Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ.

Д. Мордухай-Болтовского.

§ 1. Мы беремся обобщить интересные результаты, касающіеся такъ называемыхъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, полученные Раффи [1]) и сообщеные имъ Французскому Математическому Обществу 4 апрѣля 1884 года.

Эрмитъ [2]) указываетъ классъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, подъ который подходятъ извѣстные интегралы Эйлера [3])

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

и доказываетъ при помощи эллиптическихъ функцій теорему:

Интегралы

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

въ которыхъ f, f_1, f_2 означаютъ раціональныя функціи, приводятся къ интеграламъ отъ раціональныхъ дробей, а потому суть интегралы псевдо-эллиптическіе, если функціи

$$f(x^2),\ f_1(x^2),\ f_2(x^2)$$

---

[1]) Raffy. Sur les transformations invariantes des differentielles elliptiques. Bulletin de le Société Mathématique de France, t. XII, 1984, p. 51.

[2]) Hermite. Sur une formule d'Euler. Journal de Liouville, 1880.

[3]) Euleri Inst. Calculi Integralis. 1776 г., т. IV, стр. 36.

удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2 x^2}\right),$$

$$f_1(x^2) = -f_1\left(\frac{1-k^2 x^2}{k^2(1-x^2)}\right),$$

$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2 x^2}\right).$$

При этихъ условіяхъ приведеніе выполняется подставками

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Классъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи обнимаетъ интегралы Эрмита, причемъ только что упомянутый результатъ, полученный довольно сложнымъ путемъ Эрмитомъ, выводится, какъ простое слѣдствіе изслѣдованій Раффи. Кромѣ того, какъ я ниже покажу, изслѣдованія Эйлера, Реалиса [1]), Малле[2]) и Буняковскаго [3]) являются тоже слѣдствіями тѣхъ же изслѣдованій.

Раффи доказываетъ, что, если раціональная функція $f(x)$ такова, что при x и y, удовлетворяющихъ Эйлеровскому уравненію

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0,$$

гдѣ

$$R(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

$f(x)$ удовлетворяетъ условію

$$f(x) + f(y) = 0,$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

---

[1]) Nouvelles Annales de Mathématiques, p. 389, 1882.

[2]) Mallet. Two theorems in integration. Annali di matematica pura ed applicata, t. V, p. 252.

[3]) Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости. Приложеніе къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

есть интегралъ псевдо-эллиптическій, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи.

Здѣсь особенно интересенъ тотъ фактъ, что при вышеупомянутыхъ условіяхъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}},$$

или, по терминологіи Раффи, эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, такъ что теорема Раффи формулируется еще такъ: если эллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, то

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

интегралъ псевдо-эллиптическій.

Изъ этого обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Раффи выдѣляетъ группу, которой соотвѣтствуетъ преобразованіе типа

$$Nxy=L(x+y)+M$$

(гдѣ L, M, N постоянныя), которой занимался съ нѣкоторой другой точки зрѣнія также Гурза [1]).

Для интеграловъ этой группы Раффи даетъ общую формулу: для $a+b$ не равно $c+d$

$$\int\left(x-\frac{Lx+M}{x-L}\right)\Psi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

$$L=\frac{ab-cd}{(a+b)-(c+d)},$$

$$M=\frac{(a+b)\,cd-(c+d)\,ab}{(a+b)-(c+d)},$$

[1]] Goursat. Note sur quelques integrales pseudo-elliptiques. Bulletin de la Société Mathématique, t. XV.

а Ψ означаетъ раціональную функцію. Для $a+b=c+d$ на основаніи изслѣдованій Раффи получаемъ формулу

$$\int \frac{x^2-M}{x}\,\Psi\left(\frac{x^2+M}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ у $R(x)$ и Ψ тѣже значенія, а

$$M=a+b=c+d.$$

Мы беремъ болѣе общій случай, когда подъ радикаломъ стоитъ полиномъ какой угодно степени (не ниже 3-ей) и вмѣсто дифференціальнаго уравненія Эйлера, служащаго основой изслѣдованій Раффи, беремъ систему дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,\\
&\frac{x_1dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_ndx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,, \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,
\end{aligned}$$

гдѣ

$$X_i=a_{2n}x_i^{2n}+a_{2n-1}x_i^{2n-1}+\ldots+a_1x_i+a_0\,,$$

которую можно писать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}\,,\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)},\quad \ldots,\frac{dx_n}{dt}=\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}\,, \qquad (2)$$

если

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Понятіе объ инваріантномъ преобразованіи обобщается такъ: Ультраэллиптическій дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, если для x и y, удовлетворяющихъ уравненіямъ Якоби, имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\ldots+\frac{1}{f(x_n)}=0\,,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)}+\frac{x_2}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n}{f(x_n)}=0\,, \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)}=0$$

или, что тоже,

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}=\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}=\ldots=\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\,, \tag{4}$$

причемъ, конечно, исключаются рѣшенія

$$x_1=\text{const.},\qquad x_2=\text{const.},\ldots,x_n=\text{const.},$$

а вмѣстѣ съ тѣмъ исключается случай, когда

$$F'(x_i)=0\,,$$

такъ какъ тогда

$$x_i=x_k=\text{const.},\qquad x_1=\text{const.},\ldots,x_n=\text{const.}$$

Обобщенная теорема Раффи будетъ состоять въ томъ, что дифференціалъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}\,,$$

допускающій инваріантное преобразованіе въ только что указанномъ смыслѣ, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Кромѣ того, мы въ нѣкоторомъ частномъ случаѣ, соотвѣтствующемъ вышеупомянутому инволюціонному преобразованію для эллиптическихъ интеграловъ, даемъ общую формулу для псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ.

§ 2. Весьма важно для нашей цѣли знать общія рѣшенія дифференціальныхъ уравненій Якоби. Въ этомъ отношеніи замѣчателенъ мемуаръ Якоби [1]), въ которомъ онъ даетъ общія рѣшенія этой системы

---

[1]) Jacobi. Uber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 32, p. 200—226. Verke, Bd. 2, p. 135.

уравненій въ особенной и для нашей цѣли весьма полезной формѣ. Мы приводимъ теорему Якоби, сдѣлавъ необходимое, по нашему мнѣнію, дополненіе къ его доказательству.

Теорема I.

Рѣшенія $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы конечныхъ уравненій

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{Y_1}{Y}, \\ p_2 &= \frac{Y_2}{Y}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n &= \frac{Y_n}{Y}, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ p_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_n &= x_1 x_2 \ldots x_n \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} Y &= r_n y^2 + 2 s_n y + t_n, \\ Y_1 &= r_{n-1} y^2 + 2 s_{n-1} y + t_{n-1}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_n &= r_0 y^2 + 2 s_0 y + t_0 \end{aligned} \tag{7}$$

полиномы 2-ой степени относительно y, суть общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби:

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ &\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\frac{x_1^{n-2} dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{x_2^{n-2} dx_2}{\sqrt{X_2}} + \ldots + \frac{x_n^{n-2} dx_n}{\sqrt{X_n}} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

если коэффиціенты r_n, s_n, t_n, r_{n-1}, s_{n-1}, $t_{n-1}, \dots, r_0$, s_0, t_0 удовлетворяютъ $2n+1$ уравненіямъ, получающимся отъ приравниванія коэффиціентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ тождества:

$$[s_n x^n - s_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^n s_0]^2 - [r_n x^n - r_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^n r_0]$$
$$[t_n x^n - t_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^n t_0] = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Если принять обозначенія (6), то x_1, $x_2, \dots, x_n$ должны быть корнями уравненія

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots (-1)^n p_n = 0.$$

Если x_1, $x_2, \dots, x_n$ рѣшенія системы уравненій (5), то уравненіе это обращается въ слѣдующее:

$$Yx^n - Y_1 x^{n-1} + Y_2 x^{n-2} - \dots (-1)^n Y_n = 0, \tag{8}$$

гдѣ Y, Y_1, $Y_2 \dots Y_n$ имѣютъ значенія (7).

Расположенное по нисходящимъ степенямъ y, это уравненіе представляется еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$Ry^2 + 2Sy + T = 0, \tag{9}$$

$$R = r_n x^n - r_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} r_1 x + (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} s_1 x + (-1)^n s_0, \tag{10}$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1}x^{n-1} + \dots (-1)^{n-1} t_1 x + (-1)^n t_0.$$

Мы докажемъ, что всѣ корни уравненія (8) представляютъ изъ себя рѣшенія: x_1, $x_2, \dots, x_n$ уравненій (1), если мы имѣемъ тождественно

$$S^2 - RT = a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 = X$$

при всякомъ x, т. е. если имѣютъ мѣсто тѣ $2n+1$ уравненій, которыя получаются отъ приравниванія коэффиціентовъ при степеняхъ x въ правой и лѣвой частяхъ.

Для доказательства дифференцируемъ уравненіе (8).

Тогда на основаніи тождества

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots (-1)^n Y_n$$

получаемъ

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Y_1x^{n-2}+\ldots(-1)^{n-1}Y_{n-1}}=0,$$

или, вводя обозначенiе

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

$$\frac{dx}{Ry+S}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0. \tag{12}$$

Замѣчая, что по условiю

$$Ry+S=\pm\sqrt{S^2-RT},$$

или, условившись подразумѣвать оба значенiя радикала,

$$Ry+S=\sqrt{S^2-RT}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{\sqrt{S^2-RT}}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0.$$

Но по условiю

$$S^2-RT=X \tag{11}$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{2dy}{YF'(x)}=0.$$

Подобное уравненiе имѣетъ мѣсто для всѣхъ корней уравненiя (8) $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Мы можемъ, значитъ, написать

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}}+\frac{2dy}{YF'(x_i)}=0. \qquad (i=1,2,3\ldots n) \tag{12}$$

Суммируя эти уравненiя, умноживъ, предварительно, каждое на x_i^k, получаемъ

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^k\,dx_i}{\sqrt{X_i}}=0$$

для $k=0,1,2,3,\ldots,n-2$, такъ какъ для этихъ значенiй k

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k}{F'(x_i)} = 0.$$

Такимъ образомъ корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравненія (8) или, что тоже, рѣшенія системы (4) удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ Якоби (1).

