Die Jacobische Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung.

Von **Adolf Kneser**.

Seit den fundamentalen Untersuchungen, welche Jacobi im 17. Bande des Crelle'schen Journals veröffentlicht hat, ist es bekannt, dass bei den gewöhnlichen Aufgaben der Variationsrechnung das gesuchte Extremum im Allgemeinen von der Curve, welche den Differentialgleichungen des Problems genügt, nur in begrenztem Umfange geliefert wird. Für die kürzesten Linien auf einer Oberfläche z. B. erhält man eine Differentialgleichung, welche die geodätischen Linien characterisirt; aber nicht jeder geodätische Bogen giebt ein Minimum des Abstandes seiner Endpunkte; dieses Minimum liegt nur dann vor, wenn man den Anfangspunkt jenes Bogens festhaltend den Endpunkt auf einer bestimmten geodätischen Linie diesseits eines gewissen Grenzpunktes verbleiben lässt, welchen man als den dem Anfangspunkte conjugirten Punkt bezeichnet. Ist nun A der Anfangspunkt, so haben die durch A gehenden geodätischen Linien im Allgemeinen eine Enveloppe, welche von jeder der geodätischen Linien in dem zu A conjugirten Punkte B berührt wird, und irgend ein der geodätischen Linie AB angehöriger Bogen AC liefert im Allgemeinen nur dann ein Minimum des Abstandes AC, wenn C zwischen A und B liegt. Dieser Satz ist schon von Jacobi auf allgemeinere Probleme der Variationsrechnung ausgedehnt worden. In der von Rosenhain angefertigten Nachschrift einer im Wintersemester 1837—38 gehaltenen Vorlesung von Jacobi, welche im Archiv der Berliner Akademie der Wissenschaften aufbewahrt wird, findet sich nämlich die Bemerkung, dass für das Extremum des Integrals

$$\int f(x, y, p)\,dx, \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

die Enveloppe der durch einen festen Punkt gehenden und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

genügenden Curven die analoge Bedeutung hat, wie die oben bezeichnete Enveloppe geodätischer Linien für das Minimum der Entfernung. Es wird auch ausgesprochen, dass schon für den Bogen, der von dem festen Punkte und dem entsprechenden Berührungspunkte auf der Enveloppe, also von zwei conjugirten Punkten begrenzt wird, das gesuchte Extremum des Integrals

$$\int f(x, y, p)\, dx$$

im Allgemeinen nicht mehr geliefert wird.

Wir wollen dieses von Jacobi aufgestellte Theorem auf das folgende sehr allgemeine Problem ausdehnen.

Es sei

$$p_1 = \frac{dy_1}{dx}, \quad p_2 = \frac{dy_2}{dx}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{dy_n}{dx},$$

und werde die Aufgabe gestellt, das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, p_1, p_2, \cdots, p_n)\, dx$$

zu einem Extremum zu machen. Dabei sei f eine gegebene Function ihrer Argumente, $y_1, y_2, \cdots, y_n$ seien unbekannte Functionen von x, welche für $x = x_0$ und $x = x_1$ vorgeschriebene Werthe annehmen und allgemein den Bedingungsgleichungen

$$\varphi_\rho(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0 \qquad (\rho=1,2,\ldots,r)$$

genügen.

Wir wollen zeigen, dass auch hier die ein festes Werthsystem enthaltenden und den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannichfaltigkeiten im Gebiet der Grössen $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ eine Enveloppe haben, an welcher das gesuchte Extremum in ähnlichem Sinne aufhört, wie es oben für die geodätischen Linien angedeutet wurde. Dabei gelingt es auch, eine bekannte und merkwürdige Eigenschaft der Enveloppe der durch einen festen Punkt A gehenden geodätischen Linien zu verallgemeinern, welche in Folgendem besteht: Sind B und D die Berührungspunkte zweier durch A gehender geodätischer Linien mit der Enveloppe, so gilt die Gleichung

$$AD - AB = BD,$$

in welcher rechts ein Bogen der Enveloppe, links geodätische Bögen stehen. Bei der Verallgemeinerung dieses Satzes hat man nur an Stelle der Bogenlänge den entsprechenden Werth des Integrals

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n)\, dx$$

zu setzen; an Stelle der geodätischen Linien treten die Mannichfaltigkeiten, welche den Differentialgleichungen des Problems genügen.

