{r\cos(n,\, n')}{D}.$$

L'inégalité $\mathrm{r} < \sqrt{2}\,\varrho$, que nous venons d'obtenir en supposant $\mathrm{r} < D$, fait voir que, pour rayon du cylindre C, nous pouvons prendre $\frac{1}{\sqrt{2}} D$. Quant au rayon δ, nous supposerons

$$\delta < \frac{1}{2} D.$$

En même temps, nous supposerons que le point p se trouve sur S_0 et que l'on ait

$$\mathrm{r} < \frac{1}{2} \delta.$$

Dans ces suppositions, pour toute position du point p' sur S_0, nous aurons

$$r < \mathrm{r} + r_0 < \frac{1}{2}\delta + \sqrt{2}\,\delta < 2\delta < D$$

et, par suite, nous pourrons nous servir de l'inégalité (19), ainsi que de celle-ci:

$$(20) \qquad |\cos\varphi_0'| < \frac{r_0 \cos(n', z)}{D}.$$

Nous désignerons les coordonnées du point p' par x', y', z' et nous poserons

$$x' = \varrho' \cos\psi', \quad y' = \varrho' \sin\psi'.$$

Alors, pour toute position du point p' sur S_0 et S_1, nous aurons

$$(21) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2} < \frac{r_0}{D},$$

$$|z'| < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\varrho'^2}{D},$$

et la seconde inégalité, avec celle (18), donnera

$$|zz'| < \frac{1}{2} \varrho^2 \frac{\varrho'^2}{D^2}.$$

Par suite, si nous nous arrêtons à la supposition $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, nous aurons

$$(22) \qquad |zz'| < \frac{1}{4} \varrho^2.$$

Signalons enfin certaines inégalités qui résultent de la supposition $\mathrm{r} < \frac{1}{2}\delta$, lorsque le point p' se trouve sur S_1.

Soit ω l'angle que font entre elles les directions $p_0 p$ et $p_0 p'$. Nous aurons

$$r^2 = r_0^2 + \mathrm{r}^2 - 2 r_0 \mathrm{r} \cos\omega$$

et, comme, dans notre supposition, on a

$$\mathrm{r} < \frac{1}{2}\varrho' < \frac{1}{2} r_0,$$

le développement connu

$$\frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + \mathrm{r}^2 - 2 r_0 \mathrm{r} \cos\omega}} = \sum_0^\infty P_n(\cos\omega) \left(\frac{\mathrm{r}}{r_0}\right)^n$$

donnera

$$\frac{r_0}{r} = 1 + \frac{\mathrm{r}}{r_0} \cos\omega + 2 \frac{\mathrm{r}^2}{r_0^2} \vartheta,$$

où ϑ désigne une quantité comprise entre -1 et $+1$.

De là on déduit les trois inégalités suivantes:

$$\left| \frac{r_0^3}{r^3} - 1 - 3 \frac{\mathrm{r}}{r_0} \cos\omega \right| < 22 \frac{\mathrm{r}^2}{r_0^2},$$

$$\left| \frac{r_0^3}{r^3} - 1 \right| < 14 \frac{\mathrm{r}}{r_0}, \qquad \frac{r_0^3}{r^3} < 8,$$

dont la première, eu égard à ce que

$$\mathrm{r} r_0 \cos\omega = xx' + yy' + zz'$$

et en vertu de (22), donne

$$\left| \frac{r_0^3}{r^3} - 1 - 3 \frac{xx' + yy'}{r_0^2} \right| < \left(22 + \frac{3}{4}\right) \frac{\mathrm{r}^2}{r_0^2}.$$

Donc, dans la supposition $\mathrm{r} < \frac{1}{2}\delta$, nous aurons

$$(23) \quad \begin{cases} \left| \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r_0^3} - 3 \dfrac{xx' + yy'}{r_0^5} \right| < 6 \dfrac{\delta^2}{r_0^5}, \\[2ex] \left| \dfrac{1}{r^3} - \dfrac{1}{r_0^3} \right| < 7 \dfrac{\delta}{r_0^4}, \quad \dfrac{1}{r^3} < 8 \dfrac{1}{r_0^3}. \end{cases}$$

Maintenant nous avons tout ce qui nous était nécessaire.

9. En nous reportant à l'expression de $w - w_0$, nous pouvons écrire

$$|\overline{w}_0 - w_0| < L + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} J_1\, d\psi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} J'\, d\psi\right|,$$

L étant une limite supérieure de $|J_0|$ indépendante de ψ.

Or, nous avons

$$J_0 = \int \frac{\cos\varphi'}{r^2}(f' - f_0)\, ds' - \int \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}(f' - f_0)\, ds',$$

en supposant que les intégrales sont étendues à S_0.

