Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ VIII.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.
Паровая Типо-Литографія М. Зильберберга и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1902. -1904

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome VIII.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ VIII.

1902-1904.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1904.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшается. Харьковъ, 25-го Октября 1904 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *В. Стекловъ.*

СОДЕРЖАНІЕ

VIII-го тома.

TABLE DES MATIÈRES

du tome VIII.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му октября 1904 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: В. А. Стекловъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. П. Грузинцевъ и В. П. Алексѣевскій.
3. Секретарь А. П. Пшеборскій.

В. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Московскаго универс.
2. P. Appell, проф. Парижскаго университета, академикъ.
3. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. университета.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. университета св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго университета.
6. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. университета.
7. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
8. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. университета, академикъ.
9. E. Picard, проф. Парижскаго университета, академикъ.
10. H. Poincaré, проф. Парижскаго университета, академикъ.
11. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. электро-техн. ин.
12. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьков. универс.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Харьковскаго универ.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.
3. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
4. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
5. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. университета св. Владиміра.

6. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. технол. инстит.
7. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумскаго реальнаго училища.
8. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьковскаго университета.
9. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьковскаго универс.
10. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. универ.
11. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, дирек. Кіев. политехн. инст.
12. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. технологич. института.
13. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф. СПБ.
14. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежскаго кадет. корпуса.
15. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимназіи.
16. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьковскаго технолог. инст.
17. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьковской гимн.
18. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. нар. учил. Курск. губ.
19. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
20. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, бывш. проф. Харьк. технол. инст.
21. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго университета.
22. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьк.
23. Маевскій Андрей Васильевичъ, преп. 3-й Харьковской гимназіи.
24. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал уч.
25. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго техн. института.
26. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Харьковскаго техн. инст.
27. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, бывш. проф. Харьк. техн. ин.
28. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьковскаго техн. инст.
29. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
30. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, приватъ-доцентъ Харьков. универс.
31. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
32. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьковскаго учебн. окр.
33. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стип. Харьковск. универ.
34. Роговской Евгеній Александровичъ, проф. Харьковскаго универс.
35. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, бывш. преп. Урюпинск. реал. учил.
36. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Кіевскаго полит. инст.
37. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, преп. Изюмскаго реальн. училища.
38. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
39. Синцовъ Дмитріи Матвѣевичъ, проф. Харьковскаго университета.
40. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьковской гимназіи.
41. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьковскаго университета.
42. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьковскаго университета.
43. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьковск. унив.
44. Флоровъ Петръ Степановичъ, дирек. Усть-Медвѣд. реальн. училища.
45. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьков. гимназ.
46. Шиллеръ Николай Николаевичъ, дирек. Харьковскаго техн. инст.

47. Шимковъ Андрей Петровичъ, бывш. проф. Харьковскаго универс.
48. Шиховъ Василій Васильевичъ, дирек. Харьковскаго реал. училища.
49. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьковской гимн.
50. Чернай Николай Александровичъ, проф. Харьковскаго технол. инст.

D. Члены-корреспонденты.

a) **русскіе:**

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго университ.
2. Вороной Георгій Ѳедосѣевичъ, проф. Варшавскаго университета.
3. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго университ.
4. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, попеч. Московскаго учебн. округа.
5. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. университета.
6. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. горнаго института.
7. Тороповъ Константинъ Александровичъ, преп. Пермской гимназіи.

b) **иностранные:**

1. Cosserat E., проф. Тулузскаго университета.
2. Hadamard J., проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
3. Hurwitz A., проф. политехникума въ Цюрихѣ.
4. Kneser A., проф. Берлинской горной академіи (Bergakademie).
5. Korn A., проф. Мюнхенскаго университета.
6. Zaremba S., проф. Краковскаго университета.

Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Мы беремся обобщить интересные результаты, касающіеся такъ называемыхъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, полученные Раффи [1]) и сообщеные имъ Французскому Математическому Обществу 4 апрѣля 1884 года.

Эрмитъ [2]) указываетъ классъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, подъ который подходятъ извѣстные интегралы Эйлера [3])

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

и доказываетъ при помощи эллиптическихъ функцій теорему:

Интегралы

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

въ которыхъ f, f_1, f_2 означаютъ раціональныя функціи, приводятся къ интеграламъ отъ раціональныхъ дробей, а потому суть интегралы псевдо-эллиптическіе, если функціи

$$f(x^2), \; f_1(x^2), \; f_2(x^2)$$

---

[1]) Raffy. Sur les transformations invariantes des differentielles elliptiques. Bulletin de le Société Mathématique de France, t. XII, 1984, p. 51.

[2]) Hermite. Sur une formule d'Euler. Journal de Liouville, 1880.

[3]) Euleri Inst. Calculi Integralis. 1776 г., т. IV, стр. 36.

удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right),$$

$$f_1(x^2) = -f_1\left(\frac{1-k^2 x^2}{k^2(1-x^2)}\right),$$

$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2 x^2}\right).$$

При этихъ условіяхъ приведеніе выполняется подставками

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Классъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи обнимаетъ интегралы Эрмита, причемъ только что упомянутый результатъ, полученный довольно сложнымъ путемъ Эрмитомъ, выводится, какъ простое слѣдствіе изслѣдованій Раффи. Кромѣ того, какъ я ниже покажу, изслѣдованія Эйлера, Реалиса [1]), Малле[2]) и Буняковскаго [3]) являются тоже слѣдствіями тѣхъ же изслѣдованій.

Раффи доказываетъ, что, если раціональная функція $f(x)$ такова, что при x и y, удовлетворяющихъ Эйлеровскому уравненію

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0,$$

гдѣ

$$R(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$f(x)$ удовлетворяетъ условію

$$f(x) + f(y) = 0,$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

---

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques, p. 389, 1882.

[2]) Mallet. Two theorems in integration. Annali di matematica pura ed applicata, t. V, p. 252.

[3]) Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости. Приложеніе къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

есть интегралъ псевдо-эллиптическій, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи.

Здѣсь особенно интересенъ тотъ фактъ, что при вышеупомянутыхъ условіяхъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}},$$

или, по терминологіи Раффи, эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, такъ что теорема Раффи формулируется еще такъ: если эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, то

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

интегралъ псевдо-эллиптическій.

Изъ этого обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи выдѣляетъ группу, которой соотвѣтствуетъ преобразованіе типа

$$Nxy=L(x+y)+M$$

(гдѣ L, M, N постоянныя), которой занимался съ нѣкоторой другой точки зрѣнія также Гурза [1]).

Для интеграловъ этой группы Раффи даетъ общую формулу: для $a+b$ не равно $c+d$

$$\int\left(x-\frac{Lx+M}{x-L}\right)\Psi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

$$L=\frac{ab-cd}{(a+b)-(c+d)},$$

$$M=\frac{(a+b)\,cd-(c+d)\,ab}{(a+b)-(c+d)},$$

[1]] Goursat. Note sur quelques integrales pseudo-elliptiques. Bulletin de la Société Mathématique, t. XV.

а Ψ означаетъ раціональную функцію. Для $a+b=c+d$ на основаніи изслѣдованій Раффи получаемъ формулу

$$\int \frac{x^2-M}{x}\,\Psi\left(\frac{x^2+M}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ у $R(x)$ и Ψ тѣже значенія, а

$$M=a+b=c+d.$$

Мы беремъ болѣе общій случай, когда подъ радикаломъ стоитъ полиномъ какой угодно степени (не ниже 3-ей) и вмѣсто дифференціальнаго уравненія Эйлера, служащаго основой изслѣдованій Раффи, беремъ систему дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,, \\
\frac{x_1dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_ndx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,, \qquad (1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,
\end{gathered}$$

гдѣ

$$X_i=a_{2n}x_i^{2n}+a_{2n-1}x_i^{2n-1}+\ldots+a_1x_i+a_0\,,$$

которую можно писать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}\,,\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)},\quad \ldots,\frac{dx_n}{dt}=\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}\,, \qquad (2)$$

если

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Понятіе объ инваріантномъ преобразованіи обобщается такъ: Ультраэллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, если для x и y, удовлетворяющихъ уравненіямъ Якоби, имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\ldots+\frac{1}{f(x_n)}=0\,,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)}+\frac{x_2}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n}{f(x_n)}=0\,, \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)}=0$$

или, что тоже,

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}=\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}=\ldots=\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\,, \tag{4}$$

причемъ, конечно, исключаются рѣшенія

$$x_1=\text{const.},\qquad x_2=\text{const.},\ldots,x_n=\text{const.},$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ исключается случай, когда

$$F'(x_i)=0\,,$$

такъ какъ тогда

$$x_i=x_k=\text{const.},\qquad x_1=\text{const.},\ldots,x_n=\text{const.}$$

Обобщенная теорема Раффи будетъ состоять въ томъ, что дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}\,,$$

допускающій инваріантное преобразованіе въ только что указанномъ смыслѣ, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Кромѣ того, мы въ нѣкоторомъ частномъ случаѣ, соотвѣтствующемъ вышеупомянутому инволюціонному преобразованію для эллиптическихъ интеграловъ, даемъ общую формулу для псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ.

§ 2. Весьма важно для нашей цѣли знать общія рѣшенія дифференціальныхъ уравненій Якоби. Въ этомъ отношеніи замѣчателенъ мемуаръ Якоби [1]), въ которомъ онъ даетъ общія рѣшенія этой системы

---

[1]) Jacobi. Uber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 32, p. 200—226. Verke, Bd. 2, p. 135.

уравненій въ особенной и для нашей цѣли весьма полезной формѣ. Мы приводимъ теорему Якоби, сдѣлавъ необходимое, по нашему мнѣнію, дополненіе къ его доказательству.

Теорема I.

Рѣшенія $x_1, x_2, \dots, x_n$ системы конечныхъ уравненій

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{Y_1}{Y}, \\
p_2 &= \frac{Y_2}{Y}, \\
&\dots . \\
p_n &= \frac{Y_n}{Y},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

гдѣ

$$
\begin{aligned}
p_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\
p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_n &= x_1x_2\dots x_n
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и

$$
\begin{aligned}
Y &= r_ny^2 + 2s_ny + t_n, \\
Y_1 &= r_{n-1}y^2 + 2s_{n-1}y + t_{n-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
Y_n &= r_0y^2 + 2s_0y + t_0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

полиномы 2-ой степени относительно y, суть общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\
&\frac{x_1dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{x_ndx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}} + \dots + \frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

если коэффиціенты r_n, s_n, t_n, r_{n-1}, s_{n-1}, $t_{n-1}, \dots, r_0$, s_0, t_0 удовлетворяютъ $2n+1$ уравненіямъ, получающимся отъ приравниванія коэффиціентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ тождества:

$$[s_n x^n - s_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^n s_0]^2 - [r_n x^n - r_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^n r_0]$$
$$[t_n x^n - t_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^n t_0] = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если принять обозначенія (6), то x_1, $x_2, \dots, x_n$ должны быть корнями уравненія

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots (-1)^n p_n = 0.$$

Если x_1, $x_2, \dots, x_n$ рѣшенія системы уравненій (5), то уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$Yx^n - Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n Y_n = 0, \tag{8}$$

гдѣ Y, Y_1, $Y_2 \dots Y_n$ имѣютъ значенія (7).

Расположенное по нисходящимъ степенямъ y, это уравненіе представляется еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ry^2 + 2Sy + T = 0, \tag{9}$$

$$R = r_n x^n - r_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} r_1 x + (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} s_1 x + (-1)^n s_0, \tag{10}$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} t_1 x + (-1)^n t_0.$$

Мы докажемъ, что всѣ корни уравненія (8) представляютъ изъ себя рѣшенія: x_1, $x_2, \dots, x_n$ уравненій (1), если мы имѣемъ тождественно

$$S^2 - RT = a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 = X$$

при всякомъ x, т. е. если имѣютъ мѣсто тѣ $2n+1$ уравненій, которыя получаются отъ приравниванія коэффиціентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ.

Для доказательства дифференцируемъ уравненіе (8).

Тогда на основаніи тождества

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots (-1)^n Y_n$$

получаемъ

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Y_1x^{n-2}+\ldots(-1)^{n-1}Y_{n-1}}=0,$$

или, вводя обозначенie

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0. \qquad (12)$$

Замѣчая, что по условію

$$Ry+S=\pm\sqrt{S^2-RT},$$

или, условившись подразумѣвать оба значенія радикала,

$$Ry+S=\sqrt{S^2-RT}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{\sqrt{S^2-RT}}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0.$$

Но по условію

$$S^2-RT=X \qquad (11)$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0.$$

Подобное уравненіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ корней уравненія (8) $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Мы можемъ, значитъ, написать

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}}+\frac{2dy}{YF'(x_i)}=0. \qquad (i=1,2,3\ldots n) \qquad (12)$$

Суммируя эти уравненія, умноживъ, предварительно, каждое на x_i^k, получаемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^k\,dx_i}{\sqrt{X_i}}=0$$

для $k=0,1,2,3,\ldots,n-2$, такъ какъ для этихъ значеній k

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k}{F'(x_i)} = 0.$$

Такимъ образомъ корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравненія (8) или, что тоже, рѣшенія системы (4) удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ Якоби (1).

Теперь покажемъ, что полиномы R, S, T могутъ существовать при всѣхъ X и что уравненіе (8) даетъ общія рѣшенія системы (1), т. е. рѣшенія, въ которыя входитъ ровно $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Такъ какъ R, S, T полиномы n-ой степени, то число коэффиціентовъ, въ нихъ входящихъ $3(n+1)$. Съ коэффиціентами: $a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_1, a_0$ они связаны числомъ уравненій, равнымъ числу этихъ послѣднихъ; $3(n+1)-(2n+1)=(n+2)$ коэффиціента остаются неопредѣленными. Якоби показываетъ, что хотя произвольныхъ величинъ входитъ $n+2$, но онѣ сводятся къ $n-1$, такъ что число произвольныхъ постоянныхъ будетъ не болѣе $n-1$, какъ слѣдовало ожидать. Однако отсюда еще не слѣдуетъ, что найденныя рѣшенія суть общія, можно воображать, что и эти $n-1$ произвольныя постоянныя сводятся еще къ меньшему числу. Мы докажемъ, что рѣшенія дѣйствительно общія, если будетъ нами доказано, что для коэффиціентовъ r, s, t можно всегда найти значенія, согласныя съ условіемъ (11) и такія, что для $x_1 = a_1$ величины $x_2, x_3, \ldots, x_n$ принимаютъ напередъ назначенныя значенія, напримѣръ, $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Принимаемъ за a_1 значеніе x_1 для $y=0$.

Но для

$$y=0 \qquad s_i = \sqrt{X_i},$$

или

$$s_n a_i^n - s_{n-1} a_i^{n-1} + \ldots (-1)^n s_0 = \sqrt{X_i}, \qquad (i=2..n)$$

изъ этихъ $n-1$ уравненій опредѣляемъ $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_0$, причемъ даже можемъ положить для простоты

$$s_n = 0, \qquad s_{n-1} = 0.$$

При всевозможныхъ значеніяхъ $a_2, a_3, \ldots, a_n$, при которыхъ опредѣлитель

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_2^{n-1} a_2^{n-2} \ldots 1 \\ a_3^{n-1} a_3^{n-2} \ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n^{n-1} a_n^{n-2} \ldots 1 \end{vmatrix} = (a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_{n-1}-a_n)$$

не равенъ нулю, система уравненій даетъ опредѣленныя значенія для s_{n-2}, $s_{n-3}, \cdots, s_0$, при $\Delta = 0$ нѣсколько уравненій будутъ тождественны, столько же величинъ s могутъ получить произвольныя значенія. Остальныя величины опредѣлятся изъ полученной системы уравненій.

По s_n, $s_{n-1}, \cdots, s_0$ опредѣлятся коэффиціенты $r_n, r_{n-1}, \cdots, r_0$, $t_n, t_{n-1}, \cdots, t_0$, если разложимъ $S^2 - X$ на два множителя степени n каждый. Сколько такихъ разложеній, столько получимъ системъ значеній, причемъ одному коэффиціенту, напримѣръ r_n, можно придать произвольное значеніе.

Теорема II-я.

Общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ системѣ конечныхъ уравненій 2-й степени относительно $p_1, p_2, \cdots, p_n$

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(k)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0,$$

$$\alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_2^{(k)} p_1 + 2\delta_2^{(k)} p_k p_2 + \varepsilon_2^{(k)} p_k^2 + \zeta_2^{(k)} p_2^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (13)$$

$$\alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} + 2\delta_{k-1}^{(k)} p_k p_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^{(k)} p_k^2 + \zeta_{k-1} p_{k-1}^2 = 0,$$

$$\alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k+1} + 2\delta_{k+1}^{(k)} p_k p_{k+1} + \varepsilon_{k+1}^{(k)} p_k^2 + \zeta_{k+1} p_{k+1}^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n + 2\delta_n^{(k)} p_k p_n + \varepsilon_n^{(k)} p_k^2 + \zeta_n^{(k)} p_n^2 = 0.$$

Такъ какъ $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ полиномы 2-й степени относительно y, то

$$Y^2, \quad p_k Y^2 = Y Y_k, \quad p_1 Y^2 = Y_1 Y, \quad p_1 p_k Y^2 = Y_1 Y_k,$$

$$p_k^2 Y^2 = Y_k^2 \quad \text{и} \quad p_k^2 Y^2 = Y_1^2$$

будутъ 4-ой степени относительно y.

Мы всегда можемъ опредѣлить въ зависимости отъ коэффиціентовъ этихъ полиномовъ постоянныя

$$\alpha_1^{(k)}, \ 2\beta_1^{(k)}, \ 2\gamma_1^{(k)}, \ 2\delta_1^{(k)}, \ \varepsilon_1^{(k)}, \ \zeta_1^{(k)}$$

такъ, что

$$\alpha_1^{(k)} Y^2 + 2\beta_1^{(k)} p_k Y^2 + 2\gamma_1^{(k)} p_1 Y^2 + 2\delta_1^{(k)} p_1 p_k Y^2 +$$

$$+ \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 Y^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 Y^2 = 0. \qquad (a)$$

Дѣйствительно, приравнявъ коэффиціенты при y^4, y^3, y^2, y, y^0 нулю, получимъ 5 уравненій линейныхъ и однородныхъ относительно $\alpha_1^{(n)}, 2\beta_1^{(k)}$, и т. д. Сокращая же на Y^2 уравненіе (a) имѣемъ:

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(n)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0.$$

Такимъ же образомъ получаемъ и остальныя уравненія (13). Эти уравненія, опредѣляющія $p_1, p_2, \ldots, p_n$, въ функціи отъ p_k, а по нимъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, независимы другъ отъ друга, если только заразъ не равны нулю: $\gamma_e^{(k)}, \delta_e^{(k)}, \zeta_e^{(k)}, \gamma_m^{(k)}, \delta_m^{(k)}, \zeta_m^{(k)}$, т. е. когда p_k не равно постоянному, ибо тогда въ каждое уравненіе будетъ входить по новой буквѣ.

При нѣкоторыхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ можетъ случиться, что

$$\begin{gathered}
\delta_1^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} = \zeta_1^{(k)} = 0, \\
\delta_2^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} = \zeta_2^{(k)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\delta_n^{(k)} = \varepsilon_n^{(k)} = \zeta_n^{(k)} = 0
\end{gathered}$$

и уравненія (13) обращаются тогда въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 = 0, \\
&\alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} = 0, \\
&\alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k-1} = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Рѣшимъ вопросъ, при всякихъ ли значеніяхъ коэффиціентовъ полинома X это возможно, и найдемъ въ случаѣ возможности значенія коэффиціентовъ α, β, γ въ уравненіяхъ (14).

Если

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{Y_1}{Y}, \\
p_2 &= \frac{Y_2}{Y}, \\
&\cdots\cdots \\
p_n &= \frac{Y_n}{Y},
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

то уравненія (14) можно написать такимъ образомъ:

$$\alpha_i^{(k)} Y + 2\beta_i^{(k)} Y_k + 2\gamma_i^{(k)} Y_i = 0 . \qquad (i=1,2,3,\ldots,k-1,n+1,n)$$

Значенія $\alpha_i^{(k)}$, $2\beta_i^{(k)}$, $2\gamma_i^{(k)}$ получаемъ, приравнивая нулю коэффиціенты при y^2, y, y^0 въ лѣвой части, т. е. изъ уравненій

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{(k)} r_n + 2\beta_i^{(k)} r_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} r_{n-i} = 0 , \\ &\alpha_i^{(k)} s_n + 2\beta_i^{(k)} s_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} s_{n-i} = 0 , \\ &\alpha_i^{(k)} t_n + 2\beta_i^{(k)} t_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} t_{n-i} = 0 . \end{aligned} \tag{15}$$

Не нарушая общности рѣшенія, можемъ, какъ выше замѣтили, положить

$$s_n = 0, \qquad s_{n-1} = 0.$$

Но тогда также и $s_{n-k} = 0$, а потому и

$$s_{n-2} = 0, \qquad s_{n-3} = 0, \ldots, s_1 = 0, \qquad s_0 = 0. \tag{16}$$

$$p_1 = \frac{r_{n-1} y^2 + t_{n-1}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$p_2 = \frac{r_{n-2} y^2 + t_{n-2}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{r_0 y^2 + t_0}{r_n y^2 + t_n}.$$

Для того, чтобы эти значенія удовлетворяли системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби, необходимо и достаточно, чтобы

$$S^2 - RT = X,$$

а такъ какъ $S = 0$, то

$$RT = -X,$$

или

$$RT = -a_{2n}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}),$$

откуда

$$r_n t_n = -a_{2n}$$

и

$$\frac{1}{r_n} R = x^n - \frac{r_{n-1}}{r_n} x^{n-1} + \frac{r_{n-2}}{r_n} x^{n-2} \ldots \pm \frac{r_0}{r_n} =$$

$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

$$\frac{1}{t_n} R = x^n - \frac{t_{n-1}}{t_n} x^{n-1} + \frac{t_{n-2}}{t_n} x^{n-2} \ldots \pm \frac{t_0}{t_n} =$$

$$= (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \ldots (x - \alpha_{2n}).$$

Принимая обозначенія

$$\left.\begin{aligned}
&\pi'_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n, \\
&\pi'_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\pi'_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n; \\
&\pi''_1 = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} + \ldots \alpha_{2n}, \\
&\pi''_2 = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1}\alpha_{n+3} + \ldots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\pi''_n = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n},
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

получаемъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r_{n-1}}{r_n} = \pi'_1, \quad \frac{r_{n-2}}{r_n} = \pi'_2, \ldots, \frac{r_{n-k}}{r_n} = \pi'_k, \ldots, \frac{r_0}{r_n} = \pi'_n; \\
&\frac{t_{n-1}}{t_n} = \pi''_1, \quad \frac{t_{n-2}}{t_n} = \pi''_2, \ldots, \frac{t_{n-k}}{t_n} = \pi''_k, \ldots, \frac{t_0}{t_n} = \pi''_n.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Очевидно, для каждой изъ этихъ величинъ будетъ столько значеній, сколько существуетъ сочетаній изъ $2n$ корней X по n элементовъ т. е.

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Такъ что, если уравненія (14) имѣютъ мѣсто, то s имѣютъ значенія (16), а r, t значенія (18).

Найдемъ теперь соотвѣтствующія значенія коэффиціентовъ $\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}, \gamma_i^{(k)}$.

Изъ уравненій (15) получаемъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{r_{n-k}t_{n-i}-t_{n-k}r_{n-i}}=\frac{2\beta_i^{(k)}}{-(r_n t_{n-i}-r_{n-i}t_n)}=\frac{2\gamma_i^{(k)}}{(r_n t_{n-k}-t_n r_{n-1})}.$$

Эти уравненія, по раздѣленіи знаменателя каждаго члена на r_n и t_n, на основаніи уравненія (18) переобразовываются такъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}=\frac{2\beta_i^{(k)}}{-(\pi'_i-\pi''_i)}=\frac{2\gamma_i^{(k)}}{(\pi''_k-\pi'_k)}.$$

Откуда

$$p_i=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}p_k+\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k},$$

или, какъ мы условимся впредь обозначать

$$p_i=L_i^{(k)}p_k+M_i^{(k)}, \tag{19}$$

гдѣ

$$L_i^{(k)}=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}, \tag{20}$$

$$M_i^{(k)}=\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k}. \tag{21}$$

Такимъ образомъ имѣетъ мѣсто

Теорема III-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненіямъ вида:

$$p_i=a_i^{(k)}p_k+b_i,$$

то

$$a_i^{(k)}=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}=L_i^{(k)},$$

$$b_i^{(k)}=\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k}=M_i^{(k)},$$

гдѣ $\pi'_i, \pi''_i, \pi'_k, \pi''_k$ имѣютъ значенія (17).

Посмотримъ, каково должно быть условіе, чтобы уравненіе

$$p_i=L_i^{(k)}p_k+M_i^{(k)}$$

обращалось въ

$$p_i = M_i^{(k)} = \text{const.} \tag{22}$$

Для этого, какъ это видно изъ уравненія (19), необходимо и достаточно, чтобы

$$L_i^{(k)} = 0\,,$$

или по (20)

$$\pi'_i = \pi''_i. \tag{23}$$

Если мы имѣемъ

$$\pi'_i = \pi''_i \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n,$$

то уравненія (19) обращаются въ слѣдующія

$$p_i = M_i^{(k)} \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\; k+1, \ldots, n\,;$$

отсюда получаемъ теорему:

Теорема IV-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби таковы, что

$$p_i = \text{const.} \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\; k+1, \ldots, n,$$

то, во первыхъ, корни полинома X таковы, что имѣютъ мѣсто между ними соотношенія

$$\pi'_i = \pi''_i \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\; k+1, \ldots, n\,;$$

во вторыхъ

$$p_i = M_i^{(k)}\,,$$

гдѣ

$$M_i^{(k)} = \pi'_i = \pi''_i.$$

Отмѣтимъ въ заключеніе одно интересное свойство рѣшеній Якобіевскихъ уравненій, вытекающее изъ предыдущей теоріи.

Теорема V-я.

Всякая симметрическая функція рѣшеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Якобіевскихъ уравненій выражается раціонально черезъ $\sqrt{X_i}$ и x_i.

Дѣйствительно, мы имѣемъ по теоремѣ I

$$p_k = \frac{r_{n-k}y^2 + 2s_{n-k}y + t_{n-k}}{r_ny^2 + 2s_n + t_n},$$

но изъ уравненія

$$R_iy^2 + 2S_iy + T_i = 0,$$

въ которомъ R_i, S_i, T_i значенія R, S, T при $x = x_i$,

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{S_i^2 - R_iT_i}}{R_i};$$

но $S_i^2 - R_iT_i = X_i$, слѣдовательно

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{X_i}}{R_i}. \tag{24}$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе p_k, получаемъ

$$p_k = \frac{M_k + N_k\sqrt{X_i}}{M_n + N_n\sqrt{X_i}} \qquad (k=1,2,3\ldots n)$$

въ видѣ раціональной функціи отъ x_i и $\sqrt{X_i}$.

Такъ какъ всякая симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ выражается раціонально черезъ $p_1, p_2, \cdots, p_n$, то теорема такимъ образомъ доказана.

---

§ 3. Существеннымъ добавленіемъ къ изслѣдованіямъ Якоби являются прекрасныя изслѣдованія Ришло [1]), давшаго два интеграла Якобіевскихъ уравненій, подобныхъ интегралу Эйлеровскаго уравненія [2])

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

---

[1]) Richelot. Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 23, стр. 361. Richelot. Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 25.

[2]) Lagrange. Oeuvres Complétes, t. II, p. 18.

въ формѣ

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} = (x_2 - x_1)\sqrt{a_4 p_1^2 + a_3 p_1 + C}\,,$$

гдѣ $p_1 = x_1 + x_2$, имѣющему важное значеніе въ изслѣдованіяхъ Раффи.

Теорема Ришло состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема VI-я.

Рѣшенія Якобіевскихъ уравненій

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,,\\
&\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (1)\\
&\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0
\end{aligned}$$

удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)} = \sqrt{K}\,, \qquad (25)$$

гдѣ

$$K = a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C\,, \qquad (26)$$

C произвольная постоянная,

$$p_1 = x_1 + x_2 + \ldots x_n\,,$$

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Для доказательства систему Якобіевскихъ уравненій (1) замѣняемъ слѣдующей, ей равносильной

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}\,,\quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)}\,,\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}\,, \qquad (2)$$

гдѣ

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Дифференцируя по t и замѣняя $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ ихъ выраженіями (2), получаемъ

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\frac{X_1}{F'(x_1)^2}\right)}{\partial x_1}\right] + \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}\sum_{k=2}^{k=n}\frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}\frac{1}{x_1 - x_k}$$

и т. д.

Складывая эти уравненія, получаемъ по сокращеніи

$$2\frac{d^2p_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right)}{\partial x_k}. \tag{27}$$

Черезъ сложеніе же уравненій (2)

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}. \tag{28}$$

Разлагая дробь $\frac{X}{F(x)^2}$ на простѣйшія, получаемъ

$$\frac{X}{F(x)^2} - a_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\frac{1}{(x - x_k)^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial\left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right)}{\partial x_k}\right]\frac{1}{x - x}.$$

Разлагая обѣ части этого тождества по нисходящимъ степенямъ x и приравнивая коэффиціенты при $\frac{1}{x}$, получаемъ

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\left[\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right]}{\partial x_k},$$

или, на основаніи (27),

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = 2\frac{d^2p_1}{dt^2}.$$

Умножая на $\frac{dp_1}{dt}$ и интегрируя, получаемъ

$$\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

или

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{K}. \qquad (29)$$

Отсюда, по замѣнѣ $\frac{dp_1}{dt}$ его выраженіемъ (28), получаемъ формулу (25).

Перейдемъ теперь къ нѣкоторымъ характернымъ свойствамъ Якобіевскихъ уравненій, позволяющимъ вывести изъ только что найденнаго интеграла остальные $n-2$ интеграла, а въ томъ числѣ и второй интегралъ Ришло.

Лемма.

Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ удовлетворяютъ системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k dx_i}{\sqrt{X_i}} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n=2) \qquad (1)$$

то $y_1, y_2, \cdots, y_n$, связанныя съ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ соотношеніями

$$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \qquad (i=1,2,3,\ldots,n) \qquad (30)$$

удовлетворяютъ системѣ аналогичныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-2) \qquad (31)$$

гдѣ

$$Y_i = b_{2n}y^{2n} + b_{2n-1}y^{2n-1} + \cdots b_1 y + b_0 = a_{2n}(dy-b)^{2n} +$$
$$+ a_{2n-1}(dy-b)^{2n-1}(-cy+a) + \cdots, a_0(-cy+a)^{2n}. \qquad (32)$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи (30),

$$\frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc-ad)(cx_i+d)^{n-k-2}(ax_i+b)^k dx_i}{\sqrt{X_i}},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \sum_{i=1}^{k=n} \frac{g_0^{(k)} + g_1^{(k)}x_i + \cdots g_{n-2}^{(k)}x_i^{n-2}}{\sqrt{X_i}} dx_i,$$

или, на основаніи уравненія (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0. \qquad (\text{при } k=0, 1, 2, \ldots, n-2) \tag{31}$$

Теорема VII-я.

Рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}, \tag{32}$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d} dt, \tag{33}$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma, \tag{34}$$

Γ произвольная постоянная, а $b_{2n}, b_{2n-1}, \ldots, b$, a имѣютъ тоже значеніе, что въ леммѣ; t связано съ t соотношеніемъ

$$dt_1 = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)}, \tag{35}$$

$$\Pi(x) = (cx_1 + d)(cx_2 + d) \ldots (cx_n + d). \tag{36}$$

По леммѣ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанныя съ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соотношеніями (30), когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рѣшенія Якобіевскихъ уравненій, удовлетворяютъ уравненіямъ (31), получающимся замѣной $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Но $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя уравненіямъ Якоби (1), удовлетворяютъ, по теоремѣ VI, вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C}. \tag{29}$$

Значитъ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющіе тоже уравненіямъ Якоби (31), удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma}, \tag{32}$$

получаемому замѣной $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Дѣйствительно, при такой замѣнѣ p_1 должна перейти въ q_1, опредѣляемой формулой (33).

Для того же, чтобы узнать, во что переходитъ t, преобразуемъ уравненія

$$\frac{\Phi'(y_1)dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \frac{\Phi'(y_2)dy_2}{\sqrt{Y_2}} = \ldots = \frac{\Phi'(y_n)dy_n}{\sqrt{Y_n}} = dt_1, \tag{37}$$

$$\Phi(y) = (y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_n),$$

равносильныя уравненіямъ (31), подставивъ въ нихъ вмѣсто y ихъ выраженія (30) въ x.

Тогда получимъ

$$\Phi'(y_i) = \frac{(bc - ad)^{n-1} F'(x_i)}{(cx_1 + d)^{n-1}(cx_1 + d)(cx_2 + d)\ldots(cx_{i-1} + d)(cx_{i+1} + d)\ldots(cx_n + d)},$$

и

$$dy_i = \frac{(bc - ad)}{(cx_i + d)^2} dx_i,$$

$$dt_1 = \frac{\Phi'(y_i)dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)} dt, \tag{35}$$

гдѣ

$$\Pi(x) = (cx_1 + d)(cx_2 + d)\ldots(cx_n + d). \tag{36}$$

Уравненіе (32), на основаніи соотношенія (35), можно еще написать такимъ образомъ

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)} \sqrt{L}, \tag{38}$$

или, такъ какъ по (33),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(bc - ad)}{(cx_i + d)^2} \frac{dx_i}{dt},$$

или, по уравненіямъ (2),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i + d)^2 F'(x_i)},$$

то

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i+d)^2 F'(x_i)} = \frac{(bc-ad)^{n-1}}{\Pi(x)^2} \sqrt{F}, \tag{39}$$

полагая $L = \frac{F}{\Pi(x)^2}$, гдѣ F будетъ очевидно цѣлой симметрической функціей отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Полагая

$$a=1, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=1,$$

получаемъ первый интегралъ Ришло (25).

Полагая

$$a=0, \quad b=1, \quad c=1, \quad d=0,$$

получаемъ второй интегралъ Ришло

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{x_i^2 F'(x_i)} = \frac{\sqrt{a_0 p_{n-1}^2 + a_1 p_n p_{n-1} + B p_n^2}}{p_n^2},$$

гдѣ B произвольная постоянная.

Замѣтимъ здѣсь, мимоходомъ, что, если мы возьмемъ $n-1$ системъ значеній a, d, c, d такихъ, что не имѣютъ мѣсто равенства

$$a_i d_i - b_i c_i = 0,$$

и

$$\frac{d_i}{c_i} = \frac{d_k}{c_k},$$

то $n-1$ уравненій (39), соотвѣтствующихъ имъ, представятъ $n-1$ независимыхъ интеграловъ уравненій Якоби. Впрочемъ это замѣчаніе въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ не понадобится.

§ 4. На основаніи теоремы Ришло можно вывести важный результатъ, служащій развитіемъ §-а 2-ого.

Теорема VIII-я.

Всякая раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выражается раціонально черезъ

$$p_1 = x_1 + x_2 + \cdots x_n$$

и $\sqrt{K}$, гдѣ

$$K = a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C.$$

Для доказательства возьмемъ уравненіе §-а 2-ого

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}} - \frac{2\,dy}{YF'(x_i)} = 0\,, \tag{12}$$

или

$$dx_i - \frac{2\sqrt{X_i}\,dy}{YF'(x_i)} = 0\,. \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Складывая эти уравненія, получаемъ

$$dp_1 - 2\left(\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}\right)\frac{dy}{Y}\,,$$

или, такъ какъ по теоремѣ Ришло (25)

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)} = \sqrt{K}\,,$$

гдѣ

$$K = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C\,,$$

то получаемъ

$$\frac{dp_1}{\sqrt{K_1}} = \frac{2\,dy}{Y}.$$

Отсюда

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = 2\int\frac{dy}{Y} + \Gamma. \tag{40}$$

Если a_{2n} не равно нулю, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\lg\left(\frac{2\,a_{2n}p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K}\right). \tag{41}$$

Если $a_{2n} = 0$ и a_{2n-1} не равно нулю, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{2}{a_{2n-1}}\sqrt{K}\,, \tag{42}$$

и, наконецъ, если $a_{2n} = 0$ и $a_{2n-1} = 0$, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{p_1}{\sqrt{K}}. \tag{43}$$

Если мы положимъ, какъ въ §-ѣ 2-омъ,

$$R = r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \ldots (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \ldots (-1)^n s_0,$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \ldots (-1)^n t_0,$$

то, подставляя эти выраженія въ тождество

$$S^2 - RT = X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

получимъ въ лѣвой части

$$S^2 - RT = (s_n^2 - r_n t_n) x^{2n} + (-2 s_n s_{n-1} + r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n) x^{2n-1} + \ldots,$$

а въ правой части

$$X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

получимъ

$$a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n; \tag{44}$$

кромѣ того

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \ldots (-1)^n Y_n,$$

откуда

$$Y = r_n y^2 + 2 s_n y + t_n,$$

или

$$Y = r_n (y - \xi)(y - \eta),$$

гдѣ

$$\xi = \frac{-s_n + \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n},$$

$$\eta = \frac{-s_n - \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n}.$$

Принимая во вниманіе равенство (44), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{-s_n + \sqrt{a_{2n}}}{r_n}, \\ \eta &= \frac{-s_n - \sqrt{a_{2n}}}{r_n}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Когда $a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n$ не нуль, то ξ не равно η,

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{r_n(\xi - \eta)} \frac{1}{y - \xi} + \frac{1}{r_n(\eta - \xi)} \frac{1}{y - \eta}. \tag{46}$$

Но по уравненіямъ (45)

$$r_n(\xi - \eta) = 2\sqrt{a_{2n}}.$$

Поэтому уравненіе (46) напишется такъ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{2\sqrt{a_{2n}}} \left(\frac{1}{y - \xi} - \frac{1}{y - \eta} \right).$$

Умножая на dy и интегрируя, получаемъ

$$\int \frac{dy}{Y} = \frac{1}{2\sqrt{a_{1n}}} \lg \frac{y - \xi}{y - \eta}. \tag{47}$$

Подставляя въ уравненіе (40) значенія обоихъ интеграловъ, въ него входящихъ, изъ уравненій (41) и (47) и полагая

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \lg A,$$

гдѣ A новая произвольная постоянная, получимъ для случая, когда a_{2n} не равно нулю,

$$A \frac{y - \xi}{y - \eta} = \frac{2\, a_{2n} p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K}. \tag{48}$$

Изъ этого уравненія ясно, что y есть раціональная функція p_1 и $\sqrt{K}$.

Если $a_{2n} = 0$, но a_{2n-1} не нуль, то по уравненію (45) $\xi = \eta$.

Уравненіе (46) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{r_n(y - \xi)^2}, \tag{49}$$

а уравненіе (47) слѣдующимъ

$$\int \frac{dy}{Y} = -\frac{1}{r_n(y - \xi)}, \tag{50}$$

на основаніи котораго, а равно и (42), выводимъ изъ (40)

$$\frac{2}{a_{2n-1}}\sqrt{K} = -\frac{2}{r_n(y-\xi)} + \Gamma. \tag{51}$$

Это уравненіе тоже даетъ y въ раціональной функціи отъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Для случая же, когда и $a_{2n-1} = 0$, послѣднее уравненіе (51) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{p_1}{\sqrt{K}} = -\frac{2}{r_n(y-\xi)} + \Gamma, \tag{52}$$

тоже дающимъ, какъ и въ предыдущихъ двухъ случаяхъ, y въ раціональной функціи отъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Но на основаніи §-а 2-ого мы имѣемъ

$$p_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad p_2 = \frac{Y_2}{Y}, \ldots, p_n = \frac{Y_n}{Y}, \tag{7}$$

гдѣ $Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ цѣлыя функціи 2-ой степени относительно y. Слѣдовательно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ выражаются раціонально черезъ y, а такъ какъ, мы только что доказали, y выражается раціонально черезъ p_1 и $\sqrt{K}$, то такимъ же образомъ выражаются $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и всякая раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такъ какъ послѣдняя можетъ быть всегда раціонально выражена черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Послѣдняя теорема даетъ возможность доказать интересное свойство дифференціала $\frac{f(x)}{\sqrt{X}}dx$, допускающаго инваріантное преобразованіе.

Теорема IX-я.

Дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, допускающій инваріантное преобразованіе, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Не вводя термина: „инваріантное преобразованіе“, теорему можно формулировать такъ:

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,,$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,, \tag{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_2^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,,$$

удовлетворяютъ также еще слѣдующимъ уравненіямъ

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0\,,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0\,, \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0\,,$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдоультраэллиптическій, выражающійся черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи.

При доказательствѣ будемъ различать два случая:

1) p_1 не равно постоянному,

2) $p_1 = \text{const}$.

Уравненія (3) перепишемъ такъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\,, \tag{4}$$

гдѣ

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Тогда

$$n\,\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\,.$$

Умножая обѣ части на $\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$, имѣемъ

$$n\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\right)\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \qquad (53)$$

Но по теоремѣ VI (Ришло)

$$\frac{dp_1}{dt}=\sqrt{K}, \qquad (29)$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C, \qquad (26)$$

или, такъ какъ $\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}$, то, по раздѣленіи на это послѣднее уравненіе,

$$\frac{dp_1}{dx_1}=F'(x_1)\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X_1}},$$

или (54)

$$\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}}=\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

По подстановкѣ этого выраженія въ уравненіе (53) получаемъ

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{F'(x_1)\sqrt{X_1}}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\right)\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=R\frac{dp_1}{\sqrt{K}}, \qquad (55)$$

гдѣ

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

есть раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, и, слѣдовательно, раціональная функція отъ $p_1, p_2, \dots, p_n$. Но такая функція, по предыдущей теоремѣ VIII, выражается раціонально черезъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Пусть

$$R=\varphi(p_1, \sqrt{K}).$$

Подставляя въ уравненіе (55), получаемъ

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(p_1, \sqrt{R})\,\frac{dp_1}{\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \psi(p_1, \sqrt{K})\,dp_1,$$

гдѣ ψ раціональная функція отъ p и $\sqrt{K}$.

Интегрируя обѣ части послѣдняго равенства, имѣемъ

$$\int \frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \psi(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})\,dp_1. \tag{56}$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, берется въ конечномъ видѣ, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи

$$p_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{K} = \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C}.$$

Въ получаемомъ по интегрированіи выраженіи

$$\Phi_1(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})$$

слѣдуетъ произвести замѣну

$$p_1 \quad \text{на} \quad \frac{Y_1}{Y}, \qquad \text{(форм. 5)}$$

$$\sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C} \quad \text{на} \quad A\,\frac{y-\xi}{y-\eta} - \frac{2a_{2n}Y_1 + a_{2n-1}Y}{2\sqrt{a_{2n}}\,Y}. \qquad \text{(форм. 48)}$$

Затѣмъ въ полученномъ выраженіи замѣнить Y на

$$Y = \frac{-S_1 + \sqrt{X_1}}{R_1}. \tag{24}$$

Тогда получимъ

$$\int \frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \Phi_2(x_1, \sqrt{X_1}) \tag{57}$$

въ видѣ суммы алгебраической раціональной функціи отъ x_1 и $\sqrt{X_1}$ и логариѳмовъ подобныхъ функцій.

Теперь переходимъ ко второму случаю, когда

$$p_1 = \text{const.},$$

и прежде всего замѣтимъ, что всегда существуютъ такія значенія a, b, c, d, при которыхъ

$$q_1^{(j)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_j x_i + b_j}{c_j x_i + d_j}$$

не равно постоянному.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія

$$\frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 0\,, \quad \frac{dq_1^{(2)}}{dt} = 0\,, \ldots, \frac{dq_1^{(n)}}{dt} = 0$$

равносильны слѣдующимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(c_j x_i + d_j)^2} \frac{dx_i}{dt} = 0. \quad (\text{для } j = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{58}$$

Очевидно, опредѣлитель этой системы уравненій не обращается въ нуль тождественно при всѣхъ $c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n$; если бы это предположеніе имѣло мѣсто, то

$$\frac{dx_1}{dt} = 0\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0\,, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = 0\,,$$

или

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \ldots, x_n = \text{const.},$$

а этотъ случай нами исключенъ (§ 1) изъ понятія инваріантнаго преобразованія.

Беремъ тѣ значенія для a, b, c, d, при которыхъ q_1 не равно постоянному.

На основаніи теоремы VII

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}\,, \tag{32}$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d}\,, \tag{33}$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma. \tag{34}$$

По леммѣ §-а 3-яго $y_1, y_2, \cdots, y_n$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\sqrt{Y_1}}{\Phi'(y_1)}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\sqrt{Y_2}}{\Phi'(y_2)}, \ldots, \frac{dy_n}{dt} = \frac{\sqrt{Y_n}}{\Phi'(y_n)}, \tag{37}$$

гдѣ

$$\Phi(y) = (y - y_1)(y - y_2)\ldots(y - y_n).$$

Уравненія же (3) обращаются въ

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Theta(y_1)} + \frac{1}{\Theta(y_2)} + \ldots + \frac{1}{\Theta(y_n)} = 0, \\ &\frac{y_1}{\Theta(y_1)} + \frac{y_2}{\Theta(y_2)} + \ldots + \frac{y_n}{\Theta(y_n)} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{y_1^{n-2}}{\Theta(y_1)} + \frac{y_2^{n-2}}{\Theta(y_2)} + \ldots + \frac{y_n^{n-2}}{\Theta(y_n)} = 0, \end{aligned} \tag{59}$$

гдѣ

$$\Theta(y) = \frac{f\left(\dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right)}{(cx + d)^{n-2}} = \frac{(\gamma y + \delta)^{n-2} f\left(\dfrac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right)}{(ad - bc)^{n-1}}, \tag{60}$$

если

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{а} \quad x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ при доказательствѣ леммы §-а 3-яго, убѣждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k}{\Theta(y_i)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_0^{(k)} + h_1^{(k)} x_i + \cdots g_{n-2}^{(k)} x_i^{n-2}}{f(x_i)},$$

откуда на основаніи уравненій (3) и получаемъ систему уравненій (59).

Какъ изъ уравненій (2), (4) и (29) вывели (55), такъ изъ (37), (59) и (32) выводимъ

$$\frac{\Theta(y_1)\,dy_1}{\sqrt{Y_1}} = S\frac{dq_1}{\sqrt{L}}, \tag{61}$$

гдѣ S раціональная симметрическая функція отъ $y_1, y_2, \cdots, y_n$, и, слѣдовательно, раціональная функція отъ $q_1, q_2, \cdots, q_n$, гдѣ $q_1, q_2, \cdots, q_n$ такія же функціи отъ $y_1, y_2, \cdots, y_n$, какъ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ отъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Примѣняя же теорему VIII къ уравненіямъ Якоби (31) или (37), заключаемъ, что $S = \chi(q_1, \sqrt{L})$ раціональная функція отъ q_1 и $\sqrt{L}$.

Изъ уравненія (62) имѣемъ

$$\frac{\Theta(y_1)\,dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \chi(q_1, \sqrt{L})\frac{dq_1}{\sqrt{L}},$$

откуда

$$\int \frac{\Theta(y_1)}{\sqrt{Y_1}}\,dy_1 = \int \omega(q_1, \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma})\,dq_1, \tag{62}$$

гдѣ ω раціональная функція отъ

$$q_1 \text{ и } \sqrt{L} = \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma}.$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи q_1 и $\sqrt{L}$.

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, сведемъ результатъ, получаемый по интегрированіи, къ функціи

$$\Phi_2(y_1, \sqrt{Y_1}).$$

Остается только замѣнить y_1 на

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \sqrt{Y_1} \quad \text{на} \quad \frac{\sqrt{X_1}}{(cx_1 + d)^n}.$$

§ 5. Замѣтимъ, что систему дифференціальныхъ уравненій Якоби (1) на основаніи теоремы 2-ой можемъ замѣнить системой конечныхъ уравненій

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)}p_k + 2\gamma_1^{(k)}p_1 + 2\delta_1^{(k)}p_kp_1 + \varepsilon^{(k)}p_k^2 + s_1^{(k)}p_1^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)}p_k + 2\gamma_n^{(k)}p_n + 2\gamma_n^{(k)}p_kp_n + \varepsilon^{(k)}p_k^2 + \varepsilon_n^{(k)}p_n^2 = 0.$$

Наиболѣе поддается изслѣдованію случай теоремы III, когда эти уравненія обращаются въ линейныя

$$p_l = L_l^{(k)}p_k + M_l^{(k)} \quad {\scriptstyle (l=1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n)} \tag{19}$$

гдѣ, какъ мы доказали въ §-ѣ 2-омъ (Теорема III) $L_l^{(k)}$, $M_l^{(k)}$ могутъ имѣть только слѣдующія значенія

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k}, \tag{20}$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k}. \tag{21}$$

Такимъ образомъ получаемъ, какъ частный случай теоремы IX, слѣдующую теорему:

Теорема X.

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя уравненіямъ

$$p_l = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k} p_k + \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi'_l}, \tag{19}$$

удовлетворяютъ еще уравненіямъ

$$\begin{gathered} \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0\,, \\ \frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптическій.

Эта теорема можетъ быть доказана и независимо отъ вышеизложеннаго, хотя тогда не на столько ясна связь ея съ теоріей Якобіевскихъ уравненій, а главное то, что она составляетъ частный случай болѣе общей теоремы.

Для доказательства разобьемъ

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{2n})$$

на два множителя

$$X' = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

$$X'' = (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \ldots (x - \alpha_{2n}).$$

Тогда

$$X = a_{2n} X' X''.$$

Принимая обозначенія (17)

$$X' = x^n - \pi'_1 x^{n-1} + \pi'_2 x^{n-2} - \ldots (-1)^n \pi'_n, \tag{63}$$

$$X'' = x^n - \pi''_1 x^{n-1} + \pi''_2 x^{n-2} - \ldots (-1)^n \pi''_n, \tag{64}$$

мы имѣемъ тождества

$$\pi'_l = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k} \pi'_k + \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k},$$

$$\pi''_l = \frac{\pi'_l - \pi''_l}{\pi'_k - \pi''_k} \pi''_k + \frac{\pi'_k \pi''_l - \pi''_k \pi'_l}{\pi'_k - \pi''_k},$$

или, принимая обозначенія (20) и (21),

$$\pi'_l = L_l^{(k)} \pi'_k + M_l^{(k)}, \tag{65}$$

$$\pi''_l = L_l^{(k)} \pi''_k + M_l^{(k)}. \tag{66}$$

Подставляя эти выраженія π'_l, π''_l въ уравненія (63) и (64), получаемъ

$$\begin{aligned} X' = x^n &- M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots (-1)^{k-1} M_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ &+ (-1)^k M_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} M_{n+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \ldots (-1)^n M_n^{(k)} + \\ &+ \pi'_k \big(- L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} - \ldots (-1)^{k-1} L_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ &+ (-1)^k L_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} L_{k+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \ldots (-1)^n L_k^{(k)} \big), \end{aligned} \tag{67}$$

гдѣ

$$L_k^{(k)} = 1, \qquad M_k^{(k)} = 0,$$

что вполнѣ согласно съ формулами (20) и (21).

Полагая

$$x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots (-1)^n M_n^{(k)} = \mu, \tag{68}$$

$$- L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)} = \lambda, \tag{69}$$

можно написать уравненіе (67) и другое, такимъ же образомъ получаемое изъ (64), такъ

$$X' = \mu + \lambda \pi'_k, \tag{70}$$

$$X'' = \mu + \lambda \pi''_k. \tag{71}$$

Изъ уравненій (3) имѣемъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{nf(x_1)}{F'(x_1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

и

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{72}$$

Такъ какъ

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ то она вмѣстѣ съ тѣмъ раціональная функція отъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Такъ какъ, по уравненіямъ (19), $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть раціональныя функціи отъ p_k, то и R есть такая же функція отъ p_k. Означимъ R черезъ $\varphi(p_k)$.

Преобразуемъ теперь уравненіе (72) или, что тоже, уравненіе

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = R\frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{73}$$

На основаніи уравненій (19) имѣемъ

$$F'(x_1) = nx_1^{n-1} - (n-1)\,p_1 x_1^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n =$$

$$= nx_1^{n-2} - (n-1)\,M_1^{(k)} x_1^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} M_{n-1}^{(k)} +$$

$$+ p_k\left(- L_1^{(k)}(n-1)\,x_1^{n-2} + (n-2)\,L_2^{(k)} x_1^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} L_{n-1}^{(k)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_{x=x_1} + p_k\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)_{x=x_1}, \tag{74}$$

$$F'(x_1) = \mu_1 + \lambda_1 p_k,$$

гдѣ

$$\mu_1 = (\mu)_{x=x_1}, \qquad \lambda_1 = (\lambda)_{x=x_1}.$$

Такъ какъ $F(x_1) = 0$, то $\mu_1 + \lambda_1 p_k = 0$, откуда

$$p_k = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}. \tag{75}$$

Подставляя въ уравненіе (74) это выраженіе p_k, имѣемъ

$$F'(x_1) = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} - \mu_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}}{\lambda_1}. \tag{76}$$

Подставляя въ уравненіе (73) вмѣсто $X = a_{2n} X' X''$, на основаніи уравненій (70), (71),

$$a_{2n}(\mu_1 + \lambda_1 \pi'_k)(\mu_1 + \lambda_1 \pi''_k),$$

а вмѣсто $F'(x_1)$ его выраженіе (76) и опуская для краткости значки, имѣемъ

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{\varphi(p_k)\frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda^2}}{\sqrt{a_{2n}\left(\pi'_k + \frac{\mu}{\lambda}\right)\left(\pi''_k + \frac{\mu}{\lambda}\right)}}\, dx,$$

или, по уравненію (75),

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \frac{-\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p_k)}}. \tag{77}$$

Отсюда

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = -\int \frac{\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p'_k)}}. \tag{78}$$

Такъ какъ интегралъ, стоящій въ правой части этого уравненія (78), берется въ конечномъ видѣ, то тоже относится и къ интегралу

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}.$$

Послѣ совершенія интегрированія

$$\int \frac{\varphi(p_k)\,dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p_k)}}$$

въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить p_k на

$$-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Слѣдствіе.

Такъ какъ p_k есть симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то вторая часть равенства (77) будетъ оставаться равной одной и той же величинѣ при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Значитъ

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{f(x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{f(x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}}.$$

Такъ какъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

то

$$\frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{F'(x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{F'(x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}},$$

откуда выводятся уравненія Якоби (1).

Такимъ образомъ интегралы, о которыхъ идетъ рѣчь въ этой теоремѣ, суть именно тѣ, дифференціалы которыхъ допускаютъ инваріантное преобразованіе, и заключеніе это мы вывели независимо отъ сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ.

Примѣняя эту теорему къ случаю, когда $L_k^{(l)} = 0$ $(l \gtrless k)$, что какъ мы показали въ теоремѣ IV будетъ только при

$$\pi'_l = \pi''_l \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, k-1,\ k+1, n),$$

получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XI.

Если корни полинома

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{2n}),$$

удовлетворяютъ условіямъ

$$\begin{gathered} \pi_1' = \pi_1'' ,\ \pi_2' = \pi_2'' ,\ \ldots , \\ \pi_{k-1}' = \pi_{k-1}'' ,\ \pi_{k+1}' = \pi_{k+1}'' ,\ \ldots ,\ \pi_n' = \pi_n'' , \end{gathered} \tag{23}$$

и раціональная функція $f(x)$ такова, что при $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$\begin{gathered} p_1 = \pi_1' ,\ p_2 = \pi_2' ,\ \ldots , \\ p_{k-1} = \pi_{k-1}' ,\ p_{k+1} = \pi_{k+1}' ,\ \ldots ,\ p_n = \pi_n' , \end{gathered} \tag{22}$$

имѣютъ мѣсто уравненія

$$\begin{gathered} \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0 , \\ \frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0 , \end{gathered} \tag{3}$$

то интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптическій.

Докажемъ, что для случая линейной зависимости между $p_1, p_2, \cdots, p_n$ функція, удовлетворяющая условіямъ предыдущихъ теоремъ, существуетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ общій типъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, соотвѣтствующій таковой зависимости.

Теорема XII.

Общій типъ интеграловъ, удовлетворяющихъ условіямъ теоремы X-ой, есть

$$\int \lambda \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{dx}{\sqrt{X}} , \tag{79}$$

гдѣ

$$\mu = x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(k)},$$

$$\lambda = \quad - L_1^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)},$$

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi_k' \pi_l'' - \pi_k'' \pi_l'}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$\pi_1' = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad \pi_1'' = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{2n},$$

. . . .

$$\pi_n' = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \qquad \pi_n'' = \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}},$$

удовлетворяя условіямъ теоремы X-ой, опредѣляется по уравненіямъ (77) и (75) формулой

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

такъ какъ

$$\frac{-\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' - p_k)(\pi_k'' - p_k)}} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' \lambda + \mu)(\pi_k'' \lambda + \mu)}} dx = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{X}} dx.$$

Обратно, если

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

то имѣютъ мѣсто уравненія (19) и (3).

Дѣйствительно, если уравненія (19) удовлетворяются при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, то, какъ мы показали при доказательствѣ теоремы X,

$$\frac{\mu}{\lambda} = -p_k,$$

$$\lambda \frac{d\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)}{dx_1} = F'(x),$$

или

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(-p_k)\,\frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

или

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \varphi(-p_k),$$

откуда

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

и, наконецъ,

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0, \tag{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0.$$

Полагая $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, мы для каждаго значенія k будемъ имѣть самый типъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ

$$\int\left(L_1^{(1)} x^{n-1} - L_2^{(1)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(1)}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{L_1^{(1)} x^{n-1} - L_2^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(1)}}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{L_1^{(1)} x^{n-1} - L_2^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(1)}}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \left(L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} L_n^{(2)} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{L_2^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(2)}} \right)$$

$$\varphi \left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(2)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (80)$$

$$\int \left(L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}}{L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)}} \right)$$

$$\varphi \left(\frac{x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}}{L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$L_1^{(k)} = L_2^{(k)} = L_3^{(k)} = \ldots = L_{k-1}^{(k)} = L_{k+1}^{(k)} = \ldots = L_n^{(k)} = 0,$$

а, слѣдовательно, корни связаны уравненіями

$$\pi_i' = \pi_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n),$$

n типовъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ будутъ

$$\int x^{n-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{x^{n-1}} \right)$$

$$\varphi \left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{x^{n-1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x^{n-2} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{x^{n-2}} \right)$$

$$\varphi \left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{x^{n-1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (81)$$

$$\int x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(x^n - M_1^{(n)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}\right)$$

$$\varphi\left(x^n - M_1^{(n)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Для случая эллиптическихъ интеграловъ формулы (80) даютъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, слѣдующую интересную форму псевдоэллиптическихъ интеграловъ, указанную Раффи.

А именно, въ формулѣ

$$\int \frac{x^2 - 2Lx - M}{x - L}\,\varphi\left(\frac{x^2 + M}{x - L}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}} \tag{82}$$

(гдѣ для простоты откидываемъ значки) полагаемъ

$$\varphi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right) = \Psi\left(\frac{\frac{x^2+M}{x-L} - 2\xi}{\frac{x^2+M}{x-L} - 2\eta}\right)\left(\frac{x^2+M}{x-L} - 2\xi\right),$$

гдѣ ξ и η корни уравненія

$$x^2 - 2Lx - M = 0, \tag{83}$$

такъ что

$$x^2 - 2Lx - M = (x - \xi)(x - \eta), \tag{84}$$

$$\xi = L + \sqrt{L^2 + M},$$

$$\eta = L - \sqrt{L^2 + M}.$$

Но

$$\frac{x^2 + M - 2\xi(x - L)}{x^2 + M - 2\eta(x - L)} = \left[\frac{x - L - \sqrt{L^2+M}}{x - L + \sqrt{L^2+M}}\right]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right) = \frac{x - L}{(x - L - \sqrt{L^2+M})^2}\,\chi\left(\frac{x - L - \sqrt{L^2+M}}{x - L + \sqrt{L^2+M}}\right),$$

гдѣ χ означаетъ раціональную дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой четныя функціи.

Подставивъ это выраженіе функціи φ въ формулу (82) и произведя сокращенія на основаніи формулы (84), получимъ псевдо-эллиптическій интегралъ вида

$$\int \frac{x-L+\sqrt{L^2+M}}{x-L-\sqrt{L^2+M}}\ \chi\left(\frac{x-L+\sqrt{L^2+M}}{x-L-\sqrt{L^2+M}}\right) dx\,, \tag{85}$$

гдѣ $\chi(x)$ имѣетъ вышеуказанное значеніе.

Замѣтимъ, что наши разсужденія имѣютъ силу не только въ томъ случаѣ, когда a_{2n} отлично отъ нуля, но и когда $a_{2n}=0$ и полиномъ X нечетной степени

$$X = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-1}x^{2n-2} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \tag{86}$$

причемъ мы пока предполагаемъ, что a_{2n-1} не равно нулю.

Положимъ

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_0' = 1\,, & \varepsilon_0'' = 1\,, \\ \varepsilon_1' = \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n\,, & \varepsilon_1'' = \alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n}\,, \\ \varepsilon_2' = \alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n\,, & \varepsilon_2'' = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{n-1}' = \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\,, & \varepsilon_n'' = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{2n}\,. \end{array} \tag{87}$$

Тогда

$$\pi_l' = \varepsilon_l' + \alpha_1\varepsilon_{l-1}\qquad \pi_l'' = \varepsilon_l''\,,$$

$$\frac{\pi_l'}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_l'}{\alpha_1} + \varepsilon_{l-1}'\,,$$

$$\left[\frac{\pi_l'}{\alpha_1}\right]_{\alpha_1=\infty} = \varepsilon_{l-1}'\,,\qquad \left[\frac{\pi_l''}{\alpha_1}\right]_{\alpha_1=\infty} = 0\,. \tag{88}$$

На этомъ основаніи для случая, когда $a_{2n}=0$ или когда одинъ изъ корней, напримѣръ, $\alpha_1=\infty$, получаемъ изъ формулъ (20) и (21)

$$L_l^{(k)} = \frac{\frac{\pi_l'}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}}{\frac{\pi_k'}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\frac{\pi_k'}{\alpha_1}\pi_l'' - \pi_k''\frac{\pi_l'}{\alpha_1}}{\frac{\pi_k'}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}},$$

откуда, при $\alpha_1 = \infty$,

$$L_l^{(k)} = \frac{\varepsilon_{l-1}'}{\varepsilon_{k-1}'}, \tag{89}$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\varepsilon_{k-1}'\varepsilon_{l-1}'' - \varepsilon_k''\varepsilon_{l-1}'}{\varepsilon_{k-1}'}. \tag{90}$$

Эти значенія $L_l^{(k)}$ и $M_l^{(k)}$ и слѣдуетъ, въ случаѣ полинома (86), подставить въ формулы (80) и (81).

Замѣтимъ еще, что наши разсужденія не предполагаютъ неравенства корней X; корни X могутъ быть и кратными и радикалъ $\sqrt{X}$ можетъ привестись къ виду

$$\sqrt{X} = (b_\alpha x^\alpha + b_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \ldots + b_1 x + b_0) =$$
$$= \sqrt{c_\beta x^\beta + c_{\beta-1}x^{\beta-1} + \ldots + c_1 x + c_0},$$

гдѣ

$$\beta + 2\alpha = 2n \quad \text{или} \quad \beta + 2\alpha = 2n - 1 \quad [\text{въ случаѣ } a_{2n} = 0].$$

---

§ 6. Интегралы Эйлера [1]).

Интегралы Эйлера

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \tag{91}$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \tag{92}$$

[1] Euleri Inst. Calculi Integralis. 1776, m. IV, стр. 36.

входятъ, какъ довольной простой частный случай, въ первую изъ формулъ (81).