---

§ 1.

In der Variationsrechnung wird als nothwendige Bedingung für das Extremum des Integrals

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\, dx,$$

in welchem allgemein

$$p_\nu = \frac{dy_\nu}{dx}$$

gesetzt ist, bei den Bedingungsgleichungen

$$\text{(1)} \qquad \varphi_\rho(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (\rho = 1, 2, \ldots, r)}$$

folgendes System von Gleichungen abgeleitet.

Es bedeute ν die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, ebenso ρ die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, r$; λ_ρ seien r neue Unbekannte und es werde

$$F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_r \varphi_r$$

gesetzt. Dann hat man als nothwendige Bedingungen des Extremums die n Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial p_\nu} = 0,$$

welche im Allgemeinen mit den r Gleichungen (1) combinirt ausreichen, die $n+r$ Unbekannten y_ν, λ_ρ zu bestimmen.

Man kann diese Gleichungen in der Form

$$(2) \qquad \sum_\nu p'_\nu \frac{\partial^2 F}{\partial p_\mu \partial p_\nu} + \sum_\rho \lambda'_\rho \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_\mu} + F_\mu(x, y_1, \ldots, p_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = 0$$

schreiben, und durch Derivation der Gleichungen (1) ergiebt sich

$$(3) \qquad \sum_\nu p'_\nu \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial p_\nu} + G_\rho(x, y_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Die Determinante der Coefficienten aller Grössen p'_ν, λ'_ρ in den Gleichungen (2), (3) werde durch D bezeichnet.

Um nun festen Boden zu gewinnen, nehmen wir an, die Functionen f, φ_ρ seien in einem gewissen Gebiete der Variablen x, y_ν, p_ν, welches (G) heisse, holomorph; dann gilt dasselbe von den Functionen G_ρ und bei beliebigen Werthen der Grössen λ_ρ auch von allen F_μ, da diese die Grössen λ_ρ nur linear enthalten.

Für die diesem Gebiet (G) angehörige Stelle

$$x = x_0, \quad y_\nu = Y_\nu^0, \quad p_\nu = P_\nu^0$$

sei D von Null verschieden und gelte die Ungleichung

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_r} & \cdots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_r} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Dann können die Grössen p_ρ als Functionen der Argumente $x, y_\nu, p_{r+\sigma}$ aus den Gleichungen (1) ausgerechnet werden, wobei σ, wie fortan immer, die Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, n-r$ bedeute; die erhaltenen Ausdrücke sind holomorph an der Stelle x_0, Y_ν^0, $P_{r+\sigma}^0$.

Weiter ergiebt die Auflösung der linearen Gleichungen (2), (3)

$$(5) \qquad \begin{aligned} p'_{r+\sigma} &= H_\sigma(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho), \\ \lambda'_\rho &= K_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho), \end{aligned}$$

und die Functionen H_σ, K_ρ sind ebenso wie F_μ, G_ρ bei beliebigen Werthen der Grössen λ_ρ holomorph an der Stelle x_0, Y_ν^0, $P_{r+\sigma}^0$.