Donc, en entendant par l une limite supérieure de la fonction $|f' - f_0|$ sur S_0 et ayant égard aux inégalités (19) et (20), nous aurons

$$|J_0| < \frac{l}{D}\int \frac{\cos(n', n)\, ds'}{r} + \frac{l}{D}\int \frac{\cos(n', z)\, ds'}{r_0};$$

et quant aux intégrales qui figurent ici, la seconde ne surpassera pas, évidemment, $2\pi\delta$ et la première sera plus petite que $2\pi\sqrt{2}\,\delta$, comme on s'assure facilement en remarquant que S_0 se trouve à l'intérieur de la sphère de rayon $\sqrt{2}\,\delta$ ayant pour centre le point p_0.

De cette manière nous obtenons

$$|J_0| < 2\pi(\sqrt{2} + 1)\frac{l}{D}\,\delta,$$

et comme, en vertu de la condition du théorème, nous pouvons prendre

$$l = a(\sqrt{2}\,\delta)^\alpha < a\sqrt{2}\,\delta^\alpha,$$

nous aurons

$$|J_0| < 2\pi(2 + \sqrt{2})\frac{a}{D}\,\delta^{\alpha+1}.$$

Nous pouvons donc poser

$$L = 7\pi\frac{a}{D}\,\delta^{\alpha+1}.$$

Passons maintenant à la considération de l'intégrale

$$J_1 = \int\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)(f' - f_0)\, ds'$$

étendue à S_1.

Nous avons

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2} = \frac{r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0}{r^3} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right) r_0 \cos\varphi'_0 .$$

Or on a, évidemment,

$$r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0 = x\cos(n',x) + y\cos(n',y) + z\cos(n',z)$$

$$= \left(z - x\frac{\partial z'}{\partial x'} - y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\cos(n',z).$$

Par suite, si l'on pose

$$\Omega = \frac{z\cos(n',z)}{r^3} - \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)\left(x\frac{\partial z'}{\partial x'} + y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\cos(n',z)$$

$$+ \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{xx'+yy'}{r_0^5}\right) r_0\cos\varphi'_0 ,$$

il viendra

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2} = 3\frac{xx'+yy'}{r_0^4}\cos\varphi_0 - \left(x\frac{\partial z'}{\partial x'} + y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\frac{\cos(n',z)}{r_0^3} + \Omega ,$$

ce qui fait voir que, l'expression

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}$$

étant considérée comme fonction de ψ en vertu des formules

$$x = \varrho\cos\psi , \qquad y = \varrho\sin\psi ,$$

on aura

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)d\psi = \int_0^{2\pi}\Omega\, d\psi .$$

Cela posé, reportons nous aux inégalités (18), (20), (21) et (23). Eu égard à ce que

$$\left| x\frac{\partial z'}{\partial x'} + y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right| < \varrho\sqrt{\left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}$$

et tenant compte de l'inégalité $\varrho < \frac{1}{2}\delta$, nous obtiendrons

$$|\Omega| < \left(\sqrt{2} + \frac{19}{2}\right)\frac{\delta^2\cos(n',z)}{Dr_0^3} < 11\,\frac{\delta^2\cos(n',z)}{Dr_0^3} .$$

Nous aurons donc

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{r^2}-\frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right)d\psi\right|<11\,\frac{\delta^2\cos(n',z)}{Dr_0^3},$$

et par suite, eu égard à l'inégalité

$$|f'-f_0|<ar_0^\alpha,$$

il viendra

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}J_1\,d\psi\right|<11\,\frac{a}{D}\,\delta^2\int\frac{\cos(n'.z)\,ds'}{r_0^{3-\alpha}}.$$

Or, l'intégrale étant étendue à S_1, on a

$$\int\frac{\cos(n',z)\,ds'}{r_0^{3-\alpha}}=\int_0^{2\pi}d\psi'\int_\delta^{qD}\frac{\varrho'\,d\varrho'}{r_0^{3-\alpha}}<\frac{2\pi}{1-\alpha}\,\delta^{\alpha-1}.$$

Donc on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}J_1\,d\psi\right|<\frac{22\pi}{1-\alpha}\,\frac{a}{D}\,\delta^{\alpha+1}.$$

Reste à considérer J'. Mais on voit immédiatement qu'il est possible d'assigner un nombre fixe A', tel qu'on ait

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}J'\,d\psi\right|<A'\varrho^2,$$

quelles que soient la valeur attribuée à ϱ et la position du point p_0.

Rapprochons maintenant les inégalités obtenues.

Nous aurons

$$|\overline{w}_0-w_0|<\left(7+\frac{22}{1-\alpha}\right)\frac{\pi a}{D}\,\delta^{\alpha+1}+A'\varrho^2,$$

et cela quels que soient δ et ϱ, pourvu qu'on ait

$$\frac{1}{2}D>\delta>2r.$$

Or nous pouvons satisfaire à cette condition en posant, par exemple,

$$\delta=2\sqrt{2}\,\varrho,$$

ϱ étant supposé assez petit, et dans cette hypothèse notre inégalité conduira à celle-ci

$$|\overline{w}_0 - w_0| < A\varrho^{\alpha+1},$$

où l'on pourra prendre pour A un nombre qui ne dépend ni de ϱ, ni de la position du point p_0.