Теперь покажемъ, что полиномы R, S, T могутъ существовать при всѣхъ X и что уравненіе (8) даетъ общія рѣшенія системы (1), т. е. рѣшенія, въ которыя входитъ ровно $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Такъ какъ R, S, T полиномы n-ой степени, то число коэффиціентовъ, въ нихъ входящихъ $3(n+1)$. Съ коэффиціентами: $a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_1, a_0$ они связаны числомъ уравненій, равнымъ числу этихъ послѣднихъ; $3(n+1)-(2n+1)=(n+2)$ коэффиціента остаются неопредѣленными. Якоби показываетъ, что хотя произвольныхъ величинъ входитъ $n+2$, но онѣ сводятся къ $n-1$, такъ что число произвольныхъ постоянныхъ будетъ не болѣе $n-1$, какъ слѣдовало ожидать. Однако отсюда еще не слѣдуетъ, что найденныя рѣшенія суть общія, можно воображать, что и эти $n-1$ произвольныя постоянныя сводятся еще къ меньшему числу. Мы докажемъ, что рѣшенія дѣйствительно общія, если будетъ нами доказано, что для коэффиціентовъ r, s, t можно всегда найти значенія, согласныя съ условіемъ (11) и такія, что для $x_1=a_1$ величины $x_2, x_3, \ldots, x_n$ принимаютъ напередъ назначенныя значенія, напримѣръ, $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Принимаемъ за a_1 значеніе x_1 для $y=0$.

Но для

$$y=0 \qquad s_i=\sqrt{X_i},$$

или

$$s_n a_i^n - s_{n-1} a_i^{n-1} + \ldots (-1)^n s_0 = \sqrt{X_i}, \qquad (i=2..\, n)$$

изъ этихъ $n-1$ уравненій опредѣляемъ $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_0$, причемъ даже можемъ положить для простоты

$$s_n=0, \qquad s_{n-1}=0.$$

При всевозможныхъ значеніяхъ $a_2, a_3, \ldots, a_n$, при которыхъ опредѣлитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2^{n-1} a_2^{n-2} \ldots 1 \\ a_3^{n-1} a_3^{n-2} \ldots 1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_n^{n-1} a_n^{n-2} \ldots 1 \end{vmatrix} = (a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_{n-1}-a_n)$$

не равенъ нулю, система уравненій даетъ опредѣленныя значенія для s_{n-2}, $s_{n-3}, \cdots, s_0$, при $\Delta = 0$ нѣсколько уравненій будутъ тождественны, столько же величинъ s могутъ получить произвольныя значенія. Остальныя величины опредѣлятся изъ полученной системы уравненій.

По s_n, $s_{n-1}, \cdots, s_0$ опредѣлятся коэффиціенты $r_n, r_{n-1}, \cdots, r_0$, $t_n, t_{n-1}, \cdots, t_0$, если разложимъ $S^2 - X$ на два множителя степени n каждый. Сколько такихъ разложеній, столько получимъ системъ значеній, причемъ одному коэффиціенту, напримѣръ r_n, можно придать произвольное значеніе.

Теорема II-я.

Общія рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ системѣ конечныхъ уравненій 2-й степени относительно $p_1, p_2, \cdots, p_n$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(k)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0, \\
&\alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_2^{(k)} p_1 + 2\delta_2^{(k)} p_k p_2 + \varepsilon_2^{(k)} p_k^2 + \zeta_2^{(k)} p_2^2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (13) \\
&\alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} + 2\delta_{k-1}^{(k)} p_k p_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^{(k)} p_k^2 + \zeta_{k-1} p_{k-1}^2 = 0, \\
&\alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k+1} + 2\delta_{k+1}^{(k)} p_k p_{k+1} + \varepsilon_{k+1}^{(k)} p_k^2 + \zeta_{k+1} p_{k+1}^2 = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n + 2\delta_n^{(k)} p_k p_n + \varepsilon_n^{(k)} p_k^2 + \zeta_n^{(k)} p_n^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Такъ какъ $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ полиномы 2-й степени относительно y, то

$$
Y^2, \quad p_k Y^2 = Y Y_k, \quad p_1 Y^2 = Y_1 Y, \quad p_1 p_k Y^2 = Y_1 Y_k,
$$

$$
p_k^2 Y^2 = Y_k^2 \quad \text{и} \quad p_k^2 Y^2 = Y_1^2
$$

будутъ 4-ой степени относительно y.

Мы всегда можемъ опредѣлить въ зависимости отъ коэффиціентовъ этихъ полиномовъ постоянныя

$$
\alpha_1^{(k)}, \ 2\beta_1^{(k)}, \ 2\gamma_1^{(k)}, \ 2\delta_1^{(k)}, \ \varepsilon_1^{(k)}, \ \zeta_1^{(k)}
$$

такъ, что

$$
\begin{aligned}
\alpha_1^{(k)} Y^2 + 2\beta_1^{(k)} p_k Y^2 + 2\gamma_1^{(k)} p_1 Y^2 + 2\delta_1^{(k)} p_1 p_k Y^2 + {} \\
+ \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 Y^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 Y^2 = 0. \qquad (a)
\end{aligned}
$$

Дѣйствительно, приравнявъ коэффиціенты при y^4, y^3, y^2, y, y^0 нулю, получимъ 5 уравненій линейныхъ и однородныхъ относительно $\alpha_1^{(n)}$, $2\beta_1^{(k)}$, и т. д. Сокращая же на Y^2 уравненіе (a) имѣемъ:

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 + 2\delta_1^{(n)} p_k p_1 + \varepsilon_1^{(k)} p_k^2 + \zeta_1^{(k)} p_1^2 = 0 .$$

Такимъ же образомъ получаемъ и остальныя уравненія (13). Эти уравненія, опредѣляющія $p_1, p_2, \ldots, p_n$, въ функціи отъ p_k, а по нимъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, независимы другъ отъ друга, если только заразъ не равны нулю: $\gamma_e^{(k)}$, $\delta_e^{(k)}$, $\zeta_e^{(k)}$, $\gamma_m^{(k)}$, $\delta_m^{(k)}$, $\zeta_m^{(k)}$, т. е. когда p_k не равно постоянному, ибо тогда въ каждое уравненіе будетъ входить по новой буквѣ.

При нѣкоторыхъ значеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ можетъ случиться, что

$$\begin{gathered} \delta_1^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)} = \zeta_1^{(k)} = 0 , \\ \delta_2^{(k)} = \varepsilon_2^{(k)} = \zeta_2^{(k)} = 0 , \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \delta_n^{(k)} = \varepsilon_n^{(k)} = \zeta_n^{(k)} = 0 \end{gathered}$$

и уравненія (13) обращаются тогда въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_1 = 0, \\ &\alpha_2^{(k)} + 2\beta_2^{(k)} p_k + 2\gamma_1^{(k)} p_2 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_{k-1}^{(k)} + 2\beta_{k-1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k-1}^{(k)} p_{k-1} = 0, \\ &\alpha_{k+1}^{(k)} + 2\beta_{k+1}^{(k)} p_k + 2\gamma_{k+1}^{(k)} p_{k-1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)} p_k + 2\gamma_n^{(k)} p_n = 0 . \end{aligned} \tag{14}$$

Рѣшимъ вопросъ, при всякихъ ли значеніяхъ коэффиціентовъ полинома X это возможно, и найдемъ въ случаѣ возможности значенія коэффиціентовъ α, β, γ въ уравненіяхъ (14).

Если

$$\begin{gathered} p_1 = \frac{Y_1}{Y} , \\ p_2 = \frac{Y_2}{Y} , \\ \cdots\cdots \\ p_n = \frac{Y_n}{Y} , \end{gathered} \tag{5}$$

то уравненія (14) можно написать такимъ образомъ:

$$\alpha_i^{(k)} Y + 2\beta_i^{(k)} Y_k + 2\gamma_i^{(k)} Y_i = 0 . \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots,k-1,n+1,n)}$$

Значенія $\alpha_i^{(k)}$, $2\beta_i^{(k)}$, $2\gamma_i^{(k)}$ получаемъ, приравнивая нулю коэффиціенты при y^2, y, y^0 въ лѣвой части, т. е. изъ уравненій

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{(k)} r_n + 2\beta_i^{(k)} r_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} r_{n-i} = 0 , \\ &\alpha_i^{(k)} s_n + 2\beta_i^{(k)} s_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} s_{n-i} = 0 , \\ &\alpha_i^{(k)} t_n + 2\beta_i^{(k)} t_{n-k} + 2\gamma_i^{(k)} t_{n-i} = 0 . \end{aligned} \tag{15}$$

Не нарушая общности рѣшенія, можемъ, какъ выше замѣтили, положить

$$s_n = 0, \qquad s_{n-1} = 0.$$

Но тогда также и $s_{n-k} = 0$, а потому и

$$s_{n-2} = 0, \qquad s_{n-3} = 0, \ldots, s_1 = 0, \qquad s_0 = 0. \tag{16}$$

$$p_1 = \frac{r_{n-1} y^2 + t_{n-1}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$p_2 = \frac{r_{n-2} y^2 + t_{n-2}}{r_n y^2 + t_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n = \frac{r_0 y^2 + t_0}{r_n y^2 + t_n}.$$

Для того, чтобы эти значенія удовлетворяли системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби, необходимо и достаточно, чтобы

$$S^2 - RT = X,$$

а такъ какъ $S = 0$, то

$$RT = -X,$$

или

$$RT = -a_{2n}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}),$$

откуда

$$r_n t_n = -a_{2n}$$

и

$$\frac{1}{r_n} R = x^n - \frac{r_{n-1}}{r_n} x^{n-1} + \frac{r_{n-2}}{r_n} x^{n-2} \ldots \pm \frac{r_0}{r_n} =$$

$$= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

$$\frac{1}{t_n} R = x^n - \frac{t_{n-1}}{t_n} x^{n-1} + \frac{t_{n-2}}{t_n} x^{n-2} \ldots \pm \frac{t_0}{t_n} =$$

$$= (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \ldots (x - \alpha_{2n}).$$

Принимая обозначенія

$$\begin{aligned} \pi_1' &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n, \\ \pi_2' &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_n' &= \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n; \\ \pi_1'' &= \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \alpha_{n+3} + \ldots \alpha_{2n}, \\ \pi_2'' &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1}\alpha_{n+3} + \ldots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_n'' &= \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}, \end{aligned} \tag{17}$$

получаемъ

$$\begin{aligned} &\frac{r_{n-1}}{r_n} = \pi_1', \quad \frac{r_{n-2}}{r_n} = \pi_2', \ldots, \frac{r_{n-k}}{r_n} = \pi_k', \ldots, \frac{r_0}{r_n} = \pi_n'; \\ &\frac{t_{n-1}}{t_n} = \pi_1'', \quad \frac{t_{n-2}}{t_n} = \pi_2'', \ldots, \frac{t_{n-k}}{t_n} = \pi_k'', \ldots, \frac{t_0}{t_n} = \pi_n''. \end{aligned} \tag{18}$$

Очевидно, для каждой изъ этихъ величинъ будетъ столько значеній, сколько существуетъ сочетаній изъ $2n$ корней X по n элементовъ т. е.