Первому интегралу соотвѣтствуетъ разложеніе на два множителя

$$1+x^4=(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)\,,$$

такъ что

$$M_2^{(1)}=\pi_2'=\pi_2''=1 \qquad L_2^{(1)}=0\,,$$

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\int x\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1}\frac{dx}{\sqrt{X}}\,.$$

Къ интегралу (91) можно примѣнить подстановку

$$\frac{x^2+1}{x}=z \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2+1}=t. \tag{93}$$

Интегралу (92) соотвѣтствуетъ разложеніе

$$(1+x^4)=(x^2+\sqrt{-2}\,x-1)\,(x^2-\sqrt{-2}\,x-1)\,,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$M_2^{(1)}=\pi_2'=\pi_2''=-1\,,$$

$$\int\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\int x\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{-1}\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Этому интегралу соотвѣтствуетъ подстановка

$$\frac{x^2-1}{x}=z \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2-1}=t. \tag{94}$$

Замѣтимъ, что интегралъ (91) можетъ быть найденъ при помощи подстановки (94), а интегралъ (92) при помощи подстановки (93); только функція φ, входящая въ формулы (81), для этого случая будетъ много сложнѣе.

Дѣйствительно,

$$\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\int\frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)^2+4}\;\frac{x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)}{\sqrt{X}}\,,$$

$$\int\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\int\frac{\dfrac{x^2+1}{x}}{\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2-4}\;\frac{x\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)}{\sqrt{X}}\,.$$

Третій интегралъ Эйлера тоже принадлежитъ къ изслѣдуемому классу и находится при помощи подстановокъ (93) и (94), если имѣть ввиду, что

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Отсюда или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}} + \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-4}\right] \frac{x\, d\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}{\frac{dx}{\sqrt{X}}},$$

или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}} + \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+4}\right] \frac{x\, d\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}{\frac{dx}{\sqrt{X}}}.$$

Иинтегралъ Реалиса

$$\int \frac{1 \pm x^n}{1 \mp x^n}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}} \tag{96}$$

служитъ обобщеніемъ этихъ трехъ интеграловъ Эйлера и тоже принадлежитъ къ типу интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (81), какъ ниже увидимъ изъ изслѣдованія интеграловъ Буняковскаго, частнымъ случаемъ которыхъ является интегралъ Реалиса.

Интегралы Буняковскаго.

Основаніемъ изслѣдованій Буняковскаго служитъ тотъ фактъ, что всякій эллиптическій интегралъ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}} \tag{97}$$

[1]) Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала

$$\frac{x+C_1}{x+C_2}\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

и другихъ выраженій подобнаго вида. Приложеніе къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

приводится къ формѣ

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1}}\, dx \tag{98}$$

подстановкой

$$x = \alpha y + \beta .$$

Псевдо-эллиптическими интегралами (97) по Буняковскому будутъ тѣ, для которыхъ

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 ,$$

или, по терминологіи Буняковскаго, раціональная функція $f(x)$ есть функція возвратная знакоперемѣнная.

Легко видѣть, что интегралы Буняковскаго подходятъ, какъ частный случай, подъ типъ интеграловъ Раффи.

Въ самомъ дѣлѣ, условія теоремы IX удовлетворены, ибо, если

$$x_1 x_2 = 1 , \tag{99}$$

то, во первыхъ,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1^4 + Ax_1^3 + Bx_1^2 + Ax_1 + 1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{x_2^4 + Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + 1}} = 0 ,$$

и, во вторыхъ,

$$f(x_1) + f(x_2) = 0 .$$

Такимъ образомъ, интегралъ (98) удовлетворяетъ условіямъ теоремы IX, а такъ какъ зависимость между x_1 и x_2 (99) типа (22), то онъ удовлетворяетъ и условіямъ теоремы XI, а потому заключается въ формулахъ (81).

Далѣе, если

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta ,$$

$$x_2 = \alpha y_2 + \beta ,$$

то, по леммѣ, при

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0 ,$$

имѣемъ также

$$\frac{dy_1}{\sqrt{Y_1}} + \frac{dy_2}{\sqrt{Y_2}} = 0 ;$$

кромѣ того, если

$$\varphi(y) = f(\alpha y + \beta)\,,$$

то при

$$f(x_1) + f(x_2 = 0\,,$$

будемъ имѣть также

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = 0\,.$$

Интегралъ (97) тоже допускаетъ инваріантное преобразованіе.

Такъ какъ, кромѣ того, обозначая

$$q_1 = y_1 + y_2\,,$$

$$q_2 = y_1 y_2\,,$$

имѣемъ

$$p_1 = \alpha q_1 + \beta \qquad p_2 = \alpha q_2 + \alpha\beta q_1 + \beta^2\,,$$

то зависимость между q_1 и q_2 будетъ линейная, а по теоремѣ III не иначе, какъ типа (19). Интегралъ (97) подходитъ подъ формулы (80).

Способъ интегрированія Буняковскаго или, вѣрнѣе, выводъ изъ изслѣдованнаго класса другого болѣе обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ можетъ быть излагаемъ въ болѣе общей формѣ, чѣмъ это дѣлаетъ Буняковскій.

Изъ соотношенія [рав. (75) для $k = 1$ и $n = 2$]

$$p_1 = \frac{x^2 + M}{x - L}$$

опредѣляемъ x

$$x = \frac{p_1 \pm \sqrt{N}}{2}\,,$$

гдѣ

$$N = p_1^2 - 4\,(Lp_1 + M)\,, \tag{99}$$

такъ что

$$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt{N}}{2}\,,$$

$$x_2 = \frac{p_1 - \sqrt{N}}{2}\,,$$

$$F'(x_1) = x_1 - x_2 = \sqrt{N}\,,$$

$$F'(x_2) = x_2 - x_1 = -\sqrt{N}\,.$$

Если $\varphi(x)$ означаетъ раціональную функцію отъ x, то

$$\varphi(x_1)=\varphi\left(\frac{p_1+\sqrt{N}}{2}\right)=\chi(p_1)+\omega(p_1)\sqrt{N}, \tag{100}$$

$$\varphi(x_2)=\varphi\left(\frac{p_1-\sqrt{N}}{2}\right)=\chi(p_1)-\omega(p_1)\sqrt{N}, \tag{101}$$

$$\frac{\varphi(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{\chi(p_1)+\omega(p_1)\sqrt{N}}{\sqrt{X_1}}dx. \tag{102}$$

Но, по формулѣ (54),

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K_1}}=\frac{dp_1}{\sqrt{KN}} \tag{103}$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C,$$

или, точнѣе,

$$K=a_{2n}(\pi_1'-p_1)(\pi_1''-p_1).$$

Принимая во вниманіе (99), заключаемъ, что $P=KN$ есть полиномъ четвертой степени относительно p_1, какъ X_1 относительно x_1.

На основаніи равенства (103), равенство (102) напишется такъ (опуская значки)

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}=\int\frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}+\int\frac{\omega(p)dp}{\sqrt{K}}. \tag{104}$$

Второй интегралъ можетъ быть взятъ въ конечномъ видѣ; тоже будетъ относиться и къ

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

если

$$\chi(p)=0,$$

т. е. [уравненія (100) и (101)] когда

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=0,$$

т. е. когда

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе.

Если $\chi(p)$ не равно нулю, то поступаемъ съ интеграломъ

$$\int \frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}$$

совершенно также, какъ поступали съ интеграломъ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Тогда, полагая

$$q_1 = p_1 + p_2,$$

гдѣ p_1 и p_2 удовлетворяютъ Эйлерову уравненію

$$\frac{dp_1}{\sqrt{P_1}} = -\frac{dp_2}{\sqrt{P_2}},$$

получимъ

$$\int \frac{\chi(p_1)dp_1}{\sqrt{P_1}} = \int \frac{\Theta(q_1)dq_1}{\sqrt{Q_1}} + \int \frac{\omega_1(q_1)dq_1}{\sqrt{L}},$$

гдѣ Q_1 полиномъ четвертой, L второй степени относительно q_1, а $\Theta(q_1)$ и $\omega_1(q_1)$ нѣкоторыя раціональныя функціи отъ q_1.

При $\Theta(q_1) = 0$, т. е. когда

$$\frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, получаемъ второй случай интегрируемости, такъ какъ оба интеграла, входящіе въ формулу (104), выражаются въ конечномъ видѣ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\omega_1(q_1)\,dq_1}{\sqrt{L}} + \int \frac{\omega(p)\,dp}{\sqrt{K}}.$$

Въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить q черезъ p, p черезъ x.

Третій случай интегрируемости получимъ, производя тѣже дѣйствія надъ

$$\int \frac{\Theta(q)\,dq}{\sqrt{Q}}$$

и т. д.

Интегралы Малле [1]).

Даемъ новыя доказательства двумъ теоремамъ Малле, относящимся къ псевдо-эллиптическимъ интеграламъ, принадлежащимъ, какъ ниже покажемъ, къ изслѣдуемому классу Раффи.

Теорема XIII.

Если положить

$$X=(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx), \tag{105}$$

$$\lambda' = \frac{ab-cd}{cd(a+b)-ab(c+d)},$$

$$\lambda'' = \frac{ac-bd}{bd(a+c)-ac(b+d)}, \tag{106}$$

$$\lambda''' = \frac{ad-bc}{bc(a+d)-ad(b+c)},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}+\frac{1}{x-\lambda'''}\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{107}$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Положимъ

$$\frac{1}{a}=-\alpha_1,\ \frac{1}{b}=-\alpha_2,\ \frac{1}{c}=-\alpha_3,\ \frac{1}{d}=-\alpha_4,$$

$$\sqrt{X_1}=\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}=\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{abcd}}, \tag{109}$$

$$\lambda'=\frac{\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4}{(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_3+\alpha_4)}=L_1^{(2)}, \tag{110}$$

или, опуская значки для краткости,

$$\lambda'=L,\quad \frac{dx}{(x-\lambda')\sqrt{X}}=\frac{dx}{(x-L)\sqrt{X}}.$$

Другія двѣ дроби, изъ суммы которыхъ (6) состоитъ разсматриваемый дифференціалъ (107), получаются такимъ же образомъ при двухъ другихъ дѣленіяхъ на двѣ группы корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ полинома X_1. Обозначимъ значенія L въ трехъ подобныхъ случаяхъ черезъ L', L'', L'''.

---

[1]) Malet. Two theorems in integration (Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI, p. 252).

Полагая въ первой изъ формулъ (80) $n=2$, $\varphi=1$, получимъ

$$J=\int\frac{x^2-2Lx-M}{x-L}\frac{dx}{\sqrt{X_1}}=\int\frac{x-L}{\sqrt{X_1}}dx-(M+L^2)\int\frac{dx}{(x-L)\sqrt{X_1}},$$

гдѣ J выражается черезъ

$$\lg\frac{P+Q\sqrt{X_1}}{P-Q\sqrt{X_1}},$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи отъ x [1]).

Отсюда получаемъ

$$\int\left(\frac{1}{x-L'}+\frac{1}{x-L''}+\frac{1}{x-L'''}\right)\frac{dx}{\sqrt{X_1}}=$$

$$=\alpha\int\frac{xdx}{\sqrt{X_1}}-\beta\int\frac{dx}{\sqrt{X_1}}+J'+J''+J''', \tag{111}$$

гдѣ J', J'', J''' представляютъ три логариѳма упомянутаго типа, а

$$\alpha=\frac{1}{L'^2+M'}+\frac{1}{L''^2+M''}+\frac{1}{L'''^2+M'''},$$

$$\beta=\frac{L'}{L'^2+M'}+\frac{L''}{L''^2+M''}+\frac{L'''}{L'''^2+M'''}.$$

Черезъ простое вычисленіе легко убѣдиться, что

$$L'^2+M'^2=(L'-L'')(L'-L''')=\varphi'(L'),$$

гдѣ

$$\varphi(L)=(L-L')(L-L'')(L'-L''').$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{1}{\varphi'(L')}+\frac{1}{\varphi'(L'')}+\frac{1}{\varphi'(L''')}=0, \tag{112}$$

$$\beta=\frac{L'}{\varphi'(L')}+\frac{L''}{\varphi'(L'')}+\frac{L'''}{\varphi'(L''')}=0. \tag{113}$$

---

[1]) Это новый выводъ формулы Абеля для выраженія

$$\int\frac{k+k'x}{\sqrt{R}}dx \quad \text{черезъ} \quad \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \quad \text{и логариѳмъ.}$$

Abel. Théorie des transcendantes elliptiques. T. II, p. 110.

На основаніи полученныхъ равенствъ (111), (112) и (113) и принимая во вниманіе (109) и (110), получимъ

$$\int\left(\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}+\frac{1}{x-\lambda'''}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{abcd}}\lg\frac{M+N\sqrt{X}}{M-N\sqrt{X}}+C, \quad (114)$$

гдѣ M и N цѣлыя функціи отъ x, которыя легко вычислить на основаніи вышесказаннаго.

Вторая теорема Малле состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема XIV.

Если положить

$$X=(1+ax)(1+bx)(1+cx), \quad (115)$$

$$\mu'=\frac{bc}{a-b-c},$$

$$\mu''=\frac{ac}{b-a-c}, \quad (116)$$

$$\mu'''=\frac{ab}{c-a-b},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{1-\mu' x}+\frac{1}{1-\mu'' x}+\frac{1}{1-\mu''' x}\right]\frac{xdx}{\sqrt{X}} \quad (117)$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Эту теорему можно разсматривать, между прочимъ, какъ частный случай предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x=\frac{1}{z},$$

получаемъ

$$\sqrt{X}=\frac{\sqrt{Z}}{z^2},$$

гдѣ

$$Z=(z+a)(z+b)(z+c)(z),$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\frac{dz}{z\sqrt{Z}}.$$

Дифференціалъ (117) преобразовывается въ слѣдующее выраженіе

$$-\left[\frac{1}{z-\mu'}+\frac{1}{z-\mu''}+\frac{1}{z-\mu'''}\right]\frac{dz}{\sqrt{Z}}, \tag{118}$$

гдѣ μ', μ'', μ''' выраженія (110) при

$$\alpha_1 = , -a\,,\ \alpha_2 = 0\,,\ \alpha_3 = b\ \ \alpha_4 = C\,.$$

Дифференціалъ (118) есть, въ сущности, частный случай (107).

Ограничиваясь разборомъ этихъ наиболѣе извѣстныхъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, мы не будемъ заниматься составленіями имъ подобныхъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, что легко сдѣлать по формуламъ (80). Но въ заключеніе приведемъ примѣръ одного дифференціала довольно общаго характера, допускающаго инваріантное преобразованіе. Предположимъ, что дифференціалъ $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$ таковъ, что

$$\int\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2}\lg\frac{-S+\sqrt{X}}{-S-\sqrt{X}} + C$$

и

$$S^2 - X = a\,, \tag{119}$$

гдѣ a постоянное, или, что тоже

$$\int\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}} = \lg\frac{-S+\sqrt{X}}{R} + C\,, \tag{120}$$

гдѣ R постоянное, которое затѣмъ надлежащимъ образомъ выберемъ.

Равенство (119) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = X\,, \tag{11}$$

гдѣ полагаемъ

$$T = 1\,,\quad R = a\,. \tag{121}$$

Тогда уравненіе

$$\frac{-S+\sqrt{X}}{R} = y\,,$$

при условіи (11), будетъ опредѣлять рѣшенія $x_1, x_2, \cdots, x_n$ системы дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1}$$

$$\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0\,,$$

а при условіяхъ (121), т. е. при

$$r_n = 0\,,\ r_{n-1} = 0\,, \ldots, r_1 = 0\,,\ r_0 = \alpha\,,$$

$$t_n = 0\,,\ t_{n-1} = 0\,, \ldots, t_1 = 0\,,\ t_0 = 1\,,$$

по уравненіямъ (5) и (7) эти рѣшенія будутъ таковы, что

$$p_1 = \text{const.},\ p_2 = \text{const.}, \ldots, p_{n-1} = \text{const.},$$

а по теоремѣ IV должны имѣть

$$p_1 = \pi_1',\ p_2 = \pi_2', \ldots, p_{n-1} = \pi_{n-1}'\,, \tag{22}$$

при условіяхъ относительно корней полинома X

$$\pi_i' = \pi_i''. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n-1)} \tag{23}$$

Съ другой стороны, означая черезъ S_i, R_i, T_i, X_i значенія S, R, T, X при $x = x_i$,

$$\frac{-S_1 + \sqrt{X_1}}{R_1} = \frac{-S_2 + \sqrt{X_2}}{R_2} = \ldots = \frac{-S_n + \sqrt{X_n}}{R_n} = y.$$

Отсюда

$$\int \frac{\varrho_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \frac{\varrho_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \int \frac{\varrho_n dx_n}{\sqrt{X_n}}\,,$$

или

$$\frac{\varrho_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{\varrho_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{\varrho_n dx_n}{\sqrt{X_n}}\,.$$

Такъ какъ, по уравненіямъ (1),

$$\frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{F'(x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{F'(x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}}\,, \tag{2}$$

то

$$\frac{\varrho_1}{F'(x_1)} = \frac{\varrho_2}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{\varrho_n}{F'(x_n)},$$

или

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_n} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n}{\varrho_n} = 0, \tag{122}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{\varrho_1} + \frac{x_2^{n-2}}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{\varrho_n} = 0,$$

т. е. $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$ допускаетъ инваріантное преобразованіе и именно характера (22). Слѣдовательно, $\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$, при условіи (120), подходитъ подъ первую изъ формулъ (81) и, какъ легко убѣдиться, тогда въ этой формулѣ слѣдуетъ положить $\varphi = 1$.

§ 7. Интегралы (80) приводятся къ

$$\int \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}, \tag{123}$$

гдѣ $\varphi(\xi)$ раціональная функція, при помощи подстановки

$$\frac{\lambda}{\mu} = \xi,$$

гдѣ λ и μ цѣлыя функціи $n^{\text{-ой}}$ и $(n-1)^{\text{-ой}}$ степеней

$$\begin{aligned} M &= x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} - \ldots - (-1)^n M_n^{(k)}, \\ \lambda &= \quad - L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)}, \end{aligned} \tag{124}$$

а $L_i^{(k)}$ и $M_i^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Можно доказать, что всѣ интегралы вида $\int \frac{f(x)}{\sqrt{X}}\, dx$, приводящіеся къ интегралу (123) подстановкой

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \xi,$$

гдѣ ϱ и σ цѣлыя функціи степени не выше $n^{\text{-ой}}$ каждая, заключаются въ формулахъ (80).

Положимъ

$$\eta = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}.$$

Тогда интегралъ (123) обратится въ другой интегралъ того же типа

$$\int \frac{\Psi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{a\eta^2 + b\eta + c}},$$

$$\eta = \frac{\alpha\varrho + \beta\sigma}{\gamma\varrho + \delta\sigma}.$$

Полагая

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_n x^n + \varrho_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varrho_1 x + \varrho_0, \\ \sigma &= \sigma_n x^n + \sigma_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \sigma_1 x + \sigma_0, \end{aligned} \tag{125}$$

выберемъ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} \alpha\varrho_n \quad + \beta\delta_n \quad &= 1, \\ \alpha\varrho_{n-k} + \beta\delta_{n-k} &= 0, \\ \gamma\varrho_n \quad + \delta\sigma_n \quad &= 0, \\ \gamma\varrho_{n-k} + \delta\sigma_{n-k} &= (-1)^k. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

При нѣкоторыхъ значеніяхъ k можно опредѣлить $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяющія этой системѣ уравненій, ибо не можетъ для всѣхъ значеній k опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \varrho_n & \sigma_{n-1} \\ \varrho_k & \sigma_{n-k} \end{vmatrix}$$

равняться нулю или, что тоже, не могутъ имѣть равенства

$$\frac{\varrho_n}{\sigma_n} = \frac{\varrho_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = \ldots = \frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\varrho_0}{\sigma_0},$$

ибо тогда

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \text{const}.$$

Слѣдовательно, если $\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ приводится къ дифференціалу

$$\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$$

подстановкой $\xi = \frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ, σ имѣютъ значенія (125), то тотъ же дифференціалъ приводится къ

$$\frac{\Psi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{A'\eta^2 + B'\eta + C'}}$$

подстановкой

$$\eta = \frac{\varrho'}{\sigma'},$$

гдѣ

$$\varrho' = \varrho'_n x^n + \varrho'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varrho'_1 x + \varrho'_0,$$

$$\sigma' = \sigma'_n x^n + \sigma'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \sigma'_1 x + \sigma'_0,$$

$$\sigma'_n = 0\,, \quad \varrho'_n = 1\,, \quad \sigma'_{n-k} = (-1)^k, \quad \varrho'_{n-k} = 0. \tag{127}$$

Положимъ сперва A' отличнымъ отъ нуля. Тогда

$$A'\eta^2 + B'\eta + C' = A'(\eta + \alpha)(\eta + \beta)\,,$$

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sigma'\varphi\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)\frac{d\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}}\sqrt{(\varrho + \sigma\alpha)(\varrho + \sigma\beta)}}\,dx.$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma\beta)}}{\sqrt{X}} = \text{раціональной функціи отъ } x\text{, или}$$

$$\omega_1^2(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma'\beta) = \omega_2^2\,X\,, \tag{128}$$

гдѣ ω_1 и ω_2 цѣлые полиномы, которые можно предположить взаимно-простыми.

Если предположить, что у полинома X нѣтъ кратныхъ корней, а потому X не можетъ дѣлиться на квадратъ ω_1^2, то

$$\omega_1 = 1\,.$$

Такъ какъ $(\varrho + \sigma\alpha)(\varrho + \sigma\beta)$ той же степени, что и X въ случаѣ, если X степени $2n$-ой, т. е. a_{2n} не равно нулю, то $\omega_2^2 = \text{const}$. Сравнивая при этомъ коэффиціенты при высшихъ степеняхъ, получаемъ

$$\omega_2^2 = a_{2n}.$$

Въ случаѣ $a_{2n} = 0$, равенства (121) быть не можетъ при конечныхъ значеніяхъ α и β, ибо въ лѣвой части полиномъ четной степени, въ правой нечетной.

Полагая же $A' = 0$ [или, что тоже, $\beta = \infty$, $A'\beta = B'$], получимъ

$$B'(\varrho' + \sigma'\alpha)\sigma' = X, \tag{129}$$

равенство возможное только въ случаѣ $a_{2n} = 0$.

Изъ тождества (128), которое по вышедоказанному можно написать такъ

$$\begin{gathered}(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma'\beta) = X = \\ = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1})\ldots(x - \alpha_{2n}),\end{gathered} \tag{130}$$

имѣемъ

$$\begin{gathered}\varrho'_n \quad + \sigma'_n\,\alpha = 1\,,\ \varrho'_n \quad + \sigma'_n\,\beta = 1\,,\\ \varrho'_{n-1} + \sigma'_{n-1}\alpha = -\pi'_1\,,\ \varrho'_{n-1} + \sigma'_{n-1}\beta = -\pi''_1\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varrho'_{n-k} + \sigma'_{n-k}\,\alpha = (-1)^k\pi'_k\,,\ \varrho'_{n-k} + \sigma'_{n-k}\,\beta = (-1)^k\pi''_k\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varrho'_0 + \sigma'_0\,\alpha = (-1)^n\pi'_k\,,\ \varrho'_0 + \sigma'_0\beta = (-1)^n\pi''_n.\end{gathered}$$

Легко видѣть, что изъ этихъ условій при значеніяхъ $\sigma'_n, \varrho'_n, \sigma'_{n-k}, \varrho'_{n-k}$ (127) получаемъ

$$\alpha = \pi'_k\,,\ \beta = \pi''_k$$

$$\varrho'_{n-l} = (-1)^l M_l^{(k)}\,,\ \sigma'_{n-l} = (=1)^l L_l^{(k)}, \tag{131}$$

гдѣ $M_l^{(k)}$, $L_l^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Исходя изъ тождества (129), придемъ къ тому же результату (131), только $L_k^{(l)}$, $M_k^{(l)}$ будутъ имѣть значенія не (20) и (21), а (89) и (90).

Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Теорема XV.

Всякій интегралъ $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\int \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$ раціональной подстановкой $\xi = \frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ и σ полиномы каждый степени не ниже n, если X есть полиномъ степени $2n$ или $2n-1$, не имѣющій кратныхъ корней, заключается въ классѣ интеграловъ, опредѣляемомъ формулами (80), и дифференціалъ $\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ допускаетъ инваріантное преобразованіе (19).

Интегралы $\displaystyle\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, приводящіеся къ интегралу (123) подстановками

$$\xi = \frac{\varrho}{\sigma},$$

въ которыхъ ϱ и σ полиномы степеней высшихъ n, уже не опредѣляются формулами (80), но для этихъ интеграловъ можно установить точку зрѣнія, подобную предыдущей. Можно разсматривать $\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, какъ дифференціалъ $\dfrac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{\Phi}}$, гдѣ Φ полиномъ высшей степени, чѣмъ X, имѣющій кратныя корни, такъ что

$$\Phi = X\Theta^2,$$

$$\psi(x) = f(x)\Theta,$$

гдѣ Θ цѣлая функція. При надлежащемъ выборѣ Θ дифференціалъ $\dfrac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{\Phi}}$ будетъ дифференціаломъ, допускающимъ инваріантное преобразованіе, т. е. допускающимъ совмѣстное существованіе двухъ системъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{\Phi_2}} + \cdots + \frac{dx_m}{\sqrt{\Phi_m}} = 0,$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{\Phi_2}} + \cdots + \frac{x_m\,dx_m}{\sqrt{\Phi_m}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{132}$$

$$\frac{x_1^{m-2}\,dx_1}{\sqrt{\Phi_1}} + \frac{x_2^{m-2}\,dx_2}{\sqrt{\Phi_2}} + \cdots + \frac{x_m^{m-2}\,dx_m}{\sqrt{\Phi_m}} = 0,$$

гдѣ степень Φ равна $2m$, и обыкновенныхъ

$$\frac{1}{\psi(x_1)}+\frac{1}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{1}{\psi(x_m)}=0,$$

$$\frac{x_1}{\psi(x_1)}+\frac{x_2}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{x_m}{\psi(x_m)}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{133}$$

$$\frac{x_1^{m-2}}{\psi(x_1)}+\frac{x_2^{m-2}}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{x_m^{m-2}}{\psi(x_m)}=0.$$

Разсуждая, какъ при доказательствѣ предыдущей теоремы, выводимъ тождество (128). въ которомъ, въ предположенiи, что X не имѣетъ кратныхъ корней, должны положить $\omega_1 = 1$. Полагая $\omega_2 = \Theta$, докажемъ совмѣстное существованiе равенствъ (132) и (133).

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$(\varrho'+\sigma'\alpha)(\varrho'+\sigma'\beta)=\Theta^2 X=\Phi, \tag{134}$$

когда a_{2n} не равно нулю, и

$$B'(\varrho'+\sigma'\alpha)\sigma'=\Theta^2 X=\Phi \tag{135}$$

въ противномъ случаѣ.

Какъ выше, докажемъ, что можно всегда предполагать

$$\sigma'_n=0,\quad \varrho'_n=1,\quad \sigma'_{n-k}=(-1)^k,\quad \varrho'_{n-k}=0, \tag{127}$$

откуда, пользуясь равенствами (134) и (135), выведемъ для коэффицiентовъ ϱ' и σ' выраженiя, точно такъ же составленныя изъ корней полинома

$$\Phi=\Theta^2 X=(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)\ldots(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}),$$

какъ выраженiя (131) составлены изъ корней

$$X=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}.$$

Въ настоящемъ случаѣ интегралъ $\int\frac{f(x)}{\sqrt{X}}dx$ опредѣляется формулами (80), но при условiи, что полиномъ X замѣненъ черезъ $\Phi=\Theta^2 X$, а потому дифференцiалъ $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ можетъ быть представленъ въ видѣ дифференцiала $\frac{\psi(x)}{\sqrt{\Phi}}dx$, допускающаго инварiантное преобразованiе или, что тоже, совмѣстное существованiе уравненiй (132) и (133).

Такимъ образомъ выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XVI.

Всякій интегралъ $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\int \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$ подстановкой $\xi = \frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ и σ полиномы какой угодно степени, принадлежитъ къ классу псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (80), но относящимися не къ $\sqrt{X}$, а къ $\sqrt{\Phi}$, гдѣ $\Phi = \Theta^2 X$, а Θ нѣкоторая цѣлая функція, и дифференціалъ $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ всегда можетъ быть представленъ въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инваріантное преобразованіе.

Къ этому типу интеграловъ принадлежатъ всѣ интегралы вида

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}},$$

гдѣ ϱ цѣлая функція $(n-1)^{\text{-ой}}$ степени, X цѣлая функція $2n^{\text{-ой}}$ степени, интегрируемые въ конечномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изслѣдованія Чебышева [1]) показываютъ, что если интегралъ $\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}}$ находится въ конечномъ видѣ, то

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \beta \lg\left(\frac{-S + \Theta\sqrt{X}}{-S - \Theta\sqrt{X}}\right) + C, \tag{137}$$

гдѣ

$$S^2 - \Theta^2 X = \alpha,$$

а α и β постоянныя, или на основаніи этого послѣдняго равенства

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \beta \lg\left(\frac{-S + \Theta\sqrt{X}}{R}\right) + C,$$

гдѣ R какое угодно постоянное, напримѣръ,

$$R = \alpha.$$

---

[1]) П. Л. Чебышевъ. Объ интегрированіи ирраціональныхъ дифференціаловъ. Сочиненія, т. I, ст. 145.

Равенство (136) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = \Theta^2 X,$$

гдѣ

$$R = a, \quad T = -1,$$

или

$$S^2 - RT = \Phi. \tag{138}$$

Изъ этого послѣдняго равенства и изъ (137), представленнаго въ слѣдующемъ видѣ

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\psi(x)\, dx}{\sqrt{\Phi}} = \beta \lg\left(\frac{-S + \sqrt{\Phi}}{R}\right) + C, \tag{139}$$

выводимъ такимъ же образомъ, какъ въ концѣ §-а 6-ого изъ (120) и (11) вывели совмѣстное существованіе уравненій (1) и (122), слѣдующую теорему:

Теорема XVII.

Всякій дифференціалъ $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$, въ которомъ ϱ цѣлая функція $(n-1)$-ой степени, X полиномъ $2n$-ой степени безъ кратныхъ корней, можетъ быть представленъ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ, въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)\, dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инваріантное преобразованіе и при томъ типа (22).

Такимъ образомъ, первый случай интегрируемости $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$ будетъ тотъ, когда

$$\pi_i' = \pi_i'', \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

второй, когда корни полинома $(x-a)^2 X$ удовлетворяютъ подобнымъ соотношеніямъ, третій, когда тоже относится къ корнямъ полинома $(x-a)^2 (x-b)^2 X$ и т. д.

Изъ этихъ соотношеній можемъ, во первыхъ, опредѣлить $n-1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять корни полинома X, и затѣмъ неизвѣстныя $a, b, c \ldots$, корни полинома Θ. По этимъ послѣднимъ, на основаніи сказаннаго въ концѣ §-а 6-ого, можно опредѣлить $\psi(x)$ и, наконецъ, ϱ.

§ 8. Въ предыдущемъ параграфѣ мы исключительно говорили о приведеніи $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{A\xi^2+B\xi+C}}\,d\xi$ при помощи раціональной подстановки.

Приведеніе $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \psi(\xi\,,\ \sqrt{A\xi^2+B\xi+C})\,d\xi$ при инваріантномъ преобразованіи (13) совершается при помощи подстановки

$$\frac{M_k+N_k\sqrt{X_i}}{M_1+N_1\sqrt{X_i}}=p_k\,,$$

гдѣ M_k, N_k, M_1, N_1 цѣлыя функціи отъ x. Подстановка эта въ общемъ случаѣ ирраціональна.

Но тотъ же интегралъ приводится къ интегралу отъ раціональной дроби подстановкой

$$y=\frac{-S+\sqrt{X}}{R}\,,$$

гдѣ S, R цѣлыя функціи отъ x (10), такъ какъ p_k выражается раціонально въ y по формуламъ (5); на основаніи тѣхъ же формулъ $dp_k=\Theta(y)\,dy$, гдѣ $\Theta(y)$ раціональная функція отъ y; наконецъ, по формуламъ (48) и (51), $\sqrt{K}$ выражается также раціонально черезъ y.

Отсюда на основаніи того, что

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}=\int \psi(p\,,\ \sqrt{R})\,dp\,, \tag{56}$$

получаемъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}=\int \Delta(y)\,dy\,,$$

гдѣ $\Delta(y)$ раціональная функція отъ y.

Въ частномъ случаѣ, когда инваріантное преобразованіе линейнаго характера (19), можно положить (см. доказательство теоремы III)

$$S=0\,,$$

$$-RT=X\,,$$

и $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ приведется къ $\int \Delta(y)\,dy$ подстановкой

$$\frac{\sqrt{X}}{R}=y\,, \tag{140}$$

или

$$\sqrt{X} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)y, \tag{141}$$

представляющей обобщеніе третьей подстановки Эйлера

$$\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = (x - \alpha_1)y.$$

Раффи замѣчаетъ, что всякое Якобіевское преобразованіе, совершенное надъ эллиптическимъ дифференціаломъ, допускающимъ инваріантное преобразованіе, даетъ другой эллиптическій дифференціалъ, допускающій инваріантное преобразованіе.

Производя преобразованіе $z = x^2$ надъ дифференціаломъ

$$\frac{f(z)\,dz}{2k_1k_2\sqrt{z\left(z - \dfrac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \dfrac{1}{k_2^2}\right)}}, \tag{142}$$

получимъ

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - k_1^2x^2)(1 - k_2^2x^2)}}. \tag{143}$$

Если

$$f\left(\frac{1}{k_1^2k_2^2z}\right) = -f(z),$$

$$f\left(\frac{1 - k_2^2z}{k_2^2(1 - k_1^2z)}\right) = -f(z), \tag{144}$$

$$f\left(\frac{1 - k_1^2z}{k_1^2(1 - k_2^2z)}\right) = -f(z),$$

то [на основаніи формулъ (89), (90)] дифференціалъ (142) допускаетъ инваріантное преобразованіе (19).

Слѣдовательно, дифференціалъ (143) будетъ допускать инваріантное преобразованіе, если

$$f\left(\frac{1}{k_1^2k_1^2x^2}\right) = -f(x^2),$$

$$f\left(\frac{1 - k_2^2x^2}{k_2^2(1 - k_1^2x^2)}\right) = -f(x^2), \tag{145}$$

$$f\left(\frac{1 - k_1^2x^2}{k_1^2(1 - k_2^2x^2)}\right) = -f(x^2).$$

При $k_1 = 1$, $k_2 = k$ получимъ формулы, упомянутыя въ началѣ статьи.

Замѣтимъ, что первому случаю (145) соотвѣтствуетъ инваріантное преобразованіе тоже линейнаго характера, но въ двухъ другихъ случаяхъ это преобразованіе будетъ типа (13) со второй степенью p_1.

Такимъ образомъ, дифференціалъ (143), какъ допускающій инваріантное преобразованіе, по теоремѣ IX интегрируется въ конечномъ видѣ. Этотъ результатъ, полученный Эрмитомъ, подробно доказывается Раффи въ вышеупомянутой статьѣ.

Къ изложенному Раффи съ своей стороны прибавимъ, что изъ его изслѣдованій можно вывести и подстановки, при помощи которыхъ интегралы Эрмита приводятся къ интеграламъ отъ раціональныхъ дробей. Стоитъ только въ формулѣ (140) положить $R = z$, $R = z - \dfrac{1}{k_1^2}$ и $R = z - \dfrac{1}{k_2^2}$.

Тремъ случаямъ (144) соотвѣтствуютъ три подстановки

$$\frac{\sqrt{z\left(z-\dfrac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\dfrac{1}{k_2^2}\right)}}{z} = y,$$

$$\frac{\sqrt{z\left(z-\dfrac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\dfrac{1}{k_2^2}\right)}}{z-\dfrac{1}{k_1^2}} = y, \tag{146}$$

$$\frac{\sqrt{z\left(z-\dfrac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\dfrac{1}{k_2^2}\right)}}{z-\dfrac{1}{k_2^2}} = y,$$

при помощи которыхъ интегралъ

$$\int \frac{f(z)\,dz}{2k_1 k_1 \sqrt{z\left(z-\dfrac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\dfrac{1}{k_2^2}\right)}}$$

приводится къ интегралу отъ раціональной дроби $\int \varLambda(y)\,dy$.

Къ $\int \varLambda(y)\,dy$ приведется интегралъ

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-k_1^2 x^2)(1-k_2^2 x^2)}}, \tag{147}$$

при условіяхъ (145), причемъ зависимости между y и x получимъ, замѣнивъ въ уравненіяхъ (146) z на x^2.

Отбрасывая постоянные множители, не имѣющіе очевидно, значенія, получимъ три Эрмитовскія подстановки, приводящія интегралъ (147) къ интегралу отъ раціональной дроби,

$$\frac{\sqrt{(1-k_1^2x^2)(1-k_2^2x^2)}}{x}=p,$$

$$\frac{x\sqrt{1-k_2^2x^2}}{\sqrt{1-k_1^2x^2}}=p, \tag{148}$$

$$\frac{x\sqrt{1-k_1^2x^2}}{\sqrt{1-k_2^2x^2}}=p.$$

Въ частномъ случаѣ для Эйлеровыхъ интеграловъ (91) и (92), гдѣ $k_1^2=i$, $k_2^2=-i$,

$$f\left(\frac{1}{k_1^2k_1^2x^2}\right)=-f(x^2),$$

получаемъ подстановку

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}}=p,$$

указанную еще Эйлеромъ.

LE PROBLÈME MATHÉMATIQUE DES VIBRATIONS UNIVERSELLES.

Par A. Korn.

Le problème „des vibrations universelles" me paraît, après le problème de Dirichlet, le problème mathématique le plus important pour la physique, parce qu'il sera à l'avenir le fondement des théories, qui expliquent les forces apparentes à distance d'une manière purement mécanique.

Il s'agit de la question suivante:

Nous supposons dans un continu infini, qui se comporte, du moins, quand il s'agit de mouvements rapides, comme un liquide parfait, un nombre quelconque de particules faiblement compressibles; en appelant u, v, w les vitesses d'un point (x, y, z) quelconque du système (supposées continues dans tout l'espace et s'annulant à l'infini), peut-on démontrer l'existence d'une vibration de la forme

$$\begin{aligned} u &= U \sin \frac{t}{T} 2\pi , \\ v &= V \sin \frac{t}{T} 2\pi , \\ w &= W \sin \frac{t}{T} 2\pi , \end{aligned} \tag{1}$$

où T représente une durée très petite; il faut ajouter que U, V, W, quoique assez grandes, ne doivent pas être de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de la vitesse, ni

$$\frac{dU}{dt}, \frac{dV}{dt}, \frac{dW}{dt}$$

de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de l'accélération. Quelles sont les valeurs possibles de T, et comment peut-on trouver les fonctions correspondantes U, V, W?

Une première analyse des équations du mouvement de notre système nous mène au résultat suivant:

Il faut que

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2}$$

$$W = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3 a}$$

à l'extérieur,

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \tag{3 b}$$

à l'intérieur des particules, où

$$k^2 = 4\pi^2 \frac{\alpha^2}{T^2} \tag{4}$$

(α^2 une constante dépendant de la compressibilité des particules), et Φ doit être continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini comme un potentiel.

Les domaines i et e, c'est ainsi que je désignerai l'intérieur et l'extérieur des particules, étant donnés, il s'agit de démontrer l'existence de solutions Φ, k et de trouver des méthodes pour obtenir ces solutions dans les cas les plus importants pour la physique. Voilà ce que j'appelle le problème mathématique des vibrations universelles.

Pour la première partie de notre tâche, concernant l'existence des solutions, nous pouvons nous servir d'une méthode analogue à celle imaginée par M. Poincaré [1]) à l'occasion du problème:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$$

à l'intérieur d'une surface fermée ω,

$$\Phi = 0 \quad \text{à la surface } \omega;$$

[1]) H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1894.

mais il est à remarquer que ces deux problèmes diffèrent en bien des points, comme on verra déjà par l'exemple le plus simple, par le cas d'une sphère. À cause de ces divergences il m'a paru utile de donner la démonstration complète pour l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2, \; k_1^2, \; k_2^2, \ldots, k_j^2, \ldots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0, \; \Phi_1, \; \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots,$$

qui représentent des solutions de notre problème, dans la première partie de cet ouvrage.

Dans la deuxième partie nous traiterons des méthodes, par lesquelles on peut obtenir ces solutions dans les cas les plus simples et en même temps les plus importants pour la physique, c'est-à-dire quand les particules sont de petites sphères dont les rayons sont assez petits en comparaison avec leurs distances. Le problème d'une seule sphère trouve sa solution complète à l'aide des fonctions de Bessel, pour le problème de plusieurs sphères nous démontrerons une méthode, analague à celle de Murphy pour le problème analogue de l'électrostatique. J'ai déjà fait usage de cette méthode dans ma théorie du frottement dans les masses continues [1]), mais sans donner une démonstration de cette méthode, évidente au premier aspect comme celle de Murphy. Mais comme on ne doit pas toujours se fier à ces évidences apparentes, il m'a paru nécessaire de combler cette lacune et de démontrer la méthode en question avec toute la rigueur nécessaire. On sait que des méthodes analogues existent pour les problèmes les plus différents de la physique théorique; nous retrouvons ici un des instruments les plus puissants de l'analyse mathématique.

---

[1]) A. Korn, Eine Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, 1901. (Ferd. Dümmlers Verlag).

PREMIÈRE PARTIE.

LES THÉORÈMES D'EXISTENCE ET LES FONCTIONS UNIVERSELLES.

CHAPITRE I.

COROLLAIRE D'UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

§ 1. En m'appuyant sur un théorème de M. Poincaré, que j'ai démontré récemment dans toute sa généralité [1]), je me propose de démontrer le lemme suivant:

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ p fonctions continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace sur lesquelles nous ferons la seule supposition qu'elles soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe entre elles aucune relation

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_p f_p = 0$$

dans tout l'espace, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant des constantes réelles satisfaisant à l'équation

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1,$$

et qu'elles aient toutes les qualités de potentiels à l'extérieur d'une surface fermée ω de courbure continue, qui peut se composer de plusieurs nappes séparées; on peut toujours (pour un nombre p assez grand) trouver p constantes réelles

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

de manière que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1 \tag{5}$$

et que la fonction

$$\psi = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p \tag{6}$$

satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_{i+e}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{\overline{<}} \,{}^{2)}\, \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}, \tag{7}$$

---

[1]) Abhandlungen zur Potentialtheorie, № 4, p. 6, Berlin 1902. (Ferd. Dümmler's Verlag).

[2]) On peut aussi bien écrire $\overline{\overline{<}} \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$.

où a^2 représente une constante finie ne dépendant que de la forme de la surface ω et tout à fait indépendante des fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_p$.

§ 2. La démonstration à l'aide du théorème de M. Poincaré est extrêmement facile; on peut d'après ce théorème toujours obtenir l'inégalité

$$\frac{\int\limits_i \psi^2\, d\tau}{\int\limits_i \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{<} \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}$$

et d'autant plus l'inégalité (7), puisque

$$\frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{<} \frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_i \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}.$$

CHAPITRE II.

SOLUTION D'UN PROBLÉME TRÈS GÉNÉRAL.

§ 1. Nous nous occuperons maintenant d'un problème très général, que nous énoncerons de la manière suivante:

Soient f et φ deux fonctions continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur d'une surface ω de courbure continue (qui peut se composer de plusieurs nappes séparées) et $\varphi \neq 0$.

On cherche une fonction U, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, qui satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U = f, \tag{8}$$

et qui a toutes les qualités d'un potentiel à l'extérieur de ω (k^2 un nombre positif quelconque donné d'avance).

Nous formons successivement les fonctions

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_i f(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \\ u_j(x, y, z) &= +\frac{1}{4\pi}\int\limits_i \varphi^2 u_{j-1}(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \\ &\qquad (j = 1, 2, 3 \ldots) \end{aligned} \tag{9}$$

r étant la distance du point (x, y, z) d'un élément $d\tau$ (ξ, η, ζ); alors on a

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= f, \\ \Delta u_1 &= -\varphi^2 u_0, \\ \Delta u_2 &= -\varphi^2 u_1, \\ &\cdots\cdots \\ \Delta u_j &= -\varphi^2 u_{j-1}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

à l'intérieur de ω.

S'il était possible de démontrer que

$$\lim_{j=\infty} u_j = 0,$$

et que la série

$$u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \cdots$$

représente une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, on pourrait affirmer que cette fonction est une solution de notre problème.

Avant d'analyser ces questions de convergence à l'aide de la méthode connue de M. Poincaré, il nous faut démontrer quelques propriétés des fonctions $u_0, u_1, u_2, \ldots$

§ 2. Supposons qu'il y ait entre les $p+1$ fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, u_p$$

une relation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p = 0, \tag{11}$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_p^2 = 1 \tag{12}$$

(p un nombre entier et fini).

Nous allons d'abord démontrer que l'on peut toujours déduire de (11) une relation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0, \tag{13}$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p-1}$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_{p-1}^2 = 1, \tag{14}$$

dans ces trois cas:

1) si l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_p x^p = 0 \tag{15a}$$

ou

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \beta_2 x^{p-2} + \ldots + \beta_p = 0 \tag{15b}$$

admet une racine imaginaire

$$x_1 + ix_2 \quad (x_2 \neq 0);$$

2) si cette équation a une racine réelle et négative;

3) si cette équation a une racine double.

En effet, définissons les $p+2$ constantes

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}, x, a$$

par les équations

$$\begin{aligned} a\gamma_0 &= \beta_0, \\ a\gamma_1 &= \beta_1 + ax\gamma_0, \\ a\gamma_2 &= \beta_2 + ax\gamma_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a\gamma_{p-1} &= \beta_{p-1} + ax\gamma_{p-2}, \\ 0 &= \beta_p + ax\gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 &+ \gamma_2^2 + \ldots + \gamma_{p-1}^2 = 1, \end{aligned} \tag{16}$$

ce qui est possible de p manières, x étant une racine quelconque de l'équation (15b); alors on a

$$\begin{aligned} &\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \\ &= x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \ldots + \gamma_{p-1} u_p) \end{aligned} \tag{17}$$

et à cause de (10)

$$\begin{aligned} &\Delta\{\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \ldots + \gamma_{p-1} u_p\} \\ &= -x\varphi^2\{\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \ldots + \gamma_{p-1} u_p\} \end{aligned} \tag{18}$$

à l'intérieur de ω; si maintenant l'équation (15b) admet une racine imaginaire

$$x = x_1 + ix_2 \quad (x_2 \neq 0),$$

on n'a qu'à poser

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = X + iY,$$

à multiplier l'équation (18) par $(X - iY)$ et à intégrer sur le domaine intérieur de ω pour arriver à la relation

$$-\int\limits_{i+e}\left[\frac{\partial(X-iY)}{\partial x}\frac{\partial(X+iY)}{\partial x}+\frac{\partial(X-iY)}{\partial y}\frac{\partial(X+iY)}{\partial y}+\frac{\partial(X-iY)}{\partial z}\frac{\partial(X+iY)}{\partial z}\right]d\tau$$

$$= -(x_1 + ix_2)\int\limits_i \varphi^2(X^2 + Y^2)\,d\tau,$$

qui mène, comme le premier membre est réel et $x_2 \neq 0$, au résultat

$$\int\limits_i \varphi^2(X^2 + Y^2)\,d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = 0, \tag{19}$$

ou, par l'opération $\varDelta$,

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0. \tag{20}$$

Si l'équation (15b) a une racine réelle et négative

$$x = -x_0^2,$$

on trouve en multipliant (18) par

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p$$

et en intégrant sur le domaine intérieur de ω

$$-\int\limits_{i+e}\sum\left[\frac{\partial(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p)}{\partial x}\right]^2 d\tau$$

$$-x_0^2\int\limits_i \varphi^2(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p)^2\,d\tau = 0,$$

et on arrive de nouveau aux résultats (19) et (20), parce que le premier membre de cette équation se composerait de termes négatifs, qui devraient tous s'annuler.

Si enfin l'équation (15*b*) a une racine double que nous pouvons du reste supposer réelle et positive

$$x = \bar{x},$$

on peut déterminer les p constantes $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{p-2}, b$ de façon qu'elles satisfassent aux équations

$$\begin{aligned} b\delta_0 &= \gamma_0, \\ b\delta_1 &= \gamma_1 + b\bar{x}\delta_0, \\ b\delta_2 &= \gamma_2 + b\bar{x}\delta_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b\delta_{p-2} &= \gamma_{p-2} + b\bar{x}\delta_{p-3}, \\ 0 &= \gamma_{p-1} + b\bar{x}\delta_{p-2}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 &+ \delta_2^2 + \ldots + \delta_{p-2}^2 = 1, \end{aligned} \tag{21}$$

et l'équation (17) devient

$$F - 2\bar{x}F_1 + \bar{x}^2 F_2 = 0, \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned} F &= \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\ F_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_i \frac{\varphi^2 F}{r}\, d\tau, \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi}\int_i \frac{\varphi^2 F_1}{r}\, d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

De (22) et (23) on tire

$$\Delta F + 2\bar{x}\varphi^2 F - \bar{x}^2\varphi^2 F_1 = 0$$

à l'intérieur de ω; en multipliant par $(-F_1)\,d\tau$ et en intégrant sur i on obtient [1])

$$\int_i \varphi^2 (F^2 - 2\bar{x}FF_1 + \bar{x}^2 F_1^2)\, d\tau = 0,$$

---

[1]) On a

$$\int_i F_1 \Delta F d\tau = \int_i F \Delta F_1 d\tau = -\int_i \varphi^2 F^2 d\tau.$$

d'où

$$F - xF_1 = 0, \tag{24}$$

uue équation de la forme

$$\Gamma_0 u_0 + \Gamma_1 u_1 + \cdots + \Gamma_{p-1} u_{p-1} = 0,$$

$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ étant des constantes auxquelles on peut encore imposer la condition

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \cdots + \Gamma_{p-1}^2 = 1.$$

Nous avons ainsi démontré la proposition que l'on peut toujours réduire l'équation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p = 0$$

à une équation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \cdots + \gamma_m u_m = 0, \quad (m \overline{\overline{<}} p) \tag{25}$$

dans laquelle $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ représentent des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \cdots + \gamma_m^2 = 1 \tag{26}$$

et possédant la propriété, que l'équation

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m = 0 \tag{27}$$

admet m racines positives et simples.

Désignons ces racines par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots x_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots x_m^{m-1} \end{vmatrix} \mp 0,$$

(parce qu'il n'y a pas de racines multiples), et on pourra, à l'aide des m relations

$$\left.\begin{aligned}u_0 &= U_1 + U_2 + \dots + U_m\,,\\ u_1 &= x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_m U_m\,,\\ u_2 &= x_1^2 U_1 + x_2^2 U_2 + \dots + x_m^2 U_m\,,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_{m-1} &= x_1^{m-1} U_1 + x_2^{m-1} U_2 + \dots + x_m^{m-1} U_m\,,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

trouver pour $U_1, U_2, \dots, U_m$ des expressions linéaires par rapport à $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$. Comme $x_1, x_2, \dots, x_m$ satisfont à l'équation (27), on tire de (25) et (28)

$$u_m = x_1^m U_1 + x_2^m U_2 + \dots + x_m^m U_m\,,$$

et on pourra remplacer la définition (28) des $U_1, U_2, \dots, U_m$ par la définition

$$u_j = x_1^j U_1 + x_2^j U_2 + \dots + x_m^j U_m\,. \qquad (j=1,2,\dots,m) \tag{29}$$

Par l'opération Δ il s'ensuit

$$-\varphi^2 u_{j-1} = x_1^j \Delta U_1 + x_2^j \Delta U_2 + \dots + x_m^j \Delta U_m \tag{30}$$
$$(j=1,2,\dots m)$$

ou, comme on a d'après (28)

$$\varphi^2 u_{j-1} = x_1^{j-1}\varphi^2 U_1 + x_2^{j-1}\varphi^2 U_2 + \dots + x_m^{j-1}\varphi^2 U_m\,, \tag{31}$$
$$(j=1,2,\dots,m)$$

on trouvera

$$\left.\begin{aligned}0 = x_1^{j-1}(x_1\Delta U_1 + \varphi^2 U_1) + x_2^{j-1}(x_2 \Delta U_2 + \varphi^2 U_2) + \dots\\ + x_m^{j-1}(x_m \Delta U_m + \varphi^2 U_m)\,,\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

c'est-à-dire m équations linéaires et homogènes par rapport aux m quantités

$$x_1 \Delta U_1 + \varphi^2 U_1\,, \quad x_2 \Delta U_2 + \varphi^2 U_2\,, \dots, x_m \Delta U_m + \varphi^2 U_m\,,$$

dont le déterminant est $\neq 0$; il faut donc que

$$x_j \Delta U_j = -\varphi^2 U_j\,, \qquad (j=1,2,\dots,m) \tag{33}$$

(à l'intérieur de ω).

Il y a pour chaque U_j deux possibilités

$$U_j = 0\,,$$

ou

$$U_j \neq 0;$$

dans le dernier cas il faut aussi que le x_j correspondant soit $\neq 0$.

La première équation (28) nous apprend donc que l'on pourra toujours tirer d'une équation de la forme (11) la conclusion suivante: On aura

$$u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_n,\ ^{1)} \qquad (n \overline{\gtrless} p)$$

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ étant des fonctions, continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à des équations

$$\Delta U_j = -\frac{1}{x_j}\varphi^2 U_j \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{34}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω; les x_j sont des nombres positifs, différents de zéro, satisfaisant à l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p = 0. \tag{35}$$

On peut toujours en conséquence de la supposition (11) affirmer que la fonction

$$U = -\sum_1^n {}_j \frac{\frac{1}{x_j}}{k^2 - \frac{1}{x_j}} U_j \tag{36}$$

représente une solution de notre problème

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U = f \quad \text{(à l'intérieur de } \omega),$$
$$\Delta U \qquad\quad = 0 \quad \text{(à l'extérieur de } \omega),$$

pourvu que $k^2 \neq \frac{1}{x_j}$.

La solution (36) a, comme fonction de k^2, n pôles simples

$$k^2 = \frac{1}{x_j}. \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

---

[1]) Pour f on trouvera la relation

$$f = -\varphi^2 \sum_1^n {}_j \frac{U_j}{x_j}.$$

Supposons qu'il y ait une autre solution U' de notre problème; il faut alors que la fonction $U'-U$, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfasse à la condition

$$\Delta(U'-U)=-k^2\varphi^2(U'-U) \quad \text{(à l'intérieur de } \omega\text{)}, \tag{37}$$

et qu'elle ait toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

§ 3. Supposons maintenant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_p u_p = 0,$$

p étant un nombre *fini*, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1.$$

Nous formerons successivement les fonctions

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{1}{4\pi}\int_i [\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})]\frac{d\tau}{r}, \\ w_j &= +\frac{1}{4\pi}\int_i \varphi^2 w_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \qquad (j=1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{38}$$

p étant un nombre entier et fini, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1.$$

Nous allons, d'une manière analogue à la méthode connue de M. Poincaré, démontrer que l'on peut (en prenant p asser grand) choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de façon que

$$\text{abs.}(k^{2j} w_j) \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \tag{39}$$

si A représente une constante finie, L satisfait à la condition

$$0 < L < 1;$$

k^2 peut être un nombre aussi grand que l'on veut, mais donné à l'avance.

L'inégalité (39) une fois démontrée, on pourra affirmer que la fonction

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \dots \tag{40}$$

représente une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \tag{41}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

Nous chercherons pour la démonstration de notre proposition une limite supérieure pour le quotient

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau},$$

m étant un nombre entier et fini quelconque, mais donné à l'avance.

On a évidemment

$$\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = -\int\limits_i w_m \Delta w_m d\tau$$

$$\overline{\overline{<}} \sqrt{\int\limits_i w_m^2 d\tau \int\limits_i (\Delta w_m)^2 d\tau} \;\overline{\overline{<}}\; \max.\varphi^2 \sqrt{\int w_m^2 d\tau \int w_{m-1}^2 d\tau},$$

en désignant par max. φ^2 la plus grande valeur que φ^2 puisse avoir; donc

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \;\overline{\overline{<}}\; (\max.\varphi^2)^2 \left[\frac{\int\limits_i w_m^2 d\tau}{\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}\right]^2.$$

Si l'on prend p suffisamment grand, on pourra, d'après le lemme p. 4, choisir $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ de façon que

$$\frac{\int\limits_i w_m^2 d\tau}{\int\limits_{i+e}\left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right]d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

(a^2 une constante finie ne dépendant nullement de p ni de w_m), puisque

$$w_m = \alpha_0 u_{m-1} + \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m+1} + \ldots + \alpha_p u_{m+p-1}\,.$$

Il viendra donc

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2\, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{C^{te}\, finie}{\sqrt[3]{p^4}} \tag{42}$$

pour un m fini quelconque (mais donné à l'avance), en choisissant p assez grand et en prenant pour $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des valeurs $\alpha_0^{(m)}$, $\alpha_1^{(m)}$, $\alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_p^{(m)}$ proprement choisies [1]).

Comme on a

$$\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau = -\int\limits_i w_{m-1}\Delta w_m\, d\tau = -\int\limits_i w_m \Delta w_{m-1} d\tau$$

$$= \int\limits_i \varphi^2 w_m w_{m-2} d\tau\,, \qquad {\scriptstyle (m=1,2,3,\ldots)} \quad {}^{2)}$$

on conclura

$$\left[\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2\, d\tau\right]^2 \overline{\overline{<}} \int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau \int\limits_i \varphi^2 w_{m-2}^2\, d\tau\,,$$

et ainsi successivement en tenant compte de l'inégalité (42)

---

[1]) Nous ajoutons les indices (m), parce que les α varieront avec le nombre m, pendant que p sera tout à fait indépendant de m.

[2]) On posera pour $m = 1$

$$-\varphi^2 w_{m-2} = \alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}).$$

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2\, d\tau}{\int\limits_i \frac{1}{\varphi^2}\left\{\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})\right\}^2 d\tau}$$

$$\overline{\overline{<}}\, \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_1^2\, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2\, d\tau} \,\overline{\overline{<}}\, \ldots \,\overline{\overline{<}}\, \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2\, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2\, d\tau} \,\overline{\overline{<}}\, \frac{C^{te}\ finie}{\sqrt[3]{p^4}}.$$

Ce résultat n'est démontré jusqu'à présent que pour un m fini quelconque, mais donné à l'avance, il importe de le démontrer pour un m croissant indéfiniment. Nous regarderons pour cela $\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_p^{(m)}$ comme les coordonnées d'un point sur la sphère

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1 \tag{44}$$

dans un espace de $p+1$ dimensions, alors la condition (43) sera remplie pour un centain domaine δ_m de cette sphère.

Nous pourrons de la même manière, en choisissant proprement

$$\alpha_0^{(m+1)},\ \alpha_1^{(m+1)}, \ldots, \alpha_p^{(m+1)},$$

obtenir les inégalités

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2\, d\tau}{\int\limits_i \frac{1}{\varphi^2}\left\{\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})\right\}^2 d\tau} \,\overline{\overline{<}}\, \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_1^2\, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_0^2\, d\tau} \tag{44}$$

$$\overline{\overline{<}} \ldots \overline{\overline{<}}\, \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2\, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2\, d\tau} \,\overline{\overline{<}}\, \frac{\int\limits_i \varphi^2 w_{m+1}^2\, d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2\, d\tau} \,\overline{\overline{<}}\, \frac{C^{te}\ finie}{\sqrt[3]{p^4}}$$

(la C^{te} finie étant toujours tout à fait indépendante de m et de p). Les points

$$\alpha_0^{(m+1)},\ \alpha_1^{(m+1)}, \ldots, \alpha_p^{(m+1)}$$

qui satisfont à la condition (44) se trouveront dans un domaine δ_{m+1} interieur à δ_m, puisque les conditions (43) sont toujours remplies à la suite des conditions (44). En continuant de cette manière, on trouvera que le domaine δ_{m+2} correspondant doit être intérieur à δ_{m+1}, et ainsi de suite; il faut donc qu'il y ait des valeurs

$$\alpha_j = \lim_{m=\infty} \alpha_j^{(m)}, \qquad (j=0,1,2,\ldots,p) \tag{45}$$

pour lesquelles les inégalités (44) seront toujours vraies, même si m croît indéfiniment.

Alors nous aurons en posant

$$L_p = \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \tag{46}$$

et en désignant par B une constante finie, indépendante de j,

$$\int_i \varphi^2 w_j^2 d\tau \overline{\overline{<}} B \cdot L_p^{2j}. \qquad (j=0,1,2\ldots) \tag{47}$$

En tenant compte que

$$w_j = \frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 w_{j-1} \frac{d\tau}{r},$$

on trouvera

$$w_j^2 \overline{\overline{<}} \frac{\text{Max}.\varphi^2}{16\pi^2} \int_i \varphi^2 w_{j-1}^2 d\tau \int_i \frac{d\tau}{r^2},$$

donc:

$$\text{abs}. w_j \overline{\overline{<}} A \cdot L_p^j, \qquad (j=0,1,2\ldots) \tag{48}$$

A étant une constante finie, indépendante de j.

Si nous prenons maintenant pour k^2 un nombre fini quelconque, mais donné d'avance, nous pourrons toujours en choisissant p assez grand obtenir que

$$k^2 L_p \overline{\overline{<}} L,$$

si L est un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < L < 1,$$

et on aura alors

$$\text{abs}. (k^{2j} w_j) \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \tag{49}$$

ce que nous voulions démontrer.

La série

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \ldots \tag{50}$$

représentera donc une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}) \tag{51}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

§ 4. Nous supposerons d'abord que k^2 ne soit pas une des racines de l'équation

$$(-k^2)^p \alpha_0 + (-k^2)^{p-1} \alpha_1 + \ldots - k^2 \alpha_{p-1} + \alpha_p = 0,$$

c'est-à-dire que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_p \\ 1 & -k^2 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -k^2 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & -k^2 \end{vmatrix} \tag{52}$$

soit $\neq 0$; on pourra alors définir les $p+1$ fonctions

$$U \quad U' \quad U'', \ldots, U^{(p)}\ ^{1)}$$

par les $p+1$ équations linéaires

$$\begin{aligned} \alpha_0 U + \alpha_1 U' + \alpha_2 U'' + \ldots + \alpha_p U^{(p)} &= w\ , \\ U - k^2 U' \qquad\qquad &= u_0\ , \\ U' - k^2 U'' \qquad\qquad &= u_1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U^{(p-)} - k^2 U^{(p)} &= u_{p-1}. \end{aligned} \tag{53}$$

Chacune des fonctions U, U', ..., $U^{(p)}$ représentera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω; nous verrons facilement que la première, la fonction U, satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f. \tag{54}$$

---

[1]) Les indices (j) ne doivent pas être pris ici dans le sens que $U^{(j)}$ représente la j-*me* dérivée de U par rapport à une variable quelconque.