Bezeichnet man noch durch $L_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma})$ die Auflösungen der Gleichungen (1) nach p_ρ, so kann man die Gleichungen (5) zu folgendem System ergänzen:

$$\frac{dp_{r+\sigma}}{dx} = H_\sigma(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho),$$

$$(6) \qquad \frac{dy_{r+\sigma}}{dx} = p_{r+\sigma}, \quad \frac{d\lambda_\rho}{dx} = K_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma}, \lambda_\rho),$$

$$\frac{dy_\rho}{dx} = L_\rho(x, y_\nu, p_{r+\sigma}).$$

Hiermit hat man genau $2n$ Differentialgleichungen für die $2n$ Unbekannten y_ν, $p_{r+\sigma}$, λ_ρ; auf den rechten Seiten kommen nur die Unbekannten selbst vor, während links ihre ersten Ableitungen stehen.

Alle rechten Seiten sind holomorph an der Stelle

$$x = x_0, \quad y_\nu = Y_\nu^0, \quad p_{r+\sigma} = P_{r+\sigma}^0.$$

Es werde nun durch Y_ν, $P_{r+\sigma}$, Λ_ρ dasjenige particuläre Lösungssystem der Gleichungen (6) bezeichnet, für welches an der Stelle $x = x_0$ die Gleichungen

$$Y_\nu = Y_\nu^0, \quad P_{r+\sigma} = P_{r+\sigma}^0, \quad \Lambda_\rho = \Lambda_\rho^0$$

bestehen, wobei Λ_ρ^0 beliebige Werthe sind.

Dieses Integralsystem bleibe längs irgend eines Intervalls der Variablen x, etwa von x_0 bis x_1, holomorph und liefere in demselben nur Werthsysteme (x, y_ν, p_ν), welche dem Gebiet (G) angehören; ausserdem sei D für diese Systeme von Null verschieden und bleibe die Ungleichung (4) gültig.

Alsdann kann in der Umgebung eines jeden von ihnen das System (2), (3) in die Form (6) übergeführt werden und man kann sagen, dass auch die rechten Seiten der Gleichungen (6) in diesen Werthsystemen holomorph sind.

Damit sind die Bedingungen erfüllt, unter denen man auf das System (6) den folgenden allgemeinen Satz *) anwenden kann.

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen sei nach den Ableitungen der Unbekannten aufgelöst; ein Integralsystem (S) sei in dem In-

---

*) Vgl. z. B. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung, § 27 (Braunschweig, 1900)

tervall (J) holomorph und ergebe in diesem nur solche Werthsysteme der Unbekannten, in denen die für die Ableitungen der Unbekannten erhaltenen Ausdrücke holomorph sind. Alsdann sind auch alle Integralsysteme, deren Anfangswerthe, etwa die an der unteren Grenze des Intervalls (J) angenommenen, von den entsprechenden des Systems (S) hinreichend wenig abweichen, in dem ganzen Intervall (J) holomorph, und die an einer bestimmten Stelle desselben erhaltenen Werthe holomorphe Functionen der Anfangswerthe.

Angewandt auf das System (6) ergiebt dieser Satz sofort das folgende Resultat.

Ein beliebiges Integralsystem y_ν, p_ν, λ_ρ sei dadurch characterisirt, dass für $x = x_0$ die Gleichungen

$$y_\nu = y_\nu^0, \quad p_{r+\sigma} = p_{r+\sigma}^0, \quad \lambda_\rho = \lambda_\rho^0$$

bestehen; wenn dann die Differenzen

$$|y_\nu^0 - Y_\nu^0|, \quad |p_{r+\sigma}^0 - P_{r+\sigma}^0|, \quad |\lambda_\rho^0 - \Lambda_\rho^0|$$

gewisse Grenzen nicht überschreiten, so sind die Grössen y_ν, p_ν, λ_ρ als Functionen von x in dem Intervall von x_0 bis x_1 holomorph; ihre Werthe an jeder einzelnen Stelle desselben sind holomorph in den $2n$ Anfangswerthen y_ν^0, $p_{r+\sigma}^0$, λ_ρ^0.

§ 2.