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n}.$$

Такъ что, если уравненія (14) имѣютъ мѣсто, то s имѣютъ значенія (16), а r, t значенія (18).

Найдемъ теперь соотвѣтствующія значенія коэффиціентовъ $\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}, \gamma_i^{(k)}$.

Изъ уравненій (15) получаемъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{r_{n-k}t_{n-i}-t_{n-k}r_{n-i}}=\frac{2\beta_i^{(k)}}{-(r_nt_{n-i}-r_{n-i}t_n)}=\frac{2\gamma_i^{(k)}}{(r_nt_{n-k}-t_nr_{n-1})}.$$

Эти уравненія, по раздѣленіи знаменателя каждаго члена на r_n и t_n, на основаніи уравненія (18) переобразовываются такъ

$$\frac{\alpha_i^{(k)}}{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}=\frac{2\beta_i^{(k)}}{-(\pi'_i-\pi''_i)}=\frac{2\gamma_i^{(k)}}{(\pi''_k-\pi'_k)}.$$

Откуда

$$p_i=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}p_k+\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k},$$

или, какъ мы условимся впредь обозначать

$$p_i=L_i^{(k)}p_k+M_i^{(k)}, \tag{19}$$

гдѣ

$$L_i^{(k)}=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}, \tag{20}$$

$$M_i^{(k)}=\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k}. \tag{21}$$

Такимъ образомъ имѣетъ мѣсто

Теорема III-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненіямъ вида:

$$p_i=a_i^{(k)}p_k+b_i,$$

то

$$a_i^{(k)}=\frac{\pi'_i-\pi''_i}{\pi'_k-\pi''_k}=L_i^{(k)},$$

$$b_i^{(k)}=\frac{\pi'_k\pi''_i-\pi''_k\pi'_i}{\pi'_k-\pi''_k}=M_i^{(k)},$$

гдѣ $\pi'_i, \pi''_i, \pi'_k, \pi''_k$ имѣютъ значенія (17).

Посмотримъ, каково должно быть условіе, чтобы уравненіе

$$p_i=L_i^{(k)}p_k+M_i^{(k)}$$

обращалось въ

$$p_i = M_i^{(k)} = \text{const.} \tag{22}$$

Для этого, какъ это видно изъ уравненія (19), необходимо и достаточно, чтобы

$$L_i^{(k)} = 0\,,$$

или по (20)

$$\pi'_i = \pi''_i. \tag{23}$$

Если мы имѣемъ

$$\pi'_i = \pi''_i \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\,,$$

то уравненія (19) обращаются въ слѣдующія

$$p_i = M_i^{(k)} \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\ k+1, \ldots, n\,;$$

отсюда получаемъ теорему:

Теорема IV-я.

Если рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби таковы, что

$$p_i = \text{const.} \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\ k+1, \ldots, n\,,$$

то, во первыхъ, корни полинома X таковы, что имѣютъ мѣсто между ними соотношенія

$$\pi'_i = \pi''_i \qquad \text{для} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, k-1\,,\ k+1, \ldots, n\,;$$

во вторыхъ

$$p_i = M_i^{(k)}\,,$$

гдѣ

$$M_i^{(k)} = \pi'_i = \pi''_i.$$

Отмѣтимъ въ заключеніе одно интересное свойство рѣшеній Якобіевскихъ уравненій, вытекающее изъ предыдущей теоріи.

Теорема V-я.

Всякая симметрическая функція рѣшеній $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Якобіевскихъ уравненій выражается раціонально черезъ $\sqrt{X_i}$ и x_i.

Дѣйствительно, мы имѣемъ по теоремѣ I

$$p_k = \frac{r_{n-k} y^2 + 2 s_{n-k} y + t_{n-k}}{r_n y^2 + 2 s_n + t_n},$$

но изъ уравненія

$$R_i y^2 + 2 S_i y + T_i = 0,$$

въ которомъ R_i, S_i, T_i значенія R, S, T при $x = x_i$,

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{S_i^2 - R_i T_i}}{R_i};$$

но $S_i^2 - R_i T_i = X_i$, слѣдовательно

$$y = \frac{-S_i + \sqrt{X_i}}{R_i}. \tag{24}$$

Подставляя это значеніе въ выраженіе p_k, получаемъ

$$p_k = \frac{M_k + N_k \sqrt{X_i}}{M_n + N_n \sqrt{X_i}} \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots n)$$

въ видѣ раціональной функціи отъ x_i и $\sqrt{X_i}$.

Такъ какъ всякая симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ выражается раціонально черезъ $p_1, p_2, \cdots, p_n$, то теорема такимъ образомъ доказана.

---

§ 3. Существеннымъ добавленіемъ къ изслѣдованіямъ Якоби являются прекрасныя изслѣдованія Ришло [1]), давшаго два интеграла Якобіевскихъ уравненій, подобныхъ интегралу Эйлеровскаго уравненія [2])

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

---

[1]) Richelot. Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 23, стр. 361. Richelot. Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen. Journal de Crelle, Bd. 25.

[2]) Lagrange. Oeuvres Complétes, t. II, p. 18.

въ формѣ

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}=(x_2-x_1)\sqrt{a_4 p_1^2+a_3 p_1+C},$$

гдѣ $p_1=x_1+x_2$, имѣющему важное значеніе въ изслѣдованіяхъ Раффи.

Теорема Ришло состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема VI-я.

Рѣшенія Якобіевскихъ уравненій

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,\\
&\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)\\
&\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0
\end{aligned}$$

удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}+\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)}+\ldots+\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}=\sqrt{K}, \qquad (25)$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C, \qquad (26)$$

C произвольная постоянная,

$$p_1=x_1+x_2+\ldots x_n,$$

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Для доказательства систему Якобіевскихъ уравненій (1) замѣняемъ слѣдующей, ей равносильной

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}=\frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}, \qquad (2)$$

гдѣ

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Дифференцируя по t и замѣняя $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$ ихъ выраженіями (2), получаемъ

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\frac{X_1}{F'(x_1)^2}\right)}{\partial x_1}\right] + \frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}\sum_{k=2}^{k=n}\frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}\frac{1}{x_1 - x_k}$$

и т. д.

Складывая эти уравненія, получаемъ по сокращеніи

$$2\frac{d^2p_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right)}{\partial x_k}. \tag{27}$$

Черезъ сложеніе же уравненій (2)

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sqrt{X_k}}{F'(x_k)}. \tag{28}$$

Разлагая дробь $\frac{X}{F(x)^2}$ на простѣйшія, получаемъ

$$\frac{X}{F(x)^2} - a_{2n} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\frac{1}{(x-x_k)^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\left[\frac{\partial\left(\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right)}{\partial x_k}\right]\frac{1}{x-x}.$$

Разлагая обѣ части этого тождества по нисходящимъ степенямъ x и приравнивая коэффиціенты при $\frac{1}{x}$, получаемъ

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\left[\frac{X_k}{F'(x_k)^2}\right]}{\partial x_k},$$

или, на основаніи (27),

$$a_{2n-1} + 2a_{2n}p_1 = 2\frac{d^2p_1}{dt^2}.$$

Умножая на $\frac{dp_1}{dt}$ и интегрируя, получаемъ

$$\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2 = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

или

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{K}. \tag{29}$$

Отсюда, по замѣнѣ $\frac{dp_1}{dt}$ его выраженіемъ (28), получаемъ формулу (25).

Перейдемъ теперь къ нѣкоторымъ характернымъ свойствамъ Якобіевскихъ уравненій, позволяющимъ вывести изъ только что найденнаго интеграла остальные $n-2$ интеграла, а въ томъ числѣ и второй интегралъ Ришло.

Лемма.

Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ удовлетворяютъ системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^k dx_i}{\sqrt{X_i}} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n=2) \tag{1}$$

то $y_1, y_2, \cdots, y_n$, связанныя съ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ соотношеніями

$$y_i = \frac{ax_i + b}{cx_i + d}, \qquad (i=1,2,3,\ldots,n) \tag{30}$$

удовлетворяютъ системѣ аналогичныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-2) \tag{31}$$

гдѣ

$$Y_i = b_{2n}y^{2n} + b_{2n-1}y^{2n-1} + \cdots b_1 y + b_0 = a_{2n}(dy-b)^{2n} +$$
$$+ a_{2n-1}(dy-b)^{2n-1}(-cy+a) + \cdots, a_0(-cy+a)^{2n}. \tag{32}$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи (30),

$$\frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc-ad)(cx_i+d)^{n-k-2}(ax_i+b)^k dx_i}{\sqrt{X_i}},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \sum_{i=1}^{k=n} \frac{g_0^{(k)} + g_1^{(k)}x_i + \cdots g_{n-2}^{(k)}x_i^{n-2}}{\sqrt{X_i}} dx_i,$$

или, на основаніи уравненія (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{y_i^k dy_i}{\sqrt{Y_i}} = 0. \qquad (\text{при } k=0,1,2,\ldots,n-2) \tag{31}$$

Теорема VII-я.