En effet, écrivons les équations (53), à l'exception de la première, de la manière suivante

$$U^{(j-1)} - k^2 U^{(j)} - u_{j-1} = 0\,, \qquad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots p)} \quad ^{1)}$$

appliquons-y l'opération Δ:

$$\Delta U^{(j-1)} - k^2 \Delta U^{(j)} + \varphi^2 u_{j-2} = 0\,, \qquad {\scriptstyle (=1,2,\ldots,p)} \quad ^{2)}$$

additionnons ces deux groupes d'équations, après avoir multiplié le premier par $k^2\varphi^2$; on trouvera

$$\begin{array}{c}
(\Delta U + k^2\varphi^2 U - f) - k^2(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) = 0\,, \\
(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) - k^2(\Delta U'' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1) = 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\Delta U^{(p-1)} + k^2\varphi^2 U^{(p-1)} + \varphi^2 u_{p-2}) - k^2(\Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}) = 0\,.
\end{array} \tag{55}$$

Si l'on ajoute à ces p équations la première relation (53) que l'on peut écrire, en tenant compte de (51), de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\Delta U + k^2\varphi^2 U - f) &+ \alpha_1(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) \\
&+ \alpha_2(\Delta U' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \alpha_p(\Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}) = 0,
\end{aligned} \tag{56}$$

on a $p+1$ équations linéaires et homogénes par rapport aux p quantités

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U - f,\ \Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0,\ \Delta U'' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1,$$
$$\ldots, \Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}\,,$$

dont le déterminant (D) est $\neq 0$; ces quantités doivent donc s'annuler, en particulier la fonction U doit satisfaire à l'équation (54) à l'intérieur de ω.

D'après les équations (53) on aura

$$U = \frac{P}{D}\,, \tag{57}$$

---

[1]) En posant pour $j = 1$:

$$U^{(j-1)} = U\,.$$

[2]) En posant pour $j = 1$:

$$\varphi^2 u_{j-2} = -f\,.$$

où

$$P = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}; \tag{58}$$

nous avons ainsi obtenu une solution U de notre problème, si l'on choisit p suffisamment grand,

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

et ne satisfaisant pas à l'équation

$$D = 0.$$

Le cas exceptionnel demande une discussion spéciale.

§ 5. Si k^2 se rapproche d'une des racines

$$k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$$

de l'équation

$$D = 0,$$

la fonction U croîtra d'après (57) indéfiniment, exception faite pour le cas que P s'annulle en même temps.

Il s'agit d'examiner la fonction P au voisinage des pôles

$$k^2 = k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2.$$

On a d'après (58)

$$\Delta P = \begin{vmatrix} \Delta w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \Delta u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix},$$

et à l'intérieur de ω

$$\Delta P + k^2\varphi^2 P = \begin{vmatrix} \alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ f + k^2\varphi^2 u_0 & & -k^2 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ -\varphi^2 u_0 + k^2\varphi^2 u_1 & & 1 & -k^2 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varphi^2 u_{p-2} + k^2\varphi^2 u_{p-1} & & 0 & 0 & \ldots 1 & -k^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\varDelta P + k^2 \varphi^2 P = f \cdot D. \tag{59}$$

Si nous désignons par P_j les valeurs de P pour

$$k^2 = k_j^2, \qquad (j=1,2,\ldots,p)$$

nous aurons

$$\varDelta P_j = -k_j^2 \varphi^2 P_j \quad \text{à l'intérieur de } \omega, \tag{60a}$$

$$\varDelta P_j = 0 \quad \text{à l'extérieur de } \omega; \tag{60b}$$

nous savons du reste que les fonctions P_j sont continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, et qu'elles ont toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω.

Nous introduisons maintenant la notion des fonctions universelles par cette définition:

Nous appellerons fonction universelle correspondant à la surface ω d'une seule ou de plusieurs particules chaque fonction $\varPhi_j$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'intérieur de ω aux équations

$$\varDelta \varPhi_j = -k_j^2 \varphi^2 \varPhi_j, \quad \int_i \varphi^2 \varPhi_j^2 d\tau = 1 \tag{61}$$

et ayant à l'extérieur de ω toutes les propriétés d'un potentiel; nous appellerons k_j^2 le nombre correspondant à la fonction universelle $\varPhi_j$. Dans les applications à la physique nous poserons toujours $\varphi^2 = 1$.

Après cette définition, nous pourrons énoncer notre résultat antérieur ainsi:

Les fonctions

$$P_j = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k_j^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k_j^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k_j^2 \end{vmatrix}, \qquad (j=1,2,\ldots,p) \tag{62}$$

sont ou identiquement nulles, ou elles représentent des fonctions universelles avec les nombres correspondants k_j^2.

Il est facile à voir que les racines k_j de l'équation $D = 0$ correspondant à des fonctions P_j, qui sont identiquement nulles, ne peuvent être des pôles pour la solution

$$U = \frac{P}{D}$$

de notre problème fondamental. Car on a dans ce cas, si k_j^2 est une valeur dans laquelle coïncident m racines $(m = 1, 2, \ldots, p)$

$$D = \frac{dD}{d(k^2)} = \frac{d^2 D}{d(k^2)^2} = \ldots = \frac{d^{m-1} D}{d(k^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{d(k^2)^m} \neq 0,$$

$$U = \frac{\dfrac{d^m P}{d(k^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{d(k^2)^m}},$$

et $\dfrac{d^m P}{d(k^2)^m}$ reste continue avec ses premières dérivées, si l'on donne à k^2 une des valeurs $k_j^2 (j = 1, 2, \ldots, p)$.

On démontre aussi facilement que les racines k_j^2 correspondant à des fonctions universelles ne peuvent être des racines multiples. On aurait pour une racine double [1]) d'après (59) à l'intérieur de ω

$$k_j^2 \varphi^2 P_j = - \varDelta P_j$$

$$\varDelta \frac{dP_j}{d(k^2)} = - k_j^2 \varphi^2 \frac{dP_j}{d(k^2)} - \varphi^2 P_j.$$

Multiplions ces deux équations, divisons par φ^2 et intégrons sur i; alors en tenant compte de l'identité

$$\int_i P_j \varDelta \frac{dP_j}{d(k^2)} d\tau = \int_i \frac{dP_j}{d(k^2)} \varDelta P_j d\tau$$

on trouvera

$$\int_i P_j \varDelta P_j d\tau = 0,$$

ou

$$\int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$P_j = C^{\text{-}te} = 0;$$

donc P_j ne pourrait être une fonction universelle, $c.q.f.d.$

---

[1]) Comme on aurait

$$\frac{dD}{d(k^2)} = 0.$$

Nous avons obtenu ainsi un résultat qui est d'une grande importance pour les questions concernant les fonctions universelles:

I. En choisissant le nombre p asser grand et en supposant

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

on pourra toujours trouver une fonction

$$V(k^2, x, y, z)$$

de manière que l'expression

$$U = \frac{V(k^2, x, y, z)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) \dots (k^2 - k_n^2)}, \qquad (0 \overline{\overline{<}} n \overline{\overline{<}} p) \; ^{1)}$$

satisfasse à l'intérieur de ω à l'équation

$$\varDelta U + k^2 \varphi^2 U = f,$$

si

$$k^2 \neq k_j^2, \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

V représentant pour toute valeur $k^2 (< \sqrt[3]{p^2})$ une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω. $k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2$ seront des nombres bien définis et $< \sqrt[3]{p^2}$, tous différents entre eux.

Pour $k^2 = k_j^2 (j = 1, 2, \dots, n)$ la fonction V devient une fonction universelle $\varPhi_j$, correspondant à la surface ω, à un facteur constant près.

Nous avons démontré ce résultat en supposant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_i f \frac{d\tau}{r},$$

$$u_j = +\frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 u_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_p u_p = 0,$$

---

[1]) Pour le cas $n = 0$, on doit poser le second membre $= V(k^2, x, y, z)$.

p étant un nombre fini, β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_p$ des constantes réelles, satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1\,;$$

mais d'après le § 2 [1]) notre résultat reste vrai, même dans ces cas particuliers; donc dans tous les cas.

Nous pouvons ajouter, comme à la fin du § 2:

La solution (63) a, comme fonction de k^2, n pôles simples

$$k^2 = k_j^2, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (0 \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} p)$$

dans l'intervalle

$$0 < k^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

Toute autre solution U' de notre problème pour une valeur donnée $\overline{k^2}$ de k^2 ne diffère de (63) que d'une fonction universelle ayant $\overline{k^2}$ pour nombre correspondant [2]).

CHAPITRE III.

L'EXISTENCE DES FONCTIONS UNIVERSELLES.

§ 1. Nous pourrions démontrer l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2, \ldots, k_j^2 \ldots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots$$

en démontrant que chaque potentiel

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\int f\frac{d\tau}{r},$$

---

[1]) En posant $k_j^2 = \dfrac{1}{xj}$, $\quad (j = 1, 2, \ldots, n)$.

[2]) S'il en existe une; autrement le problème n'admettra que la solution (63).

peut être représenté par une série

$$u_0 = \sum_{0}^{\infty}{}_j C_j \Phi_j,$$

les C_j étant des constantes bien définies et les Φ_j étant les fonctions universelles que l'on obtient par la solution de notre problème fondamental, si nous supposons toujours que f est continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω.

La démonstration serait absolument identique avec la démonstration analogue pour les développements en séries de fonctions harmoniques [1]).

Nous allons, pour abréger, nous contenter de démontrer cette existence des k_j^2, Φ_j en établissant les théorèmes suivants:

II. En partant d'une fonction f [2]) quelconque, continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω, et donnée d'avance, on peut toujours trouver un nombre p fini de manière que la solution de notre problème fondamental nous mène du moins à *une* fonction universelle.

III. Soit p^2 un nombre fini quelconque, il n'y aura qu'un nombre fini de fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres k_j^2 correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

IV. Si l'on connaît toutes les fonctions universelles avec des nombres correspondants satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

(p^2 étant un nombre fini donné d'avance) on pourra toujours trouver un nombre $p'^2 (> p^2)$ fini, de manière qu'il existe au moins *une* fonction universelle avec un nombre correspondant k'^2, satisfaisant à la condition

$$\sqrt[3]{p^2} \overline{\overline{<}} k'^2 < \sqrt[3]{p'^2}.$$

Nous poserons dès à présent toujours $\varphi^2 = 1$.

---

[1]) Comp. W. Stekloff, Communications, T. VI, 2 et 3. A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 4, Berlin (F. Dümmler's Verlag).

[2]) Qui n'est pas identiquement nulle.

§ 2. Pour démontrer le théorème II, supposons que p soit un nombre positif assez grand, et que la solution (63) de notre problème fondamental ne nous ait pas mené à une fonction universelle Φ_j avec un nombre correspondant $k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$.

Alors le rayon de convergence de la série

$$\int_i u_0^2 d\tau + k^2 \int_i u_1^2 d\tau + k^4 \int_i u_1^4 d\tau + \dots$$

sera $\overline{\overline{>}} \sqrt[3]{p^4}$; on aura donc

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}},$$

puisque

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} < \frac{\int_i u_1^2 d\tau}{\int_i u_0^2 d\tau} < \frac{\int_i u_2^2 d\tau}{\int_i u_1^2 d\tau} < \dots$$

et l'inégalité

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} > \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}}$$

entraînerait pour cette raison l'inégalité

$$\int_i u_j^2 d\tau < (\sqrt[3]{p^2})^{2j} \int_i f^2 d\tau.$$

Or la relation

$$\int_i u_0^2 d\tau \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}} \int_i f^2 d\tau$$

ne pourrait subsister pour un p^2 aussi grand que l'on veut, à moins que

$$\int_i u_0^2 d\tau = 0\,,$$

ce qui entraînerait $f \equiv 0$, $c\ q.f.d.$

§ 3. Pour démontrer le théorème III, on remarquera d'abord, qu'en posant dans notre problème fondamental

$$f = -\varphi^2 (\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \ldots \alpha_p \Phi_p)\,, \tag{64}$$

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ étant p fonctions universelles avec les nombres correspondants $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des constantes données, la solution (63) deviendra

$$U = u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \ldots = \sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \Phi_j}{k_j^2 - k^2} \tag{65}$$

aussi longtemps que k^2 reste plus petit que le plus petit des nombres $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$.

Soit p^2 maintenant un nombre quelconque assez grand, mais fini, et supposons que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ soient linéairement indépendantes, alors on saura trouver les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de façon que la série (65) converge absolument et uniformément pour n'importe quel

$$k^2 < \sqrt[3]{(p-1)^2}\,;$$

mais comme l'expression (65) croît indéfiniment, quand k^2 se rapproche du plus petit k_j^2, il faudrait donc qu'au moins un des k_j^2 soit $> \sqrt[3]{(p-1)^2}$; donc il ne peut exister plus de $p-1$ fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres correspondants

$$< \sqrt[3]{(p-1)^2}\,,$$

p représentant toujours un nombre quelconque assez grand, mais fini. On n'aura qu'à changer $p-1$ en p, pour arriver à notre théorème III.

§ 4. Supposons pour la démonstration du théorème IV que nous connaissions toutes [1]) les fonctions universelles avec des nombres correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}\,,$$

---

[2]) Leur nombre est $\overline{\gtrless} p$ d'après le théorème III, si p^2 est choisi assez grand.

(p^2 étant un nombre fini, donné d'avance), et soit f une fonction quelconque continue avec ses premières dérivées; alors il peut arriver des deux choses l'une: On peut trouver f comme une expression linéaire par rapport aux fonctions universelles données, ou la solution de notre problème fondamental doit nous mener au moins à une nouvelle fonction universelle avec un nombre correspondant fini et

$$\overline{\gtrless}\sqrt[3]{p^2}.$$

Comme on peut toujours facilement donner $p+1$ fonctions f linéairement indépendantes, le dernier des deux cas doit arriver au moins pour une de ces fonctions f.

§ 5. Nous finirons ce Chapitre par un théorème important sur les fonctions universelles, absolument analogue à un théorème connu sur les fonctions harmoniques.

V. Soient Φ_i et Φ_k deux fonctions universelles avec des nombres correspondants k_i^2 et k_k^2, on aura

$$\int\limits_{i+e}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_k}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_k}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\frac{\partial\Phi_k}{\partial z}\right)d\tau=0,$$

$$\int\limits_i \Phi_i\Phi_k\,d\tau=0,\text{[1]} \tag{66}$$

si

$$k_i^2 \mp k_k^2.$$

On n'a, pour la démonstration, qu'à multiplier l'équation

$$\Delta\Phi_i = -k_i^2\Phi_i \quad \text{à l'intérieur de } \omega$$

par Φ_k et à intégrer sur i; alors on aura

$$\int\limits_i k_i^2\Phi_i\Phi_k\,d\tau = -\int\limits_i \Phi_k\,\Delta\Phi_i d\tau = -\int\limits_i \Phi_i\Delta\Phi_k d\tau,$$

d'où

$$k_i^2\int\limits_i \Phi_i\Phi_k d\tau = k_k^2\int\limits_i \Phi_i\Phi_k d\tau,$$

c'est-à-dire on trouvera les relations (66), si $k_i^2 \mp k_k^2$.

---

[1]) Dans le cas général

$$\int\limits_i \varphi^2\Phi_i\Phi_k\,d\tau=0.$$

DEUXIÈME PARTIE.

SOLUTION DU PROBLÈME DES VIBRATIONS UNIVERSELLES POUR DES PARTICULES SPHÉRIQUES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

CHAPITRE I.

LE CAS D'UNE SEULE PARTICULE.

§ 1. Nous cherchons les fonctions universelles

$$\Phi_0, \ \Phi_1, \ \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots$$

avec les nombres correspondants

$$k_0^2, \ k_1^2, \ k_2^2, \ldots, k_j^2, \ldots$$

pour le cas que la surface ω est représentée par une sphère de rayon R.

En prenant le centre de la sphère pour origine et en introduisant les coordonnées sphériques par les transformations

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\vartheta\cos\varphi, \\ z &= r\sin\vartheta\sin\varphi, \end{aligned} \tag{67}$$

nous pourrons écrire les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions universelles:

$$\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}+k^2\Phi=0 \tag{68}$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}=0, \tag{69}$$

à l'extérieur de la sphère.

Les fonctions Φ doivent être continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini.

Assurés de l'existence des fonctions Φ_j et des nombres k_j^2, nous pouvons les représenter sous forme de séries procédant par fonctions sphériques

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty}{}_i\, f_i(r)\, Y_i(\vartheta, \ \varphi),$$

où la fonction sphérique $Y_i(\vartheta, \varphi)$, satisfait à l'équation:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_i}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\varphi^2}+i(i+1)Y_i=0. \qquad (71)$$
$$(i=0,1,2,\ldots)$$

Si nous introduisons la valeur (70) de Φ dans les équations (68) et (69), nous trouverons, en tenant compte de (71), que les fonctions $f_i(r)$ doivent être des solutions des équations ($i=0, 1, 2 \ldots$)

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_i}{\partial r}\right)-i(i+1)f_i\right]+k^2 f_i=0 \qquad (72)$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_i}{\partial r}\right)-i(i+1)f_i\right]=0, \qquad (73)$$

à l'extérieur de la sphère.

Les solutions générales de l'équation (73) sont

$$f_i=c_{i1}\frac{1}{r^{i+1}}+c_{i2}r^i \qquad (74)$$

c_{i1}, c_{i2} étant des constantes quelconques; les solutions générales de l'équation (72)

$$f_i=C_{i1}\frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}+C_{i2}\frac{J_{-(i+\frac{1}{2})}(kr)}{\sqrt{kr}}, \qquad (75)$$

si C_{i1}, C_{i2} représentent des constantes quelconques et $J_n(x)$ la fonction de Bessel

$$J_n(x)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Gamma(n+\lambda+1)}. \qquad (76)$$ [1]

Pour les fonctions $J_{i+\frac{1}{2}}$ et $J_{-(i+\frac{1}{2})}$ qui nous intéressent ici on peut trouver des expressions analytiques plus faciles à manier

---

[1]) En posant

$$\Pi(\lambda)=1.2.3.\ldots.\lambda,\quad \Pi(0)=1.$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n=\infty}\frac{\Pi(n-1)n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}.$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{0}^{i}{}_{\lambda}\frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(i-\lambda)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right],$$

$$J_{-(i+\frac{1}{2})}(x)=(-1)^{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(i)\,\Pi(i-\lambda)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]. \tag{77}$$

Comme les fonctions f_i doivent être continues à l'intérieur de la sphère aussi bien qu'à l'extérieur de la sphère et s'annuler à l'infini, il faut que

$$c_{i2}=0\,,$$

$$C_{i2}=0\,,$$

de manière que Φ doit avoir la forme

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty}{}_{i}\frac{c_i}{r^{i+1}}Y_i(\vartheta\,,\ \varphi)$$

$$\text{(à l'extérieur)}, \tag{78}$$

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty}{}_{i}C_i\frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}Y_i(\vartheta\,,\ \varphi)$$

$$\text{(à l'intérieur)};$$

les constantes c_i, C_i doivent en outre satisfaire aux équations suivantes résultant de la continuité de Φ et de ses premières dérivées au passage de la surface, c'est-à-dire aux conditions

$$\Phi_e=\Phi_i\,,$$

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_e=\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_i,$$

d'où

$$c_i=\frac{\sqrt{kR}}{R^{i+1}J_{i+\frac{1}{2}}(kR)}\,C_i\,,$$

$$c_i\,\frac{2kRJ'_{i+\frac{1}{2}}(kR)-J_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{2\sqrt{kR}}=-\frac{i+1}{R^{i+1}}\,C_i \quad [1] \tag{79}$$

[1]) Pour ce deuxième groupe d'équations il faut supposer que les premières dérivées de Φ soient aussi développables en séries procédant par fonctions sphériques; on démontre facilement la rigueur de ce développement en tenant compte de ce que *toutes* les dérivées des fonctions Φ sont finies, ce qui résulte de leur définition.

Comme la première de ces équations donne la valeur de $\frac{e_i}{C_i}$, la deuxième devient une équation pour k seul

$$(2i+1)\,J_{i+\frac{1}{2}}(kR)+2kRJ'_{i+\frac{1}{2}}(kR)=0\,, \qquad (80)$$
$$(i=0,1,2,\ldots)$$

les valeurs possibles de k_0, k_1, k_2, ..., doivent donc être des racines d'une de ces équations (80), et les fonctions Φ_j correspondantes auront la forme

$$\Phi_j=\frac{Y_j(\vartheta\,,\,\varphi)}{r^{j+1}} \quad \text{(à l'extérieur)}, \qquad (81)$$

$$\Phi_j=\frac{\sqrt{k_jR}}{R^{j+1}\,J_{j+\frac{1}{2}}(k_jR)}\cdot\frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_jr)}{\sqrt{k_jr}}\cdot Y_j(\vartheta\,,\,\varphi)$$
$$\text{(à l'intérieur)},$$

les Y_j représentant des fonctions sphériques quelconques d'ordre j, k_j étant une des racines de l'équation

$$(2j+1)\,J_{j+\frac{1}{2}}(kR)+2kRJ'_{j+\frac{1}{2}}(kR)=0\,, \qquad (82)$$

que l'on peut, ce qui est sans grande importance ici pour nous, présenter dans une forme plus simple, en introduisant la fonction $J_{j-\frac{1}{2}}$ [1]).

I. Les fonctions universelles correspondant à une particule de rayon R sont (à un facteur constant près)

$$\Phi_j=\frac{Y_j(\vartheta\,,\,\varphi)}{r^{j+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère)},$$

$$\Phi_j=\frac{\sqrt{k_jR}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_jR)}\;\frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_jr)}{\sqrt{k_jr}}\;\frac{Y_j(\vartheta\,,\,\varphi)}{R^{j+1}}$$
$$\text{(à l'intérieur de la sphère)},$$

---

[1]) Dans la forme

$$J_{j-\frac{1}{2}}(kR)=0\,, \qquad (82)$$

en posant

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos x.$$

Comp. Graf-Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, I, p. 45.

Y_j représentant une fonction sphérique d'ordre j, k_jR une racine de l'équation transcendante [1])

$$(2j+1)\,J_{j+\frac{1}{2}}(x)+2x\,J'_{j+\frac{1}{2}}(x)=0\,, \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

Les exemples les plus simples, que j'ai considérés pour mes théories de la gravitation et du frottement dans les masses continues, sont les fonctions correspondant aux deux nombres k_j^2 les plus petits possibles

$$k_0=\frac{\pi}{2R},$$

$$\Phi_0=\frac{c}{r} \quad \text{(à l'extérieur)}, \tag{83}$$

$$\Phi_0=\frac{c\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{r}{R}\right)}{r} \quad \text{(à l'intérieur)};$$

$$k_1=\frac{\pi}{R},$$

$$\Phi_1=c\frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad \text{(à l'extérieur)}, \tag{84}$$

$$\Phi_1=\frac{c}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi r}{R}-\frac{\pi r}{R}\cos\frac{\pi r}{R}}{r^2}\cos\vartheta \quad \text{(à l'intérieur)};$$

la vibration correspondant à (83) est une pulsation de la sphère, celle qui correspond à (84) une oscillation de la sphère dans la direction de l'axe des x.

§ 2. Les calculs qui nous ont mené aux fonctions universelles nous permettent de donner la solution d'un problème un peu plus général.

Nous savons toujours trouver une fonction ψ, continue dans tout l'espace avec ses premières dérivées, qui satisfait à l'intérieur d'une surface ω à l'équation

$$\Delta\psi+k^2\psi=f \tag{85}$$

---

[1]) Ou, ce qui revient au même,

$$J_{j-\frac{1}{2}}(x)=0\,, \quad \text{comp. p. 32.}$$

(f une fonction donnée continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω) et qui a toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω, pourvu que le nombre donné k^2 n'appartienne pas à la suite

$$k_0^2, k_1^2, k_2^2, \ldots .$$

Pour le cas de la sphère il est facile de donner la solution de ce problème en forme de série. On peut, comme on démontre facilement à l'aide de la théorie des fonctions sphériques et des fonctions de Bessel [1]), développer f et ψ en séries de la forme

$$f = \sum_0^\infty {}_j \Phi_j ,$$

$$\psi = \sum_0^\infty {}_j \Psi_j , \tag{86}$$

où les Φ_j et Ψ_j sont des fonctions universelles correspondant à la sphère.

Les fonctions Φ_j peuvent être dérivées de f en forme d'intégrales définies, et on arrive ainsi sans difficulté aux inégalités

$$\left|\Phi_j\right| \overline{\gtrless} \alpha \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \bar{f} \cdot H_j \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \right| , \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{87}$$

α étant un nombre fini, H_j une certaine fonction sphérique d'ordre j dont la valeur absolue est $\overline{\gtrless}\, 2j+1$ et $\bar{f}$ représentant les valeurs de f sur la sphère concentrique à la sphère originale, pour laquelle l'intégrale a sa valeur maximum.

Entre les Ψ_j et les Φ_j on a la relation

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j}{k^2 - k_j^2} , \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{88}$$

à cause de (85).

Supposons que k^2 diffère de

$$k_0^2, k_1^2, \ldots, k_{n-1}^2, k_{n+1}^2, k_{n+2}^2, \ldots$$

par des nombres $\overline{\gtrless}\, \alpha$, α étant un nombre fini et bien connu, pendant qu'on ne fait aucune autre restriction sur la grandeur

$$k^2 - k_n^2 .$$

que la supposition qu'elle ne soit pas nulle.

[1]) Des développements analogues sont possibles dans le cas général d'une surface ω quelconque; comp. p. 26.

D'après les raisonnement de ce paragraphe nous pourrons affirmer que dans tout l'espace les valeurs absolues de ψ et des ses premières dérivées seront

$$\gtrless a \cdot \text{abs. Max.}\,(f) + b\,\frac{|f_n|}{|k^2 - k_n^2|},$$

où a et b sont des constantes finies ne dépendant ni de la fonction f ni de k^2, abs. Max. (f) la plus grande valeur absolue de f à l'intérieur de la sphère et

$$f_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{f} \cdot H_n \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Ce résultat (que l'on peut aisément généraliser pour des surfaces plus générales) sera très utile pour la solution du problème que nous nous poserons maintenant.

CHAPITRE II.

DEUX OU PLUSIEURS PARTICULES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

§ 1. Quoique le problème de deux particules puisse trouver sa solution complète à l'aide des coordonnées dipolaires de M. C. Neumann, le physicien préférera toujours à cette méthode une méthode approximative comparable à celle de Murphy pour les problèmes électrostatiques. Il s'agit de démontrer qu'une telle méthode est possible, et qu'elle mène à la solution du problème avec toute l'exactitude que l'on veut.

Supposons toujours pour plus de simplicité que les rayons des deux particules soient égaux; alors la première idée qui se présente, et qui est juste, comme nous verrons, nous suggère que les durées de vibration pour le système composé de deux particules ne différeront des durées de vibration d'une seule particule que par des grandeurs d'ordre $\frac{\textit{rayon}}{\textit{distance}}$ comparées avec les valeurs originales. Il est vraisemblable qu'à chaque nombre k_n^2 de la suite

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2,\ \ldots,$$

correspondant à une des sphères, on puisse assigner un nombre

$$k_n^2 + \varepsilon_n$$

(ou peut-être plusieurs) qui appartient à la suite

$$K_0^2,\ K_1^2,\ K_2^2,\ \ldots$$

correspondant au système composé des deux sphères, et que chaque ε_n soit d'ordre $\frac{rayon}{distance}$ en comparaison avec k_n^2.

On essayera donc, pour trouver les vibrations universelles des deux sphères correspondant au nombre $k_n^2 + \varepsilon_n$, à poser d'abord

$$\Phi_n^1 = \Phi_n^{1,1} + \Phi_n^{1,2}, \tag{89}$$

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1 . \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère 1)},$$

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_1)}{\sqrt{k_n^1 r_1}} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{j+1}} \tag{90}$$

(à l'intérieur de la sphère 1),

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère 2)},$$

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_2)}{\sqrt{k_n^1 r_2}} \cdot \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{R^{n+1}} \tag{91}$$

(à l'intérieur de la sphère 2),

en prenant les deux centres des sphères respectivement comme pôles de deux systèmes de coordonnées polaires $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ et $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$.

Nous laisserons d'abord les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et la constante k_n^1 arbitraires; la fonction Φ_n^1 serait toujours continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, si k_n^1 était égal à k_n; mais comme nous ne ferons plus cette supposition, on pourra seulement affirmer qu'elle sera continue dans tout l'espace pendant que ces premières dérivées seront discontinues aux deux surfaces ω_1 et ω_2 des sphères. Φ_n^1 satisfait du reste aux équations

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_n^1 = 0, && \text{à l'extérieur des deux sphères,} \\ &\Delta\Phi_n^1 + (k_n^1)^2\Phi_n^1 = (k_n^1)^2\Phi_n^{1,2}, && \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ &\Delta\Phi_n^1 + (k_n^1)^2\Phi_n^1 = (k_n^1)^2\Phi_n^{1,1}, && \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \tag{92}$$

Il faut calculer les discontinuités des dérivées normales de Φ_n^1 aux surfaces ω_1 et ω_2. En désignant toujours par r les normales intérieures on aura à la sphère 1

$$\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \left|\frac{\partial \Phi_n^{1,1}}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^{1,1}}{\partial r}\right|_i = (n+1)\frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+2}} + \\ + \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+1}} \cdot k_n^1 \left| \frac{d}{dx}\left\{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}\right\}\right|_{x=k_n^1 R},$$

ou

$$\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{93a}$$

et d'une manière analogue à la deuxième sphère

$$\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2). \tag{93b}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} V_{n,1(2)} &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_{1(2)}} \left[\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i\right]\frac{d\omega}{r}, \\ V_n &= V_{n,1} + V_{n,2}, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

alors nous pourrons affirmer que la fonction

$$\Psi_n^1 = \Phi_n^1 + V_n,$$

est continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace; d'après (92) elle satisfera aux équations

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \Psi_n^1 = 0, \quad \text{à l'intérieur des deux sphères}, \\ &\Delta \Psi_n^1 + (k_n^1)^2 \Psi_n^1 = (k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1}, \\ &\Delta \Psi_n^1 + (k_n^1)^2 \Psi_n^2 = (k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2}. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Nous pourrons toujours développer

$$\Phi_n^{1,2} + V_{n,1} = \varphi_1^1 + \varphi_2^1 + \varphi_3^1 + \ldots \tag{97a}$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 1, et

$$\Phi_n^{1,1} + V_{n,2} = \chi_1^1 + \chi_2^1 + \chi_3^1 + \dots$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 2, et nous voulons maintenant calculer les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et k_n^1 jusqu'à présent arbitraires de manière que

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0\,, \\ \chi_n^1 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Ces équations seront vraies dans tout l'espace, si

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0\,, \quad \text{à la surface } \omega_1\,, \\ \chi_n^1 &= 0\,, \quad \text{à la surface } \omega_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

et la théorie des fonctions sphériques nous mène facilement aux relations auxquelles les $4n + 3$ grandeurs

$$Y_n^{1,1}\,,\ Y_n^{1,2}\,,\ k_n^1$$

doivent satisfaire:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_n^1\, J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n\, J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}\, Y_n^{1,1}(\vartheta_1\,, \varphi_1) &= \left|\frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2\,, \varphi_2)}{r_2^{n+1}}\right|_n^{\omega_1}\,, \\ \frac{k_n^1\, J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n\, J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}\, Y_n^{1,2}(\vartheta_2\,, \varphi_2) &= \left|\frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1\,, \varphi_1)}{r_1^{n+1}}\right|_n^{\omega_2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

en désignant par $\left|\,-\,\right|_n^{\omega_1}$ et $\left|\,-\,\right|_n^{\omega_2}$ les fonctions sphériques d'ordre n dans les développements à la surface ω_1 et ω_2.

Ce sont

$$4n + 2$$

équations linéaires et homogènes en $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$; on peut donc calculer à l'aide des $4n+2$ équations (100) les $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$ à un facteur constant près, qui reste arbitraire, et k_n^1.

En formant Ψ_n^1 avec ces valeurs de $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, k_n^1 nous appellerons Ψ_n^1 la première approximation de la fonction universelle cherchée.

Il importe de montrer que k_n^1 défini par les équations (100) ne diffère de k_n que par une quantité qui peut être aussi petite que l'on veut, si l'on prend $\frac{R}{\varrho}$ suffisamment petit (ϱ la distance des deux sphères).

En effet, nous pouvons écrire les équations (100) dans la forme suivante

$$x \cdot y_k^1 = \sum_{1}^{2n+1}{}_j\, c_{kj} y_j^2 ,$$

$$x \cdot y_k^2 = \sum_{1}^{2n+1}{}_j\, c_{kj} y_j^1 ,$$

où nous posons

$$x = \frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} ,$$

où les y_j^1, y_j^2 sont tout à fait indépendants de R et ϱ et supposés de ne pas s'annuler tous en même temps, et où les c_{kj} sont

$$= \alpha_{kj} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} ,$$

α_{kj} représentant des nombres ne dépendant nullement de R et ϱ.

Il faut donc que

$$\frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} = \alpha \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} , \tag{101}$$

α représentant un nombre ne dépendant nullement de R et ϱ, fini et différent de zéro, puisque le déterminant des α_{kj} est toujours $\neq 0$.

Comme on a

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_n R) = 0 ,$$

et l'équation

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x) = 0$$

n'a au point $x = k_n R$ qu'une racine *simple*, comme à ce point $k_n R$ et $J_{n+\frac{1}{2}}(k_n R)$ ont des valeurs finies différentes de zéro, on conclura

$$\beta \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} \overline{\lessgtr} \left| k_n^1 R - k_n R \right| \lessgtr \gamma \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} , \tag{102}$$

β et γ représentant deux nombres finis et différents de zéro, ne dépendant nullement de R et ϱ, si $\frac{R}{\varrho}$ est plus petit qu'un nombre positif, différent de zéro, ne dépendant que du nombre n.

§ 2. Nous allons trouver maintenant une deuxième, troisième approximation etc. et démontrer la convergence de ces approximations.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{2,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,1} + (k_n'^1)^2 \Phi_n^{2,1} = -(k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 1, } \quad (103a)$$

et la fonction $\Phi_n^{2,2}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,2} + (k_n^1)^2 \Phi_n^{2,2} = -(k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère 2. } \quad (103b)$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura en désignant par C le maximum des valeurs absolues de $\Phi_n^{1,1}$ et $\Phi_n^{1,2}$

$$\left| \Phi_n^{2,1} \right| \overline{\gtrless} a \cdot C \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1},$$

$$\left| \Phi_n^{2,2} \right| \overline{\gtrless} a \cdot C \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1}, \quad (104)[1]$$

où a est un nombre fini ne dépendant ni des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, ni de $\dfrac{R}{\varrho}$.

---

[1]) A cause de (98), $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ ne contient pas de fonction universelle d'ordre n, et l'on aura à l'intérieur de ω_1

$$\left| \Phi_n^{1,2} \right| \overline{\gtrless} c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1}$$

$$\left| V_{n,1} \right| \overline{\gtrless} c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}.$$

Ce qui concerne $V_{n,2}$, on a à l'intérieur de ω_1

$$\left| V_{n,2} \right| \overline{\gtrless} c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{3n+2};$$

la fonction universelle d'ordre n, que $V_{n,2}$ contient, a une valeur absolue

$$\left| V_{n,2} \right|_n \overline{\gtrless} c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{4n+2},$$

donc

$$\frac{\left| V_{n,2} \right|_n}{\left| (k_n^1)^2 - k_n^2 \right|} \overline{\gtrless} c^{te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}, \quad \text{(d'après 102).}$$

Le raisonnement du § 2 Chap. I nous donne ainsi la première inégalité (104), la seconde s'obtient d'une manière analogue.

La fonction

$$\chi_n^2 = \Psi_n^1 + \Phi_n^{2,1} + \Phi_n^{2,2} \tag{105}$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\chi_n^2 + (k_n^1)^2\chi_n^2 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ \Delta\chi_n^2 + (k_n^1)^2\chi_n^2 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \tag{106}$$

Comme nous avons calculé k_n^1 et les rapports des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ à l'aide des équations (98), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \varphi_n^2 = \varphi_n - \left| \Phi_n^{2,2} \right|_n^{\omega_1} &= 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^2 = \chi_n^1 - \left| \Phi_n^{2,1} \right|_n^{\omega_2} &= 0, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{107}$$

en prenant les $\left| \;\right|_n^{\omega_1}$ et $\left| \;\right|_n^{\omega_2}$ dans le même sens que p. 38; nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^2, $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$.

On aura

$$\left| k_n^2 - k_n^1 \right| \leqq b \left| k_n^1 - k_n \right| \frac{R}{\rho},$$

$$\begin{aligned} \left| Y_n^{2,1} - Y_n^{1,1} \right| &\leqq b.C.\frac{R}{\rho}, \\ \left| Y_n^{2,2} - Y_n^{1,2} \right| &\leqq b.C.\frac{R}{\rho}, \end{aligned} \tag{108}$$

si b désigne une constante finie ne dépendant nullement de $\frac{R}{\rho}$.

Pour démontrer ces inégalités (108), nous n'avons qu'à faire voir que

$$\begin{aligned} \left| \Phi_n^{2,2} \right|_n^{\omega_1} &\leqq B.C.\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \left| \Phi_n^{2,1} \right|_n^{\omega_2} &\leqq B.C.\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{109}$$

B étant une constante finie $\left(\text{ne dépendant nullement de } \frac{R}{\rho}\right)$, puisque les termes φ_n^1 et χ_n^1 sont de l'ordre $\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1}$, et ces inégalités (109) découlent immédiatement des inégalités (104).

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^1, $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, χ_n^2, en introduisant partout les valeurs

$$k_n^2,\ Y_n^{2,1},\ Y_n^{2,2} \text{ au lieu des } k_n^1,\ Y_n^{1,1},\ Y_n^{1,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{2,1},\ \psi_n^{2,2},\ \psi_n^2,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$; χ_n^2; alors la fonction ψ_n^2 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2, et elle satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\psi_n^2 + (k_n^2)^2\psi_n^2 &= (k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta\psi_n^2 + (k_n^2)^2\psi_n^2 &= (k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{110}$$

où nous posons

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_n^{2,2} &= \psi_n^{2,2} - \left|\psi_n^{2,2}\right|_n^1, \ ^{1)} \\ \overline{\psi}_n^{2,1} &= \psi_n^{2,1} - \left|\psi_n^{2,1}\right|_n^2. \end{aligned} \tag{111}$$

Nous appellerons ψ_n^2, k_n^2 la deuxième approximation, et nous remarquerons que d'après (104)

$$\begin{aligned} \left|\overline{\psi}_n^{2,2}\right| &\stackrel{=}{<} a.C.\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \left|\overline{\psi}_n^{2,1}\right| &\stackrel{=}{<} a.C.\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{112} \ ^{2)}$$

---

[1]) $\left|\psi_n^{2,2}\right|_n^1$ la fonction uuiverselle d'ordre n de la sphère 1 que $\psi_n^{2,2}$ contient; $\left|\psi_n^{2,1}\right|_n^2$ a la signification analogue.

[2]) On pourrait penser au premier aspect que les fonctions $\psi_n^{2,1}$, $\psi_n^{2,2}$ ne satisfassent pas aux mêmes inégalités que $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, puisque les nouvelles fonctions $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ et $\Phi_n^{1,1} + V_{n,2}$ contiennent maintenant des fonctions universelles d'ordre n: φ_n^1 et χ_n^1, mais les valeurs absolues de ces fonctions seront d'après (107) et (104)

$$\stackrel{=}{<} c\text{-}^{te} \text{ finie. } C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2},$$

et, divisées par $\left|(k_n^2)^2 - k_n^2\right|$,

$$\stackrel{=}{<} c\text{-}^{te} \text{ finie. } C\,\frac{R}{\rho}\ \left|\ \begin{array}{l} \text{pour } \psi_n^{2,1} \text{ à } \omega_1, \\ \text{pour } \psi_n^{2,2} \text{ à } \omega_2; \end{array}\right.$$

donc en tout cas

$$\begin{aligned} \left|\psi_n^{2,1}\right| &\stackrel{=}{<} c\text{-}^{te} \text{ finie. } C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \text{ à l'intérieur de } \omega_2, \\ \left|\psi_n^{2,2}\right| &\stackrel{=}{<} c\text{-}^{te} \text{ finie. } C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \text{ à l'intérieur de } \omega_1. \end{aligned}$$

et d'après (108) et (104)

$$\left|\psi_n^2 - \psi_n^1\right| \overline{\gtrless} b \cdot C \frac{R}{\varrho}, \qquad (113)$$

$$\left|k_n^2 - k_n^1\right| \overline{\gtrless} b \left|k_n^1 - k_n\right| \frac{R}{\varrho}.$$

§ 3. Nous procédons à une troisième approximation.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\varDelta \Phi_n^{3,1} + (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,1} = -(k_n^2)^2 \overline{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \qquad (114a)$$

et la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue aves ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\varDelta \Phi_n^{3,2} + (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,2} = -(k_n^2)^2 \overline{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2. \qquad (114b)$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura d'après (112)

$$\left|\Phi_n^{3,1}\right| \overline{\gtrless} a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}, \qquad (115)$$

$$\left|\Phi_n^{3,2}\right| \overline{\gtrless} a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}.$$

La fonction

$$\chi_n^3 = \psi_n^2 + \Phi_n^{3,1} + \Phi_n^{3,2} \qquad (116)$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\varDelta \chi_n^3 + (k_n^2)^2 \chi_n^3 = (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \qquad (117)$$

$$\varDelta \chi_n^3 + (k_n^2)^2 \chi_n^3 = (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2.$$

Comme nous avons calculé k_n^2 et les rapports des $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$ à l'aide des équations (107), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\varphi_n^3 = \varphi_n^2 - \left|\Phi_n^{3,2}\right|_n^{\omega_1} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \qquad (110)$$

$$\chi_n^3 = \chi_n^2 - \left|\Phi_n^{3,1}\right|_n^{\omega_2} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_2;$$

nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^3, $Y_n^{3,1}$, $Y_n^{3,2}$.

On aura [la démonstration est analogue à celle des inégalités (108) du § 2]

$$
\begin{gathered}
| k_n^3 - k_n^2 | \overline{\overline{<}} b^2 | k_n^1 - k_n | \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2, \\
| Y_n^{3,1} - Y_n^{2,1} | \overline{\overline{<}} b^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2, \qquad (119) \\
| Y_n^{3,2} - Y_n^{2,2} | \overline{\overline{<}} b^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho} \right)^2.
\end{gathered}
$$

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^2, $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^3 en introduisant partout les valeurs

$$k_n^3,\ Y_n^{3,1},\ Y_n^{3,2} \text{ au lieu des } k_n^2,\ Y_n^{2,1},\ Y_n^{2,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{3,1},\ \psi_n^{3,2},\ \psi_n^3,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^2; alors la fonction ψ_n^3 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2, et elle satisfera aux équations

$$
\begin{gathered}
\Delta \psi_n^3 + (k_n^3)^2 \psi_n^3 = (k_n^3)^2 \overline{\psi}_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\
\Delta \psi_n^3 + (k_n^3)^2 \psi_n^3 = (k_n^3)^2 \overline{\psi}_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2,
\end{gathered} \qquad (120)
$$

où nous posons

$$
\begin{gathered}
\overline{\psi}_n^{3,2} = \psi_n^{3,2} - | \psi_n^{3,2} |_n^1, \ ^{1)} \\
\overline{\psi}_n^{3,1} = \psi_n^{3,1} - | \psi_n^{3,1} |_n^2.
\end{gathered} \qquad (121)
$$

Nous appellerons ψ_n^3, k_n^3 la troisième approximation, et nous remarquerons que d'après (115)

$$
\begin{gathered}
\overline{\psi}_n^{3,2} \overline{\overline{<}} a^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+3}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\
\overline{\psi}_n^{3,1} \overline{\overline{<}} a^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+3}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2,
\end{gathered} \qquad (122)\ ^{2)}
$$

---

[1] Comp. la remarque [1]) p. 42.

[2] On fera le raisonnement analogue à la remarque [2]) p. 42.

et d'après (119) et (115)

$$\left.\begin{aligned} |\psi_n^3 - \psi_n^2| &\overline{<} b^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 , \\ |k_n^3 - k_n^2| &\overline{<} b^2 |k_n^1 - k_n| \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 . \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

§ 4. II. En continuant ainsi on obtiendra la solution du problème dans la forme

$$\left.\begin{aligned} \Phi_n &= \psi_n^1 + (\psi_n^2 - \psi_n^1) + (\psi_n^3 - \psi_n^2) + \cdots \\ K_n &= k_n + (k_n^1 - k_n) + (k_n^2 - k_n^1) + (k_n^3 - k_n^2) + \cdots . \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Ces séries seront absolument et uniformément convergentes, si $\frac{R}{\varrho}$ est suffisamment grand, puisque leurs termes sont respectivement plus petits que ceux des progressions géométriques

$$C\left\{1 + b\frac{R}{\varrho} + b^2\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$k_n + (k_n^1 - k_n)\left\{1 + b\frac{R}{\varrho} + b^2\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

A chaque racine k_n^1 de l'équation algébrique résultant des équations (100) correspondra une valeur K_n.

La méthode analogue à celle de Murphy est donc démontrée; je l'ai déjà employée dans mon livre [1]) „Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massen-systemen" pour les cas

$n = 0$ (Théorie de la gravitation),

$n = 1$ (Théorie du frottement);

nous savons maintenant qu'elle est applicable pour un n quelconque pourvu que $\frac{R}{\varrho}$ soit assez petit, et la méthode peut être immédiatement généralisée pour un nombre fini de particules.

C'est le résultat que je voulais obtenir.

---

[1]) Comp. p. 3.

Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

В. П. Ермакова.

1. Постановка задачи.

Въ XLVIII томѣ „Mathematische Annalen" (стр. 317—364) А. Н. Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Составить дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0 \tag{1}$$

такъ, чтобы полный интегралъ этого уравненія имѣлъ форму

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

гдѣ показатели $m_1, m_2, \dots, m_n$ — числа постоянныя. При этомъ предполагается, что число n дано, а также дана степень функцій M и N относительно y. Предполагается, что M и N суть цѣлыя функціи относительно y.

Въ этой задачѣ показатели $m_1, m_2, \dots, m_n$ можно считать данными; неизвѣстными функціями будутъ $v_1, v_2, \dots, v_n$ и коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y въ M и N. Опредѣленіе неизвѣстныхъ функцій приводится къ рѣшенію системы обыкновенныхъ и дифференціальныхъ уравненій. *Коркинъ показалъ, что для этой системы дифференціальныхъ уравненій всегда могутъ быть найдены полные интегралы въ конечной формѣ.* Сверхъ того Коркинъ показалъ, что рѣшеніе задачи можетъ принимать нѣсколько различныхъ формъ. Въ этомъ заключается глубокій интересъ мемуара Коркина.

Въ общемъ изложеніи Коркина для читателя не выступаетъ со всей рельефностью общая мысль, которою руководствовался авторъ при своихъ изслѣдованіяхъ, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ изслѣдованіе усложнено болѣе, чѣмъ слѣдуетъ.

А. Н. Коркинъ прежде всего предполагаетъ, что M и N первой степени относительно y, т. е. рѣшаетъ задачу для такого уравненія

$$(y+P)\,dy+(Qy+R)\,dx=0. \tag{3}$$

Еще Эйлеръ въ своихъ изслѣдованіяхъ замѣтилъ, что простою замѣною перемѣнныхъ можно достигнуть того, чтобы было $P=0$, $Q=1$. Эти положенія оказываются несущественными для теоріи. Между тѣмъ первое изъ этихъ положеній, $P=0$, въ изслѣдованіи Коркина приводитъ къ такой зависимости между искомыми функціями $v_1, v_2, \ldots, v_n$, которая какъ будто играетъ основную роль во всемъ изслѣдованіи.

Въ настоящей статьѣ я желаю выяснить, какими соображеніями руководствовался А. Н. Коркинъ при производствѣ своихъ изслѣдованій, выяснить общій путь разсужденій, при помощи которыхъ можно построить всѣ вычисленія, дѣйствительно приводящія къ полному рѣшенію задачи.

Такимъ образомъ, смѣю надѣяться, что моя статья облегчитъ читателю пониманіе прекраснаго мемуара А. Н. Коркина.

Напомню прежде всего, что число множителей n въ интегралѣ (2) предполагается даннымъ, а также дана степень функцій M и N относительно y.

Введу нѣкоторыя сокращенныя обозначенія.

Выраженіе въ первой части уравненія (2) я буду сокращенно обозначать черезъ

$$\Pi\,(y-v)^m.$$

Логариѳмъ отъ этого выраженія будетъ

$$m_1\log(y-v_1)+m_2\log(y-v_2)+\ldots+m_n\log(y-v_n),$$

что сокращенно я буду обозначать черезъ

$$\sum m\log(y-v).$$

Подобнымъ образомъ имѣемъ сокращенныя обозначенія

$$\sum m=m_1+m_2+\ldots+m_n,$$

$$\sum\frac{m}{y-v}=\frac{m_1}{y-v_1}+\frac{m_2}{y-v_2}+\ldots+\frac{m_n}{y-v_n}$$

и т. д.

2. Рѣшеніе задачи въ простѣйшемъ случаѣ.

Мы ищемъ такое дифференціальное уравненіе, полный интегралъ котораго будетъ

$$\Pi (y - v)^m = C. \tag{2}$$

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей, получимъ

$$\sum m \log (y - v) = \log C.$$

Дифференцируя это уравненіе, получаемъ искомое дифференціальное уравненіе

$$\sum \frac{m\,(\partial y - v'\partial x)}{y - v} = 0. \tag{4}$$

Остается освободить это уравненіе отъ знаменателей, для каковой цѣли вводимъ слѣдующія обозначенія

$$F(y) = (y - v_1)(y - v_2) \ldots (y - v_n),$$

$$\left.\begin{aligned} F_1(y) &= F(y) \sum \frac{m}{y - v}, \\ F_2(y) &= F(y) \sum \frac{mv'}{y - v}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравненіе (4), послѣ освобожденія отъ знаменателей, приметъ слѣдующую форму

$$F_1(y)\,\partial y - F_2(y)\,\partial x = 0. \tag{6}$$

Полный интегралъ этого уравненія выражается формулою (2).

Степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ равна $n - 1$.

Поэтому мы рѣшили задачу въ томъ случаѣ, когда данная степень функцій M и N равна $n - 1$. Въ этомъ случаѣ функціи $v_1, v_2, \ldots, v_n$ произвольны; искомое дифференціальное уравненіе опредѣляется формулой (6), при чемъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ опредѣляются по формуламъ (5). Но если степень функцій M и N ниже $n - 1$, то рѣшеніе нашей задачи усложняется.

3. Пониженіе степени на единицу; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что степень функцій M и N равна $n-2$. Въ такомъ случаѣ въ выраженіи (6) функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго дѣлителя первой степени: $y-p$; слѣдовательно

$$F_1(p)=0\,, \qquad F_2(p)=0\,.$$

На основаніи формулъ (5) эти уравненія могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{m}{p-v}=0\,, \tag{7}$$

$$\sum \frac{mv'}{p-v}=0\,. \tag{8}$$

Уравненіе (8) дифференціальное; полный интегралъ этого уравненія легко можетъ быть найденъ. Для этой цѣли умножимъ уравненіе (7) на ∂p, а уравненіе (8) на ∂x и вычтемъ; получимъ

$$\sum \frac{m\,(\partial p-\partial v)}{p-v}=0\,.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum a\log{(p-v)}=\log C\,,$$

или

$$\Pi\,(p-v)^m=C\,. \tag{9}$$

Остается теперь изъ уравненій (7) и (9) опредѣлить p и v_n черезъ остальныя функціи $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M=\frac{F_1(y)}{y-p}\,, \qquad N=-\frac{F_2(y)}{y-p}\,.$$

4. Пониженіе степени на единицу; второе рѣшеніе.

Пониженіе степени на единицу въ функціяхъ M и N можетъ быть сдѣлано еще другимъ способомъ. Мы можемъ наши величины подобрать такъ, чтобы въ функціяхъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ [уравненія (6)] коэффиціенты при y^{n-1} обращались въ нули.

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$; положимъ

$$\sum m = 0. \tag{10}$$

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mv'$; положимъ

$$\sum mv' = 0.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum mv = C. \tag{11}$$

Если равенства (10) и (11) удовлетворяются, то рѣшеніе нашей задачи дается уравненіемъ (6), т. е. въ настоящемъ случаѣ

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

5. Пониженін степени на два; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что данная степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ функціи $F_1(y)$ и $(F_2(y)$ должны имѣть общій квадратный множитель: $(y-p)(y-q)$. Въ § 3 было показано, что корни этого множителя должны удовлетворять уралненіямъ

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \qquad \Pi(p-v)^m = C,$$

$$\sum \frac{m}{q-v} = 0, \qquad \Pi(q-v)^m = C'.$$

Остается изъ этихъ уравненій опредѣлить p, q, v_n и v_{n-1} черезъ остальныя функціи $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$, которыя можно считать произвольными. Послѣ такого опредѣленія функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)}; \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

6. Пониженіе степени на два; второе рѣшеніе.

Положимъ опять, что данная степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ, какъ сказано раньше, функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго квадратнаго множителя. Мы предполагали, что корни этого квадратнаго множителя различны. Но можетъ случиться, что корни квадратнаго множителя равны, т. е. самъ общій множитель превращается въ полный квадратъ: $(y-p)^2$. Въ такомъ случаѣ должны удовлетворяться слѣдующія уравненія

$$F_1(p)=0\,,\qquad F_1'(p)=0\,, \tag{12}$$

$$F_2(p)=0\,,\qquad F_2'(p)=0\,. \tag{13}$$

На основаніи формулъ (5) уравненія (12) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum\frac{m}{p-v}=0\,, \tag{14}$$

$$\sum\frac{m}{(p-v)^2}=0\,. \tag{15}$$

Уравненія (13) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum\frac{mv'}{p-v}=0\,, \tag{16}$$

$$\sum\frac{mv'}{(p-v)^2}=0\,. \tag{17}$$

Покажемъ теперь, что эти четыре уравненія зависимы, что уравненіе (17) будетъ слѣдствіемъ уравненій (14) и (15). Дифференцируя уравненіе (14), находимъ

$$\sum\frac{m(p'-v')}{(p-v)^2}=0\,.$$

Если это послѣднее уравненіе вычтемъ изъ уравненія (15), умноженнаго на p', то получимъ уравненіе (17). Итакъ, уравненіе (17) можно отбросить. Далѣе, дифференціальное уравненіе (16), какъ показано въ § 3, можетъ быть замѣнено его полнымъ интеграломъ

$$\Pi(p-v)^m=C\,. \tag{18}$$

Остается функціи $p\,,\ v_1\,,\ v_2\,,\ldots,v_n$ подобрать такъ, чтобы удовлетворялись уравненія (14), (15) и (18). Изъ этихъ трехъ уравненій могутъ быть опредѣлены три функціи черезъ $n-2$ остальныя функціи, которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются такъ

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^2}\,,\qquad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}\,.$$

7. Пониженіе степени на два; третье рѣшеніе.

Покажемъ еще третье рѣшеніе той же самой задачи, т. е. мы опять предполагаемъ, что степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ § 4 было показано, что степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ можно понизить на единицу, если коэффиценты при y^{n-1} въ этихъ функціяхъ приравняемъ нулю. Въ результатѣ получимъ уравненія

$$\sum m = 0, \qquad \sum mv = C. \tag{19}$$

Нужно понизить степень функцій M и N еще на единицу. Для этой цѣли нужно подобрать $v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ имѣли общій корень p. По доказанному въ § 3 получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \qquad \Pi(p-v)^m = C'. \tag{20}$$

Остается подобрать показатели $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и функціи $p, v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись четыре уравненія (19) и (20). Послѣ этого искомыя функціи опредѣляются по формуламъ

$$M = \frac{F_1(y)}{y-p}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

8. Пониженіе степени на два; четвертое рѣшеніе.

Мы можемъ понизить степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ на двѣ единицы, если коэффиценты при двухъ высшихъ степеняхъ въ каждой функціи приравняемъ нулю.

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$.

Коэффиціентъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mv - \sum m \sum v$. Приравнявъ эти коэффиціенты нулю, получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum m = 0, \qquad \sum mv = 0. \tag{21}$$

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mv'$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль на основаніи второго уравненія (21). Коэффиціентъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mvv' - \sum v \sum mv'$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль, если

$$\sum mvv' = 0.$$

Полный интегралъ этого дифференціальнаго уравненія будетъ

$$\sum mv^2 = C. \tag{22}$$

Остается подобрать $m_1, m_2, \ldots, m_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись три уравненія (21) и (22). Послѣ этого искомыя функціи M и N будутъ

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

9. Пониженіе степени на три.

Мы можемъ понижать степень искомыхъ функцій M и N далѣе. Изъ предыдущаго становится уже яснымъ дальнѣйшій ходъ рѣшенія. Положимъ, что степень функцій M и N понижается на три единицы, т. е. равна $n-4$. Въ такомъ случаѣ задача допускаетъ семь слѣдующихъ рѣшеній.

Первое рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{r-v} = 0,$$

$$\Pi\,(p-v)^m = C, \qquad \Pi\,(q-v)^m = C', \qquad \Pi\,(r-v)^m = C'',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}.$$

Второе рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0,$$

$$\Pi\,(p-v)^m = C, \qquad \Pi\,(q-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^2(y-q)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^2(y-q)}.$$

Третье рѣшеніе.

$$\sum\frac{m}{p-v}=0,\quad \sum\frac{m}{(p-v)^2}=0,\quad \sum\frac{m}{(p-v)^3}=0,$$

$$\Pi\,(p-v)^m=C,$$

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^3},\quad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^3}.$$

Четвертое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum\frac{m}{p-v}=0,\quad \sum\frac{m}{q-v}=0,$$

$$\sum mv=C,\qquad \Pi\,(p-v)^m=C',\qquad \Pi\,(q-v)^m=C'',$$

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)\,(y-q)},\quad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)\,(y-q)}.$$

Пятое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum\frac{m}{p-v}=0,\quad \sum\frac{m}{(p-v)^2}=0,$$

$$\sum mv=C,\qquad \Pi\,(p-v)^m=C',$$

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^2},\quad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}.$$

Шестое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum mv=0,\quad \sum\frac{m}{p-v}=0,$$

$$\sum mv^2=C,\qquad \Pi\,(p-v)^m=C',$$

$$M=\frac{F_1(y)}{y-p},\quad N=-\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Седьмое рѣшеніе.

$$\sum m=0,\quad \sum mv=0,\quad \sum mv^2=0,\quad \sum mv^3=C,$$

$$M=F_1(y),\qquad N=-F_2(y).$$

Во всѣхъ рѣшеніяхъ $n-3$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

Мы можемъ это пониженіе продолжить до тѣхъ поръ, пока M и N будутъ содержать y въ первой степени, т. е. искомое уравненіе приведется къ формѣ (3). При этомъ придется сдѣлать пониженіе на $n-2$. Согласно данной выше теоріи въ окончательномъ результатѣ останутся произвольными двѣ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

10. Общая задача.

Дано дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0, \tag{23}$$

въ которомъ M и N суть цѣлыя алгебраическія функціи относительно y; требуется узнать, можетъ ли быть полный интегралъ этого уравненія выраженъ въ формѣ (2).

Эта задача можетъ быть рѣшена лишь въ томъ случаѣ, когда число n дано. Въ такомъ случаѣ мы можемъ составить всѣ формы дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ общій интегралъ въ формѣ (2) и содержащихъ y въ той же степени, какъ и данное уравненіе (23). Потомъ останется узнать, заключается ли данное уравненіе въ одной изъ найденныхъ формъ.

Зависимость между Кинкелиновыми и гаммаморфными функціями.

В. П. Алексѣевскаго.

Подъ названіемъ функцій Кинкелина г. Бопенъ [1]) разумѣетъ функціи $K_n(x)$, удовлетворяющія уравненію

$$K_n(x+1) = x^{x^n} K_n(x)$$

при условіи $K_n(1) = 1$.

Функція $K_0(x)$ совпадаетъ съ Эйлеровой функціей $\Gamma(x)$; функція $K_1(x)$ была указана и изучена Кинкелиномъ; начало изслѣдованій функцій высшихъ порядковъ было положено Глешеромъ.

Тому-же вопросу посвященъ недавно вышедшій мемуаръ г. Бопэна. Въ послѣдней главѣ авторъ показываетъ связь между функціей $K_1(x)$ и функціей $G(x)$, свойства которой были изучены мною, и строитъ классъ функцій, представляющихъ обобщеніе функціи $G(x)$. Повидимому г. Бопэну не было извѣстно, что функція $G(x)$ является лишь простѣйшей представительницей функцій, подобныхъ функціи гамма, основаніе теоріи которыхъ было дано мною [2]) и недавно изложено въ новой формѣ г. Барнесомъ въ рядѣ мемуаровъ [3]).

---

[1]) Beaupin. „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin“. Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie de Belgique. T. 59.

[2]) „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма“. Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества. 2 Сер. т. I.

[3]) Barnes. „The Theory of the G Function“. Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 31.

Barnes. „Genesis of the Double Gamma Function“. Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 31.

Barnes. „The Theory of the Double Gamma Function“. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Vol. 196.

Въ этой статьѣ я показываю, что теорія Кинкелиновыхъ функцій находится въ самой тѣсной связи съ теоріей функцій, подобныхъ функціи гамма $G_n(x)$: *всѣ* функціи Кинкелина могутъ быть составлены изъ функцій $G_n(x)$ и обратно. То-же заключеніе справедливо и для функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$.

Небезъинтересно замѣтить, что выраженіе Кинкелиновыхъ функцій въ зависимости отъ функцій $G_n(x)$ требуетъ возвышенія послѣднихъ въ степени, показатели которыхъ суть цѣлыя раціональныя функціи x, тогда какъ составъ функцій Якоби, Гейне, Аппеля, модульныхъ Эрмита и, слѣдовательно, двуперіодическихъ гораздо проще: они сводятся къ произведеніямъ или частнымъ функцій подобныхъ функціи гамма [1]).

1. *Дифференціальное уравненіе между двумя послѣдовательными гаммаморфными функціями.*

Прежде чѣмъ приступить къ выводу вышеупомянутыхъ зависимостей, я остановлюсь на обобщеніи нѣкоторыхъ свойствъ функцій, подобныхъ функціи гамма, которыя дальше для краткости я буду называть *гаммаморфными*.

Простѣйшій классъ гаммаморфныхъ функцій характеризуется функціональнымъ уравненіемъ:

$$G_n(x+1) = G_{n-1}(x)\, G_n(x) \tag{1}$$

при чемъ

$$G_0(x) = \Gamma(x)\,, \qquad G_1(x) = G(x)\,,$$

слѣдовательно

$$G_1(x+1) = \Gamma(x)\;G_1(x)\,. \tag{2}$$

Выборъ рѣшеній ограничивается слѣдующимъ условіемъ.

Такъ какъ общее рѣшеніе уравненій (1) и (2) получается умноженіемъ частнаго рѣшенія на произвольную періодическую функцію съ періодомъ, равнымъ единицѣ, то, по опредѣленію, подъ $G_n(x)$ мы разумѣемъ функцію не разлагаемую на рѣшеніе того же уравненія (1) и періодическую функцію.

Кромѣ того функціи $G_n(x)$ подчинены условію:

$$G_n(1) = 1\,.$$

Разсмотримъ логариѳмическія производныя тѣхъ-же функцій. Положимъ для краткости обозначеній:

$$D\log\, G_n(x) = \phi_n(x)\,, \qquad D\log\, \Gamma(x) = \psi(x)\,.$$

---

[1]) См. мою статью: „Über eine Classe von Functionen, die der Gammafunction analog sind". Berichte der Sächs. Gesellschaft zu Leipzig. Math.-Phys. Cl. Bd. 6.

Функціи $\varphi_n(x)$ въ силу равенствъ (1) и (2) опредѣляются функціональными уравненіями такой формы:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) &= \varphi_{n-1}(x)\,, \\ \varphi_1(x+1) - \varphi_1(x) &= \psi(x)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Основнымъ предложеніемъ въ теоріи гаммаморфныхъ функцій служитъ дифференціальное уравненіе [1]):

$$D\log\, G_1(x+1) = x\, D\log \Gamma(x) - (x-1) + D\log G_1(1)\,,$$

которое въ новыхъ обозначеніяхъ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\varphi_1(x+1) = x\psi(x) - (x-1) + \varphi_1(1)\,. \tag{4}$$

Установимъ соотвѣтственное уравненіе для функцій φ высшихъ порядковъ.