Wir betrachten jetzt speciell diejenigen Integralsysteme der Gleichungen (2), (3) oder (6), für welche

(7) $$y_\nu^0 = Y_\nu^0;$$

bezeichnet man die den Differentialgleichungen des Problems genügenden Mannichfaltigkeiten im Gebiet der Grössen x, y_ν allgemein als Extremalen, so hat man durch die Annahme (7) diejenigen Extremalen characterisirt, welche durch den festen Anfangspunkt (x_0, Y_ν^0) hindurchgehen; diesen bezeichnen wir durch 0.

Setzt man noch

$$p_{r+\sigma}^0 = P_{r+\sigma}^0, \quad \lambda_\rho^0 = \Lambda_\rho^0,$$

so erhält man die specielle Extremale (C), für welche $y_\nu = Y_\nu$ wird; auf dieser wollen wir das Extremum des Integrals

$$\int f(x, y_\nu, p_\nu)\, dx$$

untersuchen und zeigen, dass das Extremum nicht mehr vorhanden ist, wenn der Werth x von x_0 beginnend eine gewisse Grenze überschreitet.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir die Grössen $p^0_{r+\sigma}$, λ^0_ρ durch $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die Grössen $P^0_{r+\sigma}$, Λ^0_ρ in derselben Reihenfolge durch $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und gehen davon aus, dass für die in der Stelle 0 beginnenden Extremalen nach § 1 gesetzt werden kann

$$y_\nu = f_\nu(x, a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{8}$$

wobei die Functionen f_ν holomorph sind, sobald x dem Intervall von x_0 bis x_1 angehört, die Differenzen $|a_\nu - A_\nu|$ aber hinreichend klein sind; speciell hat man

$$Y_\nu = f_\nu(x, A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Nun sei x_1 der erste auf x_0 folgende Werth, für welchen die Functionaldeterminante

$$\Delta(x_0, x) = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial a_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

verschwindet, während sie zwischen x_0 und x_1 von Null verschieden ist.

Diese Grösse ist im Wesentlichen mit der von Mayer und Scheeffer bei der Untersuchung der zweiten Variation benutzten Grösse $\Delta(x_0, x)$ identisch.

Eine noch unerledigte Frage ist, ob diese Grösse auch identisch verschwinden kann; wir setzen voraus, dass dies für die Extremale (C) nicht der Fall sei.

Wir setzen ferner voraus, dass neben der Gleichung

$$\Delta(x_0, x_1) = 0 \tag{9}$$

die Ungleichung

$$\left.\frac{d\Delta(x_0, x)}{dx}\right|^{x=x_1} \gtrless 0 \tag{10}$$

bestehe; dann kann, da $\Delta(x_0, x)$ ebenso wie die Grössen y_ν in den Argumenten x, a_ν holomorph ist, aus der Gleichung

$$\Delta(x_0, x) = 0$$

die Grösse x als Function der Variablen a_ν ausgerechnet werden, welche an der Stelle $a_\nu = A_\nu$ holomorph ist und hier den Werth x_1 annimmt; man erhalte etwa

(11) $$x = \xi(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichungen (8), so erhalte man

$$y_\nu = f_\nu(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_n) = g_\nu(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

dann sind auch die Functionen g_ν an der Stelle $a_\nu = A_\nu$ holomorph, und da

$$\xi(A_1, A_2, \ldots, A_n) = x_1,$$

so folgt

$$g_\nu(A_1, A_2, \ldots, A_n) = f_\nu(x_1, A_1, A_2, \ldots, A_n) = Y_\nu^1.$$

Aus der Ungleichung (10) folgt weiter, dass nicht alle Subdeterminanten $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die man aus der Determinante $\Delta(x_0, x)$ bilden kann, für $x = x_1$, $a_\nu = A_\nu$ verschwinden.