Рѣшенія системы дифференціальныхъ уравненій Якоби удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}, \tag{32}$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d} dt, \tag{33}$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma, \tag{34}$$

Γ произвольная постоянная, а $b_{2n}, b_{2n-1}, \ldots, b$, a имѣютъ тоже значеніе, что въ леммѣ; t связано съ t соотношеніемъ

$$dt_1 = \frac{(bc - ad)^n}{\Pi(x)}, \tag{35}$$

$$\Pi(x) = (cx_1 + d)(cx_2 + d)\ldots(cx_n + d). \tag{36}$$

По леммѣ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанныя съ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соотношеніями (30), когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рѣшенія Якобіевскихъ уравненій, удовлетворяютъ уравненіямъ (31), получающимся замѣной $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Но $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя уравненіямъ Якоби (1), удовлетворяютъ, по теоремѣ VI, вмѣстѣ съ тѣмъ уравненію

$$\frac{dp_1}{dt} = \sqrt{a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C}. \tag{29}$$

Значитъ, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющіе тоже уравненіямъ Якоби (31), удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma}, \tag{32}$$

получаемому замѣной $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Дѣйствительно, при такой замѣнѣ p_1 должна перейти въ q_1, опредѣляемой формулой (33).

Для того же, чтобы узнать, во что переходитъ t, преобразуемъ уравненія

$$\frac{\Phi'(y_1)dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \frac{\Phi'(y_2)dy_2}{\sqrt{Y_2}} = \ldots = \frac{\Phi'(y_n)dy_n}{\sqrt{Y_n}} = dt_1\,, \tag{37}$$

$$\Phi(y) = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)\,,$$

равносильныя уравненіямъ (31), подставивъ въ нихъ вмѣсто y ихъ выраженія (30) въ x.

Тогда получимъ

$$\Phi'(y_i) = \frac{(bc-ad)^{n-1}F'(x_i)}{(cx_1+d)^{n-1}(cx_1+d)(cx_2+d)\ldots(cx_{i-1}+d)(cx_{i+1}+d)\ldots(cx_n+d)},$$

и

$$dy_i = \frac{(bc-ad)}{(cx_i+d)^2}\,dx_i\,,$$

$$dt_1 = \frac{\Phi'(y_i)dy_i}{\sqrt{Y_i}} = \frac{(bc-ad)^n}{\Pi(x)}\,dt\,, \tag{35}$$

гдѣ

$$\Pi(x) = (cx_1+d)(cx_2+d)\ldots(cx_n+d). \tag{36}$$

Уравненіе (32), на основаніи соотношенія (35), можно еще написать такимъ образомъ

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{(bc-ad)^n}{\Pi(x)}\sqrt{L}\,, \tag{38}$$

или, такъ какъ по (33),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{(bc-ad)}{(cx_i+d)^2}\,\frac{dx_i}{dt}\,,$$

или, по уравненіямъ (2),

$$\frac{dq_1}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i+d)^2F'(x_i)}\,,$$

то

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{(cx_i+d)^2 F'(x_i)} = \frac{(bc-ad)^{n-1}}{\Pi(x)^2} \sqrt{F}, \tag{39}$$

полагая $L = \frac{F}{\Pi(x)^2}$, гдѣ F будетъ очевидно цѣлой симметрической функціей отъ $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Полагая

$$a=1, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=1,$$

получаемъ первый интегралъ Ришло (25).

Полагая

$$a=0, \quad b=1, \quad c=1, \quad d=0,$$

получаемъ второй интегралъ Ришло

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{X_i}}{x_i^2 F'(x_i)} = \frac{\sqrt{a_0 p_{n-1}^2 + a_1 p_n p_{n-1} + B p_n^2}}{p_n^2},$$

гдѣ B произвольная постоянная.

Замѣтимъ здѣсь, мимоходомъ, что, если мы возьмемъ $n-1$ системъ значеній a, d, c, d такихъ, что не имѣютъ мѣсто равенства

$$a_i d_i - b_i c_i = 0,$$

и

$$\frac{d_i}{c_i} = \frac{d_k}{c_k},$$

то $n-1$ уравненій (39), соотвѣтствующихъ имъ, представятъ $n-1$ независимыхъ интеграловъ уравненій Якоби. Впрочемъ это замѣчаніе въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ не понадобится.

§ 4. На основаніи теоремы Ришло можно вывести важный результатъ, служащій развитіемъ §-а 2-ого.

Теорема VIII-я.

Всякая раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \dots, x_n$ выражается раціонально черезъ

$$p_1 = x_1 + x_2 + \dots x_n$$

и $\sqrt{K}$, гдѣ

$$K = a_{2n} p_1^2 + a_{2n-1} p_1 + C.$$

Для доказательства возьмемъ уравненіе §-а 2-ого

$$\frac{dx_i}{\sqrt{X_i}} - \frac{2\,dy}{YF'(x_i)} = 0\,, \tag{12}$$

или

$$dx_i - \frac{2\sqrt{X_i}\,dy}{YF'(x_i)} = 0\,. \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

Складывая эти уравненія, получаемъ

$$dp_1 - 2\left(\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)}\right)\frac{dy}{Y}\,,$$

или, такъ какъ по теоремѣ Ришло (25)

$$\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)} + \frac{\sqrt{X_2}}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{\sqrt{X_n}}{F'(x_n)} = \sqrt{K}\,,$$

гдѣ

$$K = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C\,,$$

то получаемъ

$$\frac{dp_1}{\sqrt{K_1}} = \frac{2\,dy}{Y}.$$

Отсюда

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = 2\int\frac{dy}{Y} + \Gamma. \tag{40}$$

Если a_{2n} не равно нулю, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}\lg\left(\frac{2\,a_{2n}p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K}\right). \tag{41}$$

Если $a_{2n} = 0$ и a_{2n-1} не равно нулю, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{2}{a_{2n-1}}\sqrt{K}\,, \tag{42}$$

и, наконецъ, если $a_{2n} = 0$ и $a_{2n-1} = 0$, то

$$\int\frac{dp_1}{\sqrt{K}} = \frac{p_1}{\sqrt{K}}. \tag{43}$$

Если мы положимъ, какъ въ §-ѣ 2-омъ,

$$R = r_n x^n - r_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n r_0,$$

$$S = s_n x^n - s_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n s_0,$$

$$T = t_n x^n - t_{n-1} x^{n-1} + \dots (-1)^n t_0,$$

то, подставляя эти выраженія въ тождество

$$S^2 - RT = X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

получимъ въ лѣвой части

$$S^2 - RT = (s_n^2 - r_n t_n) x^{2n} + (-2 s_n s_{n-1} + r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n) x^{2n-1} + \dots,$$

а въ правой части

$$X = a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

получимъ

$$a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n; \tag{44}$$

кромѣ того

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^n - Y_1 x^{n-1} + \dots (-1)^n Y_n,$$

откуда

$$Y = r_n y^2 + 2 s_n y + t_n,$$

или

$$Y = r_n (y - \xi)(y - \eta),$$

гдѣ

$$\xi = \frac{-s_n + \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n},$$

$$\eta = \frac{-s_n - \sqrt{s_n^2 - r_n t_n}}{r_n}.$$

Принимая во вниманіе равенство (44), имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{-s_n + \sqrt{a_{2n}}}{r_n}, \\ \eta &= \frac{-s_n - \sqrt{a_{2n}}}{r_n}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Когда $a_{2n} = s_n^2 - r_n t_n$ не нуль, то ξ не равно η,

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{r_n(\xi - \eta)} \, \frac{1}{y - \xi} + \frac{1}{r_n(\eta - \xi)} \, \frac{1}{y - \eta}. \tag{46}$$

Но по уравненіямъ (45)

$$r_n(\xi - \eta) = 2\sqrt{a_{2n}}\,.$$

Поэтому уравненіе (46) напишется такъ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{2\sqrt{a_{2n}}}\left(\frac{1}{y-\xi} - \frac{1}{y-\eta}\right).$$

Умножая на dy и интегрируя, получаемъ

$$\int \frac{dy}{Y} = \frac{1}{2\sqrt{a_{1n}}} \lg \frac{y - \xi}{y - \eta}. \tag{47}$$

Подставляя въ уравненіе (40) значенія обоихъ интеграловъ, въ него входящихъ, изъ уравненій (41) и (47) и полагая

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} \lg A\,,$$

гдѣ A новая произвольная постоянная, получимъ для случая, когда a_{2n} не равно нулю,

$$A\frac{y - \xi}{y - \eta} = \frac{2\,a_{2n}p_1 + a_{2n-1}}{2\sqrt{a_{2n}}} + \sqrt{K}. \tag{48}$$

Изъ этого уравненія ясно, что y есть раціональная функція p_1 и $\sqrt{K}$.

Если $a_{2n} = 0$, но a_{2n-1} не нуль, то по уравненію (45) $\xi = \eta$.