Пользуясь символомъ Δ для обозначенія разности, въ силу равенствъ (3) мы можемъ представить уравненіе (4) такъ:

$$\Delta\varphi_2(x+1) = x\Delta\varphi_1(x) - (x-1) + \varphi_1(1)\,.$$

Замѣтивъ, что

$$x\Delta\varphi_1(x) = \Delta[x\varphi_1(x) - \varphi_2(x+1)]\,,$$

находимъ, что

$$\varphi_2(x+1) = x\varphi_1(x) - \varphi_2(x+1) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} + x\varphi_1(1) + C.$$

Опредѣливъ постоянное C, полагая $x=0$, получимъ окончательно

$$2\varphi_2(x+1) = x\varphi_1(x) - \frac{(x-1)(x-2)}{2} + x\varphi_1(1) + 2\varphi_2(1)\,. \tag{5}$$

Переходъ отъ уравненія (4) къ (5) есть не что иное, какъ интегрированіе въ конечныхъ разностяхъ уравненія (4), поэтому, не повторяя однихъ и тѣхъ-же разсужденій, можемъ сразу получить общій результатъ, взявъ конечный интегралъ $(n-1)$-го порядка отъ обѣихъ частей уравненія (4) и опредѣливъ каждое изъ произвольныхъ постоянныхъ, вводимыхъ послѣдовательнымъ интегрированіемъ, полагая $x=0$.

Такимъ способомъ получимъ:

$$n\varphi_n(x+1) = x\varphi_{n-1}(x) + Q_n(x)\,, \tag{A}$$

---

[1]) См. „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма". § 3.

гдѣ $Q_n(x)$ — полиномъ n-ой степени, именно

$$Q_n(x) = -\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=n} k\phi_k(1) \frac{x(x-1),\ldots,(x-n+k+1)}{(n-k)!}.$$

Уравненіе (A) и есть искомое.

Интегрируя послѣднее уравненіе отъ 0 до x, получимъ:

$$n \log G_n(x+1) = x \log G_{n-1}(x) - \int_0^x \log G_{n-1}(x)\, dx + \int_0^x Q_n(x)\, dx. \quad (B)$$

Отсюда, полагая $x=1$ и перемѣнивъ n на $n+1$, находимъ:

$$\int_0^1 \log G_n(x)\, dx = \int_0^1 Q_{n+1}(x)\, dx.$$

Ясно, что искомый интегралъ есть линейная функція постоянныхъ $\phi_1(1), \phi_2(1), \ldots, \phi_{n+1}(1)$; причемъ важно замѣтить, что въ число необходимыхъ постоянныхъ для опредѣленія интеграла отъ функціи n-го порядка входитъ $\phi_{n+1}(1)$.

2. Выраженіе гаммаморфныхъ функцій въ зависимости отъ производной отъ $\log \Gamma(x)$.

Изъ того-же уравненія (A) слѣдуетъ, что всякая функція $\phi_n(x)$ можетъ быть выражена посредствомъ функціи $\psi(x)$. Дѣйствительно, перемѣнивъ въ этомъ уравненіи x на $x+n-1$, найдемъ:

$$n\,\phi_n(x+n) = (x+n-1)\,\phi_{n-1}(x+n-1) + Q_n(x+n-1).$$

Слѣдовательно,

$$(n-1)\,\phi_{n-1}(x+n-1) = (x+n-2)\,\phi_{n-2}(x+n-2) + Q_{n-1}(x+n-2),$$

. . . .

$$2\phi_2(x+2) = (x+1)\,\phi_1(x+1) + Q_2(x+1),$$

$$\phi_1(x+1) = x\psi(x) + Q_1(x).$$

Исключивъ изъ этой системы $\phi_1(x+1), \ldots, \phi_{n-1}(x+n-1)$, получимъ

$$n\,!\,\phi_n(x+n) = x(x+1), \ldots, (x+n-1)\,\psi(x) + R_n(x) \qquad (C)$$

гдѣ $R_n(x)$ полиномъ n-ой степени.

Итакъ, производная логариѳма гаммаморфной функціи есть линейная функція отъ производной логариѳма $\Gamma(x)$ съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей уравненія (C) въ предѣлахъ отъ 0 до x и замѣтивъ, что $G_n(n) = 1$, въ чемъ легко убѣдиться съ помощью равенства (1), получимъ

$$n!\log G_n(x+n) =$$

$$= \int_0^x x(x+1)\ \ldots\ (x+n-1)\,\psi(x)\,dx + \int_0^x R_n(x)\,dx. \qquad (D)$$

Таково выраженіе логариѳма гаммаморфной функціи въ зависимости отъ функціи $\psi(x)$.

3. Выраженіе Кинкелиновыхъ функцій посредствомъ гаммаморфныхъ и обратно.

Перейдемъ теперь къ установленію зависимости между функціями $K_n(x)$ и $G_n(x)$.

Основное уравненіе, характерное для Кинкелиновыхъ функцій, можетъ быть записано въ такой формѣ:

$$\log K_n(x+1) - \log K_n(x) = x^n \log x. \qquad (6)$$

По свойству функціи $\Gamma(x)$ имѣемъ

$$\Delta\,[x^n . \log \Gamma(x)] = x^n \log x + \Delta x^n . \log \Gamma(x+1).$$

Точно также по свойству (1) функцій $G_n(x)$, находимъ

$$\Delta\,[\Delta\, x^n . \log G_1(x+1)] = \Delta\, x^n . \log \Gamma\,(x+1) + \Delta^2 x^n . \log G_1(x+2),$$

$$\Delta\,[\Delta^2 x^n . \log G_2(x+2)] = \Delta^2 x^n . \log G_1(x+2) + \Delta^3 x^n . \log G_2(x+3),$$

. . . .

$$\Delta\,[\Delta^n x^n . \log G_n(x+n)] = \Delta^n x^n . \log G_{n-1}(x+n),$$

гдѣ $\Delta^n x^n = n\,!$

Изъ этихъ равенствъ не трудно обнаружить слѣдующее тождество

$$x^n \log x = \Delta \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Delta^k x^n . \log G_k(x+k).$$

Внося это выраженіе въ равенство (6), находимъ

$$\log K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Delta^k x^n . \log G_k(x+k) + C.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что

$$K_n(1) = 1\,, \qquad G_n(1) = 1\,, \qquad G_k(1+k) = 1$$

заключаемъ, что *постоянное* $C = 0$.

Слѣдовательно,

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n . \log G_1(x+1) +$$

$$+ \Delta^2 x^n . \log G_2(x+2) - \ldots + (-1)^n \Delta^n x^n . \log G_n(x+n). \qquad (E)$$

Этотъ выводъ въ силу равенствъ (1) можно формулировать такъ: *логариѳмъ всякой Кинкелиновой функціи есть линейная функція логариѳмовъ гаммаморфныхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.*

Изъ обзора уравненій

$$\log K_1(x) = x \log \Gamma(x) - \log G_1(x+1)$$

$$\log K_2(x) = x^2 \log \Gamma(x) - \Delta x^2 \log G_1(x+1) + 2! \log G_2(x+2)$$

. . . .

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n \log G_1(x+2) + \ldots + (-1)^n n! \log G_n(x+n)$$

ясно, что и обратно, *логариѳмъ всякой гаммаморфной функціи* $G_n(x)$ *есть линейная функція логариѳмовъ Кинкелиновыхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами относительно* x.

И, дѣйствительно, рѣшеніе приведенной системы даетъ:

$$n! \log G_n(x+n) =$$

$$= P_n \log \Gamma(x) - P'_n \log K_1(x) + \frac{P''_n}{2!} \log K_2(x) - \ldots + (-1)^n \frac{P^n_n}{n!} \log K_n(x), \; (F)$$

гдѣ

$$P_n = x(x+1) \ldots (x+n-1),$$

а P'_n, P''_n, ... суть производныя отъ P_n.

4. Зависимость между основными постоянными обѣихъ системъ функцій.

Мы видѣли въ § 1 какую важную роль играютъ постоянныя $\psi_1(1)$, $\psi_2(1)\ldots$ въ теоріи функцій G_n. Эти постоянныя могутъ быть замѣнены другими системами, между прочимъ вышеупомянутыми интегралами

$$\int_0^1 \log G_n(x)\, dx.$$

Аналогичныя постоянныя имѣютъ огромное значеніе для Кинкелиновыхъ функцій. За основную систему въ теоріи Кинкелиновыхъ функцій Глешеръ и Бопэнъ принимаютъ постоянныя ω_{n-1}, которыя опредѣляются такъ:

$$\int_0^1 \log K_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Для того, чтобы установить связь между обѣими системами постоянныхъ, мы выведемъ выраженіе производной отъ $\log K_n(x)$ изъ формулы (E).

Посредствомъ дифференцированія, получимъ:

$$D \log K_n(x) = n\,[x^{n-1} \log \Gamma(x) - \varDelta x^{n-1} . \log G_1(x+1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \varDelta^{n-1} x^{n-1} . \log G_{n-1}(x+n-1)] + R_n(x),$$

гдѣ

$$R_n(x) = x^n \psi(x) - \varDelta x^n \psi_1(x+1) + \ldots + (-1)^n \varDelta^n x^n \psi_n(x+n). \quad (7)$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ $\log K_{n-1}(x)$, слѣдовательно

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Для опредѣленія вида функціи $R_n(x)$ составимъ разность

$$R_n(x+1) - R_n(x) = \varDelta R_n(x).$$

Вычисленіе этой разности въ силу равенствъ (3) даетъ

$$\varDelta R_n(x) = x^{n-1}.$$

Назовемъ чрезъ $B_n(x)$ полиномъ Бернулли, написанный въ такой формѣ, что

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x^{n-1}.$$

Черезъ сличеніе этихъ результатовъ, находимъ

$$R_n(x) = B_n(x) + A_n \tag{8}$$

гдѣ A_n постоянное.

Отсюда, полагая $x = 0$ и замѣтивъ, что $B_n(0) = 0$, получимъ

$$A_n = R_n(0).$$

Для опредѣленія $R_n(0)$ изъ формулы (7) необходимо напомнить, что 0 есть полюсъ функціи $\psi(x)$, причемъ изъ функціональнаго уравненія

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$$

непосредственно слѣдуетъ, что

$$[x\psi(x)]_{x=0} = -1.$$

Вслѣдствіе этого равенство (7) даетъ при $n > 1$

$$A_n = -\Delta 0^n \phi_1(1) + \Delta^2 0^n \phi_2(2) - \ldots + (-1)^n \Delta^n 0^n \phi_n(n). \tag{9}$$

Въ случаѣ же $n = 1$, получимъ

$$A_1 = -1 - \phi_1(1). \tag{10}$$

Изъ соотношеній (3) ясно, что A_n представляетъ линейную функцію постоянныхъ $\phi_1(1)$, $\phi_2(1)$, $\ldots$, $\phi_n(1)$.

Опредѣливъ составъ постоянныхъ A_n, мы можемъ остановиться на слѣдующемъ выраженіи производной $\log K_n(x)$:

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + B_n(x) + A_n. \tag{11}$$

Обращаясь къ мемуару Бопэна на стр. 20 мы находимъ слѣдующую зависимость:

$$\log K_n(x) = n \int_0^x \log K_{n-1}(x)\, dx + \frac{1}{n} B_{n+1}(x) - \frac{n}{2} x \log \omega_{n-1}.$$

Откуда чрезъ дифференцированіе находимъ.

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + \frac{1}{n} B'_{n+1}(x) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Имѣя въ виду, что по свойству Бернулліевыхъ функцій

$$B'_{n+1}(x) = n\,B_n(x) + B'_{n+1}(0)\,,$$

получимъ

$$D\log K_n(x) = n\log K_{n-1}(x) + B_n(x) + \frac{1}{n}B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2}\log\omega_{n-1}\,.$$

Сравнивая двѣ формы производной $\log K_n(x)$, находимъ

$$A_n = \frac{1}{n}B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2}\log\omega_{n-1}\,. \tag{12}$$

Замѣтимъ еще, что полагая $x = 1$, получимъ

$$A_n = D\log K_n(1)\,.$$

5. Выраженіе функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$, посредствомъ гамматорфныхъ и обратно.

Обратимся къ обобщенію функціи $G_1(x) = G(x)$, данному г. Бопэномъ. Замѣтивъ соотношеніе

$$G_1(x) = \frac{\Gamma^{x-1}(x)}{K_1(x)}\,,$$

Бопэнъ составляетъ такія функціи,

$$J_n(x) = \frac{K_{n-1}^{x-1}(x)}{K_n(x)}\,.$$

Очевидно, что $J_1(x)$ тождественно съ $G_1(x)$, но остальныя функціи $J_n(x)$ суть новыя функціи.

Изъ этого опредѣленія по свойству Кинкелиновыхъ функцій слѣдуетъ, что

$$J_n(x+1) = K_{n-1}(x)\,J_n(x)$$

и

$$J_n(1) = 1\,.$$

Чтобы обнаружить выраженіе функцій $J_n(x)$ чрезъ посредство гамморфныхъ функцій, логариѳмируемъ предыдущее равенство; получимъ:

$$\log J_n(x+1) - \log J_n(x) = \log K_{n-1}(x)\,.$$

Слѣдовательно, $\log J_n(x)$ представляетъ конечный интегралъ отъ $\log K_{n-1}(x)$.

Принимая во вниманіе, что по доказанному имѣемъ

$$\log K_{n-1}(x) =$$

$$= x^{n-1} \log \Gamma(x) - \Delta x^{n-1} \log G_1(x+1) +$$

$$+ \Delta^2 x^{n-1} \log G_2(x+1) - \ldots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} x^{n-1} \log G_{n-1}(x+n-1),$$

чрезъ конечное интегрированіе, прилагая справа методъ интеграціи по частямъ, находимъ:

$$\log J_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \log G_1(x) - 2\,\Delta x^{n-1} . \log G_2(x+1) +$$

$$+ 3\Delta^2 x^{n-1} . \log G_3(x+2) - \ldots + (-1)^{n-1}\, n\, \Delta^{n-1} x^{n-1} . \log G_n(x+n-1) . \quad (G)$$

Откуда слѣдуетъ, что обратно

$$n! \log G_n(x+n-1) = P_{n-1} \log G_1(x) - P'_{n-1} \log J_2(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{P_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \log J_n(x) \qquad (H)$$

гдѣ

$$P_{n-1} = x(x+1) \ldots (x+n-2).$$

6. Выраженіе тѣхъ-же функцій посредствомъ кратнаго интеграла отъ логариѳма функціи $G_1(x)$.

Равенство (G) даетъ выраженіе $\log J_n(x)$ въ зависимости отъ системы функцій $G_1, G_2, \ldots, G_n$; можно показать, что $J_n(x)$ зависитъ исключительно отъ первой изъ нихъ $G_1(x)$.

Прежде всего это обнаруживается для J_2. Полагая въ формулѣ (G) $n=2$, находимъ

$$\log J_2(x) = x \log G_1(x) - 2 \log G_2(x+1).$$

Полагая же въ формулѣ (B) тоже $n=2$, получимъ:

$$2 \log G_2(x+1) = x \log G_1(x) - \int_0^x \log G_1(x)\, dv + \int_0^x Q_2(x)\, dx.$$

Чрезъ сравненіе этихъ двухъ тождествъ имѣемъ

$$\log J_2(x) = \int_0^x \log G_1(x)\,dx - \int_0^x Q_2(x)\,dx\,.$$

Для обобщенія этого вывода, найдемъ сначала выраженіе производной отъ $\log J_n(x)$.

Изъ формулы (G) находимъ:

$$D \log J_n(x) =$$

$$= (n-1)\,[x^{n-2} \log G_1(x) - 2\,\Delta x^{n-2} \log G_2(x+1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}(n-1)\,\Delta^{n-2} x^{n-2} \log G_{n-1}(x+n-2)] + S_n(x),$$

гдѣ

$$S_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \phi_1(x) - 2\,\Delta x^{n-1} . \phi_2(x+1) + \ldots + (-1)^{n-1} n\,\Delta^{n-1} x^{n-1} \phi_n(x+n-1).$$

Составивъ разность отъ $S_n(x)$, находимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \psi(x) - \Delta x^{n-1} \phi_1(x+1) + \ldots + (-1)^{n-1}\,\Delta^{n-1} x^{n-1} . \phi_n(x+n-1).$$

Сравнивая правую часть съ формулой (7) и принимая во вниманіе равенство (8), получимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) = B_{n-1}(x) + A_{n-1}.$$

Такъ какъ $B_{n-1}(x)$ есть полиномъ $(n-1)$-ой степени, то $S_n(x)$ будетъ полиномъ n-ой степени, выраженіе котораго не трудно найти.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ тождества

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x\,[B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)]$$

слѣдуетъ, что

$$S_n(x) = (x-1)\,B_{n-1}(x) - B_n(x) + A_{n-1}x + S_n(0).$$

Постоянное $S_n(0)$ получается безъ затрудненій изъ первоначальнаго выраженія $S_n(x)$, принявъ во вниманіе, что

$$[x\phi_1(x)]_{x=0} = 1\,.$$

Выяснивъ это обстоятельство, имѣемъ

$$D \log J_n(x) = (n-1) J_{n-1}(x) + S_n(x).$$

Отсюда, дифференцируя $(n-2)$ раза, получимъ

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1) D^{n-2} J_{n-1}(x) + F_n^2(x)$$

гдѣ $F_n^2(x)$ полиномъ 2-й степени.

Замѣняя въ предыдущей формулѣ n чрезъ $n-1$, $n-2, \ldots, 2$, получимъ рядъ аналогичныхъ равенствъ

$$D^{n-2} \log J_{n-1}(x) = (n-2) D^{n-3} \log J_{n-2}(x) + F_{n-1}^2(x)$$

. . . .

$$D \log J_2(x) = \log G_1(x) + F_2^2(x).$$

Слѣдовательно, путемъ исключенія получимъ:

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1)! \log G_1(x) + F^2(x),$$

гдѣ $F^2(x)$ — опять полиномъ второй степени.

Интегрируя это равенство $(n-1)$ разъ въ предѣлахъ отъ 0 до x, находимъ:

$$\log J_n(x) = (n-1)! \int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x \log G_1(x)\, dx^{n-1} + F^{n+1}(x). \qquad (J)$$

Итакъ, логариѳмъ $J_n(x)$ отличается отъ интеграла $(n-1)$-й кратности отъ $\log G_1(x)$ на полиномъ $(n+1)$-ой степени.

7. *Обобщеніе.*

Строеніе функціональнаго уравненія Кинкелиновыхъ функцій указываетъ на возможность разнообразныхъ обобщеній; напримѣръ, выраженіе каждой изъ функцій $F_n(x)$, удовлетворяющихъ одному изъ уравненій

$$F_n(x+1) = G_j^{x^n}(x) \,.\, F_n(x)$$

$$F_n(x+1) = K_j^{x^n}(x) \,.\, F_n(x)$$

$$F_n(x+1) = J_j^{x^n}(x) \,.\, F_n(x)$$

можетъ быть найдено пріемомъ, указаннымъ выше.

Логариѳмъ каждой изъ такихъ функцій $F_n(x)$ представляетъ линейную функцію логариѳмовъ гаммаморфныхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Выборъ показателя въ формѣ x^n не существененъ: предыдущее заключеніе остается неизмѣннымъ, если примемъ показателемъ какую угодно цѣлую раціональную функцію x; поэтому къ той-же категоріи относится функція $F_n(x)$, опредѣляемая уравненіемъ:

$$F_n(x+1) = x^{r_0(x)} . G_i^{r_1(x)}(x) . K_p^{r_2(x)} . J_q^{r_3(x)} . F_n(x).$$

гдѣ r_0, r_1, r_2, r_3 суть цѣлыя раціональныя функціи x.

REMARQUES RELATIVES AUX FORMULES SOMMATOIRES D'EULER ET DE BOOL

PAR

W. Stekloff.

---

1. On sait beaucoup de démonstrations simples de la formule sommatoire d'Euler. Néanmoins je me permets de publier quelques remarques relatives à cette formule, ainsi qu' à la formule analogue de M. Bool, qui me semblent non dénuées d'intérêt au point de vue didactique.

Je vais attirer l'attention sur ce fait qu'on peut déduire les formules en question, ainsi qu'étudier les propriétés fondamentales des polynomes qui s'y rattachent, par un procédé uniforme et très élégant, en partant d'une formule élémentaire, qu'on peut considérer en même temps comme une formule sommatoire générale contenant comme des cas très particuliers celles d'Euler et de Bool.

2. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de la variable réelle x admettant les dérivées de n premiers ordres dans un intervalle quelconque (a, b).

Désignons par $g^{(k)}(-x)$ la dérivée d'ordre k de $g(x)$, où l'on remplace x par $-x$.

Faisant dans l'identité

$$f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(-x) - f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k+1)}(-x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k)}(-x)\right]$$

successivement $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ et additionnant, on trouve

$$f^{(n)}(x)\, g(-x) - f(x)\, g^{(n)}(-x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k)}(-x),$$

d'où, en intégrant entre les limites a et b, on tire, après une réduction simple,

$$f(b)\,g^{(n-1)}(-b) - f(a)\,g^{(n-1)}(-a) =$$

$$= -\int_a^b f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx - \sum_{k=2}^{n} [f^{(k-1)}(b)\,g^{(n-k)}(-a) - f^{(k-1)}(b)\,g^{(n-k)}(-a)] +$$

$$+ \int_a^b f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx. \qquad (1)$$

C'est la formule de Kronecker.

3. Posons $b = a + h$, et

$$g(x) = \varphi\left(-\frac{x+a}{h}\right).$$

On aura

$$g^{(n-k)}(-x) = \frac{(-1)^{n-k}}{h^{n-k}}\,\varphi^{(n-k)}(z), \quad z = \frac{x-a}{h}.$$

L'égalité (1) devient

$$f(a+h)\,\varphi^{(n-1)}(1) - f(a)\,\varphi^{(n-1)}(0) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\varphi^{(n)}\left(\frac{x-a}{h}\right)dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1}\,[f^{(k-1)}(a+h)\,\varphi^{(n-k)}(1) - f^{(k-1)}(a)\,\varphi^{(n-k)}(0)] +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\,\varphi(z)\,dz, \qquad (2)$$

car

$$\int_a^{a+h} f^{(n)}(x)\,\varphi\left(\frac{x-a}{h}\right)dx = h\int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\,\varphi(z)\,dz.$$

Remplaçant dans (2) a par $a + jh$, j étant un entier, faisant ensuite successivement $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ et additionnant les résultats, on trouve, après des réductions simples,

$$[\varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f(a+jh) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b)\, \varphi^{(n-k)}(0) - f^{(k-1)}(a)\, \varphi^{(n-k)}(1)] + \tag{3}$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1} [\varphi^{(n-k)}(1) - \varphi^{(n-k)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f^{(k-1)}(a+jh) +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz)dz.$$

C'est la formule sommatoire générale, analogue à celle de M. Kronecker [1]).

4. Considérons le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n.

Il est évident que la formule (3) se réduira à celle d'Euler, si nous déterminerons le polynome $\varphi(z)$ à l'aide des conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) = \varphi^{(n-k)}(0). \qquad (k=2,3,\ldots,n) \tag{4}$$

La formule (3) se réduira à celle de Bool, si nous supposons que le polynome $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) + \varphi^{(n-k)}(0) = 0. \qquad (k=1,2,3,\ldots,n) \tag{5}$$

Nous considérons, dans ce qui va suivre, ces deux cas les plus intéressants, sans traiter la question générale.

5. Supposons d'abord que $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions (4).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(0) = A'_n, \qquad \varphi^{(n-k)}(0) = A_k. \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1) \tag{6}$$

---

[1]) Comparer L. Kronecker: „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale". Leipzig, 1894, p. 148.

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z)=A_k+z\frac{A_{k-1}}{1\,!}+z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!}+\ldots+z^{k-1}\frac{A_1}{(k-1)\,!}+z^k\frac{A_0}{k\,!}.\quad (7)$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n)$$

En posant $z=1$, on trouve, en vertu de (4),

$$A_{k-1}+\frac{A_{k-2}}{2\,!}+\ldots+\frac{A_1}{(k-1)\,!}+\frac{A_0}{k\,!}=0.\qquad (8)$$
$$(k=2,3,\ldots,n)$$

Ces $n-1$ équations déterminent successivement les rapports

$$\frac{A_k}{A_0}.\qquad (k=1,2,\ldots,n-1)$$

Les coefficients A_0 et A'_n restent indéterminés.
Nous posons, pour plus de simplicité,

$$A'_n=0,\qquad A_0=1.\qquad (9)$$

Nous obtiendrons ainsi le polynome

$$\varphi(z)=\frac{z^n}{n\,!}+z^{n-1}\frac{A_1}{(n-1)\,!}+z^{n-2}\frac{A_2}{(n-2)\,!}+\ldots+z^2\frac{A_{n-2}}{2\,!}+zA_{n-1},\quad (10)$$

A_k étant des constantes, définies par les équations (8), où il faut poser $A_0=1$.

En prennant pour n les valeurs entières à partir de $n=2,3,\ldots$, nous obtiendrons une suite de polynomes de degré $2,3,\ldots$ qu'on appelle *polynomes de Bernoulli.*

6. Désignons maintenant le polynome de Bernoulli de degré n par $\varphi_n(z)$.

En tenant compte de (10) et (4), on trouve immédiatement

$$\varphi_n(0)=\varphi_n(1)=0.\qquad (11)$$

Posons dans l'équation

$$\varphi_n^{(n-k)}(1-z)=A_k-z\frac{A_{k-1}}{1\,!}+$$
$$+z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!}+\ldots+(-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{\varphi_n^{(n-1)}(1)}{(k-1)\,!}+(-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (7) $k=2$.

On aura

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) = A_2 + zA_1 + \frac{z^2}{2!}, \quad \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = A_2 - z\varphi_n^{(n-1)}(1) + \frac{z^2}{2!},$$

d'où

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = z[A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1)].$$

Or, l'équation (7) donne, pour $k=1$, $z=1$,

$$\varphi_n^{(n-1)}(1) = A_1 + 1. \tag{12}$$

On a donc, en vertu de (8) (pour $k=2$),

$$A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1) = 2A_1 + 1 = 0, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = 0.$$

On tire de là, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-3)}(z) + \varphi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 2A_3,$$

$$\varphi_n^{(n-4)}(z) - \varphi_n^{(n-4)}(1-z) = 2A_3 z + \text{Const.} = 2A_3 z,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$A_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k = 2, 3, 4. \tag{14}$$

Supposons que cette égalité soit exacte pour une valeur quelconque paire de k; montrons qu'elle le sera aussi pour $k+1$ et $k+2$.

De l'égalité (14) on tire, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(z) + (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)}(1-z) = 2A_{k+1},$$

$$\varphi_n^{(n-k-2)}(z) + (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k-2)}(1-z) = 2A_{k+1} z.$$

Il s'ensuit que

$$A_{k+1} = 0.$$

Or l'équation (14) est exacte pour $k=2$; elle reste donc exacte pour toutes les valeurs de l'indice $k = 2, 3, 4, \dots, n$.

On a en même temps

$$A_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ impair.} \tag{15}$$

Posant $k = n$, on trouve

$$\varphi_n(z) + (-1)^{n-1}\varphi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ impair.}$$

7. Remplaçons maintenant dans (3) φ par φ_n.

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\,\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad b = a + mh,$$

car dans le cas considéré

$$\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) = 1,$$

et la formule (3) devient, en vertu de (4), (6), (12) et (13),

$$\sum_{j=0}^{m} f(a+jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(b)+f(a)] +$$

$$+\sum_{k=2}^{n} h^{k-1}A_k\,[f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] +$$

$$+(-1)^{n-1}h^n\int_0^1 \varphi_n(z)\sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz)\,dz,$$

où nous avons supprimé, eu égard à (15), le facteur $(-1)^k$ dans la somme du second membre.

C'est la formule d'Euler sous sa forme usuelle.

8. Pour achever l'étude, il ne reste qu'à réduire l'expression

$$R_n = (-1)^{n-1}h^n\int_0^1 \varphi_n(z)\sum_{j=0}^{m} f^{(n)}[a+h(j+z)]\,dz,$$

aux formes usuelles, dues par Poisson, Ostrogradsky (Malmsten), Jacobi, Schlömilch etc.

Je renverrai, pour la démonstration, à l'Ouvrage de M. A. Markoff: „Calcul des différences finies" (St. Pétersbourg, Partie II, 1891, p.p. 25—27) et aux Mémoires connus de M. Imchenetsky (Annales de l'Université de Kasan, 1870) et de M. Sonin (Annales de l'Ecole Normale, 3 série, T. VI, 1889), où le lecteur trouvera la solution complète et la plus élegante du problème en question.

9. Passons maintenant à l'étude des polynomes vérifiant les conditions (5).

Je désignerai dès à présent un tel polynome par $\psi(z)$ et je poserai

$$\psi^{(n-k)}(0) = C_k. \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{16}$$

On a

$$\psi^{(n-k)}(z) = C_k + z\frac{C_{k-1}}{1!} + z^2\frac{C_{k-2}}{2!} + \ldots + z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!} + z^k\frac{C_0}{k!}, \tag{17}$$

d'où, en vérifiant les conditions (5), on tire

$$2C_k + \frac{C_{k-1}}{1!} + \frac{C_{k-2}}{2!} + \ldots + \frac{C_1}{(k-1)!} + \frac{C_0}{k!} = 0. \tag{18}$$

$$(k=1,2,2,\ldots,n)$$

On obtient ainsi le système de n équations linéaires qui permettent de calculer successivement les rapports des constantes $C_k (k=1, 2, 3, \ldots, n)$ à la constante C_0 qui reste indéterminée.

Posant, pour plus de simplicité, $C_0 = 1$, nous obtiendrons le polynome $\psi(z)$ de degré n, complètement déterminé et satisfaisant aux conditions (5).

Faisant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$, nous construirons une suite de polynomus de degré $1, 2, 3, \ldots$, que nous désignerons, d'une manière générale, par $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\psi_n(z) = C_n + z\frac{C_{n-1}}{1!} + z^2\frac{C_{n-2}}{2!} + \ldots + z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!}, \tag{19}$$

$C_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes complètement déterminées par les équations (18), où il faut poser $C_0 = 1$.

10. Posons dans l'équation [voir les notations (16) et les équations (5)]

$$-\psi_n^{(n-k)}(1-z) =$$

$$= C_k - z\frac{C_{k-1}}{1!} + z^2\frac{C_{k-2}}{2!} - \ldots + (-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!} - (-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (17) $k=2$; il viendra

$$\psi_n^{(n-2)}(z) = C_2 + z\frac{C_1}{1!} + \frac{z^2}{2!},$$

$$-\psi_n^{(n-2)}(1-z) = C_2 - z\frac{C_1}{1!} - \frac{z^2}{2!},$$

d'où l'on tire

$$\psi_n^{(n-2)}(z) - \psi_n^{(n-2)}(1-z) = 2C_2.$$

Posant $z=1$, on trouve, en tenant compte de (5),

$$C_2 = 0.$$

De l'égalité précédente on tire, en intégrant,

$$\psi_n^{(n-3)}(z) + \psi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 0,$$

$$\psi_n^{(n-4)}(z) - \psi_n^{(n-4)}(1-z) = \text{Const.} = 2C_4,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$C_4 = 0.$$

On a donc

$$\psi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\psi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k = 2, 3, 4. \tag{20}$$

En répétant les raisonnements du n° 6, on s'assure aisément que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k = 2, 3, \ldots, n$.

Il est évident aussi qu'elle reste vraie et pour $k=1$.

On a en même temps

$$C_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ pair.} \tag{21}$$

11. Posons dans (20) $k=n$; on trouve

$$\psi_n(z) + (-1)^{n-1}\psi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Si n est pair, on aura, eu égard à (21),

$$\psi_n(z) = z\frac{C_{n-1}}{1!} + z^2\frac{C_{n-2}}{2!} + \ldots + z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où, en tenant compte de (5), on tire

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ pair.} \tag{22}$$

12. L'égalité (19) donne

$$\psi'_n(z) = C_{n-1} + z\frac{C_{n-2}}{1!} + z^2\frac{C_{n-3}}{2!} + \ldots + z^{n-2}\frac{C_1}{(n-2)!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc toujours, quel que soit l'indice n,

$$\psi'_n(z) = \psi_{n-1}(z). \tag{23}$$

Soit n un nombre pair, soit α_n le nombre de racines de $\psi_n(z)$ à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.

Le nombre de racines de $\psi'_n(z)$ sera au moins égal à $\alpha_n + 1$; celles de $\psi''_n(z)$ au moins égal à α_n [en vertu de (22)].

Or, on a, en tenant compte de (23),

$$\psi''_n(z) = \psi'_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z), \tag{24}$$

d'où l'on conclut que

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n-2} \leqq \alpha_{n-2} \leqq \ldots \leqq \alpha_2.$$

Mais $\alpha_2 = 0$, car

$$\psi_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$, si n est un nombre pair.*

Supposons maintenant que n soit impair.

L'égalité (23) montre que $\psi'_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ n'admet qu'une seule racine réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, si n est impair.*

13. Posons $n = 2m$. L'égalité (23) donne, si l'on y remplace n par $2m+1$,

$$\psi_{2m+1}(1) - \psi_{2m+1}(0) = -2C_{2m+1} = \int_0^1 \psi_{2m}(z)\, dz. \tag{25}$$

On voit que le signe de $\psi_{2m}(z)$ est contraire à celui de la constante C_{2m+1}.

D'autre part, on a, eu égard à (24) et (22),

$$\int_0^1 \psi_{2m}(z)\,\psi_{2m-2}(z)\,dz = \int_0^1 \psi_{2m}(z)\,\psi''_{2m}(z)\,dz =$$

$$= -\int_0^1 [\psi'_{2m}(z)]^2\,dz < 0 .$$

Il s'ensuit que $\psi_{2m}(z)$ et $\psi_{2m-2}(z)$ ont des signes contraires dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il en est de même, par conséquent, des constantes C_{2m-1} et C_{2m+1}. Or $C_1 = -\frac{1}{2} < 0$. On a donc

$$(-1)^m C_{2m+1} > 0 . \tag{25$_1$}$$

En remarquant qu'en vertu de (25)

$$\int_0^1 (-1)^{m-1}\,\psi_{2m}(z)\,dz = (-1)^m\,2C_{2m+1} > 0 ,$$

on trouve

$$(-1)^{m-1}\,\psi_{2m}(z) < 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1 . \tag{25$_2$}$$

Telles sont les propriétés fondamentales des polynomes $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, analogues, comme l'on voit, à ceux de Bernoulli.

14. Si nous remplaçons maintenant dans (3) la fonction φ par $\psi_n(z)$, nous obtiendrons la formule sommatoire de Boole [1])

$$\sum_{j=0}^{m} f(a+jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b) + f^{(k-1)}(a)]\,C_k - 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\,h^{k-1}\,C_k \sum_{j=0}^{m} f^{(k-1)}(a+jh) +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \psi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz)\,dz. \tag{26}$$

[1]) Nous posons, comme dans le n° 7, $b = a + mh$.

Posons, pour plus de simplicité, $m=1$; il viendra

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^k C_k \left[f^{(k-1)}(a+h) + f^{(k-1)}(a)\right] +$$

$$+ (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \psi_n(z) f^{(n)}(a+hz)\,dz. \tag{27}$$

Soit n un nombre pair $(n=2k)$. On a

$$R_{2k} = h^{2k+1} \int_0^1 f^{(2k)}(a+hz)\,\psi_{2k}(z)\,dz.$$

Remarquant que $\psi_{2k}(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0,1)$, on trouve, en tenant compte de (23), (16) et (5),

$$R_{2k} = h^{2k+1} f^{(2k)}(a+h\vartheta) \int_0^1 \psi_{2k}(z)\,dz = -2h^{2k+1} f^{(2k)}(a+h\vartheta)\,C_{2k+1},$$

où $0 < \vartheta < 1$.

On aura de même dans le cas général, où m est un entier quelconque [formule (26)],

$$R_{2k} = -h^{2k} \int_0^1 \psi_{2k}(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(2k)}(a+jh+hz)\,dz =$$

$$= 2h^{2k} C_{2k+1} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(2k)}(a+jh+h\vartheta),$$

d'où, en désignant par μ un nombre, compris entre le minimum et le maximum de $f^{(2k)}(x)$ dans l'intervalle de a à b, on trouve

$$R_{2k} = 2m\mu h^{2k} C_{2k+1}.$$

Il est aisé de trouver d'autres expressions du reste de la formule (26), analogues à celles dans la formule d'Euler, mais nous n'insistons pas sur ce point.

15. Revenons aux polynomes $\psi_n(z)$ et aux nombres C_n.

Remarquons tout d'abord que le calcul successif des nombres C_n, à l'aide des équations fondamentales (18), ne présente pas des grandes difficultés.

On trouve, par exemple,

$$\begin{gathered} C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{4!}, \quad C_5 = -\frac{1}{2.5!}, \\ C_7 = \frac{17}{8!}, \quad C_9 = -\frac{31}{2.9!}, \quad C_{11} = \frac{2073}{12!}, \quad C_{13} = -\frac{5461}{2.13!}. \end{gathered} \tag{28}$$

Ces constantes étant connues, on obtient les expressions suivantes pour 8 premiers de polynomes $\psi_n(z)$:

$$\begin{aligned} &\psi_1(z) = \frac{2z-1}{2}, \quad \psi_2(z) = \frac{1}{2!}(z^2 - z), \\ &\psi_3(z) = \frac{1}{4!}(1 - 6z^2 + 4z^3), \\ &\psi_4(z) = \frac{1}{4!}(z - 2z^3 + z^4), \\ &\psi_5(z) = \frac{1}{2.5!}(-1 + 5z^2 - 5z^4 + 2z^5), \\ &\psi_6(z) = \frac{1}{6!}(-3z + 5z^3 - 3z^5 + z^6), \\ &\psi_7(z) = \frac{1}{8!}(17 - 84z^2 + 70z^4 - 28z^6 + 8z^7), \\ &\psi_8(z) = \frac{1}{8!}(17z - 28z^3 + 14z^5 - 4z^7 + z^8). \end{aligned} \tag{28$_1$}$$

16. Appliquons maintenant la formule de Taylor à la fonction $\psi_n(1+z)$.

On trouve, en tenant compte de (16) et (5),

$$\psi_n(1+z) = -C_n - z\frac{C_{n-1}}{1!} - z^2\frac{C_{n-2}}{2!} - \ldots - z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où l'on tire, eu égard à (19),

$$\begin{aligned} \psi_n(1+z)+\psi_n(z) &= 2\frac{z^n}{n!}, \\ \psi_n(2+z)+\psi_n(1+z) &= 2\frac{(1+z)^n}{n!}. \end{aligned} \tag{28_2}$$

Ces égalités donnent

$$\psi_n(2+z)-\psi_n(z)=\frac{2}{n!}\left[(1+z)^n-z^n\right],$$

$$\psi_n(4+z)-\psi_n(2+z)=\frac{2}{n!}\left[(3+z)^n-(2+z)^n\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(2j+z)-\psi_n(2j-2+z)=\frac{2}{n!}\left[(z+2j-1)^n-(z+2j-2)^n\right],$$

d'où

$$\psi_n(z+2j)-\psi_n(z)=\frac{2}{n!}\sum_{s=1}^{s=j}\left[(z+2s-1)^n-(z+2s-2)^n\right].$$

Supposons d'abord que n soit pair:

$$n=2m \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

et posons $z=0$.

On trouve, en se rappelant que $\psi_{2m}(0)=0$,

$$\frac{2m!}{2}\psi_{2m}(2j)=$$

$$=1^{2m}-0^{2m}+3^{2m}-2^{2m}+5^{2m}-4^{2m}+\ldots+(2j-1)^{2m}-(2j-2)^{2m}. \tag{β}$$

Les polynomes $\psi_{2m}(z)$ fournissent donc un moyen de sommation des sommes algébriques de la forme

$$1^{2m}-0^{2m}+3^{2m}-2^{2m}+5^{2m}-4^{2m}+\ldots+(2j-1)^{2m}-(2j-2)^{2m}.$$

On a, par exemple, en vertu de (28_1),

$$1^2 - 0^2 + 3^2 - 2^2 + \ldots + (2j-1)^2 - (2j-2)^2 = 2j^2 - j,$$

$$1^4 - 0^4 + 3^4 - 2^4 + \ldots + (2j-1)^4 - (2j-2)^4 = j - 8j^3 + 8j^4,$$

$$1^6 - 0^6 + 3^6 - 2^6 + \ldots + (2j-1)^6 - (2j-2)^6 =$$
$$= 32j^6 - 48j^5 + 20j^3 - 3j,$$

$$1^8 - 0^8 + 3^8 - 2^8 + \ldots + (2j-1)^8 - (2j-2)^8 =$$
$$= 17j - 112j^3 + 224j^5 - 256j^7 + 128j^8.$$

Posons, pour exemple, dans la dernière de ces égalités, $j = 10$.
On trouve aisément

$$1^8 - 0^8 + 3^8 - 2^8 + 5^8 - 4^8 + \ldots + 19^8 - 18^8 = 10262\ 288170.$$

17. Transformons maintenant l'égalité (β) de la manière suivante:

$$\frac{2m!}{2}\psi_{2m}(2j) = 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + 4^{2m} + \ldots + (2j-2)^{2m} + (2j-1)^{2m} -$$
$$- 2[2^{2m} + 4^{2m} + 6^{2m} + \ldots + (2j-2)^{2m}] =$$
$$= 1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots + (2j-1)^{2m} -$$
$$- 2^{2m+1}[1^{2m} + 2^{2m} + 3^{2m} + \ldots + (j-1)^{2m}].$$

Soient p et q deux nombres entiers quelconques.
On sait que

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \ldots + (q-1)^{p-1} = (p-1)!\,\varphi_p(q),$$

$\varphi_p(q)$ désignant, comme précédemment, le polynome de Bernoulli de dégré p.
Moyennant cette égalité, on trouve

$$\frac{1}{2}\psi_{2m}(2j) = \varphi_{2m+1}(2j) - 2^{2m+1}\varphi_{2m+1}(j),$$

l'égalité ayant lieu quel que soit le nombre entier j.
On en déduit l'identité suivante

$$\frac{1}{2}\psi_{2m}(2z) = \varphi_{2m+1}(2z) - 2^{2m+1}\varphi_{2m+1}(z), \qquad (\gamma)$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z et pour toutes les valeurs de l'indice $m = 1, 2, 3, \ldots$.

De cette identité on tire immédiatement les relations suivantes entre les nombres C_{2m-1} et A_{2m}, coefficients des polynomes de Bernoulli:

$$C_{2m-1} = 2(1-2^{2m})\,A_{2m}. \tag{δ}$$

Désignant par B_m les nombres de Bernoulli et en se rappelant que

$$A_{2m} = (-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m!},$$

on trouve

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m\,2\,(2^{2m}-1)}{2m!}\,B_m, \tag{δ_1}$$

ou encore

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}(2m-1)!}\,D_m,$$

où

$$D_m = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}\,B_m \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

sont des nombres entiers, qui se rencontrent dans le développement bien connu

$$\operatorname{tang} x = D_1\frac{x}{1!} + D_2\frac{x^3}{3!} + \ldots + D_m\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots .$$

18. Posons maintenant dans (α)

$$n = 2m-1, \qquad z = 0.$$

On trouve

$$\frac{(2m-1)!}{2}\,[\psi_{2m-1}(2j) - C_{2m-1}] =$$

$$= 1^{2m-1} - 0^{2m-1} + 3^{2m-1} - 2^{2m-1} + \ldots + (2j-1)^{2m-1} - (2j-2)^{2m-1}.$$

De cette égalité générale on tire, eu égard à (28_1)),

$$1 - 0 + 3 - 2 + 4 - 3 + \ldots + (2j-1) - (2j-2) = j,$$

$$1^3 - 0^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + (2j-1)^3 - (2j-2)^3 = 4j^3 - 3j^2,$$

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 4^5 - 3^5 + \ldots + (2j-1)^5 - (2j-2)^5 =$$
$$= 5j^2 - 20j^4 + 16j^5,$$

$$1^7 - 0^7 + 3^7 - 2^7 + 4^7 - 3^7 + \ldots + (2j-1)^7 - (2j-2)^7 =$$
$$= 64j^7 - 112j^6 + 70j^4 - 21j^2.$$

Posons, par exemple, dans la $3^{\text{-me}}$ de ces équations $j = 10$. On trouve aisément

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 5^5 - 4^5 + \ldots + 19^5 - 18^5 = 1400500.$$

19. De l'égalité (δ) on tire, en répétant les raisonnements du n⁰ 17,

$$\frac{1}{2}[\psi_{2m-1}(2z) - C_{2m-1}] = \varphi_{2m}(2z) - 2^{2m}\varphi_{2m}(z).$$

On peut donc écrire, eu égard à (γ),

$$\frac{1}{2}[\psi_n(2z) - C_n] = \varphi_{n+1}(2z) - 2^{n+1}\varphi_{n+1}(z). \qquad (\varepsilon)$$

Cette égalité a lieu toujours, quel que soit le nombre entier n, car $C_n = 0$ pour n pair.

20. Les formules (26) et (27) ont une grande analogie avec la formule classique d'Euler (Mac-Laurin) et peuvent avoir, comme celle-ci, des diverses applications intéressantes dont j'indiquerai quelques-unes dans ce qui va suivre.

Posons dans (26)

$$f(x) = x^{m-1}, \quad a = 0, \quad h = 1, \quad b = n - 1,$$

m et n étant des nombres entiers.

Remarquant que

$$f^{(k-1)}(x) = (m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)x^{m-k},$$

$$1^s + 2^s + 3^s + \ldots + (n-1)^s = s!\,\varphi_{s+1}(n),$$

$\varphi_{s+1}(n)$ étant le polynome de Bernoulli, et que $C_k = 0$, si k est un nom bre pair, on peut écrire

$$(m-1)!\,\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} C_k(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)(n-1)^{m-k} - 2\,C_m(m-1)! +$$

$$+ 2(m-1)!\sum_{k=2}^{m-1} C_k\,\varphi_{m-k+1}(n) + 2\,C_m n(m-1)! =$$

$$= (m-1)!\left\{\frac{(n-1)^m}{m} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k\varphi_{m-k+1}(n)\right\}.$$

Par suite,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{m-k+1}(n),$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \frac{2z-1}{2}.$$

Or on a, eu égard aux propriétés des polynomes $\psi_m(z)$ et des nombres C_m,

$$\psi_m(1+z) = -C_m - \frac{C_{m-1}}{1!}z - \frac{C_{m-2}}{2!}z^2 - \ldots - \frac{C_1}{(m-1)!}z^{m-1} + \frac{z^m}{m!}.$$

d'où l'on tire, en posant $z = n-1$,

$$\psi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\varphi_m(n) = \psi_m(n) + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n)$$

ou

$$\psi_m(n) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n) = 0,$$

puisque $2C_1 = -1$.

Il en résulte l'identité suivante

$$\psi_m(z) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(z) = 0,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z.

On trouve donc les relations suivantes entre les polynomes $\psi_m(z)$ et les polynomes $\varphi_m(z)$ de Bernoulli:

$$\psi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \ldots + 2C_m\varphi_1(z) = 0,$$

si m est impair,

$$\varphi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \ldots + 2C_{m-1}\varphi_2(z) = 0,$$

si m est pair.

Remplaçons dans (ε) $2z$ par z, n par m. On aura

$$\frac{1}{2}\varphi_m(z) = \varphi_{m+1}(z) - 2^{m+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}C_m,$$

d'où l'on tire, eu égard aux égalités précédentes, les formules suivantes concernant la theorie des polynomes de Bernoulli:

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \ldots + C_{m-2}\varphi_3(z) + C_m z],$$

si m est impair, et

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z) + C_1\varphi_m(z) + C_3\varphi_{m-2}(z) + \ldots + C_{m-3}\varphi_4(z) + C_{m-1}\varphi_2(z)],$$

si m est pair.

Ces équations expriment le théorème de la division par deux de l'argument des polynomes de Bernoulli.

Si l'on pose $z = 1$ dans la première de ces équations, on trouve, en outre, eu égard à (δ_1),

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{C_{2k-1}}{2^{2k+1}} = (-1)^{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}2k!}B_k. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

21. Considérons maintenant la formule simple (27).

Posons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^p} - \frac{1}{(x+2k+1)^p}\right),$$

m étant un entier, p un nombre positif quelconque.

On a

$$f^{(s)}(x)=$$

$$=(-1)^s p(p+1)\ldots\ldots(p+s-1)\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^{p+s}}-\frac{1}{(x+2k+1)^{p+s}}\right),$$

$$f^{(s)}(a+1)+f^{(s)}(a)=$$

$$=(-1)^s p(p+1)\ldots\ldots(p+s-1)\left[\frac{1}{a^{p+s}}-\frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+s}}\right],$$

$$\int_a^{a+1} f(x)\,dx=\frac{2}{1-p}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}}-\frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}}\right]-$$

$$-\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{a^{p-1}}-\frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}}\right).$$

Remplaçant dans (27) h par 1, n par $2n$, on trouve, après des réductions simples,

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}}-\frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{p-1}}-\frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}}\right)-$$

$$-C_1\frac{1-p}{2}\left(\frac{1}{a^{p}}-\frac{1}{[a+2(m+1)]^{p}}\right)-$$

$$-C_3\frac{(1-p)p(p+1)}{2}\left(\frac{1}{a^{p+2}}-\frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2}}\right)-$$

$$-\ldots-C_{2n-1}\frac{(1-p)p(p+1)\ldots(p+2n-3)}{2}\left(\frac{1}{a^{p+2(n-1)}}-\frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2(n-1)}}\right)+$$

$$+R_{2n}, \tag{29}$$

où l'on a posé

$$R_{2n}=\frac{1}{2}(1-p)p(p+1)\ldots(p+2n-1)\int_0^1\psi_{2n}(z)\,\varphi(a+z)\,dz,$$

$$\varphi(a+z)=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+z+2k)^{p+2n}}-\frac{1}{(a+z+2k+1)^{p+2n}}\right).$$

Comme

$$\varphi(a+z)>0 \qquad \text{pour } a>0, \qquad 0<z<1,$$

on en conclut que

$$\varphi(a+z)<\frac{1}{a^{p+2n}}.$$

Par suite $(p>1)$,

$$|R_{2n}|<\frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+2n-1)}{a^{p+2n}}|C_{2n+1}|.$$

L'égalité (29) fournit un moyen simple de calculer les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^p}-\frac{1}{[a+2(k+1)]^p}\right),$$

si le nombre a est plus grand que l'unité.

22. Posons, par exemple,

$$a=100, \qquad m=49, \qquad p=5, \qquad n=2.$$

La formule (29) donne, en vertu de (28),

$$S=\sum_{k=1}^{49}\left(\frac{1}{(101+2k)^4}-\frac{1}{(102+2k)^4}\right)=$$

$$=\frac{15}{2^5.10^8}-\frac{3}{2^5.10^9}+\frac{5.127}{2^8.10^{14}}+R_4,$$

où

$$|R_4|<\frac{28}{10^{18}}.$$

Or

$$\frac{15}{2^5.10^8}=0{,}0000000046875,$$

$$\frac{5.127}{2^8.10^{14}}=0{,}0000000000000248,$$

$$\frac{3}{2^5.10^9}=0{,}000000000093750,$$

d'où

$$S = 0{,}0000000045937748\,,$$

le résultat avec 16 décimales exact.

Posant dans (29) $m = \infty$, nous obtiendrons la formule commode pour calculer la somme de la série infinie

$$S_p = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p}\right).$$

En l'appliquant au cas de

$$a = 100\,, \qquad p = 5\,, \qquad n = 3\,,$$

on trouve

$$S_4 = \frac{1}{2.10^8} - \frac{1}{10^{10}} + \frac{2.5}{10^{15}} - \frac{14}{10^{18}} =$$

$$= 0{,}0000000051000264000\,,$$

le résultat avec 19 décimales exact.

On pourrait, sans doute, déduire les mêmes résultats en partant de la formule sommatoire d'Euler, mais par un procédé moins direct et un peu plus compliqué.

23. Faisons maintenant dans (27)

$$h = 1\,, \qquad f(x) = \frac{d}{dx}\log u(x)\,,$$

$$u(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}(x+3)^{(x+3)\lambda}\ldots(x+2m+1)^{(x+2m+1)\lambda}}{x^{x\lambda}(x+2)^{(x+2)\lambda}\ldots(x+2m)^{(x+2m)\lambda}}\,,$$

m et λ étant des entiers.

On a

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \frac{d^k}{da^k}\log u(a+1)\,u(a)\,.$$

Or,

$$\log u(a+1)\,u(a) = \log\frac{[a+2(m+1)]^{[a+2(m+1)]\lambda}}{a^{a\lambda}} = \xi_1 - \xi_0\,,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = [a+2(m+1)]^\lambda \log[a+2(m+1)]\,,$$

$$\xi_0 = a^\lambda \log a\,.$$

On a donc

$$f^{(k-1)}(a+1)+f^{(k-1)}(a)=\xi_1^{(k)}-\xi_0^{(k)}.$$

Désignons maintenant par

$$\mu_0, \ \mu_1, \ \mu_2, \ldots, \mu_s,$$

une suite des polynomes en λ, définis par les relations suivantes

$$\mu_0=1,$$

$$\mu_1=\lambda+(\lambda-1)\mu_0,$$

$$\mu_2=\lambda(\lambda-1)+(\lambda-2)\mu_1,$$

$$\mu_3=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda-3)\mu_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_s=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-s+1)+(\lambda-s)\mu_{s-1}.$$

On trouve, pour $k \leq \lambda$,

$$\xi_1^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)[a+2(m+1)]^{\lambda-k}\log[a+2(m+1)]+ \\ +\mu_{k-1}[a+2(m+1)]^{\lambda-k}, \qquad (30)$$

$$\xi_0^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)a^{\lambda-k}\log a+\mu_{k-1}a^{\lambda-k}, \quad (30_1)$$

d'où

$$\xi_1^{(\lambda)}=\lambda!\log[a+2(m+1)]+\mu_{\lambda-1},$$

$$\xi_0^{(\lambda)}=\lambda!\log a+\mu_{\lambda-1}.$$

Par suite,

$$\xi_1^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{[a+2(m+1)]^s}, \qquad (31)$$

$$\xi_0^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{a^s}. \qquad (32)$$

$$(s=1, 2, 3, \ldots)$$

Remarquons enfin que

$$\int_a^{a+1}\frac{d}{dx}\log u(x)\,dx=\log\frac{u(a+1)}{u(a)}=2\log v_\lambda(a, m)+\xi_1-\xi_0,$$

où l'on a posé

$$v_\lambda(a, m) = \frac{1}{u(a)} =$$

$$= \frac{a^{a^\lambda}(a+2)^{(a+2)^\lambda} \ldots (a+2m)^{(a+2m)^\lambda}}{(a+1)^{(a+1)^\lambda}(a+3)^{(a+3)^\lambda} \ldots (a+2m+1)^{(a+2m+1)^\lambda}}. \tag{33}$$

24. Supposons d'abord que λ soit pair:

$$\lambda = 2j.$$

Remplaçons dans (27) n par $2n$ et posons

$$2n = \lambda + 2s.$$

On trouve

$$2 \log v_\lambda(a, m) = -(\xi_1 - \xi_0) - C_1(\xi_1' - \xi_0') -$$

$$- C_3(\xi_1^{(3)} - \xi_0^{(3)}) - \ldots - C_{\lambda-1}(\xi_1^{(\lambda-1)} - \xi_0^{(\lambda-1)}) - C_{\lambda+1}(\xi_1^{(\lambda+1)} - \xi_0^{(\lambda+1)}) -$$

$$- C_{\lambda+3}(\xi_1^{(\lambda+3)} - \xi_0^{(\lambda+3)}) - \ldots - C_{\lambda+2s-1}(\xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \xi_0^{(\lambda+2s-1)}) + R_s,$$

où

$$R_s = \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \frac{d^{\lambda+2s+1} \log u(a+z)}{dz^{\lambda+2s+1}} dz =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Posons

$$\varrho_s^{(\lambda)}(a) =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{34}$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}[a+2(m+1)] =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{35}$$

$$Q_s(a) = \xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} + C_{\lambda+1}\xi_0^{(\lambda+1)} +$$

$$+ \ldots + C_{\lambda+2s-1}\xi_0^{(\lambda+2s-1)} + \varrho_s^{(\lambda)}(a). \tag{36}$$

On aura

$$R_s = \varrho_s^{(\lambda)}(a) - \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)]$$

et

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_s(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$
$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$
$$- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)], \tag{37}$$

d'où l'on tire encore, en remplaçant s par $s+1$,

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_{s+1}(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$
$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$
$$- C_{\lambda+2s+1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)} - \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)].$$

Ces égalités fournissent la relation suivante

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a) + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] -$$
$$- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] + C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)},$$

ayant lieu quels que soient les nombres s et m.

Supposons que m croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, en tenant compte de (31) et (35),

$$\lim_{m=\infty} \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = \lim_{m=\infty} \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = 0,$$

$$\lim_{m=\infty} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a).$$

Il s'ensuit que l'expression $Q_s(a)$ ne dépend pas de l'indice s, mais elle dépend, évidemment, de λ et de a, ce que nous exprimerons par cette notation nouvelle

$$Q_s(a) = q_\lambda(a).$$

25. Cela posé, transformons les seconds membres des équations (36) et (37).

Les égalités (30_1) donnent

$$\xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} =$$
$$= [a^\lambda + C_1\lambda a^{\lambda-1} + C_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1}\lambda!\, a]\log a + p_\lambda(a),$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$p_\lambda(a) = C_1\mu_0 a^{\lambda-1} + C_3\mu_2 a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1}\mu_{\lambda-2}a. \tag{38}$$

Or,

$$a^\lambda + C_1\lambda a^{\lambda-1} + C_3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1}\lambda!\,a = \lambda!\,\psi_\lambda(a).$$

On a donc

$$\xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} = \lambda!\,\psi_\lambda(a)\log a + p_\lambda(a).$$

D'autre part, en vertu de (32),

$$C_{\lambda+1}\xi_0^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3}\xi_0^{(\lambda+3)} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\xi_0^{(\lambda+2s-1)} =$$

$$= \lambda!\left[C_{\lambda+1}\frac{1}{a} + C_{\lambda+3}\,2!\,\frac{1}{a^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}[2(s-1)]!\,\frac{1}{a^{2s-1}}\right].$$

On trouve donc, en tenant compte de (36),

$$\frac{1}{\lambda!}\,q_\lambda(a) = \psi_\lambda(a)\log a + \frac{1}{\lambda!}p_1(a) +$$

$$C_{\lambda+1}\frac{1}{a} + C_{\lambda+3}\,2!\,\frac{1}{a^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}[2(s-1)]!\,\frac{1}{a^{2s-1}} + \frac{1}{\lambda!}\,\varrho_s^{(\lambda)}(a). \tag{39}$$

26. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}}\right)$$

étant convergente pour toutes les valeurs positives de a, on trouve l'expression de $\frac{1}{\lambda!}\varrho_s^{(\lambda)}(a)$ sous la forme de la série aussi convergente:

$$\frac{1}{\lambda!}\,\varrho_s^{(\lambda)}(a) = u^{(0)}_{\lambda,s}(a) + u^{(1)}_{\lambda,s}(a) + \ldots + u^{(k)}_{\lambda,s}(a) + \ldots\ ,$$

où l'on a posé [voir l'égalité (34)],

$$u^{(k)}_{\lambda,s}(a) =$$

$$= -2s!\int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z)\left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}}\right)dz.$$

Si l'on pose $s = 0$, on aura

$$\frac{1}{\lambda!} q_\lambda(a) = \psi_\lambda(a) \log a + \frac{1}{\lambda!} p_\lambda(a) +$$

$$+ u_\lambda^{(0)}(a) + u_\lambda^{(1)}(a) + \ldots + u_\lambda^{(k)}(a) + \ldots, \tag{40}$$

où

$$u_\lambda^{(k)}(a) = -\int_0^1 \psi_\lambda(z) \left(\frac{1}{a+z+2k} - \frac{1}{a+z+2k+1} \right) dz.$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Il est aisé d'évaluer chacune de ces quadratures, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

La formule (40) est analogue à celle de Goudermann dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$ et définit une fonction $q_\lambda(a)$, continue pour toutes les valeurs positives de la variable a.

On pourrait, moyennant la formule (40), étendre la notion de la fonction $q_\lambda(a)$ aux valeurs complexes de a, mais je me bornerai, dans ce qui va suivre, au cas de a réel et positif.

27. La formule (39) correspond à la série de Stirling et fournit un moyen simple de calcul numérique de la fonction $q_\lambda(a)$ pour les valeurs de a plus grandes que l'unité.

Écrivons (39) sous la forme suivante

$$q_\lambda(x) = A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + \varrho_s^{(\lambda)}(x) =$$

$$= A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} +$$

$$+ C_{\lambda+2s+1} \frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}} + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x),$$

où

$$A_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x) \log x + p_\lambda(x),$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}(x) =$$

$$= -2s! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+1}} \right] dz,$$

$$\varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) =$$

$$= -[2(s+1)]! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s+2}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+3}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+3}} \right] dz .$$

Supposons que $\frac{\lambda}{2} + s$ soit pair.

On trouve, eu égard à (25_1) et (25_2),

$$C_{\lambda+2s-1} < 0 ; \qquad \psi_{\lambda+2s}(z) < 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1 ,$$

$$C_{\lambda+2s+1} > 0 , \qquad \psi_{\lambda+2s+2}(z) > 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1 .$$

Si nous supposons que $\frac{\lambda}{2} + s$ soit impair, nous aurons

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\lambda+2s-1} > 0 , & \psi_{\lambda+2s}(z) > 0 , \\ C_{\lambda+2s+1} < 0 , & \psi_{\lambda+2s+2}(z) < 0 \end{array}\right\} \text{pour } 0 < z < 1 .$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\lambda+2s-1} < 0 , & \varrho_s^{(\lambda)}(x) > 0 , \\ C_{\lambda+2s+1} > 0 , & \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) < 0 , \end{array}\right\} \text{si } \frac{\lambda}{2} + s \text{ est pair,}$$

et

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\lambda+2s+1} > 0 , & \varrho_s^{(\lambda)}(x) < 0 , \\ C_{\lambda+2s+1} < 0 , & \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) > 0 , \end{array}\right\} \text{si } \frac{\lambda}{2} + s \text{ est impair.}$$

On trouve donc, dans le premier cas,

$$q_\lambda(x) > A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} ,$$

$$q_\lambda(x) < A_\lambda(x) + C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3} \frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1} \frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}$$

et

$$q_\lambda(x) < A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}},$$

$$q_\lambda(x) > A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}},$$

dans le second cas.

Il en résulte l'égalité suivante

$$q_\lambda(x) = A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + \Theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}\text{[1]}, \quad (39_1)$$

ayant lieu toujours, quels que soient les nombres λ et s.

On peut donc poser approximativement

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x) +$$

$$+ C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + \Theta C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} \quad (39_2)$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon_s^{(\lambda)} = |C_{\lambda+2s+1}|\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}.$$

Si l'on pose, pour exemple,

$$x = 10, \qquad \lambda = 2, \qquad s = 5,$$

on aura

$$q_2(10) = 2\psi_2(10)\log 10 + p_2(10) +$$

$$+ 2C_3\frac{1}{10} + 2C_5 2!\,\frac{1}{10^3} + 2C_7\frac{4!}{10^5} + 2C_9\frac{6!}{10^7} + 2C_{11}\frac{8!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(2)} = |C_{13}|\frac{10!\,2}{10^{11}} < 0{,}000000000032.$$

---

[1]) Θ est un nombre positif plus petit que l'unité.