Ist nämlich $\Delta_{\mu\nu}$ oder $\Delta_{\mu\nu}(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ die Adjuncte des Elements $\dfrac{\partial y_\mu}{\partial a_\nu}$, so hat man

$$\frac{d\Delta(x_0, x)}{dx} = \sum_{\mu}^{1,n} \left(\frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x\, \partial a_1} \Delta_{\mu 1} + \frac{\partial^2 y_\mu}{\partial x\, \partial a_2} \Delta_{\mu 2} + \ldots \right),$$

woraus das Behauptete unmittelbar ersichtlich wird.

Es seien z. B. nicht alle Grössen

$$\Delta_{m\nu}(x_1, A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

gleich Null; dann wollen wir die Differentialgleichungen

(12) $$\frac{da_\nu}{dt} = \Delta_{m\nu}(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

ansetzen und diejenigen ihrer Integrale bestimmen, welche für $t = 0$ die Werthe

(13) $$a_\nu = A_\nu$$

annehmen.

Ein solches Integralsystem giebt es, da die Grössen $\Delta_{m\nu}(\xi, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ an der Stelle $a_\nu = A_\nu$ holomorph sind, und die Grössen a_ν sind an der

Stelle $t=0$ holomorphe Functionen von t, welche, da die rechten Seiten der Gleichungen (12) bei der Substitution (13) nicht alle verschwinden, nicht sämmtlich constant sein können.

Setzt man diese Werthe a_ν in die Gleichungen

(14) $$y_\nu = f_\nu(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

ein, so erhält man demnach eine vom Parameter t abhängige einfach unendliche Schar von Extremalen, die nicht alle mit (C) zusammenfallen.

Substituirt man ferner diese Integrale der Gleichungen (12) in den Ausdruck (11), so erhalte man

$$\xi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \Xi = \Xi(t);$$

man findet dann mit Berücksichtigung der Anfangswerthe (13)

$$\Xi(0) = \xi(A_1, A_2, \dots, A_n) = x_1.$$

Hieraus folgt, dass auch die Ausdrücke

(15) $$\eta_\nu = f_\nu(\xi, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

wenn man für a_ν die definirten Functionen von t setzt, für $t=0$ holomorphe Functionen von t sind, deren Werthe für $t=0$ nichts anderes als Y_ν^1 sind.

Fügt man daher die Gleichung

(16) $$\xi = \Xi(t)$$

hinzu, so erhält man im Gebiet der Grössen x, y_ν eine Mannichfaltigkeit (E), welche von der Stelle 1 entsprechend dem Werthe $t=0$ ausgeht.

Wir zeigen nunmehr, dass (E) die Enveloppe der Schar (14) ist.

Zunächst sieht man leicht, dass bei hinreichend kleinen Werthen von t jede Curve der Schar (14) einen Punkt mit (E) gemein hat; man braucht nur in den Gleichungen (14) für x den Werth (16) zu substituiren, um die Gleichungen

$$\eta_\nu = y_\nu$$

hervorzurufen.

Sodann findet man aus den Gleichungen (15)

$$\frac{d\eta_\nu}{dt} = \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1, \dots)}{\partial \xi}\frac{d\Xi}{dt} + \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1, \dots)}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1, \dots)}{\partial a_2}\frac{da_2}{dt} + \cdots$$
$$= \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1, \dots)}{\partial \xi}\frac{d\Xi}{dt} + \left(\varDelta_{m1}\frac{\partial y_\nu}{\partial a_1} + \cdots + \varDelta_{mn}\frac{\partial y_\nu}{\partial a_n}\right),$$

wobei in der letzten Klammer nach ausgeführter Derivation überall $x = \xi$ zu setzen ist.

Bei dieser Substitution verschwindet aber die Klammer entweder wegen der Gleichung

$$\Delta(x_0, \xi) = 0,$$

oder nach einer bekannten Eigenschaft der Subdeterminanten; man erhält also einfach

$$\frac{d\eta_\nu}{dt} = \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1 \ldots)}{\partial \xi} \frac{d\Xi}{dt}. \tag{17}$$

Anderseits ergeben die Gleichungen (14)

$$\frac{dy_\nu}{dx} = \frac{\partial f_\nu(x, a_1, \ldots)}{\partial x}$$

und es ist auch hier nach der Derivation $x = \xi$ zu substituiren, wenn man die der Extremale und der Mannichfaltigkeit (E) gemeinsame Stelle betrachten will.