Уравненіе (46) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{r_n(y - \xi)^2}, \tag{49}$$

а уравненіе (47) слѣдующимъ

$$\int \frac{dy}{Y} = -\frac{1}{r_n(y - \xi)}\,, \tag{50}$$

на основаніи котораго, а равно и (42), выводимъ изъ (40)

$$\frac{2}{a_{2n-1}}\sqrt{K}=-\frac{2}{r_n(y-\xi)}+\Gamma. \tag{51}$$

Это уравненіе тоже даетъ y въ раціональной функціи отъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Для случая же, когда и $a_{2n-1}=0$, послѣднее уравненіе (51) замѣнится слѣдующимъ

$$\frac{p_1}{\sqrt{K}}=-\frac{2}{r_n(y-\xi)}+\Gamma, \tag{52}$$

тоже дающимъ, какъ и въ предыдущихъ двухъ случаяхъ, y въ раціональной функціи отъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Но на основаніи §-а 2-ого мы имѣемъ

$$p_1=\frac{Y_1}{Y}, \quad p_2=\frac{Y_2}{Y}, \ldots, p_n=\frac{Y_n}{Y}, \tag{7}$$

гдѣ Y, Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ цѣлыя функціи 2-ой степени относительно y. Слѣдовательно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ выражаются раціонально черезъ y, а такъ какъ, мы только что доказали, y выражается раціонально черезъ p_1 и $\sqrt{K}$, то такимъ же образомъ выражаются $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и всякая раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такъ какъ послѣдняя можетъ быть всегда раціонально выражена черезъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Послѣдняя теорема даетъ возможность доказать интересное свойство дифференціала $\frac{f(x)}{\sqrt{X}}dx$, допускающаго инваріантное преобразованіе.

Теорема IX-я.

Дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, допускающій инваріантное преобразованіе, интегрируется въ конечномъ видѣ.

Не вводя термина: „инваріантное преобразованіе", теорему можно формулировать такъ:

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя системѣ дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,, \qquad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_2^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,$$

удовлетворяютъ также еще слѣдующимъ уравненіямъ

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\ldots+\frac{1}{f(x_n)}=0\,,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)}+\frac{x_2}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n}{f(x_n)}=0\,, \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)}=0\,,$$

то

$$\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдоультраэллиптическій, выражающійся черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи.

При доказательствѣ будемъ различать два случая:

1) p_1 не равно постоянному,

2) $p_1=\text{const.}$

Уравненія (3) перепишемъ такъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}=\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}=\ldots=\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\,, \qquad (4)$$

гдѣ

$$F(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Тогда

$$n\,\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\,.$$

Умножая обѣ части на $\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$, имѣемъ

$$n\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\right)\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{53}$$

Но по теоремѣ VI (Ришло)

$$\frac{dp_1}{dt}=\sqrt{K}, \tag{29}$$

гдѣ

$$K=a_{2n}p_1^2+a_{2n-1}p_1+C, \tag{26}$$

или, такъ какъ $\frac{dx_1}{dt}=\frac{\sqrt{X_1}}{F'(x_1)}$, то, по раздѣленіи на это послѣднее уравненіе,

$$\frac{dp_1}{dx_1}=F'(x_1)\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X_1}},$$

или

$$\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}}=\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{54}$$

По подстановкѣ этого выраженія въ уравненіе (53) получаемъ

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{F'(x_1)\sqrt{X_1}}=\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}\right)\frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=R\frac{dp_1}{\sqrt{K}}, \tag{55}$$

гдѣ

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

есть раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и, слѣдовательно, раціональная функція отъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Но такая функція, по предыдущей теоремѣ VIII, выражается раціонально черезъ p_1 и $\sqrt{K}$.

Пусть

$$R=\varphi(p_1, \sqrt{K}).$$

Подставляя въ уравненіе (55), получаемъ

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(p_1, \sqrt{R})\,\frac{dp_1}{\sqrt{K}},$$

или

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \psi(p_1, \sqrt{K})\,dp_1,$$

гдѣ ψ раціональная функція отъ p и $\sqrt{K}$.

Интегрируя обѣ части послѣдняго равенства, имѣемъ

$$\int \frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \psi(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})\,dp_1. \qquad (56)$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, берется въ конечномъ видѣ, т. е. выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи

$$p_1 \quad \text{и} \quad \sqrt{K} = \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C}.$$

Въ получаемомъ по интегрированіи выраженіи

$$\Phi_1(p_1, \sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C})$$

слѣдуетъ произвести замѣну

$$p_1 \quad \text{на} \quad \frac{Y_1}{Y}, \qquad \text{(форм. 5)}$$

$$\sqrt{a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C} \quad \text{на} \quad A\,\frac{y-\xi}{y-\eta} - \frac{2a_{2n}Y_1 + a_{2n-1}Y}{2\sqrt{a_{2n}}\,Y}. \qquad \text{(форм. 48)}$$

Затѣмъ въ полученномъ выраженіи замѣнить Y на

$$Y = \frac{-S_1 + \sqrt{X_1}}{R_1}. \qquad (24)$$

Тогда получимъ

$$\int \frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \Phi_2(x_1, \sqrt{X_1}) \qquad (57)$$

въ видѣ суммы алгебраической раціональной функціи отъ x_1 и $\sqrt{X_1}$ и логариѳмовъ подобныхъ функцій.

Теперь переходимъ ко второму случаю, когда

$$p_1 = \text{const.},$$

и прежде всего замѣтимъ, что всегда существуютъ такія значенія a, b, c, d, при которыхъ

$$q_1^{(j)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_j x_i + b_j}{c_j x_i + d_j}$$

не равно постоянному.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія

$$\frac{dq_1^{(1)}}{dt} = 0\,, \quad \frac{dq_1^{(2)}}{dt} = 0\,, \ldots, \frac{dq_1^{(n)}}{dt} = 0$$

равносильны слѣдующимъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{(c_j x_i + d_j)^2} \frac{dx_i}{dt} = 0. \quad (\text{для } j = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{58}$$

Очевидно, опредѣлитель этой системы уравненій не обращается въ нуль тождественно при всѣхъ $c_1, c_2, \ldots, c_n, d_1, d_2, \ldots, d_n$; если бы это предположеніе имѣло мѣсто, то

$$\frac{dx_1}{dt} = 0\,, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0\,, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = 0\,,$$

или

$$x_1 = \text{const.}, \quad x_2 = \text{const.}, \ldots, x_n = \text{const.},$$

а этотъ случай нами исключенъ (§ 1) изъ понятія инваріантнаго преобразованія.

Беремъ тѣ значенія для a, b, c, d, при которыхъ q_1 не равно постоянному.

На основаніи теоремы VII

$$\frac{dq_1}{dt_1} = \sqrt{L}\,, \tag{32}$$

гдѣ

$$q_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{ax_i + b}{cx_i + d}\,, \tag{33}$$

$$L = b_{2n} q_1^2 + b_{2n-1} q_1 + \Gamma. \tag{34}$$

По леммѣ §-а 3-яго $y_1, y_2, \cdots, y_n$ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{\sqrt{Y_1}}{\Phi'(y_1)},\quad \frac{dy_2}{dt}=\frac{\sqrt{Y_2}}{\Phi'(y_2)},\ \ldots,\ \frac{dy_n}{dt}=\frac{\sqrt{Y_n}}{\Phi'(y_n)},\tag{37}$$

гдѣ

$$\Phi(y)=(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n).$$

Уравненія же (3) обращаются въ

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Theta(y_1)}+\frac{1}{\Theta(y_2)}+\ldots+\frac{1}{\Theta(y_n)}=0,\\
&\frac{y_1}{\Theta(y_1)}+\frac{y_2}{\Theta(y_2)}+\ldots+\frac{y_n}{\Theta(y_n)}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{y_1^{n-2}}{\Theta(y_1)}+\frac{y_2^{n-2}}{\Theta(y_2)}+\ldots+\frac{y_n^{n-2}}{\Theta(y_n)}=0,
\end{aligned}\tag{59}$$

гдѣ

$$\Theta(y)=\frac{f\left(\dfrac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}\right)}{(cx+d)^{n-2}}=\frac{(\gamma y+\delta)^{n-2}f\left(\dfrac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}\right)}{(ad-bc)^{n-1}},\tag{60}$$

если

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\quad \text{а}\quad x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}=\frac{dy-b}{-cy+a}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ при доказательствѣ леммы §-а 3-яго, убѣждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{y_i^k}{\Theta(y_i)}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{h_0^{(k)}+h_1^{(k)}x_i+\cdots g_{n-2}^{(k)}x_i^{n-2}}{f(x_i)},$$

откуда на основаніи уравненій (3) и получаемъ систему уравненій (59).

Какъ изъ уравненій (2), (4) и (29) вывели (55), такъ изъ (37), (59) и (32) выводимъ

$$\frac{\Theta(y_1)\,dy_1}{\sqrt{Y_1}}=S\,\frac{dq_1}{\sqrt{L}},\tag{61}$$

гдѣ S раціональная симметрическая функція отъ $y_1, y_2, \cdots, y_n$, и, слѣдовательно, раціональная функція отъ $q_1, q_2, \cdots, q_n$, гдѣ $q_1, q_2, \cdots, q_n$ такія же функціи отъ $y_1, y_2, \cdots, y_n$, какъ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ отъ $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Примѣняя же теорему VIII къ уравненіямъ Якоби (31) или (37), заключаемъ, что $S = \chi(q_1, \sqrt{L})$ раціональная функція отъ q_1 и $\sqrt{L}$.

Изъ уравненія (62) имѣемъ

$$\frac{\Theta(y_1)\,dy_1}{\sqrt{Y_1}} = \chi(q_1, \sqrt{L})\frac{dq_1}{\sqrt{L}},$$

откуда

$$\int \frac{\Theta(y_1)}{\sqrt{Y_1}}\,dy_1 = \int \omega(q_1, \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma})\,dq_1, \qquad (62)$$

гдѣ ω раціональная функція отъ

$$q_1 \text{ и } \sqrt{L} = \sqrt{b_{2n}q_1^2 + b_{2n-1}q_1 + \Gamma}.$$

Интегралъ, стоящій въ правой части, выражается черезъ алгебраическія и логариѳмическія функціи q_1 и $\sqrt{L}$.