Disposant le calcul dans les tableaux suivants:

$$2\psi_2(10)\log 10 = 207{,}23265\ 83694\ 636\ldots\,,$$

$$2C_3\frac{1}{10} = \quad 0{,}00833\ 33333\ 333\ldots\,,$$

$$2C_7\frac{4!}{10^5} = \quad 0{,}00000\ 02023\ 809\ldots\,,$$

$$2C_{11}\frac{8!}{10^9} = \quad 0{,}00000\ 00003\ 489\ldots\,,$$

$$207{,}24099\ 19055\ 267\ldots\,.$$

$$p_2(10) = -5$$

$$2C_5\frac{2!}{10^3} = -0{,}00001\ 66666\ 666\ldots\,,$$

$$2C_9\frac{6!}{10^7} = -0{,}00000\ 00061\ 507\ldots\,,$$

$$-5{,}00001\ 66728\ 174\ldots$$

on trouve

$$q_2(10) = 202{,}24097\ 52327\ldots\,,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

28. Nous trouverons encore les valeurs approchées de

$$q_4(10)\,, \qquad q_6(10)$$

qui nous seront nécessaires plus loin.

La formule (39_2) donne

$$q_4(10) = 4!\,\psi_4(10)\log 10 + p_4(10) +$$
$$+ C_5\frac{4!}{10} + C_7\frac{2!\,4!}{10^3} + C_9\frac{4!\,4!}{10^5} + C_{11}\frac{6!\,4!}{10^7} + C_{13}\frac{8!\,4!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(4)} = |C_{15}|\frac{10!\,4!}{10^{11}} < 0{,}000000000039\,.$$

On trouve, en vertu de (19), (38), (28) et (28_1),

$$4!\,\psi_4(z) = z^4 - 2z^3 + z, \qquad p_4(z) = -\frac{z^3}{2} + \frac{26}{4!}z,$$

car, dans le cas considéré (n° 23),

$$\mu_2 = \lambda(\lambda - 1) + (\lambda - 2)(2\lambda - 1) = 26.$$

On a donc

$$4!\,\psi_4(10)\log 10 = 18443{,}70659\ 48823\ 0592\ldots,$$

$$p_4(10) = -489{,}16666\ 66666\ 6666\ldots.$$

D'autre part,

$$C_7\frac{2!\,4!}{10^3} = 0{,}00002\ 02380\ 9523\ldots,$$

$$C_{11}\frac{6!\,4!}{10^7} = 0{,}00000\ 00074\ 7835\ldots,$$

$$+\,0{,}00002\ 02455\ 7358\ldots$$

$$C_5\frac{4!}{10} = -0{,}01$$

$$C_9\frac{4!\,4!}{10^5} = -0{,}00000\ 02460\ 3174\ldots,$$

$$C_{13}\frac{4!\,8!}{10^9} = -0{,}00000\ 00004\ 2432\ldots,$$

$$-\,0{,}01000\ 02464\ 5606\ldots.$$

Par conséquent,

$$q_4(10) = 17954,\ 52994\ 82147\ 5678\ldots,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

29. Appliquons enfin l'égalité (39_1) au cas de

$$\lambda = 6, \qquad s = 3, \qquad x = 10.$$

On trouve

$$q_6(10) = 6!\,\psi_6(10)\log 10 + p_6(10) + C_7\frac{6!}{10} + C_9\frac{2!\,6!}{10^3} + C_{11}\frac{4!\,6!}{10^5}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(6)} = |C_{13}|\frac{6!\,6!}{10^7} < 0{,}000000023\,.$$

On a

$$6!\,\psi_6(z) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x\,,$$

$$p_6(z) = C_1\mu_0 z^5 + C_3\mu_2 z^3 + C_5\mu_4 z\,,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1\,,\qquad \mu_2 = 74\,,\qquad \mu_4 = 1044\,.$$

Par conséquent,

$$6!\,\psi_6(10)\log 10 = 10^6 - 3.10^5 + 5.10^3 - 3.10 =$$

$$= 1623253{,}41300\ 8012\ldots\,,$$

$$p_6(10) = -5.10^4 + \frac{37.10^3}{12} - \frac{87}{2} =$$

$$= -46960{,}16666\ 6666\ldots\ .$$

D'autre part,

$$C_7\frac{6!}{10} = 0{,}03035\ 7142\ldots\ ,$$

$$C_9\frac{2!\,6!}{10^3} = -0{,}00006\ 1507\ldots\ ,$$

$$C_{11}\frac{4!\,6!}{10^5} = 0{,}00000\ 0747\ldots\ .$$

On trouve donc

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\ldots\ ,$$

le résultat avec 7 décimales exact.

30. Revenons maintenant à la formule (37).

On trouve, en vertu de (30) et (31),

$$\xi_1 + C_1 \xi_1^1 + C_3 \xi_1^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} =$$

$$= \lambda!\, \psi_\lambda [a + 2(m+1)] \log [a + 2(m+1)] + p_\lambda [a + 2(m+1)],$$

$$C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3} \xi_1^{(\lambda+3)} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} =$$

$$= \lambda! \left[C_{\lambda+1} \frac{1}{a+2(m+1)} + C_{\lambda+3} \frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}} \right].$$

Par suite,

$$\frac{2}{\lambda!} \log v_\lambda (a, m) =$$

$$= \frac{1}{\lambda!} q_\lambda (a) - \psi_\lambda [a + 2(m+1)] \log [a + 2(m+1)] -$$

$$- \frac{1}{\lambda!} p_\lambda [a + 2(m+1)] - C_{\lambda+1} \frac{1}{a + 2(m+1)} -$$

$$- C_{\lambda+3} \frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} - \ldots - C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}} -$$

$$- \frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)} [a + 2(m+1)]. \tag{41}$$

Cette formule permet de calculer le logarithme du rapport

$$v_\lambda (a, m) = \frac{a^{a^\lambda} (a+2)^{(a+2)^\lambda} \ldots (a+2m)^{(a+2m)^\lambda}}{(a+1)^{(a+1)^\lambda} (a+3)^{(a+3)^\lambda} \ldots (a+2m+1)^{(a+2m+1)^\lambda}},$$

pour les valeurs données de λ et de a, avec une approximation qui sera d'autant plus grande que m sera plus considérable.

31. Considérons le cas particulier de $a = 2$.

Transformons d'abord l'expression de $v_\lambda (2, m)$.

On trouve

$$2^{2^\lambda} 4^{4^\lambda} \ldots [2(m+1)]^{2^\lambda (m+1)^\lambda} =$$

$$= [2^{1+2^\lambda+3^\lambda+\ldots+(m+1)^\lambda} 1^{1^\lambda} . 2^{2^\lambda} . 3^{3^\lambda} \ldots (m+1)^{(m+1)^\lambda}]^{2^\lambda} =$$

$$= [2^{\lambda!\, \varphi_{\lambda+1}(m+2)} 1^{1^\lambda} . 2^{2^\lambda} . 3^{3^\lambda} \ldots (m+1)^{(m+1)^\lambda}]^{2^\lambda}$$

et

$$v_\lambda(2, m) = \frac{2^{2\lambda+1}\lambda!\,\varphi_{\lambda+1}{}^{(m+2)}\left[1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(m+1)^{(m+1)\lambda}\right]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(2m+3)^{(2m+3)\lambda}};$$

d'où l'on tire, en remplaçant $m+2$ par x,

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2\lambda+1}\lambda!\,\varphi_{\lambda+1}{}^{(x)}\left[1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(x-1)^{(x-1)\lambda}\right]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(2x-1)^{(2x-1)\lambda}},$$

où il faut poser

$$\varphi_1(x) = x - 1, \qquad 0! = 1,$$

afin que la formule soit vraie pour $\lambda = 0$.

Nous obtenons ainsi une suite de fonctions $v_\lambda (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$, intimément liées avec les fonctions, auxquelles M. Beaupain [1]) a donné le nom des fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin.

Ces fonctions se trouvent aussi en relations simples avec les fonctions, étudiées par M. Alexéievsky dans sa Thèse: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$" [2]).

La fonction

$$1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(x-1)^{(x-1)\lambda}$$

représente une généralisation naturelle de la fonction

$$\Gamma(x) = 1.2.3\ldots(x-1)$$

pour x entier.

Nous poserons

$$\Gamma_\lambda(x) = 1^{1\lambda}.1^{2\lambda}.3^{3\lambda}\ldots(x-1)^{(x-1)\lambda}.$$

---

[1]) S. Beaupain: „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin". Mémoires, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique, 1902.

Compar. aussi Glaischer: „Products and series involving prime numbers only". The Quarterly Journal, 1895 et 1896. (La plupart des Mémoires de M. Glaischer ne faisant partie de Bibliothèque de l'Université de Kharkow, je ne puis les citer que suivant l'analyse, faite par M. Beaupain dans l'Avant-propos à son Mémoire. Voir aussi „Bulletin des Sciences mathématiques", 1899).

[2]) W. Alexéievsky: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$". Communications de la Société Mathématique de Kharkow, 2-e série, T. I, 1889.

Compar. aussi Barnes: „The Theory of the G Function". Quarterly Journal of Mathematics, T. XXXI.

Idem: „The Theory of the Double Gamma Fonction". Philosophical Transactions of the R. S. L. Series A, Vol. 196, 1901.

On en voit que

$$\Gamma(x) = \Gamma_0(x).$$

Cela posé, on peut écrire

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2^{\lambda+1}\lambda!\varphi_{\lambda+1}(x)}[\Gamma_\lambda(x)]^{2^{\lambda+1}}}{\Gamma_\lambda(2x)}. \tag{A}$$

Posant $\lambda = 0$, on trouve

$$v_0(2, x-2) = \frac{2^{2(x-1)}[\Gamma_0(x)]^2}{\Gamma_0(2x)} =$$

$$= 2^{2(x-1)}B(x, x) = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^{x-1}\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

B désignant l'intégrale eulérienne de première espèce.

On voit que la fonction $v_\lambda(2, x-2)$ représente une généralisation de la fonction $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$.

Je désignerai $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$ simplement par $\beta_0(x)$ et, par analogie, $v_\lambda(2, x-2)$ par $\beta_\lambda(x)$.

32. Remplaçons maintenant dans le second membre de l'équation (41) a par 2, $m+2$ par x.

Il viendra

$$\frac{2}{\lambda!}\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda!}q_\lambda(2) - \psi_\lambda(2x)\log 2x - \frac{1}{\lambda!}p_\lambda(2x) -$$

$$-\frac{C_{\lambda+1}}{2}\frac{1}{x} - \frac{C_{\lambda+3}}{2^3}\frac{2!}{x^3} - \cdots - \frac{C_{\lambda+2s-1}}{2^{2s-1}}\frac{[2(s-1)]!}{x^{2s-1}} -$$

$$-\frac{1}{\lambda!}\varrho_s^{(\lambda)}(2x). \tag{42}$$

On peut écrire aussi, en tenant compte de (39),

$$2\log\beta_\lambda(x) = q_\lambda(2) - q_\lambda(2x). \tag{43}$$

Nous avons supposé jusqu'à présent que x soit un entier; mais la série (40) définit la fonction $q_\lambda(a)$ pour toutes les valeurs de a, fractionnaires ou incommensurables.

L'équation (43) permet donc d'étendre la notion de la fonction $\beta_\lambda(x)$ à toutes les valeurs réelles et positives de x, ou même aux valeurs complexes de x, mais je me bornerai, comme dans le n^0 26, au cas de x réel et positif.

On voit de ce qui précède que la formule (27) permet de construire les points principaux de la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ [1]), analogues à la fonction primitive $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \beta_0(x)$.

Remarquons que la théorie de ces fonctions peut être déduite de celle de fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, comme le montre la relation (A), mais nous préférons à dessein une méthode directe et plus simple, en désirant attirer l'attention aux applications directes de la formule (27), des polynomes $\psi_n(z)$ et des nombres C_n.

Quant aux fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, ces propriétés fondamentales résulteront presque immédiatement de nos recherches sur la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$, comme nous le démontrerons à la fin de ce travail.

33. La formule (42), ayant lieu quel que soit le nombre x, fournit un moyen commode de calcul approché de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x assez grand.

La constante $q_\lambda(2)$, qui figure dans la formule (42), jouit par rapport à la fonction $\log \beta_\lambda(x)$ la même rôle que $\log 2\pi$ relativement à $\log \Gamma(x)$, ou, plus généralement, que les constantes $\log \tilde{\omega}_{2i}$, introduites par M. Beaupain, par rapport aux transcendantes de Kinkelin.

Le calcul numérique de $\log \beta_\lambda(x)$ exige tout-d'abord le calcul des constantes $q_\lambda(2)$ $(\lambda = 2, 4, \ldots)$ avec une approximation suffisante.

On pourrait, pour cela, employer la formule (39_1) en y posant $x = 2$, mais cette manière du calcul n'est pas assez exacte.

L'égalité (43) fournit un moyen plus commode.

Le calcul de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x un entier ne surpassant pas, par exemple, 5 ne présente pas des grandes difficultés; il en est de même du calcul de $q_\lambda(2x)$ pour $x \geqq 5$, comme nous l'avons déjà vu aux n-os 27—30.

Sachant les valeurs de $\log \beta_\lambda(x)$ et $q_\lambda(2x)$, ainsi calculées, nous obtiendrons

$$q_\lambda(2) = 2 \log \beta_\lambda(x) + q_\lambda(2x). \tag{44}$$

Posons, par exemple,

$$x = 5, \qquad \lambda = 2.$$

---

[1]) Nous avons supposé jusqu'à présent que λ soit pair, mais cette restriction n'a rien d'essentiel.

On a

$$\beta_2(5) = \frac{2^{2^2} . 4^{4^2} . 6^{6^2} . 8^{8^2}}{3^{3^2} . 5^{5^2} . 7^{7^2} . 9^{9^2}},$$

d'où

$$\log \beta_2(5) = 264 \log 2 - 135 \log 3 - 25 \log 5 - 49 \log 7 .$$

Or,

$$264 \ \log 2 = 182{,}99085 \ 56678 \ 25 \ldots ,$$

$$135 \ \log 3 = 148{,}31265 \ 89701 \ 94 \ldots ,$$

$$25 \ \log 2 = 40{,}23594 \ 78108 \ 52 \ldots ,$$

$$49 \ \log 7 = 95{,}34959 \ 73037 \ 10 \ldots .$$

Par conséquent,

$$2 \log \beta_2(5) = -201{,}81469 \ 68338 \ 64 \ldots .$$

D'autre part (n^0 27),

$$q_2(10) = 202{,}24097 \ 52327 \ldots .$$

On trouve donc, eu égard à (44),

$$q_2(2) = 0{,}42627 \ 83988 \ldots , \tag{45}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

34. Posons encore

$$\lambda = 4 , \qquad x = 5 .$$

On trouve

$$\log \beta_4(5) = 1412 \ \log 2 - 11907 \ \log 3 - 625 \ \log 5 - 2401 \ \log 7 ,$$

$$14112 \ \log 2 = 9781{,}69301 \ 20619 \ 4820 \ldots ,$$

$$11907 \ \log 3 = 13081{,}17652 \ 11711 \ 8199 \ldots ,$$

$$625 \ \log 5 = 1005{,}89869 \ 52713 \ 1273 \ldots ,$$

$$2401 \ \log 7 = 4672{,}13026 \ 78818 \ 0724 \ldots ,$$

d'où

$$2 \log \beta_4(5) = -17955{,}02494 \ 45247 \ 0753 \ldots .$$

D'autre part (voir n° 28),

$$q_4(10) = 17954{,}52994\ 82147\ 5678\dots\ .$$

On a donc, eu égard à (44),

$$q_4(2) = -0{,}49499\ 63099\ 50\dots\ , \tag{46}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

35. Calculons encore $q_6(2)$.

On trouve, en posant $\lambda = 6$, $x = 5$,

$$\log \beta_6(5) = 841344 \log 2 - 1016955 \log 3 - 25.5^4 \log 5 - 49.7^4 \log 7,$$

$$841344 \log 2 = 583175{,}22148\ 1026\dots\ ,$$

$$1016\ 955 \log 3 = 1117239{,}26001\ 2377\dots\ ,$$

$$25.5^4 \log 5 = 25147{,}46738\ 1782\dots\ ,$$

$$49.7^4 \log 7 = 228934{,}38312\ 6208\dots\ ,$$

d'où

$$2 \log \beta_6(5) = -1576291{,}77807\ 8684\dots\ .$$

D'autre part (voir n° 29),

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\dots\ .$$

On a donc, en vertu de (44),

$$q_6(2) = 1{,}49855\ 9044\dots\ , \tag{47}$$

le résultat avec 7 décimales exact.

Si nous introduisons, au lieu de $q_6(2)$, la constante

$$\log \omega_6 = \frac{1}{2^7 - 1} q_6(2),$$

nous obtiendrons

$$\log \omega_6 = 0{,}01179\ 9677\dots\ , \tag{48}$$

avec 9 figures exactes.

36. Posons, en général,

$$\log \omega_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 1} q_\lambda(2).$$

Nous verrons plus loin que les constantes ω_λ, ainsi définies, coïncident avec celles de M. Beaupain (voir n° 33).

On trouve, en tenant compte de (39_1),

$$\log \omega_\lambda = \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\psi_\lambda(2)\log 2 + \frac{1}{2^{\lambda+1}-1}\,p_\lambda(2) +$$

$$+\frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{49}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(\lambda)} < \frac{6!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{|C_{\lambda+7}|}{2^7}. \tag{50}$$

En se rappelant que les polynomes $\psi_\lambda(z)$ satisfont à l'équation (voir n° 16)

$$\psi_\lambda(1+z) + \psi_\lambda(z) = 2\,\frac{z^\lambda}{\lambda!},$$

on obtient, pour $z = 1$,

$$\lambda!\,\psi_\lambda(2) = 2,$$

car

$$\psi_\lambda(1) = 0 \qquad \text{pour } \lambda \text{ pair}.$$

L'égalité (49) se réduit à

$$\log \omega_\lambda = \frac{2\log 2}{2^{\lambda+1}-1} + \frac{p_\lambda(2)}{2^{\lambda+1}-1} +$$

$$+\frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{51}$$

et fournit un moyen fort simple de calcul des constantes $\log \omega_\lambda$ avec trois ou quatre décimales exactes pour

$$\lambda = 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

On trouve, en effet, eu égard à (50),

$$\varepsilon_3^{(2)} < 0{,}000067\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(1)} < 0{,}000018\ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(6)} < 0{,}000014\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(4)} < 0{,}000009\ldots.$$

37. Appliquons la formule (51) au calcul de $\log \omega_8$.

On trouve

$$\log \omega_8 = \frac{2 \log 2}{511} + \frac{p_8(2)}{511} - \frac{8!}{511.4.5!} + \frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} - \frac{4!\,8!\,5461}{511.2^6.13!}.$$

Or, dans le cas considéré,

$$p_8(x) = C_1 \mu_0 x^7 + C_3 \mu_2 x^5 + C_5 \mu_4 x^3 + C_7 \mu_6 x,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 146, \quad \mu_4 = 5944, \quad \mu_6 = 69264.$$

On a donc

$$p_8(2) = -64 + 194{,}6666666\ldots - 198{,}1333333 + 58{,}4071428 =$$

$$= -9{,}0595238\ldots$$

et

$$\frac{p_8(2)}{511} = -0{,}0177290\ldots\ .$$

D'autre part,

$$\frac{2 \log 2}{511} = 0{,}0027129\ldots\ ,$$

$$\frac{8!}{511.4.5!} = 0{,}1643835\ldots\ ,$$

$$\frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} = 0{,}0000853\ldots\ ,$$

$$\frac{4!\,8!\,5462}{511.2^6.13!} = 0{,}0000259\ldots\ .$$

Par suite,

$$\log \omega_8 = -0{,}1793\ldots\ ,$$

le résultat avec 4 décimales exact.

38. Introduisons maintenant les constantes

$$\pi_\lambda \qquad\qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

en posant

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) = (2^{\lambda+1} - 1) \log \omega_\lambda\ .$$

La formule (42) donne

$$2\log\beta_\lambda(x) + \lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x + p_\lambda(2x) =$$

$$= \log\pi_\lambda - C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{(2x)^{2s-1}} - \rho_s^{(\lambda)}(2x),$$

d'où

$$\pi_\lambda = \beta_\lambda^2(x)\,e^{p_\lambda(x)}\,(2x)^{\lambda!\,\psi_\lambda(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{(2x)^{2s-1}}}\,e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}.$$

Cette égalité a lieu, quel que soit le nombre x.

Supposons que x croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve

$$\pi_\lambda = \lim_{x=\infty}\beta_\lambda^{(2)}(x)\,e^{p_\lambda(2x)}\,(2x)^{\lambda!\,\psi_\lambda(2x)},$$

car

$$\lim_{x=\infty} e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{(2x)^{2s-1}}} = 1.$$

Si x est un entier, on aura

$$\pi_\lambda = \lim_{x=\infty}\frac{2^{2\lambda}.2^{2\lambda}.4^{4\lambda}.4^{4\lambda}\ldots(2x-2)^{(2x-2)\lambda}(2x-2)^{(2x-2)\lambda}}{1^{1\lambda}.3^{3\lambda}.3^{3\lambda}.5^{5\lambda}\ldots(2x-3)^{(2x-3)\lambda}(2x-1)^{(2x-1)\lambda}}\cdot\frac{(2x)^{\lambda!\,\psi_\lambda(2x)}}{(2x-1)^{(2x-1)\lambda}}\,e^{p_\lambda(2x)}, \tag{52}$$

la formule représentant une généralisation de celle de Wallis.

En posant $\lambda = 0$ et en remarquant que

$$\psi_\lambda(x) = 1,\quad p_\lambda(x) = 0,\quad \lambda! = 1 \qquad \text{pour } \lambda = 0,$$

on trouve, en effet,

$$\pi_0 = \frac{\pi}{2} = \lim_{x=\infty}\frac{2.2.4.4\ldots(2x-2)(2x-2)}{1.3.3.5\ldots(2x-3)(2x-1)}\,\frac{2x}{2x-1}. \tag{53}$$

L'égalité (52) définit une suite infinie de nombres

$$\pi_0,\ \pi_2,\ \pi_4,\ \ldots,\ \pi_k,\ \ldots$$

qu'on peut considérer comme les nombres caractéristiques pour les fonctions $\beta_\lambda(x)\ (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$.

Voici les valeurs approchées des logarithmes de quatre premiers d'entre eux:

$$\log \pi_0 = 0{,}55158\ 27052\ldots,$$

$$\log \pi_2 = 0{,}42627\ 83988\ldots,$$

$$\log \pi_4 = -0{,}49499\ 63099\ldots,$$

$$\log \pi_6 = 1{,}49855\ 90\ldots,$$

39. Les valeurs des constantes

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) \qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

étant trouvées, la formule (42) permettra de calculer $\log \beta_\lambda(x) (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$ pour x assez grand; le calcul sera d'autant plus simple et l'approximation d'autant plus grande que x sera plus considérable.

Posons, pour exemple,

$$\lambda = 2, \qquad x = 100.$$

On a

$$2 \log \beta_2(100) = 2 \log \frac{2^{2^2}.4^{4^2}.6^{6^2}\ldots 193^{194^2}.196^{196^2}}{3^{3^3}.5^{5^2}.7^{7^2}\ldots 195^{195^2}.197^{197^2}} = q_2(2) - q_2(200),$$

ou, eu égard à (42) et (45),

$$2 \log \beta_2(100) = 0{,}4262783988\ldots - 2\psi_2(200) \log 200 -$$

$$- p_2(200) - C_3 \frac{2!}{200} - C_5 \frac{2!\,2!}{200^3} \ldots .$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_7 pour obtenir la valeur de $q_2(200)$ avec 12 décimales exacte.

On a

$$2\psi_2(200) \log 200 = 200.199 \log 2 + 400.199 \log 10,$$

$$p_2(200) = -100.$$

Formons maintenant le tableau suivant:

$$200.199 \log\ 2 = \ \ 27587{,}25778\ 628612\ldots,$$

$$400.199 \log 10 = 183285{,}77340\ 232602\ldots,$$

$$p_2(200) = -100,$$

$$C_3 \frac{2!}{200} = \qquad 0{,}00004\ 166666\ldots,$$

$$C_5 \frac{2!\,2!}{200^3} = - \quad 0{,}00000\ 000208\ldots .$$

On en tire

$$\log \beta_2(100) = -105386{,}30247\ 5938\ldots ,$$

le résultat avec 9 décimales exact.

Pour le second exemple, posons

$$\lambda = 6, \quad x = 10$$

et calculons

$$\log \beta_6(10) = \log \frac{2^{2^6}.4^{4^6}\ldots 16^{16^6}.18^{18^6}}{3^{3^6}.5^{5^6}\ldots 17^{17^6}.19^{19^6}}.$$

On trouve, eu égard à (42) et (47),

$$2\log \beta_6(10) = 1{,}4985590\ldots - 6!\,\psi_6(20)\log 20 -$$

$$- p_6(20) - C_7\frac{6!}{20} - C_9\frac{2!\,6!}{20^3} - C_{11}\frac{4!\,6!}{20^5} - \ldots .$$

Or,

$$6!\,\psi_6(20)\log 20 = 163087647{,}89788\ 5633\ldots ,$$

$$p_6(10) = -1575420{,}\ 33333\ 3333\ldots ,$$

$$C_7\frac{6!}{20} = \qquad 0{,}01517\ 8571\ldots ,$$

$$C_9\frac{2!\,6!}{20^3} = \qquad -0{,}00000\ 7688\ldots ,$$

$$C_{11}\frac{4!\,6!}{20^5} = \qquad 0{,}00000\ 0023\ldots .$$

Par conséquent,

$$\log \beta_6(10) = -80756113{,}04033\ 86\ldots ,$$

le résultat avec 7 figures exact.

40. Les égalités (39_1) et (42) donnent

$$2\log \beta_\lambda(x) = \log \pi_\lambda - \lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x - p_\lambda(2x) -$$

$$- C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x} - C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{(2x)^3} - \ldots - \Theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{(2x)^{2s+1}}. \qquad (54)$$

Si x est très grand, il suffit de s'arrêter au terme multiplié par $C_{\lambda+1}$ ou même à celui multiplié par $C_{\lambda+1}$ pour obtenir la valeur de $\log \beta_\lambda(x)$ avec une approximation suffisante.

Nous obtiendrons ainsi la formule suivante

$$\log \beta_\lambda(x) = \frac{1}{2} \log \pi_\lambda - \frac{\lambda!}{2} \psi_\lambda(2x) \log 2x -$$

$$- \frac{1}{2} p_\lambda(2x) - C_{\lambda+1} \frac{\lambda!}{4x} - \Theta \frac{\lambda!}{8x^3} C_{\lambda+3},$$

d'où

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)} e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)} e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x} - \Theta C_{\lambda+3}\frac{\lambda!}{8x^3}}. \tag{55}$$

Si x est très grand, on peut remplacer cette égalité par la suivante

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)} e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)} e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}},$$

ou même par la suivante

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)} e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}.$$

41. Considérons le cas le plus simple de $\lambda = 0$.

On a, eu égard à (53),

$$\log \pi_0 = \log \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\psi_0(z) = 1, \quad p_0(z) = 0, \quad 0! = 1,$$

$$2\beta_0(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}} = B_0(x).$$

Par conséquent [l'égalité (54)],

$$\log B_0(x) = \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log 2x -$$

$$- \frac{C_1}{2} \frac{1}{2x} - \frac{C_3}{2} \frac{2!}{(2x)^3} - \ldots - \Theta \frac{C_{2s+1}}{2} \frac{2s!}{(2x)^{2s+1}}, \tag{56}$$

c'est une formule qu'on pourrait déduire indépendamment de la théorie générale des fonctions $\beta_{\lambda}(x)$ moyennant la formule de Stirling.

L'égalité (55) fournit un moyen commode de calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

pour x plus grand que l'unité.

Posons, pour exemple,

$$x = \frac{21}{2}.$$

On trouve

$$\log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{21} + \frac{1}{4.21} - \frac{2!}{2.4!21^3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{4!|C_5|}{2.21^5} < 0{,}0000000123.$$

Le calcul nous donne

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 0{,}91893\ 853\ldots\ ,$$

$$\frac{1}{2}\log 21 = 1{,}52226\ 121\ldots\ ,$$

$$\frac{1}{4.21} = 0{,}01190\ 476\ldots\ ,$$

$$\frac{2!}{2.4!\,21^3} = 0{,}00000\ 449\ldots\ .$$

Par conséquent,

$$\log B_0\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\,0{,}59142\ 24\ldots\ , \tag{57}$$

avec 7 décimales exactes.

42. Écrivons (56) sous la forme suivante

$$\log B_0(x) = \log\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}q_0(2x)$$

et posons

$$\frac{dB_0(x)}{dx} = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = -B_1(x). \tag{58}$$

De l'égalité précédente on tire, par différentiation,

$$\frac{1}{B_0(x)}\frac{dB_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx},$$

ou, en vertu de (58),

$$\frac{B_1(x)}{B_0(x)} = \frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx}, \tag{59}$$

et

$$\log\int_1^0 (1-y)^{x-1}\log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \log B_0(x) + \log\frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx}. \tag{60}$$

Cette formule peut servir au calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1}\log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Posant, comme au n⁰ précédent,

$$x = \frac{21}{2},$$

on trouve, eu égard à (39_2),

$$\frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = \frac{1}{21} + \frac{1}{2.21^2} - \frac{3!}{4!\,21^4}.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_3 pour obtenir le résultat avec 7 décimales exact.

On a

$$\frac{1}{21} = 0{,}04761\ 904\ldots\ ,$$

$$\frac{1}{2 \, . \, 21^2} = 0{,}00113\ 378\ldots\ ,$$

$$\frac{3!}{4!\, 21^4} = 0{,}00000\ 128\ldots\ ,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = 0{,}0487515\ldots\ .$$

Par conséquent,

$$\log \frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = -3{,}02102\ldots\ , \tag{61}$$

le résultat avec 5 décimales exact.

On trouve donc, en tenant compte de (57), (60) et (61),

$$\log B_1\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_1^0 (1-y)^{\frac{19}{2}} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -3{,}61244\ldots\ .$$

En raisonnant ainsi de suite, on pourrait construire une série de formules pour calcul successif des logarithmes des intégrales

$$B_k = (-1)^k \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^k (1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}, \qquad (k = 3, 4, 5, \ldots)$$

mais nous nous bornerons aux cas les plus simples correspondant à $k = 0$ et $k = 1$ [les égalités (56) et (59)].

43. Si l'on pose dans (55) $\lambda = 0$, on aura

$$\beta_0(x) = \frac{B_0(x)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x} - \frac{\Theta}{192x^3}}.$$

On peut donc poser pour x assez grand

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}} \tag{62}$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}} \frac{1}{192\,x^3}.$$

Si l'on pose, par exemple, $x = 50$, on aura

$$\varepsilon < 0{,}000000013.$$

Faisons dans (62) $x = 100$.
On trouve

$$\frac{e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0{,}10012\ 507\ldots\ ,$$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 385\ldots\ .$$

Par conséquent,

$$B_0(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0{,}1774670\ldots$$

avec 7 décimales exactes.

44. Considérons encore l'intégrale

$$B_1(x) = \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

On peut poser, pour x assez grand,

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2},$$

de sorte qu'on aura, en vertu de (59) et (62),

$$B_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}} (4x+1)}{8x^2 \sqrt{x}}, \tag{63}$$

la formule qui peut être remplacée, pour x très grand, par la suivante

$$B_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{2x\sqrt{x}}. \tag{64}$$

Posons dans (63) $x = 100$. On trouve

$$B_1(100) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{800}}}{10} \cdot \frac{401}{8 \cdot 10^4}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0{,}1774670\ldots ,$$

$$\frac{401}{8 \cdot 10^4} = 0{,}0050125.$$

Par conséquent,

$$B_1(100) = 0{,}0008895\ldots ,$$

avec 7 décimales exactes.

Moyennant la formule plus simple (64) nous obtiendrons

$$B_1(100) = 0{,}00088\ldots ,$$

le résultat avec 5 décimales exact.

45. De l'égalité (59) nous tirerons ensuite

$$B_2(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^2(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= B_0(x) \left[\left(\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} \right].$$

Pour les valeurs de x assez grandes nous pouvons poser avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} = -\frac{1}{2x^2}, \quad \left[\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right]^2 = \frac{1}{4x^2}$$

et

$$B_2(x) = \frac{3\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{4x^2 \sqrt{x}}. \tag{65}$$

Nous trouverons de la même manière

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log^3(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3^2 \sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{4x^3\sqrt{x}}$$

et ainsi de suite.

Posant, par exemple, $x = 100$, on trouve, eu égard à (65),

$$B_2(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \log^2(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0{,}000013\ldots\ ,$$

le résultat avec 6 décimales exact.

46. Revenons maintenant au cas général.

Écrivons l'égalité (41) sous la forme suivante

$$2 \log v_\lambda (2x, m-1) = q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m)\,, \tag{66}$$

en y remplaçant a par $2x$ et $m+1$ par m.

Or, en vertu de (43),

$$q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m) = 2\log\beta_\lambda(x+m) - 2\log\beta_\lambda(x).$$

D'autre part (nº 30),

$$v_\lambda(2x\,,\, m-1) =$$

$$= \frac{(2x)^{(2x)\lambda}(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\ldots(2x+2m-2)^{(2x+2m-2)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}(2x+3)^{(2x+3)\lambda}\ldots(2x+2m-1)^{(2x+2m-1)\lambda}}.$$

Par conséquent,

$$\log\beta_\lambda(x) = \log\beta_\lambda(x+m) -$$

$$-\log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\ldots(2x+2m-2)^{(2x-2m-2)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}(2x+3)^{(2x+3)\lambda}\ldots(2x+2m-1)^{(2x-2m-1)\lambda}}.$$

Cette formule permet de calculer $\log\beta_\lambda(x)$ pour les valeurs de x plus petites que l'unité; il suffit de prendre pour m un entier ni trop petit, ni trop grand.

Si l'on pose, par exemple, $m = 4$, on trouve, eu égard à (43),

$$\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{2}q_\lambda(2) - \frac{1}{2}q_\lambda(2x+8) -$$

$$-\log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}(2x+2)^{(2x+2)\lambda}(2x+4)^{(2x+4)\lambda}(2x+6)^{(2x+6)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}(2x+3)^{2(x+3)\lambda}(2x+5)^{(2x+5)\lambda}(2x+7)^{(2x+7)\lambda}}.$$

Le calcul de dernier terme de cette égalité ne présente pas des grandes difficultés; pour le calcul approché de $q_\lambda(2x+8)$ on peut employer la formule (39_1) dont nous avons déjà indiqué l'usage plus haut.

Sachant la valeur de la constante caractéristique $q_\lambda(2)$, nous obtiendrons la valeur numérique de $\log\beta_\lambda(x)$ pour $x<1$ avec l'approximation suffisante.

Posons, pour exemple, $x=\frac{1}{2}$.

On aura

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_\lambda(2)-\frac{1}{2}q_\lambda(9)+\log\frac{2^{2\lambda}.4^{4\lambda}.6^{6\lambda}.8^{8\lambda}}{1^{1\lambda}.3^{3\lambda}.5^{5\lambda}.7^{7\lambda}}=$$

$$=\frac{1}{2}q_\lambda(2)-\frac{1}{2}q_\lambda(9)+9^\lambda\log 9+\log\beta_\lambda(5).$$

Si l'on pose $\lambda=2$, on trouve (voir n⁰ 33)

$$\log\beta_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_2(2)-\frac{1}{2}q_2(9)+9^2\log 9+\log\beta_2(5)=$$

$$=0{,}2131391994\ldots-100{,}9073484168\ldots+162\log 3-\frac{1}{2}q_2(9).$$

Or [l'égalité (39_2)],

$$\frac{1}{2}q_2(9)=\psi_2(9)\log 9+\frac{1}{2}p_2'(9)+C_3\frac{1}{9}+C_5\frac{2!}{9^3}+C_7\frac{4!}{9^5}+C_9\frac{6!}{9^7}+C_{11}\frac{8!}{9^9}$$

avec une erreur moindre que

$$|C_{13}|\frac{10!}{9^{11}}<0{,}00000000005\ldots .$$

Le calcul nous donne

$$\begin{aligned}162\log 3-\psi_2(9)\log 9&=98{,}87510\ 59801\ 29\ldots ,\\ -\frac{1}{2}p_2(9)&=\ \ 2{,}25 ,\\ -C_5\frac{2!}{9^3}&=\ \ 0{,}00001\ 14311\ 84\ldots ,\\ -C_9\frac{6!}{9^7}&=\ \ 0{,}00000\ 00064\ 29\ldots ,\\ \hline &+101{,}87510\ 59801\ 29\ldots ;\end{aligned}$$

$$-\frac{C_3}{9} = -0{,}00462\ 96296\ 29\ldots\ ,$$

$$-C_7\frac{4!}{9^5} = -0{,}00000\ 01713\ 66\ldots\ ,$$

$$-C_{11}\frac{8!}{9^9} = -0{,}00000\ 00004\ 50\ldots\ ,$$

$$\overline{\phantom{-0{,}00462\ 98014\ 45\ldots}}$$

$$-0{,}00462\ 98014\ 45\ldots\ .$$

Par conséquent,

$$162\log 3 - \frac{1}{2}q_2(9) = 101{,}12048\ 76162\ 97\ldots\ ,$$

et

$$\log\beta_2\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}21313\ 91994\ldots - 100{,}90734\ 84168\ldots + 101{,}12048\ 76162\ldots =$$

$$= 0{,}42627\ 8988\ldots$$

avec 9 figures exactes.

C'est le même nombre que nous avons déjà trouvé au n⁰ 43 pour $q_2(2)$ [1]).

47. Remplaçons dans (66) $2x$ par x et posons $m=1$; il viendra

$$2\log v_\lambda(x\,,0) = q_\lambda(x) - q_\lambda(x+2) = 2\log\frac{x^{x\lambda}}{(x+1)^{(x+1)\lambda}}\,,$$

ou

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2\log\frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}}{x^{x\lambda}}\,. \tag{67}$$

Reprenons maitenant l'égalité (40) qui peut s'écrire ainsi:

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x +$$

$$+ p_\lambda(x) - \lambda!\int_0^1 \psi_\lambda(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+z+2k} - \frac{1}{x+z+2k+1}\right)dz.$$

---

[1]) Nous verrons plus loin qu'on a toujours

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2).$$

De cette égalité on tire, en y remplaçant x par $x+1$,

$$q_\lambda(x+1) = \lambda!\,\psi_\lambda(x+1)\log(x+1) +$$

$$+ p_\lambda(x+1) - \lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+z+2k+1} - \frac{1}{x+z+2k+2} \right) dz.$$

On a donc

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) =$$

$$= \lambda!\,[\psi_\lambda(x)\log x + \psi_\lambda(x+1)\log(x+1)] + p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) -$$

$$- \lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+z}. \tag{68}$$

Considérons l'intégrale du second membre de cette équation. Posons

$$x + z = \xi.$$

On aura

$$\int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+z} = \int_x^{x+1} \psi_\lambda(\xi - x) \frac{d\xi}{\xi}. \tag{69}$$

La formule de Taylor donne

$$\psi_\lambda(-x+\xi) = \psi_\lambda(-x) + \psi'_\lambda(-x)\xi +$$

$$+ \psi''_\lambda(-x)\frac{\xi^2}{2!} + \psi_\lambda^{(3)}(-x)\frac{\xi^3}{3!} + \ldots + \psi_\lambda^{(\lambda-1)}(-x)\frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} + \frac{\xi^\lambda}{\lambda!}.$$

Or, en vertu de (20) (pour $k = n$),

$$\psi_k(x) = (-1)^k \psi_k(1-x), \qquad (k=1,2,\ldots,\lambda)$$

d'où, en échangeant x par $-x$,

$$\psi_k(-x) = (-1)^k \psi_k(1+x).$$

Par conséquent,

$$\frac{\psi_\lambda(-x+\xi)}{\xi} = \frac{\psi_\lambda(x+1)}{\xi} - \psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x)\frac{\xi}{2!} -$$

$$- \psi_{\lambda-3}(1+x)\frac{\xi^2}{3!} + \ldots - \psi_1(1+x)\frac{\xi^{\lambda-2}}{(\lambda-1)!} + \frac{\xi^{\lambda-1}}{\lambda!},$$

car, en vertu de (23),

$$\psi_\lambda^{(k)}(1+x) = \psi_{\lambda-k}(1+x).$$

On trouve donc, en tenant compte de (69),

$$\int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+z} = \psi_\lambda(x+1) \log \frac{x+1}{x} + P_\lambda(x) \frac{1}{\lambda!},$$

où l'on a désigné par $P_\lambda(x)$ le polynome suivant (de degré $\lambda - 1$)

$$\frac{1}{\lambda!} P_\lambda(x) = -\psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x) \frac{(x+1)^2 - x^2}{2.2!} -$$

$$-\psi_{\lambda-3}(1+x) \frac{(x+1)^3 - x^3}{3.3!} + \dots$$

$$-\psi_1(1+x) \frac{(x+1)^{\lambda-1} - x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{(x+1)^\lambda - x^\lambda}{\lambda.\lambda!}. \tag{70}$$

La formule (68) peut s'écrire ainsi

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = \lambda! [\psi_\lambda(x) + \psi_\lambda(x+1)] \log x + \Theta_\lambda(x),$$

ou bien, eu égard à (28_2),

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = 2x^\lambda \log x + \Theta_\lambda(x), \tag{71}$$

où l'on a posé

$$\Theta_\lambda(x) = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x).$$

Remplaçons dans (70) x par $x+1$; il viendra

$$q_\lambda(x+2) + q_\lambda(x+1) = 2(x+1)^\lambda \log(x+1) + \Theta_\lambda(x+1).$$

Soustrayant cette égalité et (71) l'une de l'autre, on trouve

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2 \log \frac{(x+1)^{(x+1)^\lambda}}{x^{x^\lambda}} + \Theta_\lambda(x+1) - \Theta_\lambda(x),$$

d'où l'on conclut, eu égard à (67),

$$\Theta_\lambda(x+1) - \Theta_\lambda(x) = 0.$$

Cette identité montre que le polynome $\Theta_\lambda(x)$ doit être égal à une constante que nous désignerons par α_λ.

48. Il est aisé de prouver que

$$\alpha_\lambda = 0.$$

On a, en effet, quel que soit le nombre x,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x), \tag{71}$$

d'où, en remplaçant x par $-x$,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1-x) + p_\lambda(-x) - P_\lambda(-x). \tag{72}$$

Or [l'égalité (38)],

$$p_\lambda(x) = -p_\lambda(-x), \qquad p_\lambda(0) = 0.$$

Posant $x=0$ dans (71) et $x=1$ dans (72), on trouve, par conséquent,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1) - P_\lambda(0),$$

$$\alpha_\lambda = -p_\lambda(1) - P_\lambda(-1),$$

d'où

$$2\alpha_\lambda = -[P_\lambda(0) + P_\lambda(-1)].$$

Posons maintenant dans (70) $x=0$; on a

$$\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(0) = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3}\frac{1}{3.3!} + C_{\lambda-5}\frac{1}{5.5!} + \dots +$$

$$+ C_1\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda.\lambda!},$$

car

$$\psi_{\lambda-2s-1}(1) = -C_{2s+1}, \qquad \psi_{\lambda+2s}(1) = 0.$$

D'autre part, en se rappelant que

$$\psi_{\lambda-2s-1}(0) = C_{2s+1}, \qquad \psi_{\lambda+2s}(0) = 0$$

et en posant dans (70) $x=-1$, on obtient

$$-\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(-1) = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3}\frac{1}{3.3!} + \dots +$$

$$+ C_1\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda.\lambda!} = \frac{1}{\lambda!}P_\lambda(0).$$

Par conséquent,

$$a_\lambda = 0$$

et l'égalité (71) devient

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = 2x^\lambda \log x. \tag{73}$$

49. Indiquons, en passant, quelques conséquences de l'identité

$$\Theta_\lambda(x) = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x) = 0, \tag{71}$$

que nous venons d'établir.

$\Theta_\lambda(x)$ etant un polynome de degré $(\lambda - 1)$, on trouve

$$\Theta_\lambda(x) = \Theta_\lambda(0) + \Theta'_\lambda(0)\, x + \Theta''_\lambda(0)\, \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\dots + \Theta^{(k)}_\lambda(0)\, \frac{x^k}{k!} + \dots + \Theta^{(\lambda-2)}_\lambda(0)\, \frac{x^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!} + \Theta^{(\lambda-1)}_\lambda(0)\, \frac{x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

où, en vertu de (74),

$$\Theta^{(k)}_\lambda(0) = p^{(k)}_\lambda(1) + p^{(k)}_\lambda(0) - P^{(k)}_\lambda(0). \tag{75}$$

En se rappelant que $C_k = 0$ pour k pair, on peut écrire [l'égalité (38)]

$$p_\lambda(x) = \sum_{j=0}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\, u_{\lambda-j-1}\, x^j,$$

d'où

$$p^{(k)}_\lambda(x) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\, u_{\lambda-j-1}\, j(j-1)\dots(j-k+1)\, x^{j-k}.$$

On a donc

$$p^{(k)}_\lambda(0) = C_{\lambda-k}\, u_{\lambda-k+1}\, k!, \tag{76}$$

$$p^{(k)}_\lambda(1) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\, u_{\lambda-j-1}\, j(j-1)\dots(j-k+1). \tag{77}$$

Formons maintenant les dérivées de divers ordres du polynome $P_\lambda(x)$.

Il est aisé de s'assurer que

$$\frac{1}{\lambda!\,k!}\,P_\lambda^{(k)}(x) = -\,\psi_{\lambda-k-1}(1+x)\,\frac{1}{1.(k+1)!} +$$

$$+\,\psi_{\lambda-k-2}(1+x)\,\frac{(x+1)^2-x^2}{2.(k+2)!} - \psi_{\lambda-k-3}(1+x)\,\frac{(x+1)^3-x^3}{3.(k+3)!} +$$

$$+\ldots+(-1)^{k-1}\psi_1(1+x)\,\frac{(x+1)^{\lambda-k-1}-x^{\lambda-k-1}}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} +$$

$$+(-1)^k\,\frac{(x+1)^{\lambda-k}-x^{\lambda-k}}{(\lambda-k)\,\lambda!} \qquad (78)$$

pour $k=1,\ 2,\ 3$.

De cette égalité on tire par différentiation, en tenant compte de (20),

$$\frac{1}{\lambda!\,(k+1)!}\,P_\lambda^{(k+1)}(x) = -\,\psi_{\lambda-k-2}(1+x)\,\frac{1}{1.(k+2)!} +$$

$$+\,\psi_{\lambda-k-3}(1+x)\,\frac{(x+1)^2-x^2}{2.(k+3)!} - \psi_{\lambda-k-4}(1+x)\,\frac{(x+1)^3-x^3}{3.(k+4)!} +$$

$$+\ldots+(-1)^k\,\psi_1(1+x)\,\frac{(x+1)^{\lambda-k-2}-x^{\lambda-k-2}}{(\lambda-k-2)(\lambda-1)!} +$$

$$+(-1)^{k+1}\,\frac{(x+1)^{\lambda-k-1}-x^3}{(\lambda-k-1)\,\lambda!}\,.$$

Donc l'égalité précédente étant exacte pour $k=1,\ 2,\ 3$, elle le sera aussi pour la valeur de k plus grande d'une unité; par conséquent, cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=1,\ 2,\ 3,\ldots,\lambda-1$.

Si l'on y pose $x=0$, on trouve

$$\frac{1}{\lambda!\,k!}\,P_\lambda^{(k)}(0) = \sum_{j=k}^{\lambda-1}(-1)^{j-k}\,\frac{C_{\lambda-1-j}}{(j+1)!\,(j-k)!}$$

et, eu égard à (75), (76), (77) et (74),

$$\frac{\Theta_\lambda^{(k)}(0)}{k!} = C_{\lambda-k}\mu_{\lambda-k-1} +$$

$$+\sum_{j=k}^{\lambda-1}\left[\frac{C_{\lambda-j}\mu_{\lambda-j-1}\,j(j-1)\ldots(j-k+1)}{k!} - (-1)^{j-k}\,\frac{C_{\lambda-j-1}\,\lambda!}{(j+1)!\,(j-k)!}\right] = 0\,.$$

$$(k=0,1,2,\ldots,\lambda-1)$$

Moyennant les équations (δ_1) du n° 16 nous obtiendrons les relations correspondantes entre les nombres de Bernoulli.

50. Revenons à l'équation générale (73).

L'égalité (67) du n° 47 donne [1])

$$q_\lambda[2(x+1)] - q_\lambda(2x) = 2\log\frac{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}{(2x)^{(2x)\lambda}},$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (43),

$$\log\frac{\beta_\lambda(x+1)}{\beta_\lambda(x)} = \log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}$$

ou

$$\beta_\lambda(x+1) = \frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}\,\beta_\lambda(x). \tag{79}$$

Cette équation a lieu, comme l'on voit, pour toutes les valeurs réelles et positives de x.

Pour x un entier elle résulte immédiatement de la définition de β_λ à l'aide du rapport que nous avons désigné plus haut (n$^{\text{os}}$ 30 et 31) par $v_\lambda(2, x-2)$.

Si l'on remplace dans (73) $q_\lambda(x)$ par son expression en $\log\beta_\lambda(x)$

$$q_\lambda(x) = q_\lambda(2) - \log\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \log\pi_\lambda - \log\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right),$$

on trouve encore l'équation suivante

$$\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right)\beta_\lambda\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi_\lambda}{x^{x\lambda}}. \tag{80}$$

Posant enfin dans (73) $x=1$, on obtient

$$q_\lambda(2) + q_\lambda(1) = 0.$$

Par conséquent, en vertu de (43),

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2) = \log\pi_\lambda, \tag{81}$$

$$\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \pi_\lambda, \tag{81$_1$}$$

[1]) Remarquons, en outre, que cette dernière égalité résulte immédiatement de l'équation (73).

résultat, déjà trouvé au n⁰ 46 par le calcul direct dans le cas particulier de $\lambda = 2$.

Remarquons d'avance qu'il existe encore une relation simple entre $\log \beta_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(1-x)$, mais nous la déduirons plus tard.

51. Passons maintenant au développement des fonctions $q_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(x)$ en séries convergentes.

L'égalité (40) du n⁰ 26 donne

$$q_\lambda(x) = \lambda!\, \psi_\lambda(x) \log x + p_\lambda(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_\lambda^{(k)}(x), \tag{82}$$

où le terme général a l'expression suivante

$$u_\lambda^{(k)}(x) = -\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \left[\frac{1}{x+2k+z} - \frac{1}{x+2k+1+z}\right] dz.$$

Il est évident, d'après ce que nous avons dit au n⁰ 49, que

$$\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+z} =$$

$$= P_\lambda(x+2k) + \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k+1}{x+2k},$$

$$\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+1+z} =$$

$$= P_\lambda(x+2k+1) + \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+2) \log \frac{x+2k+2}{x+2k+1}.$$

On en tire, après des réductions simples,

$$u_\lambda^{(k)}(x) = P_\lambda(x+2k+1) - P_\lambda(x+2k) + \tag{83}$$

$$+ \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k}{x+2k+2} + \log\left(1 + \frac{1}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)^\lambda}.$$

Remplaçons $x+2k+1$ par ξ et posons

$$S_\lambda(\xi) = P_\lambda(\xi) - P_\lambda(\xi - 1).$$

Remarquant que

$$P_\lambda(\xi) = P_\lambda(0) + \xi P'_\lambda(0) + \frac{\xi^2}{2!} P''_\lambda(0) + \ldots +$$

$$+ \frac{\xi^k}{k!} P_\lambda^{(k)}(0) + \ldots + \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P_\lambda^{(\lambda-1)}(0),$$

$$P_\lambda(\xi - 1) = P_\lambda(-1) - \xi P'_\lambda(-1) + \frac{\xi^2}{2!} P''_\lambda(-1) + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{\xi^k}{k!} P_\lambda^{(k)}(-1) + \ldots - \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P_\lambda^{(\lambda-1)}(-1),$$

on trouve

$$S_\lambda(\xi) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{\xi^k}{k!} \left(P_\lambda^{(k)}(0) - (-1)^k P_\lambda^{(k)}(-1) \right).$$

Or, en vertu de (78),

$$P_\lambda^{(k)}(0) + P_\lambda^{(k)}(-1) = 0.$$

Par conséquent,

$$S_\lambda(\xi) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{\lambda-2}{2}} \frac{\xi^{2k}}{2k!} P_\lambda^{(2k)}(0).$$

Désignons par $F_{\lambda,\,k}$ la constante suivante

$$F_{\lambda,\,k} = 2\lambda! \left[C_{\lambda-k-1} \frac{1}{(k+1)!} - C_{\lambda-k-2} \frac{1}{2(k+2)!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^k C_1 \frac{1}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} + (-1)^k \frac{1}{(\lambda-k)\lambda!} \right].$$

On aura

$$S_\lambda(x + 2k + 1) = P_\lambda(x + 2k + 1) - P_\lambda(x + 2k) =$$

$$= F_{\lambda,\,0} + (x + 2k + 1)^2 F_{\lambda,\,2} + (x + 2k + 1)^4 F_{\lambda,\,4} + \ldots +$$

$$+ (x + 2k + 1)^{\lambda-2} F_{\lambda,\,\lambda-2}$$

et, en vertu de (83),

$$u_\lambda^{(k)}(x) =$$

$$= \log e^{S_\lambda(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k}{x+2k+2}\right)^{\lambda!\,\psi_\lambda(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)\lambda}.$$

On trouve donc, eu égard à (82), le développement suivant

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \log e^{S_\lambda(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k}{2+2k+2}\right)^{\lambda!\,\psi_\lambda(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)\lambda},$$

convergent pour toutes les valeurs positives de la variable x.

Le développement de $\log \beta_\lambda(x)$ résulte immédiatement de l'égalité (43).

Posant, en particulier, $\lambda = 0$, nous trouverons

$$\log \beta_0(x) = \log \frac{\pi}{4} - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(2x+2k)(2x+2k+2)}{(2x+2k+1)^2},$$

car

$$\psi_\lambda(x) = 1, \quad p_\lambda(x) = 0, \quad S_\lambda(x) = 0, \quad \lambda! = 1 \qquad \text{pour } \lambda = 0.$$

51. Il faudrait maintenant étudier les propriétés des dérivées de divers ordres ainsi que les relations entre celles-ci et les fonctions primitives $q_\lambda(x)$ [ou $\log \beta_\lambda(x)$] correspondant aux diverses valeurs de l'indice λ, déduire les expressions de $\log \beta_\lambda(x)$ sous la forme de certaines intégrales définies et appliquer les résultats obtenus à la théorie des fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, mais il est préférable de donner d'abord la définition des fonctions $q_\lambda(x)$ [et $\log \beta_\lambda(x)$] correspondant aux valeurs impaires de l'indice λ, ce qui fera l'objet de la seconde partie de mon travail qui paraîtra sous peu de temps. *(A suivre).*

ПЕРІОДИЧЕСКІЯ ФУНКЦІИ.

В. П. Ермакова.

1. Абелевы функціи.

Абелева функція есть мероморфная періодическая функція, причемъ число основныхъ періодовъ вдвое болѣе числа перемѣнныхъ. Напомню вкратцѣ, какъ получаются Абелевы функціи.

Дано нѣкоторое алгебраическое уравненіе съ двумя перемѣнными:

$$F(z, s) = 0. \tag{1}$$

Изъ этого уравненія мы можемъ разсматривать s какъ функцію z. Разсмотримъ интегралъ:

$$\int \varphi(z, s)\, dz,$$

въ которомъ подъинтегральная функція выражается раціонально черезъ z и s. Можетъ случиться, что такой интегралъ не обращается въ безконечность для всякаго значенія независимаго перемѣннаго z. Тогда мы имѣемъ такъ называемый интегралъ *перваго рода*.

Число линейно независимыхъ интеграловъ перваго рода всегда конечно, это число называется *рангомъ алгебраическаго уравненія* (1).

Пусть независимые интегралы перваго рода будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s) dz, \quad \int \varphi_2(z, s) dz, \ldots, \quad \int \varphi_m(z, s) dz.$$

Составимъ слѣдующія уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z, s)\, dz = x_j. \tag{2}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Изъ этихъ уравненій мы можемъ разсматривать верхніе предѣлы $z_1, z_2, \ldots z_n$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Произвольная алгебраическая симметрическая функція верхнихъ предѣловъ будетъ Абелевой функціей.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи говоря о періодической функціи, мы будемъ подразумѣвать лишь такую функцію, число основныхъ періодовъ которой вдвое болѣе числа перемѣнныхъ.

2. Цѣль изслѣдованія.

Теперь является вопросъ: кромѣ Абелевыхъ функцій, существуютъ ли еще другія періодическія функціи.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ доказать слѣдующую теорему:

Всякая мероморфная функція n перемѣнныхъ, имѣющая $2n$ періодовъ, выражается раціонально черезъ Абелевы функціи.

Послѣ открытія Göpel'емъ и Rosenhain'омъ функцій Θ многихъ перемѣнныхъ возникъ вопросъ: можетъ ли произвольная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами выражаться раціонально черезъ функціи Θ. На первый взглядъ казалось, что нѣтъ, потому что между періодами функцій Θ существуетъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ извѣстныхъ соотношеній. Въ разговорѣ съ Гермитомъ Риманъ въ 1860 году утверждалъ, что эти соотношенія должны существовать между $2n$ періодами всякой функціи n перемѣнныхъ, по крайней мѣрѣ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій. Тоже утверждалъ и Вейерштрасъ на своихъ лекціяхъ. Но ни тотъ, ни другой не дали доказательства [1]). Такое доказательство въ первый разъ было дано Poincaré и Picard'омъ въ замѣткѣ, представленной въ Парижскую Академію Наукъ 3 декабря 1883 года.

Такимъ образомъ изъ указанной замѣтки Poincaré и Picard'a вытекаетъ и изложенная здѣсь теорема. Остается только подъ сомнѣніемъ: выражается ли всякая періодическая функція черезъ Абелевы функціи *раціонально* или *алгебраически*.

Сверхъ того, по краткости изложенія, вышеупомянутая замѣтка доступна лишь небольшому кругу читателей. Вотъ почему я полагаю, что настоящая статья будетъ не безполезна для русскихъ читателей.

---

[1]) См. по этому поводу: Monatsber. d. Berl. Akademie der Wissensch., 1869, p. 855.

Journal für d. reine u. angew. Mathem., Bd. LXXXIX.

Bulletin des Sciences mathém. et astronom., 2-e série, t. VI, 1882. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C. W. Borchardt). Прим. ред.

3. Особенныя точки функціи.

Чтобы для читателя ничего не оставалось неяснымъ, я долженъ выяснить, что называется мероморфною функціей. Не безполезно также упомянуть о томъ, какія могутъ быть особенныя точки функціи.

Прежде всего я предполагаю, что мы имѣемъ дѣло съ функціей одного перемѣннаго.

Точка $x = a$ называется *полюсомъ* функціи, если функція въ этой точкѣ обращается въ безконечность, но по умноженіи на нѣкоторую цѣлую степень $x - a$ принимаетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля.

Въ такомъ случаѣ функція можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ по цѣлымъ возрастающимъ степенямъ $x - a$, причемъ въ первомъ членѣ $x - a$ войдетъ въ отрицательной степени.

Можетъ случиться, что въ нѣкоторой точкѣ функція можетъ принимать произвольное значеніе, что зависитъ отъ того пути, по которому мы приходимъ въ разсматриваемую точку. Такая точка называется *существенно особенною точкою*. Для примѣра разсмотримъ функцію:

$$e^{\frac{1}{x}}.$$

Покажемъ, что въ точкѣ $x = 0$ эта функція можетъ принимать произвольное значеніе:

$$e^{\frac{1}{x}} = A,$$

Пусть одинъ корень этого уравненія будетъ $x = \alpha$,

$$e^{\frac{1}{\alpha}} = A;$$

тогда всякій другой корень будетъ

$$x = \frac{\alpha}{1 + 2n\pi\alpha i}.$$

Съ возрастаніемъ цѣлаго числа n до безконечности этотъ корень стремится къ нулю.

Точка $x = a$ называется *критическою точкою* функціи, если функція можетъ быть разложена въ рядъ по дробнымъ степенямъ $x - a$.

При обходѣ около критической точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній конечно.

Точка $x = a$ называется *трансцендентною* точкою функціи, если функція въ этой точкѣ принимаетъ опредѣленное значеніе (конечное или безконечное), но не можетъ быть разложена въ рядъ ни по цѣлымъ, ни по дробнымъ степенямъ $x-a$. Такова точка $x=0$ въ функціи $\log x$. Точка $x=a$ будетъ трансцендентною въ функціи $(x-a)^m$, если показатель m есть число дѣйствительное несоизмѣримое. При обходѣ около трансцендентной точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній безконечно велико [1]).

Функція, не имѣющая конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *голоморфною.*

Такая функція всегда можетъ быть разложена въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $x-a$. Этотъ рядъ сходится для всѣхъ значеній x.

Функція, имѣющая полюсы и не имѣющая другихъ конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *мероморфною;* Вейерштрасъ показалъ, что мероморфная функція всегда можетъ быть выражена отношеніемъ двухъ голоморфныхъ функцій.

Функція, имѣющая конечныя существенно особенныя точки и не имѣющая ни критическихъ, ни трансцендентныхъ точекъ, называется *однозначною* (uniforme, eindeutig).

Функція, имѣющая критическія или трансцендентныя точки, называется *многозначною.*

Положимъ теперь, что мы имѣемъ функцію многихъ перемѣнныхъ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Совокупность частныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ называется точкою функціи. Чтобы опредѣлить характеръ точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, нужно положить:

$$x_1 = a_1 + h_1 t, \quad x_2 = a_2 + h_2 t, \ldots x_n = a_n + h_n t,$$

гдѣ $h_1, h_2, \ldots h_n$ произвольныя постоянныя числа. Послѣ такой подстановки функція многихъ перемѣнныхъ обратится въ функцію одного перемѣннаго t.

Остается теперь опредѣлить характеръ точки $t=0$.

4. Приводимость періодическихъ функцій.

Пусть даны три періодическія функціи двухъ перемѣнныхъ съ тѣми же четырьмя періодами:

$$f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2), \quad f_3(x_1, x_2). \tag{3}$$

---

[1]) Существенно особенная точка можетъ комбинироваться съ критическою точкою и съ трансцендентною точкою. Такъ, если показатель m есть число мнимое, то точка $x=a$ въ функціи $(x-a)^m$ будетъ одновременно и существенно особенной и трансцендентной. Въ функціи $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ точка $x=0$ будетъ и существенно особенной и критической.

Пусть даны еще двѣ періодическія функціи:

$$\varphi_1(x_3, x_4), \quad \varphi_2(x_3, x_4). \tag{4}$$

Предположимъ, что эти функціи имѣютъ четыре одинаковые основные періода. Возьмемъ какое нибудь раціональное выраженіе изъ функцій (3) и (4); тогда получимъ періодическую функцію четырехъ перемѣнныхъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

съ восьмью періодами. Эта функція обращается въ періодическую функцію двухъ перемѣнныхъ, если вмѣсто x_3 и x_4 подставимъ какія нибудь постоянныя величины.

Теперь четыре независимыя перемѣнныя выразимъ линейно черезъ новыя перемѣнныя:

$$x_j = \alpha_j y_1 + \beta_j y_2 + \gamma_j y_3 + \delta_j y_4.$$
$$(j = 1, 2, 3, 4)$$

Тогда наша функція превратится въ періодическую функцію новыхъ перемѣнныхъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4). \tag{5}$$

Сообразно своему составу послѣдняя функція обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ. Если изъ уравненій:

$$\alpha_1 y_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 + \delta_1 y_4 = a_1,$$

$$\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 + \delta_2 y_4 = a_2,$$

опредѣлимъ двѣ перемѣнныя и подставимъ въ функцію (5), то эта функція превращается въ функцію двухъ перемѣнныхъ съ четырьмя періодами. Отсюда выясняется слѣдующая теорема.