Wenn daher die Ungleichung

$$\Xi'(t) \gtrless 0 \tag{18}$$

besteht, sodass ξ an der betreffenden Stelle für die Mannichfaltigkeit (E) als unabhängige Variable eingeführt werden kann, so findet man

$$\frac{d\eta_\nu}{d\xi} = \frac{dy_\nu}{dx}, \quad \frac{d\eta_\nu}{dt} = p_\nu \frac{d\xi}{dt}, \tag{19}$$

womit die Enveloppeneigenschaft für (E) erwiesen ist.

Die Ungleichung (18) besteht jedenfalls für alle hinreichend kleinen, von Null verschiedenen Werthe von t, sobald die Function $\Xi'(t)$ nicht identisch verschwindet. In diesem Falle würde aber, der Gleichung (17) zufolge, dasselbe von allen Grössen $\frac{d\eta_\nu}{dt}$ gelten; (E) zöge sich also auf die Stelle (x_1, Y_ν^1) oder 1 zusammen.

Da nun die Grössen a_ν nicht alle constant sind, so hätte man in diesem Falle eine Schar von Extremalen (14), welche die beiden Stellen 0 und 1 verbinden.

§ 3.

Wir betrachten nun das Integral

$$J = \int f(x)\,dx = \int F(x)\,dx,$$

längs irgend einer Extremalen der Schar (14) vom Punkte 0 bis zum Berührungspunkt mit (E) hin erstreckt, oder das Integral

$$\int_{x_0}^{\xi} F\,dx,$$

in dessen Integranden die Grössen y_ν, λ_ρ als Functionen von $x, a_1, \ldots a_n$, mithin implicite als Functionen von x und t erscheinen, während die obere Grenze ξ von t allein abhängt.

Setzt man daher

$$\delta = dt\,\frac{\partial}{\partial t},$$

so findet man

$$\delta\int_{x_0}^{\xi} F\,dx = F\Big|^{\xi}\,\delta\xi + \int_{x_0}^{\xi}\delta F\,dx.$$

Nun ist

$$\delta F = \sum_{\nu}^{1,n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\,\delta p_\nu\right) + \sum_{\rho}^{1,n}\frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho}\,\delta\lambda_\rho,$$

die Coefficienten von $\delta\lambda_\rho$ verschwinden aber, da offenbar

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_\rho} = \varphi_\rho = 0;$$

da ferner offenbar

$$\delta p_\nu = \frac{d\delta y_\nu}{dx}$$

und für die betrachteten Extremalen die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y_\nu} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial F}{\partial p_\nu} = 0$$

bestehen, so findet man vermittelst einer partiellen Integration

$$\int_{x_0}^{\xi} \delta F\, dx = \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\, \delta y_\nu \Bigg|_{x_0}^{\xi}$$

Hier verschwinden die Werthe δy_ν für $x = x_0$, da an dieser Stelle unabhängig von t die Gleichungen gelten

$$y_\nu = Y_\nu^0.$$

Also ergiebt sich schliesslich

$$(20) \qquad \delta \int_{x_0}^{\xi} F\, dx = F\, \delta\xi + \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\, \delta y_\nu \Bigg|^{\xi}.$$