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, сведемъ результатъ, получаемый по интегрированіи, къ функціи

$$\Phi_2(y_1, \sqrt{Y_1}).$$

Остается только замѣнить y_1 на

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad \sqrt{Y_1} \quad \text{на} \quad \frac{\sqrt{X_1}}{(cx_1 + d)^n}.$$

§ 5. Замѣтимъ, что систему дифференціальныхъ уравненій Якоби (1) на основаніи теоремы 2-ой можемъ замѣнить системой конечныхъ уравненій

$$\alpha_1^{(k)} + 2\beta_1^{(k)}p_k + 2\gamma_1^{(k)}p_1 + 2\delta_1^{(k)}p_kp_1 + \varepsilon^{(k)}p_k^2 + s_1^{(k)}p_1^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n^{(k)} + 2\beta_n^{(k)}p_k + 2\gamma_n^{(k)}p_n + 2\gamma_n^{(k)}p_kp_n + \varepsilon^{(k)}p_k^2 + \varepsilon_n^{(k)}p_n^2 = 0.$$

Наиболѣе поддается изслѣдованію случай теоремы III, когда эти уравненія обращаются въ линейныя

$$p_l = L_l^{(k)}p_k + M_l^{(k)} \quad {\scriptstyle (l=1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n)} \qquad (19)$$

гдѣ, какъ мы доказали въ §-ѣ 2-омъ (Теорема III) $L_l^{(k)}$, $M_l^{(k)}$ могутъ имѣть только слѣдующія значенія

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''}, \tag{20}$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi_k'\pi_l'' - \pi_k''\pi_l'}{\pi_k' - \pi_k''}. \tag{21}$$

Такимъ образомъ получаемъ, какъ частный случай теоремы IX, слѣдующую теорему:

Теорема X.

Если раціональная функція $f(x)$ такова, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяя уравненіямъ

$$p_l = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''} p_k + \frac{\pi_k'\pi_l'' - \pi_k''\pi_l'}{\pi_k' - \pi_l'}, \tag{19}$$

удовлетворяютъ еще уравненіямъ

$$\begin{gathered} \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0\,, \\ \frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered} \tag{3}$$

то

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптическій.

Эта теорема можетъ быть доказана и независимо отъ вышеизложеннаго, хотя тогда не на столько ясна связь ея съ теоріей Якобіевскихъ уравненій, а главное то, что она составляетъ частный случай болѣе общей теоремы.

Для доказательства разобьемъ

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{2n})$$

на два множителя

$$X' = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

$$X'' = (x - \alpha_{n+1})(x - \alpha_{n+2}) \ldots (x - \alpha_{2n}).$$

Тогда

$$X = a_{2n} X' X''.$$

Принимая обозначенія (17)

$$X' = x^n - \pi_1' x^{n-1} + \pi_2' x^{n-2} - \ldots (-1)^n \pi_n', \tag{63}$$

$$X'' = x^n - \pi_1'' x^{n-1} + \pi_2'' x^{n-2} - \ldots (-1)^n \pi_n'', \tag{64}$$

мы имѣемъ тождества

$$\pi_l' = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''} \pi_k' + \frac{\pi_k' \pi_l'' - \pi_k'' \pi_l'}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$\pi_l'' = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''} \pi_k'' + \frac{\pi_k' \pi_l'' - \pi_k'' \pi_l'}{\pi_k' - \pi_k''},$$

или, принимая обозначенія (20) и (21),

$$\pi_l' = L_l^{(k)} \pi_k' + M_l^{(k)}, \tag{65}$$

$$\pi_l'' = L_l^{(k)} \pi_k'' + M_l^{(k)}. \tag{66}$$

Подставляя эти выраженія π_l', π_l'' въ уравненія (63) и (64), получаемъ

$$\begin{aligned} X' = x^n &- M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots (-1)^{k-1} M_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ &+ (-1)^k M_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} M_{n+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \ldots (-1)^n M_n^{(k)} + \\ &+ \pi_k' \big(- L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} - \ldots (-1)^{k-1} L_{k-1}^{(k)} x^{n-k+1} + \\ &+ (-1)^k L_k^{(k)} x^{n-k} + (-1)^{k+1} L_{k+1}^{(k)} x^{n-k+1} + \ldots (-1)^n L_k^{(k)} \big), \end{aligned} \tag{67}$$

гдѣ

$$L_k^{(k)} = 1, \qquad M_k^{(k)} = 0,$$

что вполнѣ согласно съ формулами (20) и (21).

Полагая

$$x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots (-1)^n M_n^{(k)} = \mu, \tag{68}$$

$$- L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)} = \lambda, \tag{69}$$

можно написать уравненіе (67) и другое, такимъ же образомъ получаемое изъ (64), такъ

$$X' = \mu + \lambda \pi'_k, \tag{70}$$

$$X'' = \mu + \lambda \pi''_k. \tag{71}$$

Изъ уравненій (3) имѣемъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{nf(x_1)}{F'(x_1)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

и

$$\frac{nf(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)} \, \frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{72}$$

Такъ какъ

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(x_i)}{F'(x_i)}$$

раціональная симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ то она вмѣстѣ съ тѣмъ раціональная функція отъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Такъ какъ, по уравненіямъ (19), $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть раціональныя функціи отъ p_k, то и R есть такая же функція отъ p_k. Означимъ R черезъ $\varphi(p_k)$.

Преобразуемъ теперь уравненіе (72) или, что тоже, уравненіе

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = R\,\frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{73}$$

На основаніи уравненій (19) имѣемъ

$$F'(x_1) = nx_1^{n-1} - (n-1)\,p_1 x_1^{n-2} + \ldots + (-1)^n p_n =$$

$$= nx_1^{n-2} - (n-1)\,M_1^{(k)} x_1^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} M_{n-1}^{(k)} +$$

$$+ p_k\left(- L_1^{(k)}(n-1)\,x_1^{n-2} + (n-2)\,L_2^{(k)} x_1^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} L_{n-1}^{(k)}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_{x=x_1} + p_k \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)_{x=x_1}, \tag{74}$$

$$F'(x_1) = \mu_1 + \lambda_1 p_k,$$

гдѣ

$$\mu_1 = (\mu)_{x=x_1}, \qquad \lambda_1 = (\lambda)_{x=x_1}.$$

Такъ какъ $F(x_1) = 0$, то $\mu_1 + \lambda_1 p_k = 0$, откуда

$$p_k = -\frac{\mu_1}{\lambda_1}. \tag{75}$$

Подставляя въ уравненіе (74) это выраженіе p_k, имѣемъ

$$F'(x_1) = \frac{\lambda_1 \dfrac{\partial \mu_1}{\partial x_1} - \mu_1 \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}}{\lambda_1}. \tag{76}$$

Подставляя въ уравненіе (73) вмѣсто $X = a_{2n} X' X''$, на основаніи уравненій (70), (71),

$$a_{2n}(\mu_1 + \lambda_1 \pi'_k)(\mu_1 + \lambda_1 \pi''_k),$$

а вмѣсто $F'(x_1)$ его выраженіе (76) и опуская для краткости значки, имѣемъ

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\varphi(p_k)\dfrac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\lambda^2}}{\sqrt{a_{2n}\left(\pi'_k + \dfrac{\mu}{\lambda}\right)\left(\pi''_k + \dfrac{\mu}{\lambda}\right)}}\,dx,$$

или, по уравненію (75),

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{-\varphi(p_k)\,dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p_k)}}. \tag{77}$$

Отсюда

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}} = -\int \frac{\varphi(p_k)\,dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi'_k - p_k)(\pi''_k - p'_k)}}. \tag{78}$$

Такъ какъ интегралъ, стоящій въ правой части этого уравненія (78), берется въ конечномъ видѣ, то тоже относится и къ интегралу

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Послѣ совершенія интегрированія

$$\int \frac{\varphi(p_k)\,dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' - p_k)(\pi_k'' - p_k)}}$$

въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить p_k на

$$-\frac{\mu}{\lambda}.$$

Слѣдствіе.

Такъ какъ p_k есть симметрическая функція отъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то вторая часть равенства (77) будетъ оставаться равной одной и той же величинѣ при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Значитъ

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{f(x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{f(x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}}.$$

Такъ какъ

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

то

$$\frac{F'(x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{F'(x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = \ldots = \frac{F'(x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}},$$

откуда выводятся уравненія Якоби (1).

Такимъ образомъ интегралы, о которыхъ идетъ рѣчь въ этой теоремѣ, суть именно тѣ, дифференціалы которыхъ допускаютъ инваріантное преобразованіе, и заключеніе это мы вывели независимо отъ сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ.

Примѣняя эту теорему къ случаю, когда $L_k^{(l)} = 0$ $(l \gtrless k)$, что какъ мы показали въ теоремѣ IV будетъ только при

$$\pi_l' = \pi_l'' \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, k-1, \; k+1, n),$$

получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XI.

Если корни полинома

$$X = a_{2n}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_{2n}),$$

удовлетворяютъ условіямъ

$$\begin{gathered}\pi'_1 = \pi''_1, \ \pi'_2 = \pi''_2, \dots, \\ \pi'_{k-1} = \pi''_{k-1}, \ \pi'_{k+1} = \pi''_{k+1}, \dots, \pi'_n = \pi''_n,\end{gathered} \tag{23}$$

и раціональная функція $f(x)$ такова, что при $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$\begin{gathered}p_1 = \pi'_1, \ p_2 = \pi'_2, \dots, \\ p_{k-1} = \pi'_{k-1}, \ p_{k+1} = \pi'_{k+1}, \dots, p_n = \pi'_n,\end{gathered} \tag{22}$$

имѣютъ мѣсто уравненія

$$\begin{gathered}\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)} = 0, \\ \frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \dots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \dots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

то интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

есть интегралъ псевдо-ультраэллиптическій.

Докажемъ, что для случая линейной зависимости между $p_1, p_2, \dots, p_n$ функція, удовлетворяющая условіямъ предыдущихъ теоремъ, существуетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ общій типъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, соотвѣтствующій таковой зависимости.

Теорема XII.