Nous arrivons donc à l'inégalité qu'il fallait établir.

10. En vertu de la proposition que nous venons d'établir, nous pouvons affirmer que, si la fonction v_1 satisfait à une condition de la forme

(24) $$|v_1' - v_1| < ar^\alpha,$$

a et α étant des nombres positifs fixes, la fonction

$$v_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v_1' \cos\varphi'\, ds'}{r^2}$$

vérifiera la condition requise

(25) $$|\overline{v}_2 - v_2| < A\varrho^{\alpha+1}.$$

Or, d'après une proposition qui a été établie récemment par M. Korn, la fonction

$$v_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{v_0' \cos\varphi'\, ds'}{r^2}$$

vérifiera toujours une inégalité de la forme (24), pourvu que v_0 soit une fonction intégrable sur S.

D'ailleurs il est facile de le prouver par les formules que nous venons de développer.

En effet, soient: l une limite supérieure de la fonction $|f|$ sur S et J_0, J_1, J' les intégrales de la forme

$$\int \left(\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi_0'}{r_0^2}\right) f'\, ds'$$

étendues respectivement à S_0, S_1, S', de sorte qu'il viendra

$$w - w_0 = J_0 + J_1 + J'.$$

En faisant les mêmes suppositions que précédemment, nous aurons

$$|J_0| < 2\pi(\sqrt{2}+1)\frac{l}{D}\,\delta < 5\pi\,\frac{l}{D}\,\delta.$$

Passant ensuite à la considération de J_1, nous remarquons que la formule

$$r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0 = \left(z - x\frac{\partial z'}{\partial x'} - y\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)\cos(n', z),$$

en vertu de (18) et (21), donne

$$|r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{r}^2}{D} + \frac{\mathrm{r}r_0}{D}\right)\cos(n', z),$$

ce qui, eu égard à l'inégalité $\mathrm{r} < \frac{1}{2}r_0$ (ayant lieu, si le point p' appartient à S_1), conduit à

$$|r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0| < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)\frac{\mathrm{r}r_0\cos(n', z)}{D} < \frac{11}{8}\frac{\mathrm{r}r_0\cos(n', z)}{D}.$$

Par suite, la formule

$$\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2} = \frac{r\cos\varphi' - r_0\cos\varphi'_0}{r^3} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right)r_0\cos\varphi'_0,$$

en vertu de (20) et des inégalités

$$\left|\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3}\right| < 14\frac{\mathrm{r}}{r_0^4}, \quad \frac{1}{r^3} < 8\frac{1}{r_0^3},$$

donnera

$$\left|\frac{\cos\varphi'}{r^2} - \frac{\cos\varphi'_0}{r_0^2}\right| < 25\frac{\mathrm{r}\cos(n', z)}{Dr_0^2}.$$

Nous aurons donc

$$|J_1| < 25\frac{l}{D}\mathrm{r}\int\frac{\cos(n', z)\,ds'}{r_0^2},$$

et à plus forte raison

$$|J_1| < 50\pi\frac{l}{D}\mathrm{r}\log\frac{D}{\delta}.$$

Enfin, en ce qui concerne l'intégrale J', il est évident que, a' étant un nombre fixe assez grand, on aura

$$|J'| < a'\mathrm{r}.$$

De cette manière nous obtenons

$$|w - w_0| < 5\pi \frac{l}{D} \delta + 50\pi \frac{l}{D} \mathrm{r} \log \frac{D}{\delta} + a' \mathrm{r}$$

et, comme nous pouvons poser $\delta = 2\mathrm{r}$, nous arrivons à une inégalité de la forme

$$|w - w_0| < a \mathrm{r} \log \frac{D}{\mathrm{r}},$$

a étant un nombre fixe assez grand.

Donc, pour une autre valeur de a, on aura encore

$$|w - w_0| < a \mathrm{r}^{\alpha},$$

α étant un nombre positif choisi arbitrairement sous la condition $\alpha < 1$.

De cette manière nous parvenons à la proposition suivante *):

Quelle que soit la fonction f intégrable sur la surface considérée et quel que soit le nombre positif α plus petit que 1, la fonction

$$w = \int \frac{f' \cos \varphi' \, ds'}{r^2}$$

vérifiera une condition de la forme

$$|w' - w| < a r^{\alpha},$$

a étant un nombre positif indépendant des positions des points p et p'.

Donc, quelle que soit la fonction intégrable v_0, la fonction v_1 satisfera toujours à une condition de la forme (24) et, par conséquent, la fonction v_2 vérifiera une condition de la forme (25). Cette dernière fonction sera donc toujours susceptible de se présenter sous la forme du potentiel d'une simple couche répandue sur la surface avec une densité continue.

Cela étant établi, nous pouvons regarder notre tâche comme achevée.

---

*) Remarquons que M. Korn n'a établi cette proposition que dans le cas de $\alpha \leq \frac{1}{2}$. (*Abhandlungen zur Potentialtheorie,* Abh. 1, p. 5—8).