Jetzt wollen wir neben den Functionen

$$y_\nu = f_\nu(x, a_1, \ldots, a_n)$$

auch die auf (E) bezüglichen Werthe

$$\eta_\nu = f_\nu(\xi, a_1, \ldots, a_n)$$

betrachten; dann ergiebt sich sofort

$$\delta\eta_\nu = \frac{\partial f_\nu}{\partial \xi}\, \delta\xi + \sum_{\mu}^{1,n} \frac{\partial f_\nu(\xi, a_1, \ldots)}{\partial a_\mu}\, \frac{da_\mu}{dt}\, dt,$$

$$\delta y_\nu = \sum_{\mu}^{1,n} \frac{\partial f_\nu(x, a_1, \ldots)}{\partial a_\mu}\, \frac{da_\mu}{dt}\, dt;$$

also folgt

$$\delta y_\nu \Big|^{\xi} = \delta\eta_\nu - p_\nu\, \delta\xi \Big|^{\xi}$$

und die Formel (20) wird

$$(21) \qquad \delta \int_{x_0}^{\xi} F\, dx = \left(F - \sum_{\nu}^{1,n} p_\nu \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\right) \delta\xi + \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial F}{\partial p_\nu}\, \delta\eta_\nu \Bigg|^{\xi}.$$

Da nun η_ν und ξ, wenn man die Grössen a_ν als Functionen von t ansieht, reine Functionen von t allein sind, so ist

$$\delta\xi = \frac{d\xi}{dt}\,dt\,,\qquad \delta\eta_\nu = \frac{d\eta_\nu}{dt}\,dt\,,$$

und die in § 2 erhaltene Gleichung (19) ergiebt

$$\delta\eta_\nu - p_\nu\delta\xi = 0\,.$$

Dadurch erhält die Gleichung (21) die einfache Gestalt

$$\delta\int_{x_0}^{\xi} F\,dx = F\,\Big|^{\xi}\,\frac{d\xi}{dt}\,dt.$$

Da nun für $t = 0$ die Grössen y_ν, p_ν, λ_ρ in Y_ν, P_ν, Λ_ρ übergehen, so folgt hieraus durch Integration nach t

$$\int_{x_0}^{\xi} F(x,\,y_\nu,\,p_\nu,\,\lambda_\rho)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,\,Y_\nu,\,P_\nu,\,\Lambda_\rho)\,dx =$$

$$= \int_0 F(\xi,\,\eta_\nu,\,p_\nu,\,\lambda_\rho)\,\frac{d\xi}{dt}\,dt\,,$$

oder da $f = F$ gesetzt werden kann,

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x,\,y_\nu,\,p_\nu)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x,\,Y_\nu,\,P_\nu)\,dx = \int_{x_1}^{\xi} f(\xi,\,\eta_\nu,\,p_\nu)\,dx. \tag{22}$$

Hier ist das Integral auf der rechten Seite offenbar das ursprünglich betrachtete, längs der Mannichfaltigkeit (E) genommen, für welche ja

$$p_\nu = \frac{dy_\nu}{dx} = \frac{d\eta_\nu}{d\xi}$$

zu setzen ist.

Zieht sich diese Mannichfaltigkeit in die Stelle 1 zusammen, so ist einfach

$$\frac{d\xi}{dt} = 0\,,\qquad \int_{x_0}^{\xi} f(x,\,y_\nu,\,p_\nu)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x,\,Y_\nu,\,P_\nu)\,dx.$$

Für letzteren Fall zeigt die erhaltene Gleichung unmittelbar, dass die Mannichfaltigkeit $y_\nu = Y_\nu$ für die Strecke von x_0 bis x_1 betrachtet das gesuchte Extremum des Integrals J nicht mehr liefert.

Denn, da nach § 2 die Grössen a_ν nicht alle constant sind, ergeben die Gleichungen (14) eine Schar die Stellen 0 und 1 verbindender Extremalen, welche der letzten Gleichung zufolge denselben Werth des Integrals J liefern.