Дана мероморфная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами; выразимъ $n-r$ независимыхъ перемѣнныхъ линейно черезъ остальныя независимыя перемѣнныя и подставимъ въ данную функцію; если послѣ этого данная функція превращается въ періодическую функцію съ $2r$ періодами, то данная функція можетъ быть выражена раціонально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

Точность этой теоремы подлежитъ нѣкоторому сомнѣнію, но это сомнѣніе можетъ быть устранено послѣ теоремы, которая будетъ доказана въ § 7.

Періодическую функцію назовемъ *неприводимою*, если она не можетъ быть выражена раціонально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

5. Неприводимыя рѣшенія періодическихъ уравненій.

Если дана одна періодическая функція, содержащая n перемѣнныхъ, то легко можно составить n независимыхъ функцій съ тѣми же $2n$ періодами. Покажемъ это.

Пусть дана періодическая функція:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ясно, что слѣдующая функція:

$$f(x_1+a_1, x_2+a_2, \ldots, x_n+a_n)$$

будетъ также періодическою съ тѣми же періодами. Мы можемъ всегда подобрать $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такъ, чтобы эти функціи были независимы.

Подобнымъ же образомъ имѣемъ еще третью періодическую функцію:

$$f(x_1+b_1, x_2+b_2, \ldots, x_n+b_n).$$

Постоянныя $b_1, b_2, \ldots, b_n$ опять можно выбрать такъ, чтобы послѣдняя функція не могла быть выражена черезъ предъидущія.

Продолжая далѣе, мы можемъ составить n независимыхъ періодическихъ функцій.

Положимъ, что мы имѣемъ n мероморфныхъ независимыхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами; приравняемъ эти функціи произвольнымъ постоянымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j. \quad (6)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Число рѣшеній этихъ уравненій безконечно велико.

Если къ одному рѣшенію прибавимъ какой нибудь періодъ, то получимъ другое рѣшеніе.

Два рѣшенія періодическихъ уравненій назовемъ неприводимыми, если ихъ разность не приводится къ періоду.

Покажемъ, что число неприводимыхъ рѣшеній періодическихъ уравненій (6) конечно, если функціи, стоящія въ первыхъ частяхъ, мероморфны.

Для этой цѣли перейдемъ отъ мнимыхъ величинъ къ дѣйствительнымъ:

$$x_j = \xi_j + \eta_j i\,, \quad A_j = B_j + C_j i\,,$$
$$u_j = \varphi_j + \psi_j i.$$

Уравненія (9) превратятся въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n\,, \eta_1, \ldots, \eta_n) &= B_j\,, \\ \psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n\,, \eta_1, \ldots, \eta_n) &= C_j. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Первыя части будутъ уже функціями $2n$ дѣйствительныхъ перемѣнныхъ съ $2n$ дѣйствительными періодами. Мы полагаемъ, что *опредѣлитель, составленный изъ элементовъ основныхъ періодовъ не обращается въ нуль.* Если бы этотъ опредѣлитель обратился въ нуль, то періодическая функція была бы невозможна, такъ какъ тогда можно было бы составить такой періодъ, всѣ элементы котораго были бы безконечно малы.

Преобразуемъ перемѣнныя $\xi_1, \ldots, \xi_n\,, \eta_1, \ldots, \eta_n$ линейно къ новымъ перемѣннымъ: $y_1\,, y_2, \ldots, y_{2n}$. Коэффиціенты линейнаго преобразованія всегда можно подобрать такъ, чтобы каждый основной періодъ приводился къ увеличенію одного изъ новыхъ перемѣнныхъ на единицу. Такимъ образомъ уравненія (7) превращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} p_j(y_1\,, y_2\,, \ldots, y_{2n}) &= B_j\,, \\ q_j(y_1\,, y_2\,, \ldots, y_{2n}) &= C_j. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Функціи, стоящія въ первой части, не измѣняются, если каждое перемѣнное увеличимъ на единицу.

Мы ищемъ неприводимыя рѣшенія уравненій (8); но каждое такое рѣшеніе при помощи періодовъ можно привести въ такой видъ, чтобы

$$0 < y_j < 1\,. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Такимъ образомъ *всѣ неприводимыя рѣшенія будутъ заключаться въ конечномъ объемѣ* ($2n$ измѣреній). Еслибъ число неприводимыхъ рѣшеній было безконечно велико, то эти рѣшенія сгущались бы въ нѣкоторой точкѣ. Но въ такомъ случаѣ эта точка была бы существенно особенной точкой, по крайней мѣрѣ для одной изъ періодическихъ функцій. Но мероморфныя функціи не имѣютъ существенно особенныхъ точекъ.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключенiе.

Число неприводимыхъ рѣшенiй уравненiй (6) всегда конечно.

Съ измѣненiемъ постоянныхъ $B_1, \ldots, B_n$, $C_1, \ldots, C_n$ измѣняются и рѣшенiя уравненiй (8). Эти рѣшенiя, какъ показано выше, заключаются въ конечномъ объемѣ, слѣдовательно ни одно изъ перемѣнныхъ не обратится въ безконечность. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключенiе:

Уравненiя (6) всегда имѣютъ конечныя рѣшенiя, каковы бы ни были числа A_1, $A_2, \ldots, A_n$, стоящiя во вторыхъ частяхъ уравненiй.

6. Зависимость между перiодическими функцiями.

Пусть имѣемъ $n+1$ мероморфныхъ функцiй n перемѣнныхъ съ $2n$ перiодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Между этими функцiями должна существовать зависимость:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{10}$$

Нужно доказать, что эта зависимость будетъ алгебраическая относительно каждой функцiи.

Для этой цѣли n какихъ нибудь изъ данныхъ функцiй приравняемъ произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j. \tag{11}$$
$$(j=1,2,\ldots,n)$$

Было показано, что число неприводимыхъ рѣшенiй этихъ уравненiй конечно; пусть это число равно m.

Подставивъ эти рѣшенiя въ функцiю v, найдемъ для этой послѣдней функцiи только m значенiй.

Итакъ, произвольной системѣ значенiй u_1, $u_2, \ldots, u_n$ соотвѣтствуетъ m значенiй v. Отсюда слѣдуетъ, что уравненiе (10) относительно v будетъ алгебраическое степени m. Сказанное распространяется на каждую функцiю. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Между $n+1$ мероморфными функцiями n перемѣнныхъ, имѣющими $2n$ перiодовъ, существуетъ зависимость, алгебраическая относительно каждой функцiи.

Если число неприводимыхъ рѣшенiй уравненiй (11) равно m, то уравненiе (10) будетъ, какъ показано выше, степени m относительно v. Можетъ ли это уравненiе имѣть кратные корни относительно v?

Положимъ, что уравненіе (10) имѣетъ кратные корни относительно v. Въ такомъ случаѣ кратные корни должны удовлетворять алгебраическому уравненію низшей степени:

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{12}$$

Но такъ какъ между функціями (9) существуетъ только одна зависимость, то уравненія (10) и (12) должны имѣть одинаковые корни, что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда уравненіе (10) можетъ быть представлено въ формѣ:

$$F_1^{\mu} = 0.$$

Каждый корень этого уравненія будетъ кратный, и степень кратности будетъ одна и та же, равна μ, причемъ μ должно быть дѣлителемъ числа m. Сказанное обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только при частномъ выборѣ функціи v. Вообще же всегда можно выбрать функцію v такъ, чтобы уравненіе (10) не имѣло кратныхъ корней.

Функціи (9) назовемъ основными, если уравненіе (10) не имѣетъ кратныхъ корней.

7. Раціональное выраженіе періодической функціи черезъ основныя функціи.

Возьмемъ n независимыхъ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{13}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Приравняемъ эти функціи произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Положимъ, что число неприводимыхъ рѣшеній этихъ уравненій равно m. Подставимъ эти рѣшенія въ двѣ другія періодическія функціи, имѣющія тѣ же періоды, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для каждой функціи получимъ m значеній:

$$v_1, v_2, \ldots, v_m,$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_m. \tag{14}$$

Эти значенія будутъ корнями двухъ алгебраическихъ уравненій:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0, \qquad F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, w) = 0.$$

Мы можемъ, какъ сказано выше, подобрать функцію v такъ, чтобы ея m значеній были различны.

Составимъ теперь слѣдующую функцію:

$$\Phi(t) = (t - v_1)(t - v_2) \ldots (t - v_m).$$

Эта функція симметрична относительно корней (14), а потому коэффиціенты при каждой степени t выражаются раціонально черезъ функціи (13).

Составимъ далѣе слѣдующую симметрическую функцію корней (14):

$$\Phi(t)\left(\frac{w_1}{t - v_1} + \frac{w_2}{t - v_2} + \ldots + \frac{w_m}{t - v_m}\right) = \Theta(t). \tag{15}$$

Коэффиціенты этой функціи также выражаются раціонально черезъ функціи (13).

Въ равенствѣ (15) t произвольно; положимъ $t = v_j$. Такъ какъ между значеніями функціи v нѣтъ равныхъ, то получимъ:

$$\Phi'(v_j)\, w_j = \Theta(v_j),$$

откуда

$$w_j = \frac{\Theta(v_j)}{\Phi'(v_j)}.$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній j отъ 1 до m; поэтому проще можно написать такъ:

$$w = \frac{\Theta(v)}{\Phi'(v)}.$$

Во второй части, какъ показано выше, входятъ раціонально функціи (13). Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

Всякая мероморфная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами выражается раціонально черезъ $n + 1$ основныхъ функцій.

8. Дифференціальныя уравненія періодическихъ функцій.

Возьмемъ систему $n+1$ основныхъ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (j=1, 2, \ldots, n)$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Между этими функціями существуетъ алгебраическая зависимость:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{17}$$

Было показано, что каждая періодическая функція, имѣющая тѣ же періоды, какъ и функціи (16), выражается раціонально черезъ функціи (16). Отсюда слѣдуетъ, что частныя производныя функцій (16) должны выражаться раціонально черезъ тѣ же функціи; положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = P_{jk}.$$

Вторая часть послѣдняго уравненія должна быть раціональною функціей $u_1, u_2, \ldots, u_n, v$.

Такимъ образомъ, должны имѣть мѣсто дифференціальныя уравненія:

$$\partial u_j = P_{j1}\partial x_1 + P_{j2}\partial x_2 + \ldots + P_{jn}\partial x_n. \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно $\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n$, получимъ:

$$Q_{j1}\partial u_1 + Q_{j2}\partial u_2 + \ldots + Q_{jn}\partial u_n = \partial x_j. \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

Въ этихъ уравненіяхъ коэффиціенты Q_{jk} должны выражаться раціонально черезъ функціи (16).

Выраженія въ первыхъ частяхъ уравненій (13) должны быть полными дифференціалами; поэтому мы можемъ перейти къ интеграламъ:

$$\int (Q_{j1}\partial u_1 + Q_{j2}\partial u_2 + \ldots + Q_{jn}\partial u_n) = x_j. \quad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{20}$$

Всѣ эти интегралы берутся отъ постоянной точки до перемѣнной $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Покажемъ, что ни одинъ изъ интеграловъ (20) не обращается въ безконечность ни при какихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Допустимъ, что одинъ изъ интеграловъ (20) обращается въ безконечность, когда $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$; тогда одно изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, u_n$ обязательно обращается въ безконечность. Въ такомъ случаѣ уравненія:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

не имѣютъ конечныхъ рѣшеній, что противорѣчитъ доказанному въ концѣ §-а 5-ого.

Интегралы, которые не обращаются въ безконечность при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, принято называть *интегралами перваго рода.*

Въ уравненіяхъ (20) съ измѣненіемъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ измѣняются перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и обратно. Станемъ непрерывно измѣнять перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ къ этимъ перемѣннымъ прибавились элементы какого нибудь періода функцій (16). Въ такомъ случаѣ перемѣнныя $u_1, u_2, \ldots, u_n$, описавъ *замкнутый циклъ*, возвратятся къ своимъ прежнимъ значеніямъ. Отсюда заключаемъ, что должны существовать $2n$ основныхъ цикловъ; интегралы (20), взятые по этимъ цикламъ, превращаются въ такъ называемые *модули періодичности,* т. е. въ элементы основныхъ періодовъ функцій (16). Произвольный замкнутый циклъ можетъ быть приведенъ къ комбинаціи основныхъ цикловъ. Интегралы (20), взятые по произвольному циклу, выразятся линейно черезъ элементы основныхъ періодовъ функцій (16); коэффиціенты въ этихъ выраженіяхъ будутъ цѣлыми числами.

Разсмотримъ такой замкнутый циклъ, когда измѣняется только одно перемѣнное u_1, всѣ же остальныя перемѣнныя не измѣняются,

$$u_2 = a_2, \; u_3 = a_3, \ldots, u_n = a_n.$$

Тогда уравненіе (17) приводится къ слѣдующему:

$$F(u_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, v) = 0. \tag{21}$$

Интегралы (20) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\int Q_{11}\,du_1, \quad \int Q_{21}\,du_1, \ldots, \int Q_{n1}\,du_1. \tag{22}$$

Все это интегралы перваго рода.

Предположимъ, что между интегралами (22) нѣтъ линейной зависимости съ постоянными коэффиціентами; въ такомъ случаѣ рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n. Пусть

$$Q_{j1} = \varphi_j(u_1, v).$$

Подставимъ z вмѣсто u_1 и s вмѣсто v. Уравненіе (21) будетъ:

$$F(z, a_2, a_3, \ldots, a_n, s) = 0. \tag{23}$$

Интегралы (22) будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s)\partial z, \quad \int \varphi_2(z, s)\partial z, \ldots, \int \varphi_n(z, s)\partial z. \tag{24}$$

Это интегралы перваго рода; поэтому мы можемъ составить Абелевы функціи, какъ показано въ § 1. Для этой цѣли пишемъ уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z, s)\partial z = x_j. \tag{25}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Алгебраическія симметрическія функціи верхнихъ предѣловъ будутъ Абелевыми функціями.

Между этими функціями выберемъ $n+1$ основныхъ функцій и обозначимъ ихъ черезъ

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{26}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Періоды этихъ послѣднихъ функцій будутъ комбинаціями основныхъ періодовъ функцій (16). Отсюда слѣдуетъ, что каждый періодъ функцій (26) будетъ періодомъ и функцій (16); но въ такомъ случаѣ функціи (16), какъ доказано въ § 7, выражаются раціонально черезъ функціи (26). Это и нужно было доказать.

Мы доказали, что періодическія функціи (16) выражаются раціонально черезъ Абелевы функціи (26). Но при этомъ доказательствѣ мы предполагали, что рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n.

Предположимъ, что рангъ уравненія (23) меньше n. Въ такомъ случаѣ должна существовать одна или нѣсколько зависимостей формы:

$$a_1\varphi_1(z, s) + a_2\varphi_2(z, s) + \ldots + a_n\varphi_n(z, s) = 0.$$

Тогда изъ уравненій (25) найдемъ одну или нѣсколько зависимостей формы:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = a. \tag{27}$$

Если мы примемъ во вниманіе только независимые интегралы (24), то въ результатѣ получимъ Абелевы функціи съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ и періодовъ. Черезъ такія Абелевы функціи опять могутъ быть выражены функціи (16), но лишь при томъ условіи, что между перемѣнными существуютъ зависимости (27). Здѣсь мы имѣемъ случай приводимости, указанной въ §-ѣ 4-омъ, когда функціи (16) могутъ быть выражены раціонально черезъ функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ. Но въ такомъ случаѣ мы прежде всего выразимъ функціи (16) раціонально черезъ неприводимыя функціи, а эти послѣднія въ свою очередь можемъ выразить черезъ Абелевы функціи. Такимъ образомъ теорема §-а 2-ого доказана.

КЪ ТЕОРІИ КОННЕКСОВЪ.

[Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)].

Д. М. Синцова.

§ 1.

Общія понятія о конфигураціяхъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

1. Принимая за основной элементъ не точку, прямую или плоскость трехмѣрнаго (Евклидова) пространства въ отдѣльности, а сочетаніе изъ всѣхъ этихъ трехъ основныхъ элементовъ пространства, получаемъ всего ∞^{10} различныхъ элементовъ: каждая изъ ∞^3 точекъ можетъ быть соединена въ элементъ конфигураціи съ каждою изъ ∞^4 прямыхъ и ∞^3 плоскостей: пространство является поэтому многообразіемъ *десяти* измѣреній, притомъ квадратичнаго характера, потому что шесть однородныхъ координатъ p_{ik} прямой связаны уравненіемъ

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0.$$

Такимъ образомъ разсматриваемое многообразіе можетъ быть отображено не въ плоскомъ многообразіи 10 измѣреній, а выдѣлено изъ плоскаго многообразія 11 измѣреній квадратичнымъ соотношеніемъ между 11 координатами.

Налагая на элементъ (x, p, u) одно простое условіе выдѣляемъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ совокупность ∞^9 элементовъ, налагая два простыхъ условія выдѣлимъ ∞^8 элементовъ и т. д.

Обращаемся сначала къ конфигураціи, выдѣляемой однимъ условіемъ. Пусть связь, налагаемая этимъ условіемъ, выражается аналитически однимъ уравненіемъ между координатами точки x, прямой p и плоскости u элемента (x, p, u):

$$f(x_1x_2x_3x_4;\quad p_{12}p_{13}\ldots p_{34};\quad u_1u_2u_3u_4)=0 \qquad (1)$$

однороднымъ въ отдѣльности относительно x_i, относительно p_{ik} и относительно u_e. Такую совокупность ∞^9 элементовъ будемъ называть *коннексомъ* (x, p, u).

Характеризовать эту конфигурацію можно такъ. Беремъ какую-нибудь точку x_0 пространства. Можетъ случиться что подстановка ея координатъ въ уравненіе (1) обратитъ его въ тождество; тогда всякая прямая и всякая плоскость составятъ вмѣстѣ съ такою точкою элементъ (x_0, p, u), удовлетворяющій уравненію (1). Такую точку будемъ называть *основною точкою* коннекса.

Такъ если (1) приводится къ виду:

$$\varphi_1(x_1 x_3 x_3 x_4) f_1(x, p, u) +$$
$$+ \varphi_2(x_1 x_2 x_3 x_4) f_2(x, p, u) + \varphi_3(x_1 \ldots x_4) f_3(x, p, u) = 0$$

то основными точками будутъ точки пересѣченія поверхностей

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

Такія точки могутъ составлять цѣлую кривую,—напримѣръ въ коннексѣ вида:

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_4) f_1(x, p, u) + \varphi_2(x_1 \ldots x_4) f_2(x, p, u) = 0,$$

основными точками будутъ всѣ точки кривой

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0.$$

Основныя точки могутъ составить и поверхность, если уравненіе (1) распадается на два множителя, изъ которыхъ одинъ содержитъ только координаты x:

$$\varphi(x_1 \ldots x_4)\; f_1(x, p, u) = 0.$$

Въ частности уравненіе поверхности

$$f(x_1 \ldots x_4) = 0$$

можетъ быть разсматриваемо какъ уравненіе коннекса (x, p, u): каждая точка этой поверхности можетъ быть соединена съ каждою прямой и съ каждою плоскостью пространства и будетъ основною точкою, точки же, не лежащія на поверхности, не даютъ ни одного элемента.

Такимъ образомъ основная точка даетъ начало ∞^7 элементовъ.

Вообще говоря, однако, подстановка координатъ точки x_0 въ уравненіе (1), не обращаетъ его въ тождество, а даетъ уравненіе между координатами прямой и координатами плоскости, т. е. опредѣляетъ ∞^6 сочетаній (p, u), образующихъ коннексъ съ элементомъ (прямая, плоскость), который будемъ называть коннексомъ (p, u), принадлежащимъ точкѣ x_0, и обозначать $K_{x_0}(p, u)$.

Такіе коннексы имѣютъ въ свою очередь основныя прямыя и основныя плоскости, и слѣдовательно, если въ добавокъ къ точкѣ x_0 мы возьмемъ какую-нибудь прямую p_0, то можетъ случиться, что уравненіе (1) при такой подстановкѣ:

$$f(x_0, p_0, u) = 0,$$

обратится въ тождество независимо отъ значеній кординатъ $u_1 \ldots u_4$. Примѣромъ можетъ послужить коннексъ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\varphi_1(x, p) f_1(x, p, u) +$$
$$+ \varphi_2(x, p) f_2(x, p, u) + \ldots + \varphi_7(x, p) f_7(x, p, u) = 0,$$

которое удовлетворяется независимо отъ значеній u всѣми сочетаніями (x, p), удовлетворяющими уравненіямъ

$$\varphi_1(x, p) = 0, \qquad \varphi_2(x, p) = 0 \ \ldots \ \varphi_7(x, p) = 0.$$

Эти семь уравненій опредѣляютъ сочетанія (x, p) пересѣченія 7 коннексовъ съ элементомъ (точка, прямая), и число такихъ сочетаній (если φ_i напр. алгебраическія функціи между собою различныя) конечно. Подобныя сочетанія (точка, прямая), можно также называть *основными сочетаніями* (x, p) коннексовъ (1). Каждая основная точка $x_{осн}$ даетъ начало ∞^4 основныхъпаръ $(x_{осн}, p)$, гдѣ p любая прямая.

Если же взятыя точка и прямая не составляютъ основного сочетанія (x, p), то (1) сводится при подстановкѣ координатъ точки и прямой къ уравненію между координатами плоскости и слѣдовательно опредѣляетъ ∞^2 плоскостей, огибающихъ нѣкоторую поверхность,—только касательныя къ этой поверхности плоскости составляютъ элементъ коннекса (1) вмѣстѣ съ взятыми точкою и плоскостью. Эту поверхность можно называть поверхностью, принадлежащею въ коннексѣ (1) взятымъ прямой и точкѣ. Будемъ обозначать ее U_{xp}.

Такимъ образомъ если (x, p) есть основное сочетаніе, то въ коннексѣ (1) имѣется ∞^3 элементовъ, въ составъ которыхъ она входитъ, если же (x, p) обыкновенная (не основная), то ∞^2.

Подобнымъ образомъ придемъ къ представленію объ *основныхъ прямыхъ* и *основныхъ плоскостяхъ* и объ *основныхъ сочетаніяхъ* (p, u) и (x, u), причемъ основная прямая даетъ начало ∞^3 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (p, u) и основная плоскость ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u) и ∞^4 основныхъ сочетаній (p, u), основная точка — ∞^4 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u).

Если сочетаніе (p, u) не основное, то ему принадлежитъ точечная поверхность X_{up}, неосновному сочетанію (x, u) комплексъ P_{xu}, прямой вообще коннексъ $K_p(x, u)$ съ элементомъ (точка, плоскость), плоскости (не основной)—коннексъ $K_u(x, p)$ съ элементомъ (точка, прямая).

Если (1) алгебраическое раціональное степени m относительно x_i, степени r относительно p_{ik} и степени n относительно u_i, то X_{pu} есть поверхность порядка m, P_{xu} — комплексъ ранга r и U_{xp} — поверхность класса n. Числа m, r, n называемъ соотвѣтственно порядкомъ, рангомъ и классомъ коннекса (1).

2. Коинциденція. Элементы общіе двумъ коннексамъ (2)

$$f(x, p, u) = 0 \qquad f_1(x, p, u) = 0$$

(выдѣляемые двумя условіями)—ихъ всего ∞^8—образуютъ *коинциденцію* (*простую* въ отличіе отъ дальнѣйшихъ, или просто коинциденцію). Здѣсь каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція прямыхъ (какъ и въ послѣдующемъ мы употребляемъ терминъ „принадлежитъ“ въ томъ смыслѣ, что каждая прямая конгруэнціи дополняетъ (x, u) до элемента (x, p, u) коинциденціи) ранга rr', если данные коннексы суть

$$(m, r, n) \text{ и } (m', r', n').$$

Каждому сочетанію (x, p) принадлежитъ развертывающаяся класса nn' и каждому сочетанію (p, u) — кривая двоякой кривизны порядка mm'. Далѣе коинциденція содержитъ $mn' + nm'$ элементовъ, которыхъ прямая задана, точка лежитъ на нѣкоторой другой данной прямой и плоскость проходитъ черезъ какую нибудь третью данную прямую; она содержитъ $mr' + rm'$ элементовъ, которыхъ плоскость задана, прямая принадлежитъ данному пучку, и точка лежитъ на данной прямой, и $rn' + nr'$ элементовъ которыхъ точка есть данная, плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и прямая принадлежитъ данному пучку. Иначе говоря, въ коинциденціи (2) каждой точкѣ x пространства принадлежитъ коинциденція (p, u) съ характеристиками

$$(rr', nr' + rn', nn') —$$

пересѣченіе двухъ коннексовъ (p, u):

$$(r, n) \text{ и } (r', n'),$$

прямой p принадлежитъ вообще коинциденція (x, u)—пересѣченіе двухъ коннексовъ (x, u), одного порядка m и класса n, другого порядка m' и класса n'; характеристики этой коинциденціи (x, u) будутъ слѣдовательно:

$$mm', \; mn' + nm' \quad \text{и} \quad rn'.$$

Наконецъ плоскости u принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, p), какъ пересѣченіе двухъ коннексовъ съ элементомъ (x, p), имѣющая характеристическія числа

$$mm', \; mr' + rm', \; rr'.$$

2a. Вышеприведенныя характеристическія числа получаются непосредственно изъ разсмотрѣнія уравненій, какъ числа элементовъ удовлетворяющихъ тѣмъ или другимъ условіямъ, поставленнымъ выше. Для разсмотрѣнія двухъ простѣйшихъ въ алгебраическомъ отношеніи конфигурацій это не представляетъ затрудненій. Но уже начиная съ конфигураціи опредѣляемой какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p, u) получаются въ числѣ характеристикъ такія, которыя даютъ количество элементовъ (x, p, u) конфигураціи, удовлетворяющихъ условіямъ, наложеннымъ одновременно и на точку и на прямую и на плоскость элемента: такія характеристики такимъ образомъ не сводятся къ характеристикамъ конфигурацій съ болѣе простыми элементами, которыя получаемъ предполагая что точка, прямая или плоскость элемента заданы. Хотя и эти числа могутъ быть получаемы изъ чисто-алгебраическихъ соображеній, но удобно примѣнить для систематическаго вывода ихъ пріемы энумеративной геометріи.

Именно, можно условіе принадлежать данному коннексу (m, r, u)—условіе простое—выразить равенствомъ:

$$\xi_1 = \alpha.p + \beta.g + \gamma.e$$

гдѣ p — условіе для точки лежитъ въ данной плоскости, g — условіе для прямой встрѣчать данную прямую, и e — простое же условіе для плоскости проходить черезъ данную точку. Наложивъ на элементъ (x, p, u) добавочное девятерное условіе: точка x должна лежать на данной прямой, прямая и плоскость должны быть даны, находимъ:

$$\xi_1 p^2.G.e^3 = \alpha.p^3.G.e^3 + \beta.p^2.gG.e^3 + \beta.p^2.Ge^4$$

и такъ какъ

$$G = 1, \quad e^3 = p^3 = 1, \quad gG = 0, \quad e^4 = 0.$$

$$\xi_1 p^2 G e^3 = \alpha.$$

Но мы можемъ число элементовъ, удовлетворяющихъ этому условію получить чисто алгебраически,—оно равно числу элементовъ, которые при данныхъ p_{ik} и u_i удовлетворяютъ (1) и уравненіямъ

$$\sum A_i x_i = 0\,, \quad \sum B_i x_i = 0 \quad (A_i \text{ и } B_i \text{—постоянныя}).$$

Эти уравненія, если (1) порядка m относительно x, имѣютъ m общихъ рѣшеній, слѣдовательно $\alpha = m$.

Точно также найдемъ $\beta = r$, $\gamma = n$, и простое условіе принадлежать данному коннексу (1) выразится

$$\xi_1 = m.p + r.g + n.e.$$

Отсюда для коинциденціи (2)—пересѣченія двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n') получимъ аналогичный символъ,—двойное условіе для (x, p, u) принадлежать тому и другому коннексу одновременно выразится произведеніемъ условій принадлежности элемента каждому изъ нихъ въ отдѣльности:

$$\begin{aligned}\xi_2 = \xi_1 \cdot \xi_1' = (m.p + r.g + n.e)(m'.p + r'.g + n'.e) = \\ = mm'.p^2 + (mr' + rm').pg + (mn' + nm')pe + rr'.g^2 + \\ + (nr' + rn')ge + nn'.e^2.\end{aligned}$$

Предполагая, что прямая и плоскость даны, накладываемъ семерное условіе $G.e^3$, получимъ слѣдовательно ∞' элементовъ, и можно еще добавить одно условіе для точки лежать въ данной плоскости u; такимъ образомъ:

$$\xi_2 . pGe^3 = mm'$$

что и выражаетъ высказанное выше: если прямая и плоскость даны, то точекъ x заключается въ каждой плоскости mm' — всѣ эти точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка mm' и т. д.

Но коинциденція можетъ и не составлять полнаго пересѣченія двухъ коннексовъ (x, p, u). Тогда для опредѣленія нужно знать всѣ ея характеристики. Условіе (двойное) принадлежать коинциденціи напишемъ вообще:

$$\xi_2 = \alpha_{200}p^2 + \alpha_{110}pg + \alpha_{101}pe + \alpha_{020}g^2 + \alpha_{011}ge + \alpha_{002}e^2$$

или сокращенно:

$$\xi_2 = \sum \alpha_{ikl} p^i g^k e^l$$

причемъ i, k, l цѣлыя положительныя числа или нули, подчиненныя условію

$$i + k + l = 2.$$

Здѣсь слѣдовательно, $(\alpha_{200}, \alpha_{101}, \alpha_{002})$ характеристики коинциденціи (x, u), принадлежащей данной прямой, $(\alpha_{200}, \alpha_{110}, \alpha_{020})$—характеристики коинциденціи (x, p), принадлежащей данной плоскости, $(\alpha_{020}, \alpha_{011}, \alpha_{002})$—характеристики коинциденціи (p, u), принадлежащей по (2) данной точкѣ.

3. Двойная коинциденція. Совокупность ∞^7 элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ, можно, какъ и въ коннексахъ съ элементомъ (точка, плоскость), назвать *бикоинциденціей*. Но здѣсь явится надобность разсматривать еще элементы общіе 4, 5 и т. д. коннексамъ (x, p, u). Поэтому будемъ называть совокупность элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ $(m, r, n,)$ (m', r', n'), (m'', r'', n''):

$$f(x, p, u) = 0, \qquad f_1(x, p, u) = 0, \qquad f_2(x, p, u) = 0$$

и всякую вообще совокупность ∞^7 элементовъ (x, p, u) *двойною коинциденціею.*

Каждому сочетанію (p, u) здѣсь принадлежитъ $mm'm''$ точекъ пересѣченія поверхностей

$$X_{pu}, \; X'_{pu}, \; X''_{pu},$$

принадлежащихъ (p, u) въ коннексахъ

$$f = 0, \; f_1 = 0, \; f_2 = 0;$$

каждому сочетанію (x, p)—$nn'n''$ плоскостей—общихъ касательныхъ поверхностей

$$U_{xp}, \; U'_{xp}, \; U''_{xp}$$

тѣхъ же коннексовъ. Наконецъ каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность ранга $2rr'r''$, образуемая прямыми, общими тремъ комплексамъ

$$P_{xu}, \; P'_{xu}, \; P''_{xu},$$

принадлежащимъ (x, u) въ тѣхъ же трехъ коннексахъ.

Плоскости u принадлежитъ бикоинциденція сочетаній (x, p), какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p) съ характеристиками

$$(mm'm'', \; \sum mm'r'', \; \sum mr'r'', \; 2rr'r'').$$

Изъ числа этихъ характеристикъ двѣ уже встрѣчены выше; изъ двухъ остальныхъ первая означаетъ число элементовъ (x, p), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а прямая принадлежитъ данному пучку, и слѣдовательно, можетъ быть также истолкована какъ порядокъ кривой двоякой кривизны, принадлежащей прямымъ даннаго пучка, или какъ рангъ комплекса прямыхъ, составляющихъ сочетанія (x, p) взятой бикоинциденціи съ точками данной плоскости; вторая означаетъ число сочетаній (x, p), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, а прямая лежитъ въ данной плоскости или проходитъ черезъ данную точку, и слѣдовательно можетъ быть также истолкована, какъ порядокъ поверхности, образуемой точками, дополняющими до сочетанія разсматриваемой бикоинциденціи прямыя данной связки или даннаго поля, или же какъ рангъ конгруэнціи прямыхъ, дополняющихъ до сочетанія той же бикоинциденціи точки данной прямой. Зададимся далѣе прямою p; ей принадлежитъ бикоинциденція (∞^3) сочетаній (точка x, плоскость u) съ характеристиками:

$$(mm'm'', \sum mm'n'', \sum mn'n'', nn'n'')$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ порядокъ поверхности, точки которой составляютъ сочетаніе этой бикоинциденціи съ плоскостями данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, касательныя къ которой составляютъ сочетаніе бикоинциденціи съ точками данной прямой; третье—порядокъ кривой двоякой кривизны, точки которой составляютъ сочетаніе бикоинциденціи съ плоскостями даннаго пучка, и порядокъ поверхности, касательныя которой соединяются въ сочетаніе бикоинциденціи съ точками даннаго точечнаго поля. Данной точкѣ принадлежитъ въ двойной коинциденціи (3) бикоинциденція сочетаній (p, u) съ характеристиками

$$(2rr'r'', \sum nr'r'', \sum nn'r'', nn'n'');$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ число сочетаній (p, u), которыхъ прямая принадлежитъ данной связкѣ или данному полю, а плоскость—данному пучку, и слѣдовательно, означаетъ также классъ поверхности, принадлежащей прямымъ данной связки или поля, и рангъ конгруэнціи, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка; $\sum nn'r''$ означаетъ подобнымъ образомъ число сочетаній (p, u), которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, а плоскости—данной связкѣ, и слѣдовательно, есть рангъ комплекса, принадлежащаго плоскостямъ данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, принадлежащей прямымъ даннаго пучка.

Кромѣ перечисленныхъ характеристикъ, остается упомянуть еще объ одной, которую нельзя получить, предполагая данными точку, прямую или плоскость элемента (x, p, u) разсматриваемой двойной коинциденціи. Это число ея элементовъ (x, p, u), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, прямая принадлежитъ данной связкѣ или полю, и плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Число это равно для двойной коинциденціи (3) $\sum mr'n''$.

Условіе (тройное) принадлежать данной двойной бикоинциденціи можетъ быть изображено такъ:

$$\S_3 = \beta_{300}.p^3 + \beta_{210}p^2g + \beta_{201}p^2e + \beta_{120}pg^2 + \beta_{111}pge + \beta_{102}pe^2 + \beta_{030}g^3 +$$
$$+ \beta_{021}g^2e + \beta_{012}ge^2 + \beta_{003}e^3 = \sum \beta_{ikl}p^ig^ke^l$$

(гдѣ $i+k+l=3$ и i, k, l равны или болѣе 0 и не болѣе 3).

Если какъ выше было взято, двойная коинциденція опредѣляется, какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ

$$(m, r, n), (m', r', n') \text{ и } (m'', r'', n''),$$

то

$$\beta_{300} = mm'm'', \beta_{210} = \sum mm'r'', \beta_{201} = \sum mm'n'', \beta_{120} = \sum mr'r'',$$
$$\beta_{111} = \sum mr'n'', \beta_{102} = \sum mn'n'', \beta_{030} = rr'r'', \beta_{021} = \sum nr'r'',$$
$$\beta_{012} = \sum nn'r'', \beta_{003} = nn'n''.$$

Двойная коинциденція можетъ быть также задана, какъ пересѣченіе нѣкоторой простой коинциденціи съ характеристиками (α_{200}, α_{110}, ...) и коннекса (m, r, n). Тогда для нея характеристики выразятся такъ:

$$\beta_{300} = m\alpha_{210}; \beta_{210} = m\alpha_{110} + r\alpha_{200}; \beta_{201} = m\alpha_{101} + n\alpha_{200};$$
$$\beta_{120} = m\alpha_{020} + r\alpha_{110}; \beta_{111} = m\alpha_{011} + r\alpha_{101} + n\alpha_{110}; \beta_{102} = m\alpha_{002} + n\alpha_{101};$$
$$\beta_{030} = r\alpha_{020}; \beta_{021} = r\alpha_{011} + n\alpha_{020}; \beta_{012} = r\alpha_{002} + n\alpha_{011}; \beta_{003} = n\alpha_{002}.$$

4. Тройная коинциденція. Четверное условіе, наложенное на элементы (x, p, u), выдѣляетъ совокупность ∞^6 такихъ элементовъ, которую мы назовемъ тройною коинциденціею. Она можетъ быть получена, какъ пересѣченіе четырехъ коннексовъ, или двухъ простыхъ коинциденцій или двойной коинциденціи съ коннексомъ или составлять неполное пересѣченіе одного изъ указанныхъ типовъ.

Мы можемъ произвольно взять прямую p. Ей принадлежитъ пара (точечная поверхность, плоскостная поверхность),—точки одной и плоскости, касательныя ко второй, находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи. Если тройная коинциденція опредѣляется четырьмя коннексами

$$(m, r, n), \quad (m', r', n'), \quad (m'', r'', n''), \quad (m''', r''', n'''),$$

то порядокъ первой

$$\sum mn'n''n''',$$

классъ второй

$$\sum mm'm''n''' ;$$

число сочетаній (точка, плоскость), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку (иными словами порядокъ кривой, принадлежащей въ этой парѣ данной связкѣ или классъ развертывающейся, которой касательныя составляютъ сочетаніе пары съ точками даннаго поля) есть

$$\sum mm'n''n''' .$$

Прямымъ даннаго пучка принадлежитъ бикоинциденція съ характеристиками

$$\left(\sum rn'n''n''' ,\ \sum mr'n''n''' ,\ \sum mm'r''n''' ,\ \sum mm'm''r'''\right)$$

прямымъ данной связки—коинциденція сочетаній (точка, плоскость) съ характеристиками

$$\left(\sum mm'r''r''' ,\ \sum mn'r''r''' ,\ \sum nn'r''r'''\right),$$

наконецъ если прямыя элемента (x, p, u) должны встрѣчать данную прямую, то сочетанія (x, u), соединяемыя съ этими прямыми, образуютъ коннексъ (∞^5) сочетаній (x, u) порядка

$$2 \sum mr'r''r'''$$

и класса

$$2 \sum nr'r''r''' .$$

Если зададимся точкою и прямою элемента, то такихъ элементовъ въ тройной коинциденціи имѣется

$$2 rr'r''r''' .$$

Можно тѣ же числа истолковать и иначе изъ данной точки или задаваясь плоскостью. Въ общемъ условіе принадлежать тройной коинциденціи есть четверное условіе, которое можетъ быть изображено:

$$\xi_4 = \gamma_{310}p^3g + \gamma_{301}p^3e + \gamma_{220}p^2g^2 + \gamma_{211}p^2ge + \gamma_{202}p^2e^2 + \gamma_{130}pg^3 +$$

$$+ \gamma_{121}pg^2e + \gamma_{112}pge^2 + \gamma_{103}pe^3 + \gamma_{040}g^4 + \gamma_{031}g^3e + \gamma_{022}g^2e^2 + \gamma_{012}ge^3 .$$

Если тройная коинциденція задана пересѣченіемъ четырехъ коннексовъ, какъ выше, то

$$\gamma_{310} = \sum rm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}m^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{301} = \sum mm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{220} = \sum mm^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}} ,$$

$$\gamma_{211} = \sum mm^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{202} = \sum mm^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{130} = \sum mr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}} ,$$

$$\gamma_{121} = \sum mr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{103} = \sum mn^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{040} = rr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{031} = \sum nr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}} ,$$

$$\gamma_{022} = \sum nn^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{013} = \sum rn^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} ,\ \gamma_{112} = \sum mr^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}} .$$

Если тройная коинциденція задана пересѣченіемъ двойной коинциденціи

$$(\beta_{300}, \beta_{210}, \beta_{201}, \beta_{120}, \beta_{111}, \beta_{030}, \beta_{021}, \beta_{012}, \beta_{003})$$

съ коннексомъ $(m^{\mathrm{III}}, r^{\mathrm{III}}, n^{\mathrm{III}})$, то для тѣхъ же чиселъ получаемъ выраженія:

$$\gamma_{310} = \beta_{300} r + \beta_{210} m\,;\ \gamma_{301} = \beta_{300} n + \beta_{201} m\,;\ \gamma_{220} = \beta_{120} m + \beta_{210} r\,;$$

$$\gamma_{211} = m\beta_{111} + r\beta_{201} + n\beta_{210}\,;\ \gamma_{202} = m\beta_{102} + n\beta_{201}\,;\ \gamma_{130} = m\beta_{030} + r\beta_{120}\,;$$

$$\gamma_{121} = m\beta_{021} + r\beta_{111} + n\beta_{120}\,;\ \gamma_{112} = m\beta_{012} + r\beta_{102} + n\beta_{111}\,;$$

$$\gamma_{103} = m\beta_{003} + n\beta_{102}\,;\ \gamma_{040} = r\beta_{030}\,;\ \gamma_{031} = r\beta_{021} + n\beta_{030}\,;$$

$$\gamma_{022} = r\beta_{012} + n\beta_{021}\,;\ \gamma_{013} = r\beta_{003} + n\beta_{012}.$$

5. Четверная коинциденція состоитъ изъ ∞^5 элементовъ и можетъ быть выдѣлена изъ совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) какимъ либо пятернымъ условіемъ. Она можетъ быть, слѣдовательно, опредѣлена какъ пересѣченіе пяти коннексовъ, простой коинциденціи съ двойною или тройной съ коннексомъ.

Условіе ξ_5 принадлежать такой конфигураціи есть условіе пятерное, которое можетъ быть въ тѣхъ же символахъ изображено

$$\xi_5 = \sum \delta_{ilk} p^i g^l c^k \qquad (i + k + l = 5).$$

Данной прямой принадлежитъ ∞^1 сочетаній (x, u) образующихъ пару (кривая двоякой кривизны порядка δ_{203}, развертывающаяся поверхность класса δ_{302}), данной точкѣ ∞^2 сочетаній (прямая, плоскость), образующихъ пару (конгруэнція ранга δ_{023}, плоскостная поверхность класса $2\delta_{041}$), причемъ имѣется $2\delta_{032}$ сочетаній (p, u), которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую, а плоскость проходитъ черезъ данную точку. Данной плоскости принадлежитъ пара (точечн. поверхность порядка $2\delta_{140}$, конгруэнція ранга δ_{320}), причемъ $2\delta_{230}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую въ данной связкѣ. Если возьмемъ пучекъ плоскостей, то сочетанія (x, p), составляющія элементъ съ одной изъ плоскостей этого пучка, образуютъ пару (точечное пространство, комплексъ ранга $2\delta_{321}$), въ которой съ каждою точкою можетъ соединено $2\delta_{041}$ прямыхъ этого комплекса, прямыя, составляющія сочетаніе съ одною изъ точекъ данной прямой, образуютъ линейчатую поверхность ранга δ_{131}, а составляющія сочетанія съ одною изъ точекъ даннаго поля—конгруэнцію ранга δ_{221}. Двойственно сочетаніе (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (комплексъ ранга δ_{113}, плоскостное пространство), въ которой съ каждой плоскостью можетъ быть соединено $2\delta_{140}$ прямыхъ; прямыя сочетаній (p, u), которыхъ плоскости принадлежатъ данному пучку, образуютъ линейчатую поверхность ранга $2\delta_{131}$, а прямыя сочетаній, которыхъ плоскости принадлежатъ данной связкѣ,— конгруэнцію ранга δ_{122}. Можно замѣтить также, чтобы исчерпать всѣ характеристики,—что въ совокупности элементовъ, которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, сочетанія (x, u) образуютъ пару (поверхность порядка δ_{113}, поверхность класса δ_{311}), причемъ сочетаній, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣемъ δ_{212}.

Если четверная коинциденція задана какъ пересѣченіе пяти коннексовъ

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{IV}}, r^{\mathrm{IV}}, n^{\mathrm{IV}}),$$

то:

$$\delta_{041} = \sum n r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{032} = \sum n n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{023} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{140} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{230} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{320} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{131} = \sum m n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{122} = \sum m n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{221} = \sum m m^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{113} = \sum m r^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{212} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{203} = \sum m m^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{311} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{302} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}.$$

Если четверная коинциденція является, какъ пересѣченіе тройной коинциденціи съ коннексомъ (m, r, n), то имѣемъ, означая γ_{ikl} $(i + k + l = 4)$ характеристики тройной коинциденціи:

$$\delta_{041} = \gamma_{031} r + \gamma_{040} n; \quad \delta_{032} = \gamma_{022} r + \gamma_{031} n; \quad \delta_{023} = \gamma_{013} r + \gamma_{022} n;$$

$$\delta_{140} = \gamma_{040} m + \gamma_{130} r; \quad \delta_{230} = \gamma_{130} m + \gamma_{220} r; \quad \delta_{320} = \gamma_{220} m + \gamma_{310} r;$$

$$\delta_{131} = \gamma_{031} m + \gamma_{121} r + \gamma_{130} n; \quad \delta_{122} = \gamma_{022} m + \gamma_{112} r + \gamma_{121} n;$$

$$\delta_{221} = \gamma_{121} m + \gamma_{211} r + \gamma_{220} n; \quad \delta_{113} = \gamma_{013} m + \gamma_{103} r + \gamma_{112} n;$$

$$\delta_{212} = \gamma_{112} m + \gamma_{202} r + \gamma_{211} n; \quad \delta_{311} = \gamma_{211} m + \gamma_{301} r + \gamma_{310} n;$$

$$\delta_{203} = \gamma_{103} m + \gamma_{202} n; \quad \delta_{302} = \gamma_{202} m + \gamma_{301} n.$$

6. Пятерная коинциденція, составляемая ∞^4 элементами (x, p, u), удовлетворяющими какому нибудь шестерному условію, можетъ быть получена въ пересѣченіи шести коннексовъ, или въ пересѣченіи четверной коинциденціи съ коннексомъ или тройной съ простою

или въ пересѣченіи двухъ двойныхъ коинциденцій (пересѣченіе трехъ простыхъ коинциденцій есть частный случай пересѣченія простой коинциденціи съ тройной).

Если условіе для (x, p, u) принадлежать такой коинциденціи (алгебраической) изобразимъ:

$$\xi_6 = \mu_{330} p^3 g^3 + \mu_{321} p^3 g^2 e + \mu_{312} p^3 g e^2 + \mu_{303} p^3 e^3 + \mu_{240} p^2 g^4 + \mu_{231} p^2 g^3 e +$$

$$+ \mu_{222} p^2 g^2 e^2 + \mu_{213} p^2 g e^3 + \mu_{141} p g^4 e + \mu_{132} p g^3 e^2 + \mu_{123} p g^2 e^3 +$$

$$+ \mu_{042} g^4 e^2 + \mu_{033} g^3 e^3$$

то значенія отдѣльныхъ характеристикъ таковы.

Данной прямой принадлежитъ конечное число μ_{303} сочетаній (x, u) составляющихъ съ нею элементъ. Данной плоскости принадлежитъ пара (кривая двоякой кривизны порядка $2\mu_{240}$, линейчатая поверхность ранга $2\mu_{330}$). Данной точкѣ—пара (линейчатая поверхность ранга $2\mu_{033}$, развертывающаяся класса $2\mu_{042}$). Прямымъ даннаго пучка принадлежатъ (т. е. составляютъ элементъ съ одною изъ прямыхъ пучка) сочетанія (x, u), образующія пару (кривая двоякой кривизны порядка μ_{213}, развертывающаяся класса μ_{312}). Прямымъ данной связки—пара (поверхность порядка μ_{123}, поверхность класса μ_{321}),—каждая точка первой поверхности въ соединеніи съ опредѣленною касательною плоскостью второй дополняетъ одну изъ прямыхъ связки до элемента пятерной коинциденціи; при этомъ число сочетаній (x, u), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, равно μ_{222}.

Сочетанія (x, p) тѣхъ элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, образуютъ пару (поверхность порядка $2\mu_{141}$, конгруэнція ранга μ_{231}), причемъ $2\mu_{132}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую встрѣчающую данную прямую. Сочетанія (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точка лежитъ на данной прямой образуютъ пару (конгруэнція ранга μ_{123}; поверхность класса $2\mu_{141}$) причемъ $2\mu_{132}$ сочетанія имѣютъ плоскость, проходящую черезъ данную точку, и прямую, встрѣчающую данную прямую.

Если пятерная коинциденція опредѣляется какъ пересѣченіе шести коннексовъ

$$(m, r, n). (m^{I}, r^{I}, n^{I}) \dots (m^{V}, r^{V}, n^{V}),$$

то ея характеристики выражаются съ помощью порядка, класса и ранга отдѣльныхъ коннексовъ слѣдующимъ образомъ

$$\mu_{330} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{321} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{312} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{303} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{240} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{231} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{222} = \sum m m^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{213} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{141} = \sum m n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{132} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{123} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{042} = \sum n n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{033} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}}$$

Если пятерная коинциденція опредѣляется пересѣченіемъ четверной съ коннексомъ (m, r, n), то

$$\mu_{330} = m\delta_{230} + r\delta_{230}; \quad \mu_{321} = \delta_{221} m + \delta_{311} r + \delta_{320} n;$$

$$\mu_{312} = \delta_{212} m + \delta_{302} r + \delta_{311} n; \quad \mu_{303} = m\delta_{203} + n\delta_{302};$$

$$\mu_{240} = \delta_{140} m + \delta_{230} r; \quad \mu_{231} = \delta_{131} m + \delta_{221} r + \delta_{230} n;$$

$$\mu_{222} = \delta_{122} m + \delta_{212} r + \delta_{211} n; \quad \mu_{213} = \delta_{113} m + \delta_{203} r + \delta_{212} n;$$

$$\mu_{141} = \delta_{041} m + \delta_{131} r + \delta_{140} n; \quad \mu_{132} = \delta_{032} m + \delta_{122} r + \delta_{131} n;$$

$$\mu_{123} = \delta_{023} m + \delta_{113} r + \delta_{122} n; \quad \mu_{042} = \delta_{032} r + \delta_{041} n;$$

$$\mu_{033} = \delta_{023} r + \delta_{032} n.$$

7. Шестерная коинциденція. Семь коннексовъ или коннексъ и пятерная коинциненція или коинциденціи простая и четверная или коинциденціи двойная и тройная имѣютъ общими ∞^3 элементовъ, совокупности которыхъ придадимъ названіе шестерной коинциденціи.

Произвольная прямая пространства не принадлежитъ вообще такой конфигураціи, т. е. не входитъ въ составъ ни одного ея элемента; всѣ прямыя, входящія въ составъ элементовъ шестерной коинциденціи, образуютъ комплексъ, котораго рангъ означимъ λ_{313}, и каждой такой прямой принадлежитъ опредѣленное сочетаніе (x, u), вмѣстѣ съ этою прямою образующее элементъ конфигураціи. Произвольно заданной точкѣ принадлежитъ $2\lambda_{043}$ сочетаній (прямая, плоскость), произвольно заданной плоскости—$2\lambda_{340}$ сочетаній (точка, прямая). Элементовъ, которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, имѣется λ_{313},—ихъ прямыя суть прямыя комплекса. Элементовъ, которыхъ прямая проходитъ черезъ данную точку или лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1: прямыя суть прямыя вышеупомянутаго комплекса, принадлежащія связкѣ съ вершиною въ данной точкѣ и образующія конусъ порядка $2\lambda_{313}$ (или лежащія въ данной плоскости и огибающія плоскую кривую порядка $2\lambda_{313}$), точки этихъ элементовъ заполняютъ кривую двоякой кривизны порядка λ_{223}, а плоскости огибаютъ развертывающуюся класса λ_{322}. Совокупность сочетаній (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{133}$, развертывающаяся класса $2\lambda_{142}$). Если соберемъ всѣ элементы, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, то сочетанія (x, p) этихъ элементовъ образуютъ пару (кривая двоякой кривизны порядка $2\lambda_{241}$, линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{331}$). Наконецъ $2\lambda_{232}$ элементы имѣютъ точку въ данной плоскости, плоскость въ данной связкѣ, и прямую въ данномъ спеціальномъ линейномъ комплексѣ. Перечисленныя 10 характеристикъ такъ выражаются въ случаѣ, если шестерная коинциденція задана, какъ пересѣченіе семи коннексовъ

$$(m, r, n), \quad (m^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{I}}, n) \ldots (m^{\mathrm{VI}}, r^{\mathrm{VI}}, n^{\mathrm{VI}}):$$

$$\lambda_{340} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}}; \qquad \lambda_{331} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{322} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \qquad \lambda_{043} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{133} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \qquad \lambda_{223} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{241} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \qquad \lambda_{142} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{313} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \qquad \lambda_{232} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}.$$

Если получаемъ шестерную коинциденцію въ пересѣченіи пятерной съ коннексомъ (m, r, n), то тѣ же характеристики выразятся:

$$\lambda_{340} = m\mu_{240} + r\mu_{330}; \quad \lambda_{331} = m\mu_{231} + r\mu_{321} + n\mu_{330};$$

$$\lambda_{322} = m\mu_{222} + r\mu_{312} + n\mu_{321}; \quad \lambda_{043} = r\mu_{033} + n\mu_{042};$$

$$\lambda_{133} = m\mu_{033} + r\mu_{123} + n\mu_{132}; \quad \lambda_{223} = m\mu_{123} + r\mu_{213} + n\mu_{222};$$

$$\lambda_{241} = m\mu_{141} + r\mu_{231} + n\mu_{240}; \quad \lambda_{142} = m\mu_{042} + r\mu_{132} + n\mu_{141};$$

$$\lambda_{313} = m\mu_{213} + r\mu_{303} + n\mu_{312}; \quad \lambda_{232} = m\mu_{132} + r\mu_{222} + n\mu_{231}.$$

Въ виду того, что въ шестерной коинциденціи устанавливается извѣстнаго рода соотвѣтствіе между всѣми точками пространства, прямыми нѣкотораго комплекса и всѣми плоскостями пространства, можно называть шестерную коинциденцію элементовъ (x, p, u) *тройкою* (точечное пространство, комплексъ, плоскостное пространство).

8. Семерная коинциденція. Дальнѣйшую конфигурацію представляетъ совокупность ∞^2 элементовъ (x, p, u), выдѣляемая восьмернымъ условіемъ: пересѣченіемъ восьми коннексовъ или шестерной коинциденціи съ коннексомъ, пятерной коинциденціи съ простою, четверной съ двойною или двухъ тройныхъ. Характеристики ея

$$v_{341},\ v_{242},\ v_{143},\ v_{332},\ v_{202},\ v_{323},$$

имѣютъ слѣдующее значеніе. Точки элементовъ образуютъ поверхность порядка $2v_{143}$, прямыя—конгруэнцію ранга v_{323}, плоскости огибаютъ поверхность класса $2v_{341}$. Элементовъ, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1: точки эти образуютъ кривую пересѣченія вышеупомянутой поверхности съ данною плоскостью, прямыя покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2v_{233}$, плоскости огибаютъ развертывающуюся класса $2v_{242}$; двойственно элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣется также ∞^1: ихъ точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка $2v_{242}$, прямыя покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2v_{332}$ и плоскости огибаютъ конусъ, касательный къ вышеупомянутой поверхности класса $2v_{341}$ и имѣющій вершину въ данной точкѣ. Поэтому можемъ называть нашу фигуру тройкою: (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность).

Если семерная коинциденція задана восемью коннексами

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{VII}}, r^{\mathrm{VII}}, n^{\mathrm{VII}}),$$

то

$$v_{341} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}; \quad v_{143} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}};$$

$$v_{242} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}; \quad v_{323} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}};$$

$$v_{332} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}; \quad v_{233} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}.$$

Отсюда если всѣ коннексы

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{VII}}, r^{\mathrm{VII}}, n^{\mathrm{VII}}),$$

суть трилинейные, то порядокъ точечной поверхности тройки равенъ 560, рангъ конгруэнціи 560 и классъ плоскостной поверхности 560. Кривая двоякой кривизны и линейчатая поверхность, принадлежащія плоскостямъ данной связки, будутъ порядка 840 и ранга 1120; принадлежащія точкамъ данной плоскости линейчатая поверхность и развертывающаяся оказываются ранга 1120 и класса 840.

Если поверхность задана пересѣченіемъ коннекса (m, r, n) съ шестерной коинциденціей, то

$$v_{341} = m\lambda_{340} + r\lambda_{331} + n\lambda_{340}; \qquad v_{143} = m\lambda_{043} + r\lambda_{133} + n\lambda_{142};$$

$$v_{242} = m\lambda_{142} + r\lambda_{232} + n\lambda_{241}; \qquad v_{323} = m\lambda_{223} + r\lambda_{313} + n\lambda_{332};$$

$$v_{332} = m\lambda_{232} + r\lambda_{322} + n\lambda_{331}; \qquad v_{233} = m\lambda_{133} + r\lambda_{223} + n\lambda_{232}.$$

9. Девять условій отдѣляютъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) ∞^1 такихъ элементовъ, которые образуютъ *тройку (кривая двоякой кривизны порядка* $2\varkappa_{243}$, *линейчатая поверхность ранга* $2\varkappa_{333}$, *развертывающаяся класса* $2\varkappa_{342}$). Точка первой въ соединеніи съ опредѣленной образующей второй и опредѣленною плоскостью третьей образуютъ элементъ конфигураціи.

Если тройка задана, какъ пересѣченіе девяти коннексовъ

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{VIII}}, r^{\mathrm{VIII}}. n^{\mathrm{VIII}}),$$

то

$$\varkappa_{342} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}};$$

$$\varkappa_{333} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}};$$

$$\varkappa_{243} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}}.$$

Если, напримѣръ беремъ девять трилинейныхъ коннексовъ, то порядокъ кривой есть 2520, рангъ линейчатой поверхности 3360 и классъ развертывающейся 2520.

Тройка можетъ быть задана также пересѣченіемъ коннекса съ тройкою (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность). Тогда три ея характеристики выразятся

$$\varkappa_{342} = m v_{242} + r v_{332} + n v_{341}, \quad \varkappa_{333} = m v_{233} + r v_{323} + n v_{332},$$

$$\varkappa_{243} = m v_{143} + r v_{233} + n v_{242}.$$

10. Десятерное условіе, наложенное на элементы, даетъ конечное ихъ число. Такимъ образомъ десять коннексовъ

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{IX}} r^{\mathrm{IX}} n^{\mathrm{IX}})$$

имѣютъ общихъ элементовъ

$$N = 2\sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}} n^{\mathrm{IX}}.$$

Конечное число общихъ элементовъ имѣютъ далѣе коннексъ и тройка (кривая двоякой кривизны, линейчатая поверхность, развертывающаяся). Число это равно

$$N = 2(m\varkappa_{243} + r\varkappa_{333} + n\varkappa_{342}).$$

Простая коинциденція пересѣкается съ тройкою (точечн. поверхность, конгруэнція, плоскостн. поверхность) въ

$$N = 2(\alpha_{200}v_{143} + \alpha_{110}v_{233} + \alpha_{101}v_{242} + \alpha_{020}v_{323} + \alpha_{011}v_{332} + \alpha_{002}v_{341})$$

элементахъ. Число элементовъ пересѣченія двойной коинциденціи съ шестерною опредѣляется формулою:

$$N = 2(\beta_{300}\lambda_{043} + \beta_{210}\lambda_{133} + \beta_{201}\lambda_{142} + \beta_{120}\lambda_{223} + \beta_{111}\lambda_{232} + \beta_{102}\lambda_{241} +$$
$$+ \beta_{030}\lambda_{313} + \beta_{021}\lambda_{322} + \beta_{012}\lambda_{331} + \beta_{003}\lambda_{340}).$$

Тройная коинциденція въ пересѣченіи съ пятерною даетъ

$$N = \gamma_{310}\mu_{033} + \gamma_{301}\mu_{042} + \gamma_{220}\mu_{123} + \gamma_{211}\mu_{132} + \gamma_{202}\mu_{141} + \gamma_{130}\mu_{213} +$$
$$+ \gamma_{121}\mu_{222} + \gamma_{112}\mu_{231} + \gamma_{103}\mu_{240} + \gamma_{040}\mu_{303} + \gamma_{031}\mu_{312} + \gamma_{022}\mu_{321} + \gamma_{012}\mu_{331})$$

элементовъ и наконецъ двѣ четверныхъ коинциденціи имѣютъ

$$N = 2(\delta_{320}\delta^{\mathrm{I}}_{023} + \delta_{311}\delta^{\mathrm{I}}_{032} + \delta_{302}\delta^{\mathrm{I}}_{041} + \delta_{230}\delta^{\mathrm{I}}_{113} + \delta_{221}\delta^{\mathrm{I}}_{122} + \delta_{212}\delta^{\mathrm{I}}_{131} +$$
$$+ \delta_{203}\delta^{\mathrm{I}}_{140} + \delta_{140}\delta^{\mathrm{I}}_{203} + \delta_{131}\delta^{\mathrm{I}}_{212} + \delta_{122}\delta^{\mathrm{I}}_{221} + \delta_{113}\delta^{\mathrm{I}}_{230} + \delta_{041}\delta^{\mathrm{I}}_{302} +$$
$$+ \delta_{032}\delta^{\mathrm{I}}_{311} + \delta_{023}\delta^{\mathrm{I}}_{320})$$

общихъ элементовъ.

Въ частности, напримѣръ, число элементовъ пересѣченія 10 трилинейныхъ коннексовъ равно

$$2520 + 3360 + 2520 = 8400.$$

11. Въ послѣдующемъ мы будемъ разсматривать главнымъ образомъ коннексъ и простую коинциденцію. Поэтому въ заключеніе настоящаго §-а остановимся еще на числѣ произвольныхъ коэффиціентовъ,

которое содержитъ общее уравненіе коннекса (m, r, n). Число членовъ его уравненія, а слѣдовательно, и число коэффиціентовъ равно

$$N_{(m, r, n)} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}{1.2.3.4.5} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}.$$

Число постоянныхъ, входящихъ въ это уравненіе, можетъ быть однако понижено съ помощью уравненія, связывающаго координаты прямой:

$$\frac{1}{2}(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Поэтому одинъ и тотъ же коннексъ можетъ быть опредѣленъ не только уравненіемъ

$$f(x, p, u) = 0$$

но и всякимъ уравненіемъ

$$f(xpu) + (p, p) . f_1(xpu) = 0$$

гдѣ f_1 функція однородная и степени m отн. x_i, $r-2$ отн. p_{ik} и степени n отн. u съ совершенно произвольными коэффиціентами. Съ помощью ея мы можемъ, слѣдовательно, во всякомъ уравненіи $f=0$ уничтожить

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r-1) . r . (r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

коэффиціентовъ, такъ что дѣйствительно независимыхъ остается

$$N^{\mathrm{I}}_{(m, r, n)} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)^2(r+3)}{1.3.4} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

формула эта справедлива и при $r < 2$.

На единицу меньшее число условій (напр., элементовъ) должно быть дано, чтобы опредѣлить вполнѣ коннексъ.

§ II.

Простѣйшія конфигураціи съ элементомъ (x, p, u).

1. Трилинейный коннексъ.

Уравненіе

$$f(x\,,\,p\,,\,u)=\sum a_{i,k,jl}x_iu_kp_{jl}=a_x(\mathfrak{aa}pp)u_\alpha=0 \tag{1}$$

линейное относительно x_i, p_{jl} и u_k опредѣляетъ трилинейный коннексъ. Оно содержитъ 96 коэффиціентовъ, и для полнаго опредѣленія конфигураціи должны быть заданы 95 ея элементовъ $(x\,,\,p\,,\,u)$.