Общій типъ интеграловъ, удовлетворяющихъ условіямъ теоремы X-ой, есть

$$\int \lambda \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{79}$$

гдѣ

$$\mu = x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(k)},$$

$$\lambda = \quad - L_1^{(k)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)},$$

$$L_l^{(k)} = \frac{\pi_l' - \pi_l''}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\pi_k' \pi_l'' - \pi_k'' \pi_l'}{\pi_k' - \pi_k''},$$

$$\pi_1' = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \qquad \pi_1'' = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi_n' = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \qquad \pi_n'' = \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \ldots \alpha_{2n}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}},$$

удовлетворяя условіямъ теоремы X-ой, опредѣляется по уравненіямъ (77) и (75) формулой

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

такъ какъ

$$\frac{-\varphi(p_k)dp_k}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' - p_k)(\pi_k'' - p_k)}} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}(\pi_k' \lambda + \mu)(\pi_k'' \lambda + \mu)}} dx = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx}}{\sqrt{X}} dx.$$

Обратно, если

$$\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}} = \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \mu \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

то имѣютъ мѣсто уравненія (19) и (3).

Дѣйствительно, если уравненія (19) удовлетворяются при $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, то, какъ мы показали при доказательствѣ теоремы X,

$$\frac{\mu}{\lambda} = -p_k,$$

$$\lambda \frac{d\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}{dx_1} = F'(x),$$

или

$$\frac{f(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \varphi(-p_k)\frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

или

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \varphi(-p_k),$$

откуда

$$\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{4}$$

и, наконецъ,

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f(x_n)} = 0,$$

$$\frac{x_1}{f(x_1)} + \frac{x_2}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n}{f(x_n)} = 0, \tag{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{f(x_1)} + \frac{x_2^{n-2}}{f(x_2)} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{f(x_n)} = 0.$$

Полагая $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, мы для каждаго значенія k будемъ имѣть самый типъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ

$$\int\left(L_1^{(1)}x^{n-1} - L_2^{(1)}x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}L_n^{(1)}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{L_1^{(1)}x^{n-1} - L_2^{(1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}L_n^{(1)}}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{L_1^{(1)}x^{n-1} - L_2^{(1)}x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}L_n^{(1)}}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \Bigg(L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} L_n^{(2)} \Bigg)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{L_2^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(2)}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{L_1^{(2)} x^{n-1} - L_2^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(2)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (80)$$

$$\int \Bigg(L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)} \Bigg)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}}{L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}}{L_1^{(n)} x^{n-1} - L_2^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} L_n^{(n)}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда

$$L_1^{(k)} = L_2^{(k)} = L_3^{(k)} = \ldots = L_{k-1}^{(k)} = L_{k+1}^{(k)} = \ldots = L_n^{(k)} = 0,$$

а, слѣдовательно, корни связаны уравненіями

$$\pi_i' = \pi_i'' \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n),$$

n типовъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ будутъ

$$\int x^{n-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{x^{n-1}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(1)}}{x^{n-1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int x^{n-2} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{x^{n-2}} \right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(2)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(2)}}{x^{n-1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (81)$$

$$\int x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x^n - M_1^{(n-1)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n-1)}}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}\right)$$

$$\varphi\left(x^n - M_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + (-1)^n M_n^{(n)}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Для случая эллиптическихъ интеграловъ формулы (80) даютъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, слѣдующую интересную форму псевдоэллиптическихъ интеграловъ, указанную Раффи.

А именно, въ формулѣ

$$\int \frac{x^2 - 2Lx - M}{x - L}\,\varphi\left(\frac{x^2 + M}{x - L}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}} \tag{82}$$

(гдѣ для простоты откидываемъ значки) полагаемъ

$$\varphi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right) = \Psi\left(\frac{\dfrac{x^2+M}{x-L} - 2\xi}{\dfrac{x^2+M}{x-L} - 2\eta}\right)\left(\frac{x^2+M}{x-L} - 2\xi\right),$$

гдѣ ξ и η корни уравненія

$$x^2 - 2Lx - M = 0\,, \tag{83}$$

такъ что

$$x^2 - 2Lx - M = (x - \xi)(x - \eta)\,, \tag{84}$$

$$\xi = L + \sqrt{L^2 + M}\,,$$

$$\eta = L - \sqrt{L^2 + M}.$$

Но

$$\frac{x^2 + M - 2\xi(x - L)}{x^2 + M - 2\eta(x - L)} = \left[\frac{x - L - \sqrt{L^2 + M}}{x - L + \sqrt{L^2 + M}}\right]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\varphi\left(\frac{x^2+M}{x-L}\right) = \frac{x - L}{(x - L - \sqrt{L^2+M})^2}\,\chi\left(\frac{x - L - \sqrt{L^2+M}}{x - L + \sqrt{L^2+M}}\right),$$

гдѣ χ означаетъ раціональную дробь $\frac{P}{Q}$, числитель и знаменатель которой четныя функціи.

Подставивъ это выраженіе функціи φ въ формулу (82) и произведя сокращенія на основаніи формулы (84), получимъ псевдо-эллиптическій интегралъ вида

$$\int \frac{x-L+\sqrt{L^2+M}}{x-L-\sqrt{L^2+M}}\;\chi\left(\frac{x-L+\sqrt{L^2+M}}{x-L-\sqrt{L^2+M}}\right)dx\,, \tag{85}$$

гдѣ $\chi(x)$ имѣетъ вышеуказанное значеніе.

Замѣтимъ, что наши разсужденія имѣютъ силу не только въ томъ случаѣ, когда a_{2n} отлично отъ нуля, но и когда $a_{2n}=0$ и полиномъ X нечетной степени

$$X = a_{2n-1}x^{2n-1} + a_{2n-1}x^{2n-2} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \tag{86}$$

причемъ мы пока предполагаемъ, что a_{2n-1} не равно нулю.

Положимъ

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon_0' = 1\,, & \varepsilon_0'' = 1\,, \\
\varepsilon_1' = \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n\,, & \varepsilon_1'' = \alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n}\,, \\
\varepsilon_2' = \alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n\,, & \varepsilon_2'' = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_{n-1}' = \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\,, & \varepsilon_n'' = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha_{2n}\,.
\end{array} \tag{87}$$

Тогда

$$\pi_l' = \varepsilon_l' + \alpha_1\varepsilon_{l-1} \qquad \pi_l'' = \varepsilon_l''\,,$$

$$\frac{\pi_l'}{\alpha_1} = \frac{\varepsilon_l'}{\alpha_1} + \varepsilon_{l-1}'\,,$$

$$\left[\frac{\pi_l'}{\alpha_1}\right]_{\alpha_1=\infty} = \varepsilon_{l-1}'\,, \qquad \left[\frac{\pi_l''}{\alpha_1}\right]_{\alpha_1=\infty} = 0\,. \tag{88}$$

На этомъ основаніи для случая, когда $a_{2n}=0$ или когда одинъ изъ корней, напримѣръ, $\alpha_1=\infty$, получаемъ изъ формулъ (20) и (21)

$$L_l^{(k)} = \frac{\frac{\pi_l'}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}}{\frac{\pi_k'}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}},$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\frac{\pi_k'}{\alpha_1}\pi_l'' - \pi_k''\frac{\pi_l'}{\alpha_1}}{\frac{\pi_k'}{\alpha_1} - \frac{\pi''}{\alpha_1}},$$

откуда, при $\alpha_1 = \infty$,

$$L_l^{(k)} = \frac{\varepsilon_{l-1}'}{\varepsilon_{k-1}'}, \tag{89}$$

$$M_l^{(k)} = \frac{\varepsilon_{k-1}'\varepsilon_{l-1}'' - \varepsilon_k''\varepsilon_{l-1}'}{\varepsilon_{k-1}'}. \tag{90}$$

Эти значенія $L_l^{(k)}$ и $M_l^{(k)}$ и слѣдуетъ, въ случаѣ полинома (86), подставить въ формулы (80) и (81).

Замѣтимъ еще, что наши разсужденія не предполагаютъ неравенства корней X; корни X могутъ быть и кратными и радикалъ $\sqrt{X}$ можетъ привестись къ виду

$$\sqrt{X} = (b_\alpha x^\alpha + b_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \ldots + b_1 x + b_0) =$$
$$= \sqrt{c_\beta x^\beta + c_{\beta-1}x^{\beta-1} + \ldots + c_1 x + c_0},$$

гдѣ

$$\beta + 2\alpha = 2n \quad \text{или} \quad \beta + 2\alpha = 2n - 1 \quad [\text{въ случаѣ } a_{2n} = 0].$$

---

§ 6. Интегралы Эйлера [1]).

Интегралы Эйлера

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \tag{91}$$

$$\int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \tag{92}$$

[1] Euleri Inst. Calculi Integralis. 1776, m. IV, стр. 36.

входятъ, какъ довольной простой частный случай, въ первую изъ формулъ (81).

Первому интегралу соотвѣтствуетъ разложеніе на два множителя

$$1 + x^4 = (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1),$$

такъ что

$$M_2^{(1)} = \pi_2' = \pi_2'' = 1 \qquad L_2^{(1)} = 0,$$

$$\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = -\int x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^{-1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Къ интегралу (91) можно примѣнить подстановку

$$\frac{x^2 + 1}{x} = z \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2 + 1} = t. \tag{93}$$

Интегралу (92) соотвѣтствуетъ разложеніе

$$(1 + x^4) = (x^2 + \sqrt{-2}\,x - 1)(x^2 - \sqrt{-2}\,x - 1),$$

изъ котораго слѣдуетъ, что

$$M_2^{(1)} = \pi_2' = \pi_2'' = -1,$$

$$\int \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = -\int x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^{-1} \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Этому интегралу соотвѣтствуетъ подстановка

$$\frac{x^2 - 1}{x} = z \quad \text{или} \quad \frac{x}{x^2 - 1} = t. \tag{94}$$

Замѣтимъ, что интегралъ (91) можетъ быть найденъ при помощи подстановки (94), а интегралъ (92) при помощи подстановки (93); только функція φ, входящая въ формулы (81), для этого случая будетъ много сложнѣе.