Aber auch im allgemeinen Falle zeigt die Gleichung (22), dass das Extremum aufhört, abgesehen von einem gewissen Ausnahmefall, für den die Sache zweifelhaft bleibt. Schreibt man nämlich jene Gleichung in der Form

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x\,,\; Y_\nu\,,\; P_\nu)\,dx = \int\limits_{x_0}^{\xi} f(x\,,\; y_\nu\,,\; p_\nu)\,dx + \int\limits_{\xi}^{x_1} f(x\,,\; y_\nu\,,\; p_\nu)\,dx\,,$$

wobei das zweite Integral auf der rechten Seite längs der Enveloppe (E) genommen ist, und bezeichnet man die Stelle $(\xi\,,\;\eta_\nu)$ durch 2, die längs der Extremalen genommenen Integrale aber durch überstrichene Buchstaben, so bedeutet diese Gleichung

$$\overline{J}_{01} = \overline{J}_{02} + J_{21}\,,$$

eine Gleichung, durch welche die in der Einleitung besprochene Eigenschaft der geodätischen Linien verallgemeinert wird.

Diese Gleichung zeigt, dass der Integrationsweg 021, auf welchem von 0 bis 2 längs einer Extremale, von 2 bis 1 längs der Enveloppe integriert ist, denselben Werth von J giebt, wie der ursprünglich betrachtete Weg 01.

Wenn nun angenommen wird

$$\Xi'(0) \gtrless 0\,, \tag{23}$$

so kann man, da $\Xi(0) = x_1$, durch passende Wahl von t in beliebiger Nähe des Werthes 0 bewirken, dass ξ dem Intervall von x_0 bis x_1 angehört.

Dann können die Integrationswege 01 und 021 durch gleiche Werthe der Variablen x in eindeutig umkehrbarer Weise auf einander bezogen werden, und haben in entsprechenden Stellen beliebig wenig von einander abweichende Werthe der Grössen p_ν.

Die zusammengesetzte Mannichfaltigkeit 021 gehört also zu denjenigen, mit denen man die ursprüngliche 01 hinsichtlich des Werthes von J vergleichen muss, schon wenn es sich um ein schwaches Extremum handelt, d. h. um ein Extremum gegenüber den Mannichfaltigkeiten, welche nicht nur hinsichtlich der Werthsysteme $(x\,,\; y_\nu)$, sondern auch hinsichtlich der Differentialverhältnisse $dy_\nu : dx$ von der ursprünglich betrachteten hinreichend wenig abweichen.

Unter der Voraussetzung (23) ist also schon das schwache Extremum des Integrals J für das von den Stellen 0 und 1 begrenzte Stück der Extremale (C) nicht mehr vorhanden, und es giebt im angegebenen Sinne beliebig nahe benachbarte Mannichfaltigkeiten, welche genau denselben Werth von J wie jenes Stück 01 liefern.

Hat man dagegen die Gleichung

$$\Xi'(0) = 0,$$

welche in den Formen

$$\sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt}\Bigg|^{t=0} = 0,$$

$$\text{(24)} \qquad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial \xi}{\partial a_\nu} \varDelta_{m\nu}\Bigg|^{a_\nu = A_\nu} = 0, \quad \sum_{\nu}^{1,n} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_\nu} \varDelta_{m\nu}\Bigg|^{x_1, A_\nu} = 0$$

geschrieben werden kann, so sind Fälle möglich, in denen das ausgesprochene Resultat zweifelhaft wird; dies würde geschehen, wenn ξ für kleine Werthe von t nicht in das Intervall zwischen x_0 und x_1 hereintritt, die Enveloppe (E) also in der Stelle 1 das Analogon eines Rückkehrpunktes darbietet, dessen Zweige von 1 aus nach derjenigen Seite gehen, welche der Richtung von x_1 nach x_0 hin entgegengesetzt ist.

Jedenfalls aber genügt es die Gleichung (24) auszuschliessen, um bei den Voraussetzungen (9), (10) mit Sicherheit behaupten zu können, dass das gesuchte Extremum an der Stelle 1 in der angegebenen Weise aufhört.

Berlin, Februar 1902.