Основныхъ точекъ, прямыхъ или плоскостей общій (т. е. имѣющій уравненіе съ произвольными коэффиціентами) трилинейный коннексъ не содержитъ.

Но *основныя сочетанія* $(x\,,\,p)$, $(p\,,\,u)$, $(x\,,\,u)$ принадлежатъ и общему коннексу $(1\,,\,1\,,\,1)$.

Таковы будутъ прежде всего пары (точка, плоскость), общія шести билинейнымъ коннексамъ $(x\,,\,u)$:

$$\frac{df}{dp_{jl}}=\sum a_{ikjl}\,x_iu_k=0 \quad (j\,,\;l=1\,,\;2\,,\;3\,,\;4). \tag{2}$$

Основныхъ сочетаній (точка, плоскость) общій трилинейный коннексъ имѣетъ 20,—по числу элементовъ пересѣченія шести билинейныхъ коннексовъ $(x\,,\,u)$.

Основныя сочетанія (точка, прямая) общаго трилинейнаго коннекса суть элементы пересѣченія четырехъ билинейныхъ коннексовъ $(x\,,\,p)$:

$$\sum a_{i,k,jl}x_ip_{jl}=0 \quad (k=1\,,\;2\,,\;3\,,\;4) \tag{3}$$

Трилинейный коннексъ (1) *имѣетъ* ∞^3 *основныхъ сочетаній (точка, прямая) образующихъ пару (точечное пространство, комплексъ 4 ранга).* Прямыя этихъ сочетаній заполняютъ комплексъ 4 ранга

$$\Delta=\left|\frac{d^2f}{dx_idu_k}\right|=(\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}p^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{I}})(\mathfrak{cc}p^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{dd}p^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{III}})(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)=0. \tag{4}$$

Каждой прямой принадлежитъ опредѣленная вообще точка, координаты которой выполняютъ уравненія (3), при условіи (4) совмѣстныя. Исключенія составляютъ тѣ прямыя, которыя уничтожаютъ не только (4), но и всѣ его первые миноры. Такихъ прямыхъ трилинейный коннексъ содержитъ 162,—по числу прямыхъ пересѣченія четырехъ комплексовъ 3 ранга, опредѣляемыхъ уравненіями

$$\frac{d\Delta}{df_{11}}=0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{22}}=0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{33}}=0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{44}}=0$$

гдѣ мы для краткости обозначили

$$f_{ii} = \frac{d^2 f}{dx_i du_i}.$$

Обратно, каждой точкѣ пространства принадлежатъ двѣ прямыхъ вещественныхъ, или мнимыхъ, прямыя пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ (3). Прямымъ комплекса (4), лежащимъ въ данной плоскости, или проходящимъ черезъ данную точку, принадлежатъ точки кривой 6-го порядка, и точкамъ данной плоскости принадлежитъ конгруэнція 6-го ранга, лежащая въ комплексѣ (4). Прямымъ комплекса (4), встрѣчающимъ данную прямую, принадлежитъ поверхность 4-го порядка, и точкамъ данной прямой—линейчатая поверхность ранга 4, всѣ прямыя которой составляютъ основныя сочетанія трилинейнаго коннекса съ опредѣленными точками данной прямой.

Основныхъ сочетаній (прямая, плоскость) трилинейный коннексъ имѣетъ также ∞^3: *они опредѣляются уравненіями*

$$\frac{df(x, p, u)}{dx_i} = \sum a_{i,\,k;\,jl}\, u_k p_{jl} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{5}$$

и образуютъ пару (комплексъ 4 ранга, плоскостное пространство). Комплексъ этотъ, какъ легко видѣть, совпадаетъ съ полученнымъ выше комплексомъ (4).

Замѣтимъ, что комплексъ (4) не будетъ самымъ общимъ комплексомъ 4 ранга—онъ зависитъ не отъ 104 параметровъ, какъ общій, а лишь отъ 95.

Можно замѣтить, подобно тому, какъ имѣли выше для основныхъ сочетаній (точка, прямая): съ прямыми комплекса (4), принадлежащими данной связкѣ (или данному полю), составляютъ основное сочетаніе плоскости, огибающія развертывающуюся поверхность 6 класса, и прямыя комплекса (4), образующія основныя сочетанія съ плоскостями данной связки, образуютъ конгруэнцію 6 ранга, наконецъ прямымъ комплекса (4), встрѣчающимъ данную прямую, принадлежатъ (въ указанномъ смыслѣ) касательныя къ поверхности 4 порядка плоскости, и плоскостямъ даннаго пучка—лучи линейчатой поверхности 4 ранга.

Произвольно взятому сочетанію $(p\,,\ u)$,—если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ плоскость v, координаты которой суть

$$\sigma v_i = \frac{df}{dx_i} = a_i(\,\mathrm{aa}\,pp)u_\alpha.$$

Плоскость v пересѣкается съ плоскостью u взятаго сочетанія по прямой q, аксіальныя координаты которой суть

$$\tau \,.\, q_{ik} = \sigma(v_i u_k) = (\,\mathrm{aa}\, pp) u_\alpha (a_i u_k)\,.$$

Эта прямая встрѣчаетъ прямую p сочетанія, если выполнено условіе

$$\sum q_{ik} p_{ik} = 0$$

т. е.

$$(\,\mathrm{aa}\, pp)(au\pi\pi) u_\alpha = 0 \tag{6}$$

(гдѣ π означаютъ аксіальныя координаты прямой p), т. е. если взятое $(p\,,\ u)$ принадлежитъ опредѣленному этимъ уравненіемъ коннексу 2 ранга и 2-го класса. Итакъ существуетъ ∞^6 сочетаній $(p\,,\ u)$, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что точки встрѣчи прямой p элемента трилинейнаго коннекса съ плоскостью u того же элемента, и съ v совпадаютъ.

Прямая q совпадаетъ съ прямою p, если существуютъ равенства

$$\lambda(\,\mathrm{aa}\, pp) u_\alpha (a_i u_k) = \mu \,.\, p_{ik}$$

независимыхъ соотношеній по исключеніи λ/μ получаемъ пять,—такихъ сочетаній имѣемъ слѣдовательно ∞^2,—они образуютъ пару: (конгруэнція, поверхность), характеристики этой пары суть (30, 160, 120), гдѣ 120—рангъ конгруэнціи, 30—классъ поверхности пары—т. е. число сочетаній пары, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и 160—число сочетаній, которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую и плоскость проходитъ черезъ данную точку, иными словами рангъ линейчатой поверхности, образуемой прямыми сочетаній, которыхъ плоскости принадлежитъ данной связкѣ, или классъ развертывающейся, огибаемой плоскостями, касательными къ поверхности пары, входящими въ составъ тѣхъ сочетаній, которыхъ прямыя встрѣчаютъ данную прямую.

Двойственно, если возьмемъ сочетаніе $(x\,,\ p)$—не принадлежащее къ числу основныхъ,—то ему въ коннексѣ принадлежитъ точка y какъ центръ связки плоскостей, составляющихъ съ $(x\,,\ p)$ элементъ трилинейнаго коннекса. Координаты этой точки y:

$$\varrho y_k = a_x(\,\mathrm{aa}\, pp)\alpha_k\,;$$

и слѣдовательно, прямая, соединяющая x и y, имѣетъ радіальныя координаты пропорціональныя опредѣлителямъ:

$$a_x(\,\mathrm{aa}\, pp)(\alpha_i x_k) = \tau \,.\, q'_{ik}$$

прямая эта встрѣчаетъ прямую p элемента, если взятое нами сочетаніе (x, p) принадлежитъ коннексу 2-го порядка и 2-го ранга

$$a_x(\mathrm{aa}\,pp)\,(\alpha x\,pp) = 0 \tag{7}$$

Точно такъ же, какъ и выше получимъ далѣе пару (поверхность, конгруэнція) съ характеристиками $(30, 160, 120)$, для сочетаній (x, p) которой прямыя $q' = (x, y)$ и p совпадаютъ, 30 есть порядокъ поверхности, 120—рангъ конгруэнціи и аналогичное предыдущему значеніе имѣетъ третья характеристика 160.

Для сочетаній (x, p), принадлежащихъ (7), точка y лежитъ въ плоскости, опредѣляемой точкою x и прямой p сочетанія, или плоскости (x, p) и (y, p) совпадаютъ.

Сочетанію (x, u) принадлежитъ вообще линейный комплексъ. Комплексъ этотъ будетъ спеціальнымъ, если (x, u) принадлежитъ коннексу (x, u) порядка 2 и класса 2:

$$a_x b_x u_\alpha u_\beta\,(\mathrm{aa}\,\mathfrak{bb}) = 0. \tag{8}$$

Прямой p принадлежитъ въ трилинейномъ коннексѣ (1) опредѣленный билинейный коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), устанавливающій, какъ извѣстно, коллинеарное преобразованіе пространства. Соотвѣтственно всѣмъ ∞^4 прямымъ пространства получимъ распредѣленіе всѣхъ ∞^9 элементовъ (x, p, u) трилинейнаго коннекса на ∞^4 системъ по ∞^5 элементовъ. Можно сказать, что изъ всего многообразія ∞^{15} коллинеацій, трилинейный коннексъ выдѣляетъ многообразіе ∞^4 коллинеацій, которыя для общаго трилинейнаго коннекса всѣ между собою различны (для совпаденія двухъ коллинеацій должны быть выполнены 15 условій, а величинъ для ихъ выполненія имѣемъ лишь 10). Всѣ ∞^4 билинейныхъ коннексовъ, устанавливающихъ эти коллинеаціи имѣютъ 20 общихъ элементовъ—основныя сочетанія (x, u) трилинейнаго коннекса. Особенности коллинеаціи, принадлежащей прямой, выдѣляютъ эту прямую изъ числа другихъ, и такимъ образомъ устанавливая инваріантныя формы для коллинеаціи, получаемъ коваріанты трилинейнаго коннекса.

Такимъ образомъ получаемъ прежде всего новое значеніе установленнаго выше комплекса 4-го ранга (4). *Его прямымъ принадлежатъ вырожденныя коллинеаціи.* Дѣйств., уравненіе его выражаетъ, что опредѣлитель коллинеаціи, принадлежащей прямой p, обращается въ 0.

Подобнымъ образомъ прямыя p, принадлежащія которымъ коллинеаціи находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ (т. е. если существуетъ ∞^9 тетраэдровъ, соотвѣтствующіе которымъ въ коллинеаціи тетраэдры въ нихъ вписаны), образуютъ линейный комплексъ

$$P_1 = (\mathrm{aa}\,pp)\,a_\alpha = 0. \tag{9}$$

Это приводитъ насъ между прочимъ къ инваріанту трилинейнаго коннекса $(\mathfrak{aa}\mathfrak{bb})\,a_\alpha\, b_\beta$ (9a), уничтоженіе котораго выражаетъ, что этотъ комплексъ есть вырожденный. Во вписанномъ положеніи тетраэдра находится квадратъ коллинеаціи принадлежащей p

$$(\mathfrak{aa}\,pp)\,(\mathfrak{bb}pp)\,a_x\,b_\alpha\,u_\beta = 0$$

если прямая принадлежитъ квадратичному комплексу

$$P_2 = (\mathfrak{aa}\,pp)\,(\mathfrak{bb}\,pp)\,a_\beta\,b_\alpha = 0 \tag{10}$$

и точно также прямыя комплекса 3 ранга:

$$P_3 = (\mathfrak{aa}\,pp)\,(\mathfrak{bb}\,pp)\,(\mathfrak{cc}\,pp)\,a_\beta\,b_\gamma\,c_\alpha = 0 \tag{11}$$

даютъ коллинеаціи, 3-я степень которыхъ находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ.

Можно установить еще комплексъ

$$P_3' = (\mathfrak{aa}\,pp)\,(\mathfrak{bb}\,pp)\,(\mathfrak{cc}\,pp)\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

прямыя котораго даютъ коллинеаціи въ описанномъ положеніи тетраэдровъ.

Плоскости u принадлежитъ билинейный коннексъ $(x\,,\,p)$ и соотвѣтственно всѣмъ плоскостямъ пространства получаемъ ∞^3 такихъ коннексовъ, т. е. распредѣляемъ ∞^9 элементовъ на ∞^3 системъ по ∞^6 элементовъ каждая. Получаемая система коннексовъ $(x\,,\,p)$ линейна и опирается на пару [точечное пространство, комплексъ 4 ранга (4)].

Каждый билинейный коннексъ $(x\,,\,p)$ имѣетъ двѣ основныхъ прямыхъ, которыя могутъ быть вещественны и различны, вещественны и совпадать или наконецъ могутъ быть мнимы. Такимъ образомъ каждой плоскости пространства принадлежатъ двѣ прямыя,—это именно прямыя комплекса (4), принадлежащія этой плоскости, и основной комплексъ (4) есть слѣдовательно, геометрическое мѣсто паръ основыхъ прямыхъ билинейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ плоскостямъ пространства.

Произвольно взятый билинейный коннексъ, принадлежащій плоскости, основныхъ точекъ не имѣетъ. Но въ числѣ ∞^3 плоскостей пространства существуетъ 20, которымъ принадлежатъ билинейные коннексы (x, p), имѣющіе основную точку,—эти плоскости и соотвѣтствующія имъ точки опредѣляются уравненіями

$$\sum a_{i,\,k,\,jl}\ x_i u_k = \frac{df}{dp_{jl}} = 0 \tag{2}$$

и суть слѣдовательно, плоскости и точки основныхъ сочетаній (x, u) трилинейнаго коннекса.

Двойственно точкѣ x принадлежитъ опредѣленный билинейный коннексъ (p, u), а всѣмъ ∞^3 точкамъ пространства—линейная система ∞^3 билинейныхъ коннексовъ (p, u). Основныя прямыя этихъ коннексовъ образуютъ тотъ же комплексъ 4 ранга (4).

Основныя плоскости имѣются только въ тѣхъ коннексахъ, которые выполняютъ тѣже уравненія (2), и слѣдовательно, тѣже 20 точекъ даютъ линейные комплексы (p, u), имѣющія каждый основную плоскость.

2. Коинциденція—пересѣченіе двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Элементы (x, p, u), общіе двумъ трилинейнымъ коннексамъ

$$\begin{aligned} f(x, p, u) &= \sum a_{i,\,k,\,jl}\ x_i u_k p_{jl} = 0, \\ F(x, p, u) &= \sum a'_{i,\,k,\,jl}\ x_i u_k p_{jl} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

образуютъ коинциденцію (простую) изъ ∞^8 элементовъ.

Произвольно взятому сочетанію (p, u) принадлежитъ вообще опредѣленная прямая — пересѣченіе плоскостей v и v', принадлежащихъ (p, u) въ томъ и другомъ коннексѣ,—точки этой прямой вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (p, u) составляютъ элементъ коинциденціи. Координаты этой прямой выразятся

$$\tau \,.\, Q_{ik} = \frac{df}{dx_i}\cdot\frac{dF}{dx_k} - \frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dF}{dx_i} = (\mathrm{aa}\,pp)\,(\mathrm{a'a'}\,pp)\,u_\alpha u_{\alpha'}\ \ (a_i a'_k).$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ также прямая, какъ ось пучка плоскостей, каждая изъ которыхъ составляетъ элементъ коинциденціи вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (x, p). Прямая эта соединяетъ точки y и y', принадлежащія сочетанію (x, p) въ томъ и другомъ трилинейныхъ коннексахъ.

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція—пересѣченіе двухъ линейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ (x, u) въ томъ и другомъ коннексахъ (1).

Основными сочетаніями явятся тѣ, которымъ принадлежитъ высшее многообразіе точекъ, соотвѣтств. плоскостей и прямыхъ, чѣмъ для произвольно взятаго.

Такимъ образомъ основнымъ сочетаніемъ (p, u) будетъ такое, съ которымъ элементъ коинциденціи составятъ не ∞^1 точекъ, а ∞^2 или даже ∞^3. Впрочемъ послѣдняго обстоятельства не можетъ встрѣтиться, если оба трилинейныхъ коннекса, опредѣляющіе коинциденцію, будутъ общими. Въ самомъ дѣлѣ, для этого необходимо было бы одновременное выполненіе восьми уравненій

$$\frac{df}{dx_i}=0 \qquad \frac{dF}{dx_i}=0 \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

съ семью неизвѣстными. Исключеніе u_k и p_{il} изъ этихъ восьми уравненій доставитъ соотношеніе между коэффиціентами коинциденціи, которое и будетъ выражаться уничтоженіемъ соотвѣтств. совмѣстнаго инваріанта двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Поэтому для коинциденціи возможны въ общемъ случаѣ только такія основныя сочетанія (p, u), съ которыми элементъ ея составляютъ ∞^2 точекъ, образующихъ плоскость. Возможно это прежде всего если (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ одного изъ трилинейныхъ коннексовъ, т. е. если (p, u) выполняютъ уравненія

$$\frac{df}{dx_i}=0 \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

или уравненія

$$\frac{dF}{dx_i}=0 \qquad (i-1, 2, 3, 4) \tag{5^1}$$

Такихъ сочетаній коинциденція имѣетъ ∞^3.

Но кромѣ того, указанное обстоятельство встрѣтится всякій разъ, когда совпадутъ принадлежащія сочетанію плоскости v и v', и благодаря этому прямая ихъ пересѣченія станетъ неопредѣленною. Чтобы обстоятельство это встрѣтилось, должны быть выполнены уравненія

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{dF}{dx_1}}=\frac{\frac{df}{dx_2}}{\frac{dF}{dx_2}}=\frac{\frac{df}{dx_3}}{\frac{dF}{dx_3}}=\frac{\frac{df}{dx_4}}{\frac{dF}{dx_4}} \tag{14}$$

что даетъ три независимыхъ соотношенія между величинами p_{ik} u_l. Такимъ образомъ коинциденція (13) имѣетъ ∞^4 основныхъ сочетаній

(x, u) образующихъ двойную коинциденцію (p, u). Чтобы получить характеристики этой послѣдней, замѣнимъ (14) тремя независимыми соотношеніями, напримѣръ,

$$f'_{x_1} F'_{x_2} - f'_{x_2} F'_{x_1} = 0\,, \quad f'_{x_2} F'_{x_3} - f'_{x_3} F'_{x_2} = 0\,, \quad f'_{x_3} F'_{x_4} - f'_{x_4} F'_{x_3} = 0\,. \tag{15}$$

или символически—тремя независимыми опредѣлителями матрицы

$$(\mathrm{aa}\,pp)\,(\mathrm{a'a'}\,pp)\,u_\alpha u_{\alpha'} \begin{Vmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 \end{Vmatrix} = 0\,.$$

Но система (15) не вполнѣ эквивалентна системѣ (14),—она удовлетворяется, если (p, u) удовлетворяетъ такимъ системамъ:

$$\begin{matrix} F'_{x_2} = 0\,, & f'_{x_2} = 0 & f'_{x_3} F'_{x_4} - f'_{x_4} F'_{x_3} = 0 \\ \text{и} & & \\ F'_{x_3} = 0\,, & f'_{x_3} = 0 & f'_{x_1} F'_{x_2} - f'_{x_2} F'_{x_1} = 0 \end{matrix} \tag{16}$$

но эти послѣднія не выполняютъ тождественно уравненія

$$F'_{x_4} f'_{x_1} - F'_{x_1} f'_{x_4} = 0$$

слѣдующаго изъ (14),—которое также должно быть выполнено искомыми сочетаніями (p, u). Такія (p, u) должны быть отброшены. Отсюда находимъ, что полученное M_4 [1]) сочетаній (p, u) имѣетъ характеристики (4, 12, 12, 8). Значеніе чиселъ таково: въ разсматриваемой двойной коинциденціи сочетаній (p, u) данной плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 8 ранга, данной прямой—4 плоскости; прямымъ даннаго поля („Strahlenfeld") или данной связки—поверхность 12 класса, прямымъ даннаго пучка—развертывающаяся поверхность 12 класса, обратно плоскостямъ данной связки—комплексъ 12 ранга, плоскостями даннаго пучка—конгруэнція 12 ранга. Въ составъ этой двойной коинциденціи входятъ и основныя сочетанія того и другого коннексовъ (13).

Аналогичнымъ образомъ мы находимъ основныя сочетанія (x, p) коинциденціи (13) изъ уравненій

$$\frac{\dfrac{df}{du_1}}{\dfrac{dF}{du_1}} = \frac{\dfrac{df}{du_2}}{\dfrac{dF}{du_2}} = \frac{\dfrac{df}{du_3}}{\dfrac{dF}{du_3}} = \frac{\dfrac{df}{du_4}}{\dfrac{dF}{du_4}} \tag{17}$$

[1]) M_4 = многообразіе четырехъ измѣреній,—обозначеніе, которымъ для краткости будемъ пользоваться и далѣе.

которыя символически изобразятся

$$(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)\,a_x a'_x \left\| \begin{matrix} \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 \\ \alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3\,\alpha'_4 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Уравненія (17) можно замѣнить другими тремя

$$f'_{u_1}F'_{u_2} - f'_{u_2}F'_{u_1} = 0 \quad f'_{u_2}F'_{u_3} - f'_{u_3}F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_3}F'_{u_4} - f'_{u_4}F'_{u_3} = 0 \qquad (18)$$

къ которымъ слѣдуетъ добавлять слѣдующее уже изъ нихъ уравненіе

$$f'_{u_4}F'_{u_1} - f'_{u_1}F'_{u_4} = 0$$

чтобы исключить постороннія сочетанія (x, p), удовлетворяющія уравненіямъ

$$f'_{u_2} = 0 \quad F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_3}F'_{u_4} - f'_{u_4}F'_{u_3} = 6$$

и

$$f'_{u_3} = 0 \quad F'_{u_3} = 0 \quad f'_{u_1}F'_{u_2} - f'_{u_2}F'_{u_1} = 0$$

что даетъ для характеристикъ двойной коинциденціи основныхъ сочетаній (x, p):

$$G.\xi_3 = 4; \qquad pg_s\xi_3 = 12 \qquad p^2g_p\xi_3 = p^2g_e\xi_3 = 12. \qquad p^3g\xi_3 = 8$$

которыя показываютъ, что данной прямой принадлежатъ 4 точки, данной точкѣ—линейчатая поверхность восьмого ранга, прямымъ данной связки—кривая двоякой кривизны 12 порядка и точкамъ данной плоскости—комплексъ 12 ранга; прямымъ данной связки или даннаго поля—поверхность 12 порядка, и точкамъ данной прямой — конгруэнція 12 ранга.

Эта двойная коинциденція (x, p) содержитъ разумѣется основныя сочетанія и того и другого коннекса.

Наконецъ основныя сочетанія (x, u) коинциденціи (13) опредѣляются уравненіями:

$$\frac{\dfrac{df}{dp_{12}}}{\dfrac{dF}{dp_{12}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{13}}}{\dfrac{dF}{dp_{13}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{14}}}{\dfrac{dF}{dp_{14}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{34}}}{\dfrac{dF}{dp_{34}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{42}}}{\dfrac{dF}{dp_{42}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{23}}}{\dfrac{dF}{dp_{23}}} \qquad (19)$$

Замѣняя эту систему уравненіями:

$$\frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,\qquad \frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,\qquad \frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,, \tag{20}$$

$$\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0\,,$$

опредѣляющими ∞^1 элементовъ $(x\,,\,u)$ образующихъ пару (кривая двойной кривизны, развертывающаяся поверхность), вводимъ постороннія рѣшенія,—пары, опредѣляемыя системами уравненій:

$$a)\ \frac{dF}{dp_{13}}=0\qquad \frac{df}{dp_{13}}=0\qquad \frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,,\qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$b)\ \frac{dF}{dp_{14}}=0\qquad \frac{df}{dp_{14}}=0\qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,,\qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$c)\ \frac{dF}{dp_{34}}=0\qquad \frac{df}{dp_{34}}=0\qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,\qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$d)\ \frac{dF}{dp_{42}}=0\qquad \frac{df}{dp_{42}}=0\qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,\qquad \frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,$$

которыя не выполняютъ уравненія, слѣдующаго также изъ (19):

$$\frac{dF}{dp_{23}}\cdot\frac{df}{dp_{12}}-\frac{dF}{dp_{12}}\cdot\frac{df}{dp_{23}}=0\,.$$

Постороннія рѣшенія эти должны быть отброшены при подсчетѣ порядка и класса пары. Но при этомъ мы дважды отбрасываемъ пары:

$$\frac{dF}{dp_{13}}=0 \quad \frac{df}{dp_{13}}=0 \quad \frac{dF}{dp_{34}}=0 \quad \frac{df}{dp_{34}}=0 \quad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0.$$

$$\frac{dF}{dp_{14}}=0 \quad \frac{df}{dp_{14}}=0 \quad \frac{dF}{dp_{42}}=0 \quad \frac{df}{dp_{42}}=0 \quad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0.$$

Поэтому порядокъ и классъ этихъ паръ должны быть добавлены. Такимъ образомъ въ концѣ концовъ получаемъ на основаніи теоремы о пересѣченіи пяти коннексовъ (x, u) [1]).

Точки основныхъ сочетаній (x, u) коинциденціи—пересѣченія двухъ трилинейныхъ коннексовъ образуютъ кривую 32-го порядка, а плоскости этихъ сочетаній огибаютъ развертывающуюся 32-го класса. Кривая эта проходитъ черезъ 20 точекъ основныхъ сочетаній (x, u) коннекса $f=0$ и черезъ 20 такихъ же точекъ коннекса $F=0$, а развертывающаяся касается 40 соотвѣтствующихъ плоскостей.

До сихъ поръ мы брали сочетанія (p, u), (x, p) и (x, u). Зададимся теперь прямою p^0. Въ разсматриваемой коинциденціи (13) этой прямой принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, u), пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ

$$f(x, p^0, u)=0, \quad F(x, p^0, u)=0. \tag{13}$$

Всѣмъ прямымъ пространства принадлежитъ такимъ образомъ ∞^4 такихъ коинциденцій (x, u), и по свойствамъ ихъ можно классифицировать прямыя.

Такъ прежде всего каждая коинциденція имѣетъ основной тетраэдръ, четыре вершины и четыре грани котораго преобразуются одинаково въ коллинеаціяхъ, устанавливаемыхъ тѣмъ и другимъ билинейнымъ коннексомъ. Тетраэдръ этотъ можетъ быть вполнѣ вещественный, или же нѣкорые или даже всѣ его элементы могутъ быть мнимыми, наконецъ возможны его вырожденія. Отсюда является средство классифицировать коинденціи (x, u), а слѣдовательно, и прямыя, которымъ онѣ принадлежатъ въ (13).

Четыре основныя точки для коинциденціи

$$f(x, u)=a_x u_\alpha=0, \quad F(x, u)=a'_x u'_\alpha=0$$

[1]) Теорія коннексовъ, стр. 23.

опредѣляются изъ уравненій

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

что даетъ уравненіе 4-й степени для λ/μ:

$$0 = (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)\lambda^4 + 4(a'bcd)(\alpha'\beta\gamma\delta)\lambda^3\mu +$$

$$+ 6(abc'd')(\alpha\beta\gamma'\delta')\lambda^2\mu^2 + 4(ab'c'd')(\alpha\beta'\gamma'\delta')\lambda\mu^3 + (a'b'c'd')(\alpha'\beta'\gamma'\delta')\mu^4.$$

Примѣняя къ нашей коинциденціи, соотвѣтствующей прямой p, получимъ:

$$0 = \lambda^4 (\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)(\mathfrak{c}\mathfrak{c}pp)(\mathfrak{d}\mathfrak{d}pp)(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) +$$

$$+ 4(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'pp)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)(\mathfrak{c}\mathfrak{c}pp)(\mathfrak{d}\mathfrak{d}pp)(a'bcd)(\alpha'\beta\gamma\delta).\lambda^3\mu +$$

$$+ 6\lambda^2\mu^2(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)(abc'd')(\alpha\beta\gamma'\delta') +$$

$$+ 4(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'pp)(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)(ab'c'd')(\alpha\beta'\gamma'\delta')\lambda\mu^3 +$$

$$+ (\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'pp)(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'pp)(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)(a'b'c'd')(\alpha'\beta'\gamma'\delta')\mu^4.$$

Отдѣльные коэффиціенты суть совмѣстные коваріанты двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Приведу еще только одинъ примѣръ установленія подобнаго совмѣстнаго коваріанта.

Возьмемъ простѣйшій совмѣстный инваріантъ двухъ билинейныхъ кватернарныхъ формъ

$$f(x, u) = a_x u_\alpha \qquad \text{и} \qquad F(x, u) = a'_x u'_\alpha,$$

именно

$$j = a_{\alpha'} a'_\alpha = \sum_i \sum_k a_{ik} a'_{ki}.$$

Геометрическое его значеніе заключается въ томъ, что при $j = 0$ произведенія коллинеацій $f = 0$, $F = 0$ и лѣвое и правое: fF и Ff находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, т. е. если $f(x, u) = 0$ переводитъ точки A, B, C, D, въ A_1, B_1, C_1, D_1, а $F(x, u) = 0$ въ точки A_2, B_2, C_2, D_2, затѣмъ производя сначала коллинеацію, устанавливаемую $f(x, u) = 0$, а потомъ коллинеацію $F(x, u) = 0$ переведемъ A, B, C, D, въ $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$, а при обратномъ порядкѣ выполненіе этихъ коллинеарныхъ преобразованій въ $A_{2,1}$, $B_{2,1}$, $C_{2,1}$, $D_{2,1}$, то оба тетраэдра $A_{12}\ B_{12}\ C_{12}\ D_{12}$ и $A_{21}\ B_{21}\ C_{21}\ D_{21}$ вписаны въ тетраэдръ $ABCD$, т. е. A_{12} и A_{21} лежатъ въ плоскости BCD и т. д.

Составляя такой совмѣстный инваріантъ для коллинеацій, принадлежащихъ въ коинциденціи (13) прямой p, получимъ: прямыя, принадлежащая которымъ коинциденція (x, u) находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, образуютъ комплексъ 2 ранга:

$$(\mathrm{aa}pp)\,(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)\,a'_\alpha\, a_{\alpha'} = 0\,.$$

Плоскости u принадлежитъ ∞^5 сочетаній (x, p), образующихъ коинциденцію—пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ (x, p), и точкѣ x — ∞^5 сочетаній (p, u), образующихъ коинциденцію пересѣченія двухъ билинейныхъ коннексовъ (p, u).

Чтобы воспользоваться этимъ сведеніемъ на болѣе простыя образованія для изученія самой коинциденціи (13), нужно предварительно ознакомиться ближе со свойствами этихъ послѣднихъ болѣе простыхъ образованій, пока еще очень мало изученныхъ. Ограничимся поэтому въ настоящей статьѣ только указаніемъ на этотъ пріемъ сведенія.

3. Двойная коинциденція—пересѣченіе трехъ трилинейныхъ коннексовъ:

$$f(xpu) = 0\,, \qquad F(xpu) = 0\,, \qquad \Phi(xpu) = 0\,. \tag{15}$$

Сочетанію (p, u) принадлежитъ, вообще говоря, совершенно опредѣленная точка x съ координатами

$$\varrho x_i = (\,\mathrm{aa}\,pp)\,\,(\,\mathrm{a}'\mathrm{a}'\,pp)\,\,(\mathrm{a}''\mathrm{a}''\,pp)u_\alpha u_{\alpha'} u_{\alpha''}(aa'a'')_i$$

гдѣ такимъ образомъ символически изображенъ опредѣлитель матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{df}{dx_1} & \dfrac{df}{dx_2} & \dfrac{df}{dx_3} & \dfrac{df}{dx_4} \\[2ex] \dfrac{dF}{dx_1} & \dfrac{dF}{dx_2} & \dfrac{dF}{dx_3} & \dfrac{dF}{dx_4} \\[2ex] \dfrac{d\Phi}{dx_1} & \dfrac{d\Phi}{dx_2} & \dfrac{d\Phi}{dx_3} & \dfrac{d\Phi}{dx_4} \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ подобнымъ образомъ совершенно опредѣленная вообще плоскость u, координаты которой пропорціональны опредѣлителямъ матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{df}{du_1} & \frac{df}{du_2} & \frac{df}{du_3} & \frac{df}{du_4} \\ \frac{dF}{du_1} & \frac{dF}{du_2} & \frac{dF}{du_3} & \frac{dF}{du_4} \\ \frac{d\Phi}{du_1} & \frac{d\Phi}{du_2} & \frac{d\Phi}{du_3} & \frac{d\Phi}{du_4} \end{matrix} \right\| \tag{17}$$

или символически.

$$\sigma . u_i = (\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)(\mathrm{a''a''}pp)\, a_x a'_x a''_x (\alpha\alpha'\alpha'')_i .$$

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга—пересѣченіе трехъ линейныхъ комплексовъ принадлежащихъ сочетанію (x, u) въ коннексахъ $f = 0$, $F = 0$ и $\Phi = 0$.

Одна и таже точка принадлежитъ безчисленному множеству сочетаній (p, u). Если зададимся точкою x, то ей будутъ принадлежать ∞^4 сочетаній (p, u), образующихъ бикоинциденцію (p, u), въ которой плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга, прямой—одна плоскость, плоскостямъ пучка—конгруэнція 3 ранга, плоскостямъ связки—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—развертывающаяся 3. класса и прямымъ связки (поля)—поверхность 3. класса.

Если зададимся прямою, то ей принадлежитъ бикоинциденція ∞^3 сочетаній (x, u), въ которой точкѣ принадлежитъ плоскость, плоскости—точка, точкамъ прямой—развертывающаяся 3. класса, точкамъ плоскости поверхность 3. класса, плоскостямъ пучка—кривая двойной кривизны 3. порядка и плоскостямъ связки—поверхность 3. порядка.

Наконецъ плоскости u принадлежитъ ∞^4 сочетаній (x, p) образующихъ бикоинциденцію этихъ сочетаній, въ которой прямой принадлежитъ опредѣленная точка, точкѣ—линейчатая поверхность 2. ранга, точкамъ прямой—конгруэнція 3. ранга, точками плоскости—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—кривая 3 порядка (двоякой кривизны), прямымъ связки—поверхность 3. порядка.

До сихъ поръ мы говорили относительно обыкновенныхъ сочетаній.

Обращаясь къ *основнымъ сочетаніямъ,* опредѣлимъ прежде всего основныя сочетанія (p, u). Каждому такому сочетанію должна принадлежать въ двойной коинциденціи не одна точка, а безчисленное множество.

Таковы будутъ прежде всего сочетанія (p, u), основныя въ одномъ изъ трехъ трилинейныхъ коннексовъ $f = 0$, $F = 0$ или $\Phi = 0$; во вторыхъ тѣ, которыя будутъ основными сочетаніями въ одной изъ простыхъ коинциденцій, образуемыхъ двумя какими-либо изъ трехъ этихъ коннексовъ. Наконецъ, основными сочетаніями (p, u) будутъ тѣ, для которыхъ три плоскости, подчиняемыя этому сочетанію коннексами $f=0$, $F=0$ $\Phi=0$, проходятъ черезъ одну прямую. Для этого должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы (16).

Независимыхъ между ними только два, и мы получаемъ такимъ образомъ что основныя сочетанія (p, u) для (15) имѣются въ количествѣ ∞^5 и образуютъ коинциденцію (p, u).

Характеристики этой коинциденціи опредѣлимъ замѣтивъ, что если взять два какіе нибудь опредѣлителя матрицы (16) и приравнять нулю, то введемъ лишнюю коинциденцію сочетаній, которыя дѣлаютъ равными два столбца, общіе этимъ двумъ опредѣлителямъ, но не могутъ обратить въ нуль вообще двухъ остальныхъ опредѣлителей матрицы.

Мы получимъ такимъ образомъ, что въ коинциденціи основныхъ сочетаній (p, u) прямой принадлежитъ развертывающаяся 6 класса, плоскости конгруэнція 6 ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 класса, и плоскостямъ пучка—комплексъ 12 ранга.

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ, что ∞^5 основныхъ сочетаній (x, p) образуютъ коинциденцію, въ которой прямой принадлежитъ кривая двоякой кривизны 6. порядка, точкѣ—конгруэнція 6. ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 порядка и точкамъ прямолинейнаго ряда—комплексъ 12. ранга.

Основныя сочетанія (x, u) должны обращать въ нуль всѣ 15 опредѣлителей матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial p_{jl}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial p_{jl}} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_{jl}} \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (jl = 1, 2, 3, 4) \qquad (18)$$

Независимыхъ между ними четыре: основныхъ сочетаній (x, u) двойная коинциденція (15) имѣетъ ∞^2, образующихъ пару поверхностей. Порядокъ и классъ этихъ поверхностей опредѣлятся равными 36, а рангъ пары, т. е. порядокъ кривой, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка, и классъ развертывающейся, принадлежащей точкамъ даннаго прямолинейнаго ряда, равенъ 54.

4. Если обратимся теперь къ тройной коинциденціи, опредѣляемой пересѣченіемъ четырехъ трилинейныхъ коннексовъ, то замѣтимъ что основныхъ сочетаній (x, p) и (p, u), здѣсь уже не существуетъ, и до извѣстной степени можно сказать, что основнымъ сочетаніямъ предыдущихъ конфигурацій здѣсь соотвѣтствуютъ обыкновенныя сочетанія,—та-

кія, которыя даютъ элементы опредѣляемой коинциденціи. Дѣйствительно, если имѣемъ четыре трилинейныхъ коннекса

$$f(xpu)=0\,,\quad g(xpu)=0\,,\quad F(xpu)=0\,,\quad \Phi(xpu)=0\,,$$

то произвольному взятому сочетанію не соотвѣтствуетъ вообще говоря ни одной точки, произвольно взятое сочетаніе (x, p) или (p, u) не входитъ вообще говоря въ составъ ни одного элемента конфигураціи. Только тѣ сочетанія (p, u) изъ общаго ихъ многообразія ∞^7 входятъ въ составъ элемента конфигурацій, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)=0$$

или символически

$$0=(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)(\mathrm{a''a''}pp)(\mathrm{a'''a'''}pp)\,u_\alpha u_{\alpha'} u_{\alpha''} u_{\alpha'''}(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') \tag{19}$$

и слѣдовательно, принадлежатъ коннексу (p, u) 4 ранга и 4 класса.

Точно также только тѣ сочетанія (x, p) входятъ въ составъ элементовъ конфигураціи, которыя принадлежатъ коннексу (x, p) 4 порядка и 4 ранга

$$0=a_x a'_x a''_x a'''_x\,(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)(\mathrm{a''a''}pp)(\mathrm{a'''a'''}pp)(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') \tag{20}$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_4}\right)=0\,.$$

Если обратимся къ сочетаніямъ (x, u), то замѣтимъ что каждому такому сочетанію принадлежатъ двѣ прямыхъ—прямыя пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ. Слѣдовательно, въ тройной коинциденціи только сочетанія (x, u) и могутъ быть основными: для этого необходимо, чтобы принадлежащія такому сочетанію четыре линейныхъ комплекса имѣли общую линейчатую поверхность. Для этого должны обращаться въ нуль опредѣлители матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ этихъ четырехъ комплексовъ, что даетъ три независимыхъ условія: *тройная коинциденція — пересѣченіе четырехъ трилинейныхъ коннексовъ—имѣетъ* M_3 *основныхъ сочетаній* (x, u), *образующихъ бикоинциденцію съ характеристиками (64, 192, 192, 64).*

5. Мы здѣсь ограничивались общими случаями, т. е. случаями, когда между коэффиціентами уравненій, опредѣляющихъ конфигураціи, не существуетъ связей. Но было бы, конечно, весьма важно, особенно въ виду дальнѣйшихъ приложеній, остановиться на случаяхъ вырожденій трилинейныхъ коннексовъ и ихъ коинциденцій.

Укажемъ только на нѣкоторые отдѣльные случаи. Трилинейный коннексъ имѣетъ вершину $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ координатнаго тетраэдра основною точкою, если его уравненіе имѣетъ видъ

$$x_1 f_1(p, u) + x_2 f_2(p, u) + x_3 f_3(p, u) = 0 \qquad (a)$$

къ такому виду помощію преобразованія координатъ можетъ быть сведено уравненіе всякаго трилинейнаго коннекса, имѣющаго основную точку, и слѣдовательно, вообще это уравненіе напишется

$$\alpha_x . f_1(p, u) + \beta_x . f_2(p, u) + \gamma_x . f_3(p, u) = 0 \qquad (a')$$

гдѣ α_x, β_x и γ_x означаютъ линейные однородные многочлены отъ $x_1 \dots x_4$.

Замѣтимъ, что трилинейный коннексъ (a) имѣетъ уже не ∞^3 основныхъ сочетаній, а ∞^4, они опредѣляются уравненіями

$$f_1(p, u) = 0, \quad f_2(p, u) = 0, \quad f_3(p, u) = 0$$

и слѣдовательно образуютъ бикоинциденцію съ характеристиками *(1, 3, 3, 1)*.

Если многочлены α_x, β_x и γ_x связаны линейнымъ соотношеніемъ съ постоянными коэффиціентами, то преобразованіемъ координатъ можно уравненіе коннекса привести къ виду

$$x_1 . f_1(p, u) + x_2 . f_2(p, u) = 0.$$

Здѣсь каждая точка прямой—ребра $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ координатнаго тетраэдра будетъ основною, и такой коннексъ имѣетъ основныхъ сочетаній (p, u) ∞^5, образующихъ коинциденцію (1, 2, 1).

Наконецъ ∞^2 основныхъ точекъ—которыя притомъ составятъ плоскость,—трилинейный коннексъ можетъ имѣть только тогда, когда уравненіе его распадается:

$$\alpha_x . f(p, u) = 0.$$

Совершенно аналогичны двойственные случаи наличности одной основной плоскости, или пучка плоскостей или наконецъ связки плоскостей,—въ послѣднемъ случаѣ въ уравненіи коннекса долженъ выдѣляться множитель 1-й степени относительно u.

Комплексъ (4), о которомъ мы говорили въ началѣ этого §-а при этомъ уничтожается тождественно.

Аналогичныя замѣчанія могутъ быть сдѣланы и относительно основныхъ прямыхъ.

Трилинейный коннексъ можетъ имѣть пару основныхъ прямыхъ,— если 16 линейныхъ комплексовъ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ всѣ таковы, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} = \lambda_{ik}\varphi_1 + \mu_{ik}\varphi_2 + \nu_{ik}\varphi_3 + \sigma_{ik}\varphi_4.$$

Далѣе всѣ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ могутъ быть выражены какъ линейныя функціи однихъ и тѣхъ же трехъ линейныхъ функцій отъ p, — тогда основныя прямыя образуютъ линейчатую поверхность 2 ранга, или наконецъ двухъ,— когда основныя прямыя образуютъ линейчатую конгруэнцію—пересѣченіе двухъ этихъ комплексовъ.

6. Остановимся теперь на значеніи въ теоріи коннексовъ (x, p, u) уравненій не содержащихъ одного ряда перемѣнныхъ, и притомъ на тѣхъ уравненіяхъ въ особенности, которыя выражаютъ соединенное положеніе точки, прямой, плоскости между собою.

Вообще говоря, уравненіе $f(x, u) = 0$, изображающее коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), представляетъ теперь, когда за элементъ принимаемъ соединеніе (точка, прямая, плоскость), коннексъ (x, p, u), которому принадлежатъ такіе элементы (x, p, u), которыхъ прямая произвольна, а сочетаніе (x, u) должно принадлежать коннексу $f(x, u) = 0$. Такой коннексъ слѣдовательно имѣетъ ∞^5 основныхъ сочетаній (x, u) и ни одного не основнаго.

Въ частности уравненіе $u_x = (ux) = \sum u_i x_i = 0$ тождественнаго коннекса (x, u) удовлетворяется такими элементами (x, p, u), которыхъ точка x лежитъ въ плоскости u, а прямая можетъ быть совершенно произвольна. Каждое изъ ∞^5 сочетаній (x, u) въ соединенномъ положеніи дастъ начало ∞^4 элементовъ (x, p, u) этого коннекса и никакихъ другихъ элементовъ принадлежащихъ $u_x = 0$ не существуетъ.

Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ условіями соединеннаго положенія точки и прямой.

Прежде всего условій этихъ не одно, а четыре выражаемыхъ уничтоженіемъ опредѣлителей матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{Vmatrix} = 0 \qquad (21)$$

изъ которыхъ независимы только два.

Разъ точка и прямая находятся въ соединенiи то къ каждому изъ такихъ ∞^5 сочетанiй можетъ быть добавлена каждая изъ ∞^3 плоскостей пространства.

Но чтобы получить только тѣ элементы (x, p, u), которыхъ сочетанiе (x, p) находится въ соединенiи, недостаточно разсматривать только два какiя либо изъ указанныхъ опредѣлителей, а нужно одновременно разсматривать всѣ четыре.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ одно которое-нибудь изъ четырехъ уравненiй (21), напримѣръ,

$$(xpp)_1 = x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0.$$
$$= \pi_{12} x_2 + \pi_{13} x_3 + \pi_{14} x_4 = 0. \qquad (A)$$

Оно изображаетъ конфигурацiю такого характера.

Точкѣ x пространства, принадлежитъ вообще спецiальный линейный комплексъ (въ самомъ дѣлѣ для этого комплекса коэффицiенты при p_{12}, p_{13} и p_{14} равны нулю и слѣд., инварiантъ $c_{12}c_{34} + c_{13}c_{42} + c_{14}c_{23}$ обращается въ нуль). Этотъ спецiальный комплексъ образуется прямыми, лежащими въ плоскостяхъ проходящихъ черезъ точку x и черезъ вершину $u_1 = 0$ или $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, координатнаго тетрэдра и слѣдовательно, встрѣчающими прямую, соединяющую двѣ эти точки.

Комплексъ этотъ будетъ одинъ и тотъ же для всѣхъ точекъ такой прямой, за исключенiемъ только точки $u_1 = 0$ или $(x_u = x_2 = x_3 = 0)$, для которой ось коннекса становится неопредѣленною, и съ которою элементъ конфигурацiи составляетъ каждая прямая пространства, эта вершина координатнаго тетраэдра есть основная точка коннекса (A).

Если зададимся прямою p, то ей принадлежитъ плоскость, проведенная черезъ прямую и черезъ туже вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра—т. е. каждая точка x этой плоскости даетъ вмѣстѣ съ взятою прямою элементъ коннекса (A). Если однако прямая взятая проходитъ черезъ вершину $u_1 = 1$, то плоскость—мѣсто точекъ x—становится неопредѣленною: всѣ прямыя

$$p_{34} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{23} = 0$$

которыя въ количествѣ ∞^2 образуютъ указанную связку, суть основныя прямыя коннекса (A).

Подобнымъ образомъ уравненiе

$$(xpp)_2 = x_1 p_{34} + x_3 p_{41} + x_4 p_{12} = 0 \qquad (B)$$

представляетъ коннексъ, въ которомъ точкѣ x принадлежитъ спецiальный линейный комплексъ, составленный прямыми, встрѣчающими прямую

$(x, u_2 = 0)$, и прямой—точки плоскости, проведенной черезъ эту прямую и туже вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра, и основными прямыми—прямыя связки, имѣющей ее центромъ.

Если возьмемъ оба уравненія (A) и (B), то вмѣстѣ они опредѣлятъ коинциденцію сочетаній (x, p). Если теперь задаться точкою x, то соотвѣтственная прямая p должна встрѣчать прямую $(x, u_1 = 0)$ и прямую $(x, u_2 = 0)$,—т. е. это будутъ 1^0 прямыя проходящія черезъ x, 2^0 прямыя, лежащія въ плоскости, опредѣленной точками x, $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$. Но если точка x лежитъ на прямой $(u_1 = 0, \ u_2 = 0)$, т. е. если изъ ея координатъ $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то всякая прямая встрѣчающая эту прямую составляетъ съ такою точкою элементъ коинциденціи (A), (B). Такимъ образомъ всѣ точки прямой $(u_1 = 0, \ u_2 = 0)$ суть основныя точки коинциденціи.

Если зададимся прямой p, то соотвѣтствующія точки x должны лежать въ плоскостяхъ $(p, u_1 = 0)$ и $(p, u_2 = 0)$ т. е. должны лежать на прямой p, ихъ пересѣченіи. Но если прямая p встрѣчаетъ ось $(u_1 = 0,$ $u_2 = 0)$, т. е. лежитъ въ одной изъ плоскостей пучка $\lambda u_1 + \varkappa u_2 = 0$, то каждая изъ точекъ этой плоскости составляетъ съ нею элементъ коинциденціи, каждая такая прямая будетъ основною. Условіе этого $p_{34} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ при этомъ (A) и (B) сводятся къ

$$x_3 p_{12} + x_4 p_{23} = 0, \quad x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0$$

которыя будутъ совмѣстны при всякихъ p, — ибо исключая $x_3 . x_4$ имѣемъ

$$p_{42} \cdot p_{13} - p_{23} \cdot p_{41} = p_{13} p_{42} + p_{14} p_{13} = 0, —$$

въ силу $p_{34} = 0$ къ этому сводится основное уравненіе

$$(p, p) = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0.$$

Итакъ получаемъ ∞^3 основныхъ прямыхъ,

Отсюда видимъ, сколько два взятыя уравненія (A) и (B) допускаютъ лишнихъ рѣшеній, кромѣ элементовъ (x, p) въ соединеніи.

Добавимъ теперь третье уравненіе (E)

$$(xpp)_3 = x_1 p_{24} + x_2 p_{41} + x_4 p_{12} = 0.$$

Съ точкою x составляютъ элементъ конфигураціи тѣ прямыя, которыя встрѣчаютъ три сходящихся въ точкѣ x прямыхъ, соединяющихъ x съ вершинами $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ координатнаго тетраэдра. Слѣдовательно, если x не лежитъ въ плоскости этихъ трехъ вершинъ, то прямыми, принадлежащими конфигураціи, могутъ быть только прямыя, проходящія черезъ самую точку x. Но если точка x лежитъ въ плоскости $x_4 = 0$ координатнаго тетраэдра, то кромѣ вышеупомянутыхъ всякая прямая, лежащая въ той же плоскости, пересѣчетъ три прямыя $(x, u_1 = 0)$, $(x, u_2 = 0)$, $(x, u_3 = 0)$ и будетъ вмѣстѣ съ x составлять элементъ конфигураціи. Точки плоскости $x_4 = 0$ обладаютъ теперь тѣмъ свойствомъ, которое при опредѣленіи коинциденціи одними уравненіями (A) и (B) принадлежало всѣмъ точкамъ пространства.

Если возьмемъ точку ребра координатнаго тетраэдра, лежащаго въ грани его $x_4 = 0$,—напр., точку ребра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

то уравненіе (A), (B), (C) примутъ видъ

$$x_2 . p_{34} = 0, \quad x_1 . p_{34} = 0, \quad x_1 . p_{24} + x_2 . p_{41} = 0$$

которыя—при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ приводятся къ двумъ

$$p_{34} = 0, \quad x_1 p_{24} + x_2 p_{41} = 0.$$

Такимъ образомъ такой точкѣ принадлежитъ снова ∞^2 прямыхъ, точка ребра основной не будетъ, съ нею могутъ быть соединены прямыя связки съ центромъ въ $(x_1, x_2, 0, 0)$ и прямыя плоскости $x_4 = 0$.

Если наконецъ возьмемъ вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра то $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и (A) удовлетворяется тождественно, а (B) и (C) приводятся къ $x_1 p_{34} = 0$, $x_1 p_{24} = 0$, и такъ какъ $x_1 \neq 0$, то должно быть $p_{34} = 0$, $p_{24} = 0$.

Основное соотношеніе $(p, p) = 0$ даетъ тогда

$$p_{14} . p_{32} = 0.$$

и такимъ образомъ имѣемъ одну изъ двухъ системъ

$$p_{34} = p_{24} = p_{14} = 0 \qquad \text{или же} \qquad p_{23} = p_{34} = p_{42} = 0.$$

Снова получаемъ ∞^2 прямыхъ, и вершина координатнаго тетраэдра основною точкою не будетъ.

Задаемся прямою p. Точки, принадлежащія этой прямой въ силу (A), (B), (C), должны принадлежать одновременно тремъ плоскостямъ, проведеннымъ черезъ прямую p и черезъ вершины $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ и $u_3 = 0$ координатнаго тетраэдра. Если три эти плоскости различны, или сводятся къ двумъ,—когда прямая p встрѣчаетъ ребро тетраэдра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \qquad \text{или} \qquad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

то x можетъ быть только точкою пересѣченія этихъ нлоскостей, т. е. должна лежать на взятой прямой p. Но если p лежитъ въ плоскости трехъ помянутыхъ вершинъ (т. е. въ плоскости $x_4 = 0$ въ нашемъ случаѣ) то всѣ три плоскости сливаются въ одну, и каждая точка этой плоскости можетъ быть соединяема съ такою прямою въ элементъ конфигураціи. Итакъ получимъ что и при добавленіи 3-го уравненія получается еще ∞^2 основныхъ прямыхъ.

Возьмемъ наконецъ всѣ четыре уравненія:

$$\left.\begin{array}{r} + x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0\,, \\ x_1 p_{34} + \qquad + x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0\,, \\ x_1 p_{24} + x_2 p_{41} + \qquad + x_4 p_{12} = 0\,, \\ x_1 p_{23} + x_2 p_{31} + x_3 p_{12} + \qquad = 0\,. \end{array}\right\} \qquad (21')$$

Теперь заданной прямой принадлежатъ точки, лежащія одновременно въ четырехъ плоскостяхъ,—проходящихъ черезъ взятую прямую и черезъ вершины координатнаго тетраэдра. Если даже прямая лежитъ въ одной изъ граней этого тетраэдра или совпадаетъ съ однимъ изъ его реберъ, то изъ четырехъ плоскостей двѣ будутъ различны и слѣдовательно, точки, дающія элементъ конфигураціи со взятою прямой должны непремѣнно лежать на самой прямой. Основныхъ прямыхъ нѣтъ. Если зададимся точкою, то принадлежащія ей прямыя должны встрѣчать четыре прямыхъ, соединяющихъ точку съ вершинами координатнаго тетраэдра; прямыя эти могутъ сводиться къ тремъ, не лежащимъ въ одной плоскости, если точка лежитъ въ одной изъ граней, на одномъ изъ реберъ или совпадаетъ съ одною изъ вершинъ этого тетраэдра, но во всякомъ случаѣ искомыя прямыя могутъ быть только прямыя, проходящія черезъ самую взятую точку.

Итакъ посторонній рѣшенія устраняются вполнѣ только при одновременномъ привлеченіи всѣхъ четырехъ уравненій (21′).

Совершенно аналогично убѣдимся что уравненія, выражающія соединенное положеніе прямой и плоскости

$$\left.\begin{array}{r} + u_2 \pi_{34} + u_3 \pi_{42} + u_4 \pi_{23} = 0\,, \\ u_1 \pi_{34} + \qquad + u_3 \pi_{41} + u_4 \pi_{13} = 0\,, \\ u_1 \pi_{24} + u_2 \pi_{41} + \qquad + u_4 \pi_{12} = 0\,, \\ u_1 \pi_{23} + u_2 \pi_{31} + u_3 \pi_{12} + \qquad = 0\,, \end{array}\right\} \qquad (22)$$

должны быть приняты во вниманіе всѣ четыре для того, чтобы со всякою плоскостью могли быть соединены только прямыя, въ ней лежащія, и со всякою прямою только плоскости, черезъ прямую проходящія.

Наконецъ замѣтимъ, что если хотимъ изъ всѣхъ ∞^{10} элементовъ (x, p, u) пространства выдѣлить тѣ, въ которыхъ точка x, прямая p и плоскость u находятся въ соединеніи, то нужно взять уравненія $(21')$ и (22), а уравненіе $u_x = 0$ уже въ нихъ заключается и такимъ образомъ получимъ ∞^6 элементовъ, которыхъ точка лежитъ на прямой и прямая лежитъ въ плоскости.

§ III.

Особенные элементы.

1. Если сочетаніе (p, u) не будетъ основнымъ, ему принадлежитъ въ силу уравненія коннекса

$$f(x, p, u) = 0 \tag{1}$$

опредѣленная поверхность X_{pu} порядка m (если f — степени m относительно x).

Если (1) имѣетъ основную точку, то всѣ поверхности X_{pu} проходятъ черезъ эту точку. Если (x, p) или (x, u) суть основныя сочетанія, то черезъ точку x проходятъ всѣ X_{pu} въ которыхъ p, resp. u суть прямая (или плоскость) основного сочетанія.

Изъ точекъ поверхности X_{pu} выдѣляются ея особенныя точки, онѣ даютъ начало кратнымъ элементамъ коннекса: каждую особенную точку можемъ считать соединеніемъ нѣсколькихъ обыкновенныхъ, стало быть и элементъ (x, p, u) коннекса (1), содержащій эту точку, явится кратнымъ элементомъ коннекса по отношенію къ точкѣ или *точечнымъ особеннымъ* элементомъ. Касательная къ X_{pu} въ ея точкѣ x

$$\sum X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

въ случаѣ точечно-особеннаго элемента становится неопредѣленною, потому что для особенной точкѣ поверхности X_{pu} должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \tag{3}$$

Вмѣсто (2) будемъ поэтому имѣть уравненіе

$$\sum X_i X_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \tag{4}$$

которое изображаетъ при этомъ конусъ, потому что изъ (3) слѣдуетъ, что гессіенъ (1) въ отношеніи x_i равенъ нулю:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| = a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} d_x^{m-2} (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)(\mathfrak{cc}pp)(\mathfrak{dd}pp)\, u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n u_\delta^n = 0. \quad (5)$$

Уравненія (3) опредѣляютъ ∞^6 элементовъ (x, p, u). Произвольно задать прямую p и плоскость u мы для общаго коннекса не можемъ. Сочетанія (p, u), принадлежащія которымъ поверхности X_{pu} обладаютъ особенною точкою, образуютъ по предыдущему коннексъ ранга $4(m-1)^3 r$ и класса $4(m-1)^3 n$. Каждая точка пространства является особенною точкою на поверхностяхъ X_{pu} принадлежащихъ ∞^3 сочетаніямъ (p, u) образующимъ пару (комплексъ ранга $4rn^3$, плоскостное пространство), въ которой каждой плоскости принадлежитъ $2r^4$ прямыхъ. Если зададимся прямою, то плоскости u огибаютъ поверхность $4(m-1)^3 n$ класса, а принадлежащія всѣмъ такимъ сочетаніямъ: (данная прямая, касательная къ этой поверхности) особенныя точки соотвѣтствующихъ X_{pu} покрываютъ поверхность порядка $4(m-1)^3 n$.

Если и всѣ вторыя производныя $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ обращаются въ нуль, а производныя 3-го порядка въ 0 не обращаются, имѣемъ высшую особенность—касательныя къ такой точкѣ x къ X_{pu} огибаютъ конусъ 3-го порядка,—такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n), заданный общимъ уравненіемъ, содержитъ $13440(m-2)^3 r^4 n^3$.

2. Аналогично можно установить понятіе объ элементахъ, особенныхъ по отношенію плоскости — *плоскостныхъ особенныхъ элементахъ*. Такое наименованіе будемъ придавать тѣмъ элементамъ (x, p, u), которыхъ плоскость u есть особенная касательная поверхности U_{xp}, принадлежащей сочетанію (x, p) въ коннексѣ (1). Плоскости эти при данныхъ (x, p) опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial f(xpu)}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_4} = 0 \quad (6)$$

которые вообще говоря совмѣстными при данныхъ (x, p) не будутъ.

Но предполагая, что x и p могутъ принимать всевозможныя значенія, получимъ: *плоскостные особенные элементы коннекса* (m, r, n) *образуютъ тройную коинциденцію съ характеристиками*

$$4m^3 r,\ 4m^3(n-1),\ 6m^2 r^2,\ 12m^2 r(n-1),\ 6m^2(n-1)^2,$$
$$4mr^3,\ 12mr^2(n-1),\ 12mr(n-1)^2,\ 4m(n-1)^3,\ r^4,$$
$$4r^3(n-1),\ 6r^2(n-1)^2,\ 4r(n-1)^3, \quad (7)$$

значеніе которыхъ аналогично вышеприведеннымъ.

Для такихъ элементовъ уравненіе точки прикосновенія u и U_{xp}

$$\sum U_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \tag{8}$$

обращается тождественно въ нуль, и точки прикосновенія образуютъ въ плоскости u кривую 2-го класса

$$\sum U_i U_k \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} = 0 \tag{9}$$

потому что при выполненіи (6) опредѣлитель уравненія (9) обращается въ нуль:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} \right| = 0. \tag{10}$$

Мы предположили при этомъ, что не всѣ производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ обращаются въ нуль.

Если же всѣ эти производныя обращаются въ 0, имѣемъ высшую особенность. Такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n), котораго коэффиціенты не связаны никакими добавочными соотношеніями содержитъ конечное число $13440\, m^3 r^4 (n-2)^3$.

При этомъ конечно предполагаемъ, что всѣ производныя 3-го порядка по x одновременно въ 0 не обращаются,—что и будетъ имѣть мѣсто для коннекса, заданнаго общимъ уравненіемъ.

3. Прежде чѣмъ говорить объ элементахъ коннекса (x, p, u), представляющихъ особенность относительно прямой, укажемъ на обстоятельство, которое встрѣчается и въ другихъ коннексахъ, именно на роль основныхъ сочетаній по отношенію къ точечнымъ и плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.

Пусть (p, u) есть основное сочетаніе коннекса (m, r, n)

$$f(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Тогда согласно самому опредѣленію основныхъ сочетаній при замѣнѣ, x_i черезъ $x_i + \varepsilon x'_i$ (гдѣ x'_i—координаты какой нибудь совершенно произвольной точки) уравненіе также должно удовлетворяться при (p, u)—основномъ сочетаніи.

Итакъ при этомъ не только (1) выполнено, но и

$$f(x + \varepsilon x', p, u) = 0$$

или

$$f(x, p, u) + \varepsilon \sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \sum\nolimits_2 = 0.$$

Отбрасывая въ силу (1) 1-й членъ, раздѣляя на ε и переходя къ предѣлу $\varepsilon = 0$ получимъ: если (p, u) основное сочетаніе, то при совершенно произвольныхъ x'_i имѣемъ

$$\sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

а для этого необходимо должны обращаться въ нуль производныя, т. е. уравненія (3) выполнены. Итакъ: *если коннексъ (1) имѣетъ основное сочетаніе (p, u), то это сочетаніе въ соединеніи съ каждою точкою x пространства образуетъ элементъ удовлетворяющій уравненіямъ (3).*

Можно бы поэтому сказать, что *каждое основное сочетаніе (p, u) даетъ начало ∞^3 точечно-особенныхъ элементовъ,* но въ этомъ, — какъ уже приходилось говорить въ другомъ мѣстѣ [1]), — является нѣкоторая натянутость: для основного сочетанія (p, u) уравненіе (1) удовлетворяется независимо отъ значеній x, уравненіе X_{pu} есть $0 = 0$.

Совершенно подобнымъ образомъ покажемъ, что *каждому основному сочетанію коннекса (1) соотвѣтствуетъ ∞^3 элементовъ (x, p, u), выполняющихъ уравненія (6).*

Поэтому въ дальнѣйшемъ прибѣгнемъ къ другому опредѣленію особенныхъ элементовъ. но предварительно закончимъ разборъ типовъ особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u).

4. Линейчатыми особенными элементами можно называть,— аналогично предыдущему,—тѣ элементы коннекса, которыхъ прямая есть особенная прямая коннекса K_{xu} принадлежащаго сочетанію (x, u) элемента.

Но при этомъ необходимо условиться относительно того, что называть особенными прямыми комплекса.

Koenigs [2]), слѣдуя Пашу, называетъ *особенными* прямыми комплехса $F = 0$ тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_{12}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{23}} = 0. \tag{11}$$

Въ коннексѣ (m, r, n) элементовъ, которыхъ прямыя выполняютъ уравненіе (11), имѣется коинциденція, которой характеристики:

$$\alpha_{200} = 2m^2, \quad \alpha_{110} = 2m(2r - 1), \quad \alpha_{101} = 4mn, \quad \alpha_{020} = 2r(r - 1),$$
$$\alpha_{110} = 2n(2r - 1), \quad \alpha_{002} = 2n^2.$$

---

[1]) Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса § 1. Изв. Каз. Физ. Мат. Общ. 1902 г.

[2]) La géométrie réglée et ses applications, p. 77.

Въ послѣдующемъ намъ придется еще встрѣтиться съ этою коинциденціею. Замѣтимъ здѣсь, что пучекъ касательныхъ комплексовъ

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} P_{ik} + \lambda \sum \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = 0 \qquad (12)$$

состоитъ для подобной прямой весь изъ спеціальныхъ комплексовъ, и всѣ оси этихъ комплексовъ образуютъ плоскій пучекъ.

Казалось бы однако болѣе правильнымъ давать подобнымъ прямымъ иное наименованіе, напримѣръ *спеціальныхъ*, сохраняя названіе особенныхъ прямыхъ для тѣхъ, свойства которыхъ имѣютъ большее сходство со свойствами особенныхъ точекъ кривыхъ линій и поверхностей.

Если линейчатое пространство изобразимъ въ плоскомъ пространствѣ пяти измѣреній квадратичнымъ M_4, то комплексъ p-го ранга выдѣлится изъ этого M_4 уравненіемъ p-ой степени между 5-ью координатами точки (или между 6-ью однородными), т. е. изобразится M_3—пересѣченіемъ двухъ M_4. Особенною точкою такого M_3 будетъ такая точка, въ которой два M_4 между собою касаются, и слѣдовательно, производныя ихъ уравненій по координатамъ пропорціональны.

Соотвѣтственно этому можемъ называть *особенною* прямою комплекса такую его прямую, которая выполняетъ шесть уравненій

$$\lambda' \frac{\partial F(p)}{\partial p_{ik}} + \mu' \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} = 0. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \qquad (13)$$

Для такой прямой уравненіе пучка линейныхъ комплексовъ (12) приводится къ виду

$$\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'}\right) \sum \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'}\right) (p\,,\,P) = 0$$

т. е. сводится къ одному только спеціальному линейному комплексу, образуемому прямыми встрѣчающими „прямую прикосновенія“ p.

Уравненій (13) по исключеніи λ'/μ' пять, уравненіе комплекса въ силу (13) есть слѣдствіе основного уравненія $\frac{1}{2}\,(p\,,\,p) = 0$, слѣдовательно, такихъ особенныхъ прямыхъ комплексъ вообще не содержитъ а для существованія ихъ необходимо одно соотношеніе между коэффиціентами.

Другое свойство этихъ особенныхъ прямыхъ заключается въ слѣдующемъ. Линейные комплексы, содержащіе данную прямую p комплекса и находящіеся въ инволюціи съ каждымъ изъ касательныхъ по этой прямой линейныхъ комплексовъ, образуютъ M_3—они опредѣляются уравненіями

$$(c\,,\,p)=0\,,\quad \sum c_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}=0.$$

Но для особенной прямой два эти уравненія сводятся къ одному, и линейные комплексы указаннаго свойства образуютъ уже M_4.

Для специальной же прямой (особенной по Koenigs'y) линейные комплексы эти образуютъ M_3 комплексовъ, содержащихъ двѣ данныхъ прямыхъ.

Очевидно, что каждая прямая, особенная въ указанномъ здѣсь смыслѣ, будетъ особенною и для Koenigs'a, т. е. будетъ также и спеціальною, но не обратно.

Принимая такое опредѣленіе особенныхъ прямыхъ можемъ ввести теперь понятіе о линейчатыхъ особенныхъ элементахъ коннекса (x, p, u).

Эти элементы опредѣляются слѣдовательно, уравненіями

$$\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{12}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{14}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{34}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{42}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}}\qquad(14)$$

которыя могутъ быть замѣнены напримѣръ, такими

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}-\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{12}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\\
&\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}-\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}=0\,,\\
&\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,\qquad(15)\\
&\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}-\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0\,,\\
&\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial \jmath\,(xpu)}{\partial p_{23}}=0.
\end{aligned}$$

Къ уравненіямъ (14) должно быть конечно присоединено еще основное уравненіе $(p\,,\,p)=0$, и тогда уравненіе самаго коннекса есть слѣдствіе уравненій (14) и основного уравненія.

Чтобы опредѣлить характеристики этой четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ замѣтимъ, что переходъ отъ системы (14) къ системѣ (15) сопровождается введеніемъ излишнихъ рѣшеній, опредѣляемыхъ системами

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{d p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}=0\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}=0\,,$$

и еще тремя такими системами, въ которыхъ фигурируютъ послѣдовательно

$\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}=0 \quad \dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{1k}}=0$ и 3 уравненія изъ системы (15)

$\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}=0 \quad \dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0$ „ „ „ „

$\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0 \quad \dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0.$ „ „ „ „

Но исключая эти системы мы дважды исключаемъ такія системы

1) $$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0\,,$$

2) $$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,.$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующимъ значеніямъ характеристикъ четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ коннекса (m, r, n):

$$\delta_{320} = m^3(10r^2 - 16r + 7), \quad \delta_{311} = 4m^3n(5r - 4), \quad \delta_{302} = 10m^3n^2,$$

$$\delta_{230} = m^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{221} = 3m^2n(10r^2 - 16r + 7),$$

$$\delta_{212} = 6m^2n^2(5r - 4), \quad \delta_{203} = 10m^2n^3,$$

$$\delta_{140} = m(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3),$$

$$\delta_{131} = 2mn(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{122} = 3mn^2(10r^2 - 16r + 7),$$

$$\delta_{113} = 4mn^3(5r - 4), \quad \delta_{041} = n(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3),$$

$$\delta_{032} = n^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{023} = n^3(10r^2 - 16r + 7).$$

Не трудно убѣдиться, что уравненія (14) выполняются элементомъ (x, p, u), если (x, u) есть основное сочетаніе, а p — какая угодно прямая пространства.

Дѣйствительно, уравненіе коннекса, которое можно писать

$$f(xpu) + f_1(xpu)(p, p) = 0 \tag{1'}$$

[гдѣ $f_1(xpu) = 0$ совершенно произвольный, коннекса $(m, r-2, n)$], должно при подстановкѣ вмѣсто x, u координатъ основного сочетанія удовлетворяться не только координатами произвольной прямой p, но и безконечно близкой къ ней $p + \varepsilon p'$ (гдѣ $p + \varepsilon p'$ — также нѣкоторая прямая), т. е. должны имѣть

$$f(x, p + \varepsilon p', u) + f_1(x, p + \varepsilon p', u)(p + \varepsilon p', p + \varepsilon p') = 0.$$

Разлагая по степенямъ ε, отбрасывая члены отъ ε независящіе въ силу (1′), раздѣляя на ε и переходя къ предѣлу $\varepsilon = 0$, получимъ, что при произвольныхъ p'_{ik} должно быть

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{ik}} + (p, p) \sum p'_{ik} \frac{\partial f_1(xpu)}{\partial p_{ik}} + f_1(xpu).(p, p') = 0.$$

Второй членъ выпадаетъ въ силу $(p, p) = 0$ и остается уравненіе

$$\sum p'_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + f_1 \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ik}} \right) = 0,$$

которое при совершенно произвольныхъ p' (ограниченныхъ только условіемъ $p+\varepsilon p'$ — прямая) ведетъ за собою уравненія (14). Но хотя эти уравненія и выполнены, считать всякую прямую p особенною прямою комплекса, принадлежащаго основному сочетанію, является нѣкоторою натяжкою въ томъ отношеніи, что самый комплексъ имѣетъ уравненіе $0=0$ и является совокупностью всѣхъ прямыхъ пространства.

5. Указанными типами особенныхъ элементовъ еще далеко не исчерпываются возможные ихъ типы. Прежде всего элементъ (x, p, u) можетъ одновременно удовлетворять двумъ изъ трехъ системъ (3), (6) и (14).

Если элементъ (x, p, u) выполняетъ уравненія (3) и (6), т. е. точка его есть особенная точка поверхности X_{pu} и плоскость—особенная касательная поверхности U_{xp}, то можно такой элементъ называть *точечно-плоскостнымъ особеннымъ* элементомъ. Подобныхъ элементовъ коннексъ (1) имѣетъ вообще ∞^3, потому что изъ восьми уравненій (3) и (6) независимы только семь въ силу тождества

$$mnf(x, p, u)=n\sum x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=m\sum u_k\frac{\partial f}{\partial u_k}=0.$$

Отсюда замѣняя $\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$ черезъ $f=0$ и $\frac{\partial f}{\partial u_4}$ также черезъ $f=0$ вводимъ излишнія рѣшенія: отъ шестерной коинциденціи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k}=0 \quad (k=1, 2, 3), \quad f=0$$

должны быть отброшены:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k}=0 \quad (k=1, 2, 3) \quad x_4=0 \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \quad (i=1, 2, 5), \quad \frac{\partial f}{\partial u_k}=0 \quad (k=1, 2, 3) \quad u_4=0. \tag{18}$$

Отсюда и можемъ найти характеристики шестерной коинциденціи точечно-плоскостныхъ особенныхъ элементовъ:

$$\lambda_{340}=(35m^3-60m^2+30m-4)r^4. \quad \lambda_{043}=(35n^3-60n^2+30n-4)r^4.$$

$$\lambda_{331}=r^3[3n\{m^3+9m^2(m-1)+9m(m-1)^2+(m-1)^3\}+$$
$$+(n-1)\{m^3+27m^2(m-1)+45m(m-1)^2+13(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{133}=r^3[3m\{n^3+9n^2(n-1)+9n(n-1)^2+(n-1)^3\}+$$
$$+(m-1)\{n^3+27n^2(n-1)+45n(n-1)^2+13(n-1)^3\}].$$

$$\lambda_{241} = 3r^4[3n\{m^2 + 3m(m-1) + (m-1)^2\} +$$

$$+ (n-1)\{2m^2 + 11m(m-1) + 7(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{142} = 3r^4[3m\{n^2 + 3n(n-1) + (n-1)^2\} +$$

$$+ (m-1)\{2n^2 + 11n(n-1) + 7(n-1)^2\}].$$

$$\lambda_{232} = 3r^3[n^2\{3m^2 + 6m(m-1) + (m-1)^2\} +$$

$$+ n(n-1)\{6m^2 + 24m(m-1) + 10(m-1)^2\} +$$

$$+ (n-1)^2\{m^2 + 10m(m-1) + 9(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{313} = r[n^3\{m^3 + m^2(m-1)\} + n^2(n-1)\{3m^3 + 27m^2(m-1) + 18m(m-1)^2\} +$$

$$+ n(n-1)^2\{18m^2(m-1) + 45m(m-1)^2 + 9(m-1)^3\} +$$

$$+ (n-1)^3\{9m(m-1)^2 + 7(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{322} = 3r^2[n^2\{m^3 + 6m^2(m-1) + 3m(m-1)^2\} +$$

$$+ n(n-1)\{m^3 + 15m^2(m-1) + 21m(m-1)^2 + 3(m-1)^3\} +$$

$$+ (n-1)^2\{3m^2(m-1) + + 12m(m-1)^2 + 5(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{223} = 3r^2[m^2\{n^3 + 6n^2(n-1) + 3n(n-1)^2\} +$$

$$+ m(m-1)\{n^3 + 15n^2(n-1) + 21n(n-1)^2 + 3(n-1)^3\} +$$

$$+ (m-1)^2\{3n^2(n-1) + 12n(n-1)^2 + 5(n-1)^3\}].$$

Подобнымъ образомъ элементы, которые суть точечные особенные и линейчатые особенные, должны выполнять 4 уравненія (3) и 5 уравненій (14). Но эти девять уравненій опредѣляютъ не восьмерную, а семерную коинциденцію, потому что можемъ писать тождество

$$r\sum x_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + (p\,,\,p)\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) = m\sum p_{jl}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + (p\,,\,p)\frac{\partial f_1}{\partial p_{jl}} + f_1\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{jl}}\right)$$

или

$$r\sum x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = m\sum p_{jl}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + f_1\frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{jl}}\right).$$

Для линейчатыхъ особенныхъ элементовъ правая часть сводится къ виду

$$m(f_1 - \lambda/\mu)(p\,,\,p) = 0.$$

Слѣдовательно, въ силу уравненій (14) имѣемъ уже $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, и такимъ образомъ изъ 4 уравненій (3) можемъ удержать только три.

Подобнымъ образомъ семерную коинциденцію образуютъ *линейчато-плоскостные* особенные элементы, для которыхъ одновременно должны быть выполнены девять уравненій (6) и (14), сводящихся къ восьми независимымъ.

Если наконецъ (x, p, u) выполняетъ всѣ три системы уравненій одновременно т. е. будетъ и точечнымъ особеннымъ, и плоскостнымъ особеннымъ и въ тоже время линейчатымъ особеннымъ элементомъ, то онъ долженъ выполнять тринадцать уравненій, изъ которыхъ два суть слѣдствія остальныхъ. Поэтому коннексъ (1) подобныхъ элементовъ вообще не имѣетъ, и для существованія ихъ между коэффиціентами уравненія (1) должно существовать соотношеніе.

Поэтому можно подобные элементы называть *собственно-особенными элементами* коннекса, въ противоположность вышеперечисленнымъ типамъ особенныхъ элементовъ, которые присущи каждому коннексу.

Собственныхъ особенныхъ элементовъ коннексъ при извѣстныхъ условіяхъ можетъ имѣть не только конечное, но и безконечно большое число, многообразіе ихъ можетъ составлять даже простую коинциденцію, какъ въ поверхностяхъ могутъ быть двойныя кривыя.

Вышеуказанныхъ особенныхъ (точечныхъ и т. д.) элементовъ коннексъ можетъ также содержать болѣе высокое, чѣмъ въ общемъ случаѣ многообразіе, и тогда они не будутъ уже обыкновенными особенностями.

6. Послѣ приведеннаго выше разбора особенныхъ элементовъ коннекса мы можемъ пополнить сказанное въ § I объ основныхъ точкахъ, прямыхъ и плоскостяхъ.

Основная точка, если она въ коннексѣ существуетъ, принадлежитъ всѣмъ ∞^7 поверхностямъ X_{pu} коннекса. Изъ нихъ на ∞^4 поверхностяхъ она будетъ особенною,—на тѣхъ именно, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (p, u), выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial x_i}\right)_{x=x_{осн.}} = 0. \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{19}$$

Такимъ образомъ каждая основная точка даетъ начало ∞^4 точечнымъ особеннымъ элементамъ.

Можетъ однако случиться, что уравненія (19) удовлетворяются независимо отъ значеній p и u.

Тогда такая основная точка представитъ высшую особенность и мы можемъ назвать ее *особенною основною точкою.* Она даетъ начало ∞^7

точечнымъ особеннымъ элементамъ. Переходною стадіей являются случаи, когда (19) имѣютъ ∞^5 или ∞^6 общихъ сочетаній (p, u).

Примѣръ такой особенной точки представятъ коннексы вида

$$f(xpu) = \varphi(xpu) \sum a_{ik} x_i x_k + \varphi_1(xpu) \sum a'_{ik} x_i x_k + \\ + \varphi_2(xpu) \sum a''_{ik} x_i x_k = 0\,,$$

если знакъ суммъ распространяется на значенія $i, k = 1, 2, 3$. Тогда при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ обращаются въ нуль независимо отъ значеній p и u не только f, но и всѣ ея производныя по x; здѣсь $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ означаютъ совершенно произвольные коннексы $(m-2, r, n)$.

Подобнымъ образомъ основная плоскость касается всѣхъ ∞^7 поверхностей U_{xp} коннекса, и будетъ особенно касательною для тѣхъ ∞^4 изъ нихъ, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (x, p), выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial u_k}\right)_{u=u_{осн.}} = 0. \qquad (k=1, 2, 3, 4) \qquad (20)$$

Такимъ образомъ *каждая основная плоскость даетъ начало* ∞^4 *плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.*

Но можетъ случиться, что уравненія (13) сводятся къ двумъ или одному независимому уравненію и стало быть опредѣляютъ ∞^5 или ∞^6 сочетаній (x, p). Наконецъ возможны случаи, когда уравненія (13) выполняются тождественно, и слѣдовательно плоскость будетъ особенною касательною ко всѣмъ ∞^7 поверхностямъ U_{xp} коннекса. Въ послѣднемъ случаѣ называемъ ее *особенною основною плоскостью* коннекса.

То же самое можно замѣтить и относительно основныхъ прямыхъ. Основная прямая принадлежитъ всѣмъ ∞^6 комплексамъ P_{xu} коннекса. Она будетъ особенною прямою въ тѣхъ изъ нихъ, которые принадлежатъ сочетаніямъ (x, u), опредѣляемымъ уравненіями:

$$\lambda\left(\frac{\partial(p, p)}{\partial p_{jl}}\right)_{p=p_{осн.}} + \mu\left(\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{jl}}\right)_{p=p_{осн.}} = 0. \qquad (jl=1,2,3,4) \qquad (21)$$

Каждая основная прямая ведетъ за собою ∞^1 линейчатыхъ особенныхъ элементовъ.

Можетъ случиться однако, что шесть уравненій сводятся къ меньшему числу независимыхъ или даже сводятся къ одному, опредѣляющему значеніе λ/μ. Въ послѣднемъ случаѣ основная прямая будетъ особенною прямою во всѣхъ ∞^6 комплексахъ P_{xu} и мы придадимъ ей тогда наименованіе *особенной основной прямой* коннекса (1).

Мы можемъ далѣе говорить объ *особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ* (x, u), (x, p), (p, u).

Пусть (x^0, u^0) есть основное сочетаніе коннекса (1). Тогда всѣ коннексы $K_p(x, u)$, принадлежащіе всѣмъ прямымъ пространства, содержатъ элементъ (x^0, u^0). Это сочетаніе для нѣкоторыхъ изъ нихъ можетъ быть собственно особеннымъ элементомъ,—если при извѣстныхъ значеніяхъ p выполняются уравненія.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$$

Если же эти уравненія выполняются сочетаніемъ (x^0, u^0) при всякихъ значеніяхъ p, то мы назовемъ (x^0, u^0) особеннымъ основнымъ сочетаніемъ.

Такимъ же образомъ придемъ къ понятію объ особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ (x, p) и (p, u).

7. Въ предыдущемъ были указаны недостатки даннаго опредѣленія особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u),—оно только съ натяжкою примѣнимо къ тѣмъ особеннымъ элементамъ, въ составъ которыхъ входитъ какое либо основное сочетаніе коннекса.

Можно избѣжать этого, если разсматривать не поверхность принадлежащую сочетанію (p, u) и т. д., какъ мы это дѣлали выше, а напримѣръ коннексъ $K_p(x, u)$, принадлежащій прямой p въ коннексѣ (1). Тогда точечными особенными элементами коннекса (1) назовемъ тѣ, коихъ сочетаніе (x, u) есть точечный особенный элементъ $K_p(x, u)$, плоскостными особенными тѣ, которыхъ сочетаніе (x, u) есть плоскостной особенный элементъ того же коннекса $K_p(x, u)$, и точечно-плоскостными особенными элементами (1)—тѣ, которыхъ сочетаніе (x, u) есть собственно-особенный элементъ коннекса $K_p(x, u)$.

Предполагая, что опредѣленіе особенныхъ элементовъ для коннекса съ элементомъ (точка, плоскость) достаточно выяснено, придемъ къ опредѣленію вышеуказанныхъ типовъ особенныхъ элементовъ (1). Обращаясь къ особенностямъ коннексовъ $K_u(x, p)$ и $K_x(p, u)$, получимъ представленіе и объ остальныхъ типахъ особенностей коннекса (x, p, u).

Недостатки такого опредѣленія: 1^0 для коннексовъ съ элементомъ (точка прямая) и (прямая, плоскость) понятіе особеннаго элемента еще недостаточно выяснено, и надо было бы предварительно остановиться на этомъ вопросѣ, не относящемся непосредственно къ предмету настоящей статьи; 2^0 хотя мы и избѣжимъ, держась этого опредѣленія, неудобствъ, вызываемыхъ при первомъ опредѣленіи основными сочетаніями, но основныя точки, прямыя и плоскости приводятъ къ тѣмъ же затрудненіямъ: уравненія соотвѣтствующихъ имъ коннексовъ приводятся къ виду $0 = 0$.

Связывать подобно Клебшу понятіе объ особенныхъ элементахъ съ понятіемъ о сопряженномъ коннексѣ нельзя потому, что, какъ уже было это мною указано въ другомъ мѣстѣ [1]), сопряженнаго коннекса для разсматриваемыхъ конфигурацій не существуетъ.

8. Соприкасающійся трилинейный коннексъ. Какъ для коннекса съ элементомъ (точки, плоскость) при опредѣленіи особенныхъ элементовъ въ основу можно положить соприкасающійся билинейный коннексъ,—т. е. рядомъ съ уравненіемъ $f(x, u) = 0$ такого коннекса разсматривать уравненіе

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k = 0\,,$$

можно и для коннексовъ (x, p, u) ввести аналогичный, но уже трилинейный коннексъ. Но такъ какъ уравненіе коннекса (x, p, u) можетъ быть изображено въ различныхъ видахъ

$$f(xpu) + f_1(xpu)(p\,,\ p) = 0\,,$$

смотря по выбору коннекса $f_1 = (m\,,\ r-2\,,\ n)$, то и за сопряженный трилинейный коннексъ мы не можемъ принять прямо

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0\,,$$

но должны разсматривать цѣлую систему ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ

$$\sum_{i,k,jl} \frac{\partial^3 f(x\,,\ p\,,\ u)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k (p\,,\ P) = 0\,. \tag{22}$$

Это обстоятельство, конечно, нѣсколько усложняетъ примѣненіе соприкасающагося трилинейнаго коннекса для изученія коннекса. Но для установленія понятія объ особенныхъ элементахъ онъ оказывается пригоднымъ.

Элементъ (x, p, u), для котораго составленъ соприкасающійся коннексъ, и который можно назвать элементомъ прикосновенія, принадлежитъ соприкасающемуся коннексу, такъ какъ подстановка $X = x$, $U = u$, $P = p$ даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} X_i P_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} . (p\,,\ p) =$$
$$= mrn\, f(xpu) + mn\, f_1(xpu) . (p\,,\ p) = 0\,.$$

---

[1]) Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. „Изв. Каз. Ф.-М. О." (2) 1902. Въ § V я остановлюсь на этомъ подробнѣе.

При этомъ сочетаніе $(p\,,\,u)$ будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося коннекса (независимо отъ f_1), если его уравненіе выполняется независимо отъ значеній X.

Но подстановка $P = p$, $U = u$ въ уравненіе (22) даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} p_{jl} u_k \,.\, X_i + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} X_i u_k \,.\, (p\,,\,p) = 0$$

или

$$rn \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + n(p\,,\,p) \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} X_i = 0$$

и наконецъ, въ силу $(p\,,\,p) = 0$,

$$rn \sum_i \frac{\partial f(xpu)}{\partial x_i} X_i = 0\,.$$

Итакъ *сочетаніе $(p\,,\,u)$ элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса, если $(x\,,\,p\,,\,u)$ выполняетъ условія*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (3)$$

т. е. когда по предыдущему *элементъ будетъ точечнымъ особеннымъ элементомъ коннекса (1).*

Мы и можемъ опредѣлить точечный особенный элементъ тѣмъ именно свойствомъ, что его сочетаніе $(p\,,\,u)$ есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Точно также нетрудно убѣдиться, что *плоскостной особенный элементъ коннекса таковъ, что его сочетаніе $(x,\,p)$ есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.* Дѣйствительно, подстановка $X = x$, $P = p$ въ уравненіе (28) соприкасающагося коннекса доставитъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} x_i p_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} x_i U_k \,.\, (p\,,\,p)$$

$$= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + m \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k (p\,,\,p)$$

$$= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0\,.$$

Уравненіе это удовлетворяется независимо отъ значеній U, если выполнены уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \qquad (6)$$

Наконецъ, если выполнены уравненія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial (p\,;\,p)}{\partial p_{jl}} = 0\,, \qquad (jl = 1, 2, 3, 4) \qquad (13)$$

то изъ всей совокупности ∞^{16} различныхъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ для ∞^{15} сочетаніе $(x\,,\,u)$ элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ, и съ другой стороны всѣ остальные соприкасающія коннексы сводятся для того же сочетанія къ одной и той же совокупности прямыхъ, встрѣчающихъ прямую p элемента прикосновенія.

Дѣйствительно, подставимъ въ уравненіе (22) соприкасающагося трилинейнаго коннекса $X = x\,,\ U = u$. Получимъ:

$$mn \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} + mn\, f_1 . (p\,,\ P) = 0\,,$$

или

$$mn \sum_{jl} P_{jl} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{jl}} \right) = 0.$$

Для того чтобы сочетаніе $(x\,,\,u)$ было основнымъ, коэффиціенты при 6-и координатахъ P_{jl} должны быть равны нулю, т. е. должно быть

$$-\frac{1}{2} f_1 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{12}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{14}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{14}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{34}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{34}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{42}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{42}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{23}}}.$$

Такимъ образомъ если уравненія (13) выполнены, то равны и эти шесть отношеній. Но отсюда при данныхъ $x\,,\ p\,,\ u$ получаемъ значеніе которое должно имѣть $f_1(x\,,\ p\,,\ u)$, т. е. опредѣляется одна изъ 16 величинъ $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k}$, которыя являются параметрами въ уравненіи соприкасающагося коннекса и произвольныхъ остается только 15.

Если же значеніе шести отношеній (его означимъ λ/μ) не равно $-\frac{1}{2} f_1$, то уравненіе комплексовъ сводится къ

$$mn \left(\lambda/\mu + \frac{1}{2} f_1 \right) . (p\,,\ P) = 0\,,$$

т. е. къ

$$(p\,,\ P)=0.$$

Если напротивъ уравненія, которыми въ n^0 4 этого §-а мы опредѣлили линейчатые особенные элементы коннекса (1), невыполнены, то $(x\,,\ u)$ не будетъ основнымъ сочетаніемъ ни на одномъ изъ ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ, которые мы объединяемъ подъ именемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Можно поэтому дать такое опредѣленіе: *линейчатые особенные элементы суть тѣ элементы коннекса, для которыхъ изъ общей совокупности* ∞^{16} *соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ выдѣляется группа въ* ∞^{15} *такихъ коннексовъ, имѣющихъ сочетаніе* $(x\,,\ u)$ *элемента своимъ основнымъ сочетаніемъ, а остальные сводятся къ комплексу* $(p,\ P)=0$.

Можно формулировать отношеніе особенныхъ элементовъ къ соприкасающемуся коннексу нѣсколько иначе.

Весь „пучекъ" соприкасающихся коннексовъ опирается на коинциденцію

$$\sum\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial u_k\partial p_{jl}}X_iU_kP_{jl}=0\,,\quad (p\,,\ P)=0 \tag{23}$$

и элементы этой коинциденціи принадлежатъ каждому изъ ∞^{16} коннексовъ (22).

Въ ней прямая p есть основная прямая, и потому всякое сочетаніе $(X\,,\ p)$ и $(p\,,\ U)$ есть основное сочетаніе ея.

Напротивъ, ни точка x, ни плоскость u не будутъ основными точками, и сочетаніе $(x\,,\ u)$ основнымъ сочетаніемъ коинциденціи вообще не будетъ.

Поэтому относительно сочетаній $(x\,,\ p)$ и $(p\,,\ u)$ элемента прикосновенія можно поставить вопросъ, когда они будутъ основными сочетаніями не только для коинциденціи, но и для всѣхъ ∞^{16} соприкасающихся коннексовъ. Это и приводитъ къ полученному уже выше результату.

1. *Сочетаніе* $(p\,,\ u)$ *есть основное сочетаніе каждаго изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если ими выполнены уравненія*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\,; \qquad (i=1,2,3,4)$$

элементъ $(x\,,\ p\,,\ u)$ *назовемъ точечнымъ особеннымъ.*

2. *Сочетаніе* $(x\,,\ p)$ *есть основное сочетаніе каждаго изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если имъ выполнены уравненія*

$$\frac{\partial f}{\partial u_k}=0\,; \qquad (k=1,2,3,4)$$

элементъ (x, p, u) *называемъ плоскостнымъ особеннымъ.*

3. *Сочетаніе* (x, u) *будетъ основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, на которую опираются всѣ соприкасающіеся коннексы, если выполнены уравненія*

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{jl}} = 0, \qquad (j, l = 1, 2, 3, 4)$$

элементъ (x, p, u) *называемъ линейчатымъ особеннымъ.*

§ IV.

Особенные элементы коинциденціи (простой).

1. Ограничимся случаемъ коинциденціи, заданной пересѣченіемъ двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n'):

$$f(x, p, u) = 0, \quad F(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Если f и F различныхъ степеней относительно перемѣнныхъ; то можно назвать все же „пучкомъ“ коннексовъ фигуру опредѣляемую уравненіемъ

$$\lambda f(xpu) + \mu F(xpu) = 0 \tag{2}$$

при λ и μ постоянныхъ [1]), такое опредѣленіе соотвѣтствуетъ геометрическому смыслу совокупности коннексовъ, опирающихся на данную коинциденцію, но требуетъ соединенія въ одно уравненіе двухъ формъ различныхъ степеней. Примемъ поэтому, что λ и μ суть однородныя функціи x, p, u степеней $m_0 - m$, $r_0 - r$, $n_0 - n$ и $m_0 - m'$, $r_0 - r'$, $n_0 - n'$, гдѣ m_0, r_0, n_0 наибольшія изъ паръ чиселъ: m и m', r и r', n и n'. Однако при произвольныхъ коэффиціентахъ въ λ и въ μ и при всевозможныхъ значеніяхъ x_i и u_i, отношеніе λ/μ можетъ имѣть только ∞^1 значеній.

Всѣ эти коннексы имѣютъ при произвольныхъ коэффиціентахъ въ λ и μ общими элементы коинциденціи (1).

Точечные особенные элементы этой совокупности коннексовъ опредѣляются уравненіями

$$V = \frac{\partial(\lambda f + \mu F)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} + f \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + F \frac{\partial \mu}{\partial x_i}. \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

---

[1]) Срв., напримѣръ, Study, Methoden zur Theorie der ternärer Formen по отношенію къ тернарнымъ коннексамъ.

Будемъ разыскивать тѣ особенные элементы, которые являются таковыми на всѣхъ коннексахъ (2), т. е. принадлежатъ коинциденціи (1). Для такихъ элементовъ уравненія (3) приводятся съ помощію (1) къ виду

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (4)$$

какъ если бы λ и μ были постоянныя, и даютъ слѣдовательно

$$\frac{F'_{x_1}}{f'_{x_1}} = \frac{F'_{x_2}}{f'_{x_2}} = \frac{F'_{x_3}}{f'_{x_3}} = \frac{F'_{x_4}}{f'_{x_4}}\,. \qquad (4')$$

Уравненія эти показываютъ, что x должно быть или особенною точкою на одной изъ поверхностей X_{pu}, X'_{pu}, принадлежащихъ сочетанію (p, u) въ томъ и другомъ коннексахъ, или же точкою касанія этихъ поверхностей, т. е. эта точка должна быть особенною точкою кривой, принадлежащей сочетанію (p, u) въ коинциденціи (1).

Здѣсь однако также является то затрудненіе, что сочетаніе (p, u) можетъ быть основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, для котораго двѣ поверхности X_{pu} и X'_{pu} совпадаютъ вполнѣ или отчасти и уравненія (4′) выполняются всѣми точками этой общей части. Удобно поэтому и для коинциденціи прибѣгнуть къ соприкасающейся коинциденціи, т. е. разсматривать коинциденцію, опредѣленную такими уравненіями:

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + (p,\ P)\,.\sum \frac{\partial^2 f_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i\,.\,U_k = 0 \\ &\sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + (p,\ P)\,.\sum \frac{\partial^2 F_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i\,.\,U_k = 0\,. \end{aligned} \qquad (5)$$

Эта коинциденція, зависящая отъ 30 произвольныхъ параметровъ, опирается на двойную коинциденцію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0\,, \ \sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0 \quad (p,\ P) = 0\,, \qquad (6)$$

которая прямую p имѣетъ основною прямою, а слѣдовательно, каждое сочетаніе, составленное этою прямою съ какою либо точкою или плоскостью, будетъ ея основнымъ сочетаніемъ.

Напротивъ (x, u) будетъ вообще не основнымъ сочетаніемъ.

Поэтому можемъ установить такое опредѣленіе особенныхъ элементовъ коинциденціи (1).

Элементъ (x, p, u) есть точечный особенный элементъ коинциденціи, если его сочетаніе (p, u) есть основное сочетаніе для каждой соприкасающейся коинциденціи.

Для этого уравненія (5) при постановкѣ $P = p$, $U = u$ должны сводиться къ одному. Но эта подстановка даетъ

$$rn \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0, \qquad r'n' \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i = 0.$$

Чтобы два эти уравненія свелись къ одному, должны быть выполнены условія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (4)$$

какъ и выше.

Къ четыремъ уравненіямъ (4) можемъ добавить слѣдующее

$$m\lambda f + m' . \mu . F = 0$$

которое показываетъ, что изъ шести уравненій (1) и (4) независимыхъ только пять, а по исключеніи λ/μ только четыре; такимъ образомъ *точечные особенные элементы коинциденціи (1) образуютъ тройную коинциденцію.*

Въ составъ ея входятъ: 1^0 четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $f = 0$, принадлежащихъ коннексу $F = 0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad F = 0,$$

и 2^0 четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $F = 0$, принадлежащихъ коннексу $f = 0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad f = 0.$$

Характеристика первой четверной коинциденціи:

$\mu'_{041} = r^3(rn' + 4nr')$; $\mu'_{140} = r^3[rm' + 4(m-1)r']$;

$\mu'_{032} = 2r^2n(2rn' + 3nr')$; $\mu'_{131} = 4r^2[m'nr + 3(m-1)nr' + (m-1)n'r]$;

$\mu'_{230} = 2r^2(m-1)[2m'r + 3(m-1)r']$; $\mu'_{023} = 2n^2r(2nr' + 3n'r)$;

$\mu'_{122} = 6nr[m'nr + 2(m-1)nr' + 2(m-1)n'r]$;

$$\mu'_{221} = 6(m-1)r[2m'nr + 2(m-1)nr' + (m-1)n'r];$$

$$\mu'_{320} = 2(m-1)^2 r[3m'r + (m-1)r'];$$

$$\mu'_{113} = 4n^2[m'nr + (m-1)nr' + 3(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{311} = 4(m-1)^2[(m-1)n'r + (m-1)nr' + 3m'nr];$$

$$\mu'_{212} = 6(m-1)n[2m'nr + (m-1)nr' + 2(m-1)n'r];$$

$$\mu'_{203} = 2(m-1)n^2[2m'n + 3(m-1)n'];$$

$$\mu'_{302} = 2(m-1)^2 n[3m'n + 2(m-1)n'].$$

Характеристики 2-ой отличаются только обмѣномъ мѣстъ соотвѣтственно m и m', n и n', r и r'.

Чтобы опредѣлить характеристики тройной коинциденціи, замѣтимъ, что, взявъ уравненія (1) $f=0$, $F=0$, (4) $\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0$, изъ двухъ первыхъ имѣемъ $\sum x_i f'_{x_i} = 0$ $\sum x_i F'_{x_i} = 0$ или, умножая первые на λ, второе на μ и складывая:

$$\sum x_i(\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0, \tag{7}$$

т. е. одно изъ уравненій (4) есть слѣдствіе 3-хъ остальныхъ и (1).

Но если возьмемъ только пять уравненій

$$f=0, \quad F=0, \quad \lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0, \qquad (i=1,2,3) \tag{8}$$

то изъ (7) получимъ:

$$x_4.(\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4}) = 0,$$

т. е. уравненія (8) даютъ не только $\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4} = 0$, но еще $x_4 = 0$. Вліяніе этихъ постороннихъ рѣшеній должно быть исключено.

Въ силу $x_4 = 0$ уравненіе (7) приводится къ виду:

$$\sum_{i=1}^{i=3} x_i(\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0$$

и слѣдовательно между тремя послѣдними уравненіями (8) оказывается линейная связь. Поэтому, добавляя уравненіе $x_4 = 0$, можемъ одно изъ нихъ отбросить, т. е. постороннія рѣшенія опредѣлятся уравненіями

$$f=0, \quad F=0, \quad x_4=0, \quad \lambda f'_{x_1} + \mu F'_{x_1} = 0, \quad \lambda f'_{x_2} + \mu F'_{x_2} = 0; \tag{9}$$

но при этомъ опять таки ввели излишнія рѣшенія (т. е. ихъ излишне отбросили и слѣдовательно ихъ нужно добавить), опредѣляемыя уравненіями

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad x_3=0\,,\quad \lambda f'_{x_1}+\mu F'_{x_1}=0. \tag{10}$$

Уравненія (8) замѣнимъ черезъ

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0\,,\quad f'_{x_2}F'_{x_3}-f'_{x_3}F'_{x_2}=0 \tag{8$'$}$$

причемъ вводимъ излишнія рѣшенія

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad f'_{x_2}=0\,,\quad F'_{x_2}=0. \tag{8$''$}$$

Точно также (9) замѣнятся уравненіями

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_4}=0 \tag{9$'$}$$

и (10) черезъ

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad x_3=0\,, \tag{10$'$}$$

потому что послѣднее уравненіе (8) даетъ только значеніе λ/μ.

Отсюда найдемъ искомыя характеристики:

$$\gamma_{310}=(mr'+rm')\,[(m+m'-2)^2+2]+2mm'\,[(m-2)\,r+(m'-2)r'],$$

$$\gamma_{301}=(mn'+nm')\,[(m+m'-2)^2+2]+2mm'\,[(m-2)\,n+(m'-2)n'],$$

$$\gamma_{220}=m'r^2\,(3m+m'-4)+rr'\,[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2]+ \\ +mr'^2\,(m+3m'-2)\,,$$

$$\gamma_{211}=n\,[2m'r\,(3m+m'-4)+r'\,[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2)]+ \\ +n'[r(2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2)+2mr'\,(3m'+m-4)]\,,$$

$$\gamma_{202}=m'n^2\,(3m+m'-4)+nn'\,[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2]+ \\ +mn'^2\,(m+3m'-2)\,,$$

$$\gamma_{130}=(mr'+rm')\,(r+r')^2+2rr'\,[(m-2)\,r+(m'-2)\,r']\,,$$

$$\gamma_{121}=(mn'+nm')\,(r+r')^2+2(mr'+rm')\,(n+n')\,(r+r')\,,$$

$$\gamma_{112}=(mr'+rm')\,(n+n')^2+2\,(mn'+nm')\,(n+n')\,(r+r')\,,$$

$$\gamma_{103}=(mn'+nm')\,(n+n')^2+2nn'\,[(m-2)\,n+(m'-2)\,n']\,,$$

$$\gamma_{040} = rr'(r^2 + rr' + r'^2),$$

$$\gamma_{031} = (nr' + rn')(r + r')^2 + 2rr'(nr + n'r'),$$

$$\gamma_{022} = r^2 n'(3n + n') + rr'(3n^2 + 4nn' + 3n'^2) + r'^2 n(3n' + n),$$

$$\gamma_{013} = (nr' + rn')(n + n')^2 + 2nn'(nr + n'r').$$

2. *Плоскостные особенные элементы коинциденціи суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе для каждой изъ соприкасающихся коинциденцій.*

Сочетаніе (x, p) будетъ основнымъ для всѣхъ коинциденцій, опредѣленныхъ уравненіями (5), если послѣ подстановки $X = x$, $P = p$ они сводятся къ одному. Но подстановка даетъ

$$mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) \, . \, mr \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

$$m'r' \sum \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) . m'r' \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

или

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k = 0. \tag{11}$$

И такимъ образомъ поставленному условію удовлетворимъ

1^0 если
$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$
или

2^0 если
$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$
или

3^0 если
$$\lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} + \mu \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

Первыя уравненія даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $f = 0$, принадлежащіе коннексу $F = 0$. Они образуютъ четверную коинциденцію.

Вторыя даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $F = 0$, принадлежащіе коннексу $f = 0$,—они также образуютъ четверную коинциденцію.

Наконецъ третья система уравненій вмѣстѣ съ уравненіями коинциденціи даетъ по исключеніи λ/μ четыре независимыхъ уравненія, которыя опредѣляютъ тройную коинциденцію плоскостныхъ особенныхъ элементовъ коинциденціи.

Это будутъ элементы (xpu), для которыхъ U_{xp} и U'_{xp} касаются и u есть касательная въ общей точкѣ.

Характеристики опредѣлимъ такъ же, какъ для многообразія точечныхъ особенныхъ элементовъ.

Наконецъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (1) суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, u) есть основное сочетаніе для двойной коинциденціи (6), на которую опирается многообразіе соприкасающихся коинциденцій (5).*

Для такихъ элементовъ три уравненія

$$(p, P) = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} P_{jt} = 0, \tag{13}$$

къ которымъ при подстановкѣ $X = x$, $U = u$ сводятся уравненія (6), должны сводиться къ двумъ, т. е. должны существовать такія λ, μ, ν, что уравненіе

$$\lambda(p, P) + \mu \sum \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} + \nu \sum \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} P_{jl} = 0 \tag{14}$$

выполняется независимо отъ значеній P_{jl}, и слѣдовательно, для такихъ элементовъ имѣемъ при нѣкоторыхъ λ, μ, ν:

$$\frac{1}{2} \lambda \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \nu \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{15}$$

и слѣдовательно должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_{12}} & \frac{\partial f}{\partial p_{13}} & \frac{\partial f}{\partial p_{14}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_{12}} & \frac{\partial F}{\partial p_{13}} & \frac{\partial F}{\partial p_{14}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \end{Vmatrix} = 0.$$

Это даетъ четыре независимыхъ уравненія, но, прибавляя къ нему два уравненія (1), получаемъ не шесть независимыхъ уравненій, а только пять, потому что умножая шесть уравненій (15) каждое на соотвѣтственное p_{jl} и суммируя, получимъ:

$$\lambda(p; p) + r\mu f + r'\nu \; F = 0$$

и слѣдовательно, если къ шести уравненіямъ (15) добавимъ два уравненія (1), то изъ шести первыхъ окажется независимыхъ только пять, и изъ нихъ должны быть исключены $\lambda/_\nu$ и $\mu/_\nu$.

Такимъ образомъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (простой) образуютъ четверную коинциденцію.*

Характеристики ея опредѣлятся подобно тому, какъ находили характеристики тройной коинциденціи, хотя и нѣсколько сложнѣе. На этомъ я уже не буду останавливаться.

§ V.

Сопряженный коннексъ. Обобщеніе конфигураціи.

1. Подобно сочетанію (точка, плоскость), сочетаніе (точка, прямая, плоскость) является само себѣ двойственнымъ,—поэтому можно было-бы ожидать, что для разсматриваемыхъ коннексовъ долженъ существовать коваріантный сопряженный коннексъ, какъ и для коннексовъ съ элементомъ (точка, плоскость).

На самомъ дѣлѣ оказывается однако, что для разсматриваемыхъ коннексовъ сопряженнаго коннекса, вообще говоря, не существуетъ.

Возьмемъ какой-нибудь элементъ (x, p, u) коннекса

$$f(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Сочетанію (p, u) этого элемента,—если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ поверхность X_{pu}, на которой и лежитъ точка x элемента. Поверхность X_{pu} имѣетъ въ точкѣ x опредѣленную вообще говоря касательную плоскость, уравненіе которой

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0. \tag{2}$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) въ силу коннекса подчиняется опредѣленная, вообще говоря, плоскость (2), координаты которой

$$\sigma v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

Точно также сочетанію (x, p) того же элемента принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная поверхность U_{xp}, и плоскость u элемента есть одна изъ касательныхъ плоскостей этой поверхности. Точка ея прикосновенія къ U_{xp} опредѣлится уравненіемъ

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0 \tag{4}$$

и такимъ образомъ элементу $(x, p. u)$ подчиняется далѣе опредѣленная, вообще говоря, точка, которой координаты опредѣляются помощью уравненій коннекса (1):

$$\varrho \cdot y_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}. \qquad (k=1,2,3,4) \tag{5}$$

До сихъ поръ обращеніе идетъ такъ же, какъ въ тернарномъ коннексѣ и въ коннексѣ съ элементомъ (точка, плоскость).

Но когда возьмемъ сочетаніе (x, u) элемента и будемъ разсматривать соотвѣтственный комплексъ P_{xu}, которому принадлежитъ прямая p элемента, то получится уже нѣчто иное.

Комплексъ P_{xu} имѣетъ для своей прямой p не одинъ касательный линейный комплексъ, а безчисленное множество. Соотвѣтственно этому, если исходить изъ уравненія (1), которое можетъ быть замѣнено любымъ уравненіемъ

$$f(xpu) + \frac{1}{2} f_1(xpu) . (p, p) = 0, \tag{6}$$

уравненіе касательнаго къ P_{xu} комплекса изобразится

$$\sum \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} P_{ik} + f_1 . (p, P) = 0. \tag{7}$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) подчиняется не прямая, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, потому что при данныхъ x, p, u можно разсматривать $f_1(xpu)$, какъ одинъ произвольный параметръ въ (7).

При этомъ прямая и при томъ одна получится только при условіи

$$\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = \lambda \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ix}},$$

ибо тогда (7) какъ уже видѣли выше принимаетъ видъ:

$$(\lambda + f_1)\ (p, P) = 0.$$

Такимъ образомъ *элементу (x, p, u) подчиняется одна опредѣленная прямая и при томъ сама прямая элемента, если элементъ будетъ линейчато-особеннымъ.*

Далѣе мы получимъ прямую (хотя и не одну, а ∞^1 прямыхъ), если (7) изображаетъ спеціальный линейный комплексъ,—т. е. если инваріантъ его обращается въ нуль,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{1}{2}f_1\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{1}{2}f_1\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial p_{12}}+f_1.p_{34}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}}+f_1.p_{12}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial p_{13}}+f_1.p_{42}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{42}}+f_1.p_{13}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial p_{14}}+f_1.p_{23}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}}+f_1.p_{14}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right)+f_1\sum p_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}+\frac{1}{2}f_1^2.(p\,,\,p)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right)+rf_1.f+$$

$$+\frac{1}{2}f_1^2.(p\,,\,p)=\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right).$$

Такимъ образомъ касательный комплексъ можетъ быть специальнымъ только въ томъ случаѣ, если прямая p есть специальная прямая комплекса P_{xu}, и тогда всѣ касательные комплексы будутъ специальными. Мы получимъ, какъ совокупность ихъ осей пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку встрѣчи p и прямой q, которой аксiальныя координаты суть $\dfrac{\partial f}{\partial p_{ik}}$.

Итакъ: *элементу $(x\,,\,p\,,\,u)$ подчиняется пучекъ прямыхъ, если p есть специальная прямая комплекса P_{xu}, т. е. если элементъ $(x\,,\,p\,,\,u)$ принадлежитъ коинциденцiи пересѣченiя (1) коннексомъ $(2m\,,\,2r-2\,,\,2n)$:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right)=0\,. \tag{8}$$

Какъ уже было упомянуто ранѣе, въ составъ этой коинциденцiи входятъ и линейчатые особенные элементы коинциденцiи.

Всѣмъ прочимъ элементамъ коннекса принадлежитъ не прямая и не пучекъ прямыхъ, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, содержащихъ прямую элемента и имѣющихъ одинъ и тотъ же параметръ.

Такимъ образомъ для коннексовъ съ элементами $(x\,,\,p\,,\,u)$ какъ въ томъ случаѣ, если (8) не выполняется тождественно, такъ и въ томъ, когда (8) выполняется тождественно для всякаго элемента коннекса, *не существуетъ сопряженнаго коннекса,* т. е. такого коварiантнаго коннекса, которой бы состоялъ изъ такихъ же элементовъ, какъ исходный, и элементы котораго находились бы, вообще говоря, въ однозначномъ и однозначно-обратимомъ соотвѣтствiи съ элементами исходнаго.

Тоже самое, очевидно, имѣетъ мѣсто и по тѣмъ же причинамъ для коннексовъ съ элементомъ $(x\,,\,p)$ и $(p\,,\,u)$, если бы даже условиться ставить два этихъ типа коннексовъ во взаимную связь.

2. Такое отсутствіе сопряженнаго коннекса заставляетъ остановиться на причинахъ его и попытаться такъ измѣнить введенныя опредѣленія, чтобы возможно было построеніе аналогичной теоріи.

Обратимся прежде всего къ опредѣленію касательныхъ линейныхъ комплексовъ. Если прямую трехмѣрнаго пространства изобразимъ точкою пятимѣрнаго плоскаго многообразія, лежащей на квадратичномъ M_4, то комплексъ прямыхъ изобразится пересѣченіемъ двухъ M_4: одного, котораго уравненіе есть уравненіе даннаго комплекса, и другого, упомянутаго выше квадратичнаго многообразія.

Мы имѣемъ такимъ образомъ задачу найти касательное плоское M_3 для трехмѣрнаго же многообразія—пересѣченія двухъ M_4:

$$f(z) = 0\,, \quad (\text{соотвѣт. уравненіе комплекса} \quad f(p) = 0) \tag{1}$$

$$\omega(z) = (z\,,\ z) = 0 \quad \left(\text{соотв. } \frac{1}{2}(p\,,\ p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{12} + p_{14}p_{23} = 0\right). \tag{2}$$

Если z означаетъ точку прикосновенія, Z—точку касательнаго M_3, то уравненія послѣдняго будутъ:

$$\sum_i \frac{\partial f}{z_i} Z_i = 0\,, \quad \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial \omega}{\partial z_i} Z_i = (z\,,\ Z) = 0. \tag{3}$$

Вмѣсто этого разсматриваютъ (ср. Koenigs, l. c. стр. 71 и сл.), какъ касательное многообразіе, такое, которое лежитъ также на $\omega(z) = 0$. Поэтому пришлось бы или принимать за касательное многообразіе такое M_2, которое опредѣляется уравненіями (2) и (3), или же, чтобы имѣть, какъ и въ геометріи точки и плоскости, снова касательное многообразіе 3-хъ измѣреній, взять, какъ это и дѣлается, плоское M_4, опредѣленное уравненіями (3), но тогда получается не одно касательное многообразіе, а ∞^1 ихъ,—ибо черезъ M_3, опредѣленное уравненіями (3), можно провести пучекъ плоскихъ M_4:

$$\lambda \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} Z_i + \mu \sum \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_i} Z_i = 0\,. \tag{4}$$

Имѣя за собою достоинство первенства примѣненія, пріемъ этотъ не болѣе естественъ, чѣмъ указанная выше возможность примѣнять не уравненія (2) и (4), а уравненія (2) и (3), т. е. вмѣсто пучка касательныхъ комплексовъ разсматривать касательную коинциденцію.

При опредѣленіи линейчато-особенныхъ элементовъ—намъ и пришлось воспользоваться этимъ пріемомъ.

Для примѣненій представилъ бы однако извѣстныя удобства другой пріемъ,—именно разсматривать въ качествѣ касательнаго M_3 именно то, которое опредѣляется уравненіями (3).

При этомъ, конечно, придется выйти изъ геометріи прямой въ тѣсномъ смыслѣ слова и перейти до извѣстной степени въ геометрію линейныхъ комплексовъ. Дѣйств., отбрасывая (2) по отношенію къ Z, мы считаемъ Z не прямою, а линейнымъ комплексомъ и слѣдовательно, за плоское касательное къ комплексу (1) M_3 беремъ плоское M_3 линейныхъ комплексовъ, полярныхъ данному и содержащихъ прямую прикосновенія.

Полученное плоское M_3 линейныхъ комплексовъ мы имѣемъ право называть касательнымъ потому, что если возьмемъ прямую $z + dz$ (предположеніе, что $z + dz$ есть прямая даетъ $(z, dz) = 0$) и допустимъ, что эта прямая есть одинъ изъ спеціальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3, то она удовлетворитъ уравненію

$$\sum f'_{z_i} \cdot (z_i + dz_i) = 0,$$

или въ силу $f(z) = 0$ уравненію

$$\sum f'_{z_i} \cdot dz_i = df(z) = 0;$$

и слѣдовательно, подстановка $z + dz$ въ уравненіе комплекса даетъ результатъ 2-го порядка малости, и обратно если прямыя z и $z + dz$ принадлежатъ комплексу, то прямая $z + dz$ представляетъ одинъ изъ спеціальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3.

3. Примѣненіе вышеприведенныхъ соображеній къ коннексамъ (x, p, u) дастъ вмѣсто соприкасающагося трилинейнаго коннекса такую конфигурацію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k C_{jl} = 0 \quad (C, p) = 0$$

гдѣ C_{jl} шесть величинъ, независимыхъ между собою и опредѣляющихъ не прямую, а линейный комплексъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ конфигураціямъ, въ которыхъ элементомъ является уже не комбинація (точка, прямая, плоскость), а соединеніе (точка, линейный комплексъ, плоскость).

Такія конфигураціи можно изучать систематически, какъ это дѣлается по отношенію къ коннексамъ различныхъ типовъ.

Изъ общаго числа ∞^{11} подобныхъ элементовъ одно уравненіе выдѣляетъ совокупность ∞^{10} ихъ, которые образуютъ, скажемъ, коннексъ (x, c, u), два уравненія выдѣляютъ ∞^9, образующихъ коинциденцію (x, c, u) и т. д.

Съ этой точки зрѣнія разсматриваемый въ настоящей статьѣ коннексъ является коинциденціей особеннаго типа,—онъ выдѣляется двумя уравненіями

$$f(x,\ c,\ u) = 0\,, \qquad (c,\ c) = 0\,,$$

изъ которыхъ второе выражаетъ, что беремъ не всевозможные линейные комплексы, а только специальные.

Можно замѣтить, употребляя терминологію аналогичную той, которую примѣняли выше, что эта коинциденція имѣетъ каждый специальный линейный комплексъ (каждую прямую) основнымъ, ибо второе уравненіе имъ выполняется независимо отъ значеній x и u.

Можно дать опредѣленіе особенныхъ элементовъ, какъ коннекса $f(x,\ c,\ u) = 0$, такъ этой коинциденціи, причемъ для послѣдней придемъ къ упомянутой выше соприкасающейся коинциденціи и т. д.

Не останавливаясь на дальнѣйшихъ подробностяхъ, замѣтимъ только, что коннексы съ элементомъ (точка, линейный комплексъ, плоскость) допускаютъ обращеніе, т. е. имѣютъ сопряженный коннексъ. Дѣйствительно каждому элементу $(x,\ c,\ u)$ такого коннекса принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная плоскость (касательная къ X_{cu}): $\sigma v_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, опредѣленная точка (точка прикосновенія плоскости u элемента съ поверхностью U_{xc}): $\varrho y_k = \dfrac{\partial f}{\partial u_k}$ $(k = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4)$.

Наконецъ, составляя поляру $f(x,\ c,\ u)$ относительно координатъ комплекса, получимъ:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial c_{jl}}\, C_{jl} = 0\,,$$

которое для данныхъ x и u изображаетъ плоское M_5 линейныхъ комплексовъ, содержащее комплексъ прикосновенія c и обладающее тѣмъ свойствомъ, что комплексъ $c + dc$, безконечно близкій къ c и ему принадлежащій, обращаетъ уравненіе коннекса (для данныхъ x, u) въ безконечно малую 2-го порядка отн. dc_{jl}. Это есть касательное плоское M_5 линейныхъ комплексовъ. Оно опредѣляетъ одинъ совершенно опредѣленный линейный комплексъ, съ которымъ всѣ его комплексы находятся въ инволюціи, именно комплексъ K, котораго координаты суть:

$$\tau\,\frac{\partial(k\,,\ k)}{\partial k_{jl}} = \frac{\partial f}{\partial c_{jl}}.$$

Такимъ образомъ элементу $(x\,,\ c\,,\ u)$ подчиняется элементъ того же типа $(y\,,\ k\,,\ v)$.

Совокупность всѣхъ элементовъ (y, k, v), соотвѣтствующихъ всѣмъ элементамъ коннекса $f(x, c, u)=0$, опредѣляетъ, слѣдовательно, новый коннексъ $F(y, k, v)=0$ того же типа, который и будетъ *сопряженнымъ* первому.

Связь ихъ взаимная,—можно показать, что если для коннекса $F(y, k, v)=0$ будемъ искать сопряженный, то получимъ исходный коннексъ $f(x, c, u)=0$: *коннексъ сопряженный сопряженному есть исходный коннексъ.*

Такимъ образомъ, что касается теоріи сопряженнаго коннекса и связанныхъ съ нимъ свойствъ, указанный въ этомъ §-ѣ обобщенный коннексъ является болѣе близкимъ аналогомъ тернарнаго коннекса и коннекса съ элементомъ (точка, плоскость), чѣмъ коннексъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

Напротивъ этотъ послѣдній коннексъ представляетъ бóльшую аналогію въ томъ, что касается главной коинциденціи и связанной съ нею интеграціонной задачи.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 15 февраля 1902 года.

1. Прочитана телеграмма К. А. Андреева съ выраженіемъ благодарности Обществу за поздравленія по поводу 30-лѣтія ученой дѣятельности.

2. Прочитаны письма проф. Zaremba и проф. Korn'а съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены-корреспонденты Общества.

3. А. М. Ляпуновъ и В. А. Стекловъ предложили въ члены Общества профессора Тулузскаго Университета E. Cosserat; рѣшено произвести баллотировку въ слѣдующемъ засѣданіи.

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе; „О Римановой функціи ζ съ тремя аргументами".

5. *М. А. Тихомандрицкій* отъ имени Д. А. Граве сдѣлалъ сообщеніе: „О діаметрахъ кривыхъ 3-го порядка".

Засѣданіе 5 апрѣля 1902 года.

1. Прочитано письмо отъ историко-филологическаго Общества при Харьковскомъ Университетѣ съ выраженіемъ благодарности за поздравленія, принесенныя Математическимъ Обществомъ въ день двадцатипятилѣтія историко-филологическаго Общества.

2. По предложенію распорядительнаго Комитета единогласно выбраны въ почетные члены Общества: академикъ А. А. Марковъ, профессоръ Электротехническаго Института К. А. Поссе и профессоръ Университета св. Владиміра В. П. Ермаковъ.

3. По предложенію А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова въ члены-корреспонденты Общества единогласно выбранъ профессоръ Кіевскаго Политехническаго Института А. П. Котельниковъ.

4. *М. А. Тихомандрицкій* отъ имени Д. Д. Мордухай-Болтовского сдѣлалъ сообщеніе: „Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ"

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

1 октября 1902 года.

1. Доложенъ и утвержденъ годичный отчетъ о дѣятельности Общества за истекшій 1901—1902 ак. годъ.

2. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 1902—1903 акад. годъ; избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя: проф. Л. О. Струве и пр. доц. В. П. Алексѣевскій, секретаремъ пр. доц. А. П. Пшеборскій.

3. Единогласно безъ баллотировки избранъ въ почетные члены Общества проф. М. А. Тихомандрицкій.

4. Постановлено просить А. П. Пшеборскаго разсмотрѣть статью, присланную капитаномъ Фроловымъ изъ Онеги и дать о ней отзывъ.

Засѣданіе 18 октября 1902 года.

1. Предсѣдатель доложилъ, что имъ получено письмо отъ М. А. Тихомандрицкаго съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ почетные члены Общества.

2. *В. А. Стекловъ* отъ имени *В. П. Ермакова* сдѣлалъ сообщеніе: „Варіаціонное исчисленіе въ изложеніи Вейерштрасса“.

3. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О циклическихъ кривыхъ 3-го порядка“.

4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторыя приложенія основной теоремы мемуара: Problème de refroidissement d'une barre hétérogène“.

Засѣданіе 3 декабря 1902 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ Обществомъ книгахъ.

2. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“.

3. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „О первыхъ интегралахъ системъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій“.

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе „О Римановой функціи ζ двухъ аргументовъ“,

---

Засѣданіе 7 февраля 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.

2. *I. I. Сикора* сдѣлалъ сообщеніе: „Фотографическія изслѣдованія кометы 1902 г.“.

3. *I. I. Сикора* сдѣлалъ сообщеніе: „О сѣверномъ сіяніи на Мурманѣ“.

4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ замѣчательномъ равенствѣ“.

5. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Обобщеніе теоремы Malus'а“.

6. Въ число членовъ Общества безъ избранія принятъ проф. Д. М. Синцовъ.

Засѣданіе 18 апрѣля 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученныхъ въ даръ книгахъ.

2. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“.

3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ и каноническихъ“.

Засѣданіе 27 апрѣля 1902 года.

1. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной группѣ преобразованій пространства“.

2. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ особыхъ элементахъ коннекса“.

3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе „Объ интегралахъ дифференціальныхъ уравненій“.

4. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе „О разложеніи данной функціи въ рядъ по функціямъ Чебышева“.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

12 октября 1903 года.

1. Предсѣдатель напомнилъ о смерти почетнаго члена Общества проф. Н. В. Бугаева и дѣйствительнаго члена приватъ-доцента М. П. Косача и предложилъ почтить память ихъ вставаніемъ.

2. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности и состояніи Общества за предыдущій $190^2/_3$ акад. годъ.

3. В. А. Стекловъ предложилъ въ почетные члены Общества академиковъ Poincaré, Picard'a и Appell'я, которые избраны единогласно par acclamation.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на $1903/4$ акад. годъ. Избраны: предсѣдателемъ проф. В. А. Стекловъ, товарищами предсѣдателя нроф. А. П. Грузинцевъ и приватъ-доцентъ В. П. Алексѣевскій и секретаремъ приватъ-доцентъ А. П. Пшеборскій.

Засѣданіе 24 октября 1903 года.

1. В. А. Стекловъ предложилъ въ члены-корреспонденты Общества проф. Hadamard (Парижъ) и проф. Hurwitz (Цюрихъ). Постановлено баллотировать ихъ въ будущемъ засѣданіи.

2. Вслѣдствіе просьбы Владимірскаго общества любителей естествознанія о высылкѣ изданій Математическаго Общества постановлено высылать таковыя, начиная съ VIII тома.

3. *В. А. Стекловъ* отъ имени *В. П. Ермакова* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу объ интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ 1-го порядка".

4. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Замѣтка о функціяхъ Kinkelin'a".

5. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Нѣкоторыя приложенія одной формулы суммированія".

Засѣданіе 31 октября 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письма академиковъ Poincaré, Picard'a и Appell'я съ выраженіемъ благодарности за избраніе ихъ въ почетные члены Общества.

2. Предсѣдатель сообщилъ о предстоящемъ 2 ноября чествованіи тридцатилѣтія ученой дѣятельности проф. Харьковскаго Университета М. С. Дринова. Постановлено просить г. предсѣдателя привѣтствовать юбиляра отъ имени Общества.

3. Единогласно избраны въ члены-корреспонденты Общества проф. Hurwitz (Цюрихъ) и Hadamard (Парижъ).

4. *А. П. Грузинцевъ* прочелъ некрологъ М. П. Косача.

5. *В. П. Алексѣевскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ теоріи гаммоморфныхъ функцій".

6. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ особенномъ свойствѣ рядовъ, наиболѣе часто встрѣчающихся въ анализѣ".

Засѣданіе 28 ноября 1903 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письма проф. Hurwitz'а и Hadamard'а съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены Общества.

2. *М. А. Тихомандрицкій* доложилъ статью *В. П. Ермакова*: „О періодическихъ функціяхъ".

3. *В. А. Стекловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ полиномахъ, входящихъ въ формулы суммированія Эйлера и Буля.