Дѣйствительно,

$$\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = -\int \frac{\dfrac{x^2 - 1}{x}}{\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)^2 + 4} \, \frac{x \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)}{\sqrt{X}},$$

$$\int \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = -\int \frac{\dfrac{x^2 + 1}{x}}{\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)^2 - 4} \, \frac{x \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)}{\sqrt{X}}.$$

Третій интегралъ Эйлера тоже принадлежитъ къ изслѣдуемому классу и находится при помощи подстановокъ (93) и (94), если имѣть ввиду, что

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Отсюда или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}+\frac{\frac{x^2+1}{x}}{\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-4}\right]x\frac{d\left(\frac{x^2+1}{x}\right)}{\frac{dx}{\sqrt{X}}},$$

или

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\frac{x^2-1}{x}}+\frac{\frac{x^2-1}{x}}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2+4}\right]x\frac{d\left(\frac{x^2-1}{x}\right)}{\frac{dx}{\sqrt{X}}}.$$

Интегралъ Реалиса

$$\int\frac{1\pm x^n}{1\mp x^n}\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\beta x^3+\alpha x^4}} \tag{96}$$

служитъ обобщеніемъ этихъ трехъ интеграловъ Эйлера и тоже принадлежитъ къ типу интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (81), какъ ниже увидимъ изъ изслѣдованія интеграловъ Буняковскаго, частнымъ случаемъ которыхъ является интегралъ Реалиса.

Интегралы Буняковскаго.

Основаніемъ изслѣдованій Буняковскаго служитъ тотъ фактъ, что всякій эллиптическій интегралъ

$$\int\frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0}} \tag{97}$$

[1]) Буняковскій. О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціала

$$\frac{x+C_1}{x+C_2}\frac{dx}{\sqrt{x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D}}$$

и другихъ выраженій подобнаго вида. Приложеніе къ III тому Записокъ Академіи Наукъ, 1863 г.

приводится къ формѣ

$$\int \frac{f(x)}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1}}\, dx \tag{98}$$

подстановкой

$$x = \alpha y + \beta\,.$$

Псевдо-эллиптическими интегралами (97) по Буняковскому будутъ тѣ, для которыхъ

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0\,,$$

или, по терминологіи Буняковскаго, раціональная функція $f(x)$ есть функція возвратная знакоперемѣнная.

Легко видѣть, что интегралы Буняковскаго подходятъ, какъ частный случай, подъ типъ интеграловъ Раффи.

Въ самомъ дѣлѣ, условія теоремы IX удовлетворены, ибо, если

$$x_1 x_2 = 1\,, \tag{99}$$

то, во первыхъ,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{x_1^4 + Ax_1^3 + Bx_1^2 + Ax_1 + 1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{x_2^4 + Ax_2^3 + Bx_2^2 + Cx_2 + 1}} = 0\,,$$

и, во вторыхъ,

$$f(x_1) + f(x_2) = 0\,.$$

Такимъ образомъ, интегралъ (98) удовлетворяетъ условіямъ теоремы IX, а такъ какъ зависимость между x_1 и x_2 (99) типа (22), то онъ удовлетворяетъ и условіямъ теоремы XI, а потому заключается въ формулахъ (81).

Далѣе, если

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta\,,$$

$$x_2 = \alpha y_2 + \beta\,,$$

то, по леммѣ, при

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0\,,$$

имѣемъ также

$$\frac{dy_1}{\sqrt{Y_1}} + \frac{dy_2}{\sqrt{Y_2}} = 0\,;$$

кромѣ того, если

$$\varphi(y) = f(\alpha y + \beta),$$

то при

$$f(x_1) + f(x_2 = 0,$$

будемъ имѣть также

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = 0.$$

Интегралъ (97) тоже допускаетъ инваріантное преобразованіе.

Такъ какъ, кромѣ того, обозначая

$$q_1 = y_1 + y_2,$$

$$q_2 = y_1 y_2,$$

имѣемъ

$$p_1 = \alpha q_1 + \beta \qquad p_2 = \alpha q_2 + \alpha\beta q_1 + \beta^2,$$

то зависимость между q_1 и q_2 будетъ линейная, а по теоремѣ III не иначе, какъ типа (19). Интегралъ (97) подходитъ подъ формулы (80).

Способъ интегрированія Буняковскаго или, вѣрнѣе, выводъ изъ изслѣдованнаго класса другого болѣе обширнаго класса псевдо-эллиптическихъ интеграловъ можетъ быть излагаемъ въ болѣе общей формѣ, чѣмъ это дѣлаетъ Буняковскій.

Изъ соотношенія [рав. (75) для $k = 1$ и $n = 2$]

$$p_1 = \frac{x^2 + M}{x - L}$$

опредѣляемъ x

$$x = \frac{p_1 \pm \sqrt{N}}{2},$$

гдѣ

$$N = p_1^2 - 4(Lp_1 + M), \tag{99}$$

такъ что

$$x_1 = \frac{p_1 + \sqrt{N}}{2},$$

$$x_2 = \frac{p_1 - \sqrt{N}}{2},$$

$$F'(x_1) = x_1 - x_2 = \sqrt{N},$$

$$F'(x_2) = x_2 - x_1 = -\sqrt{N}.$$

Если $\varphi(x)$ означаетъ раціональную функцію отъ x, то

$$\varphi(x_1) = \varphi\left(\frac{p_1 + \sqrt{N}}{2}\right) = \chi(p_1) + \omega(p_1)\sqrt{N}, \tag{100}$$

$$\varphi(x_2) = \varphi\left(\frac{p_1 - \sqrt{N}}{2}\right) = \chi(p_1) - \omega(p_1)\sqrt{N}, \tag{101}$$

$$\frac{\varphi(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{\chi(p_1) + \omega(p_1)\sqrt{N}}{\sqrt{X_1}}\,dx. \tag{102}$$

Но, по формулѣ (54),

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dp_1}{F'(x_1)\sqrt{K_1}} = \frac{dp_1}{\sqrt{KN}} \tag{103}$$

гдѣ

$$K = a_{2n}p_1^2 + a_{2n-1}p_1 + C,$$

или, точнѣе,

$$K = a_{2n}(\pi_1' - p_1)(\pi_1'' - p_1).$$

Принимая во вниманіе (99), заключаемъ, что $P = KN$ есть полиномъ четвертой степени относительно p_1, какъ X_1 относительно x_1.

На основаніи равенства (103), равенство (102) напишется такъ (опуская значки)

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \int\frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}} + \int\frac{\omega(p)\,dp}{\sqrt{K}}. \tag{104}$$

Второй интегралъ можетъ быть взятъ въ конечномъ видѣ; тоже будетъ относиться и къ

$$\int\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

если

$$\chi(p) = 0,$$

т. е. [уравненія (100) и (101)] когда

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 0,$$

т. е. когда

$$\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе.

Если $\chi(p)$ не равно нулю, то поступаемъ съ интеграломъ

$$\int \frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}$$

совершенно также, какъ поступали съ интеграломъ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Тогда, полагая

$$q_1 = p_1 + p_2,$$

гдѣ p_1 и p_2 удовлетворяютъ Эйлерову уравненію

$$\frac{dp_1}{\sqrt{P_1}} = -\frac{dp_2}{\sqrt{P_2}},$$

получимъ

$$\int \frac{\chi(p_1)dp_1}{\sqrt{P_1}} = \int \frac{\Theta(q_1)dq_1}{\sqrt{Q_1}} + \int \frac{\omega_1(q_1)dq_1}{\sqrt{L}},$$

гдѣ Q_1 полиномъ четвертой, L второй степени относительно q_1, а $\Theta(q_1)$ и $\omega_1(q_1)$ нѣкоторыя раціональныя функціи отъ q_1.

При $\Theta(q_1) = 0$, т. е. когда

$$\frac{\chi(p)\,dp}{\sqrt{P}}$$

допускаетъ инваріантное преобразованіе, получаемъ второй случай интегрируемости, такъ какъ оба интеграла, входящіе въ формулу (104), выражаются въ конечномъ видѣ

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\omega_1(q_1)\,dq_1}{\sqrt{L}} + \int \frac{\omega(p)\,dp}{\sqrt{K}}.$$

Въ результатѣ слѣдуетъ замѣнить q черезъ p, p черезъ x.

Третій случай интегрируемости получимъ, производя тѣже дѣйствія надъ

$$\int \frac{\Theta(q)\,dq}{\sqrt{Q}}$$

и т. д.

Интегралы Малле [1]).

Даемъ новыя доказательства двумъ теоремамъ Малле, относящимся къ псевдо-эллиптическимъ интеграламъ, принадлежащимъ, какъ ниже покажемъ, къ изслѣдуемому классу Раффи.

Теорема XIII.

Если положить

$$X=(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx), \tag{105}$$

$$\lambda' =\frac{ab-cd}{cd(a+b)-ab(c+d)},$$

$$\lambda'' =\frac{ac-bd}{bd(a+c)-ac(b+d)}, \tag{106}$$

$$\lambda''' =\frac{ad-bc}{bc(a+d)-ad(b+c)},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}+\frac{1}{x-\lambda'''}\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}, \tag{107}$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Положимъ

$$\frac{1}{a}=-\alpha_1,\ \frac{1}{b}=-\alpha_2,\ \frac{1}{c}=-\alpha_3,\ \frac{1}{d}=-\alpha_4,$$

$$\sqrt{X_1}=\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}=\frac{\sqrt{X}}{\sqrt{abcd}}, \tag{109}$$

$$\lambda'=\frac{\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4}{(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_3+\alpha_4)}=L_1^{(2)}, \tag{110}$$

или, опуская значки для краткости,

$$\lambda'=L,\quad \frac{dx}{(x-\lambda')\sqrt{X}}=\frac{dx}{(x-L)\sqrt{X}}.$$

Другія двѣ дроби, изъ суммы которыхъ (6) состоитъ разсматриваемый дифференціалъ (107), получаются такимъ же образомъ при двухъ другихъ дѣленіяхъ на двѣ группы корней $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ полинома X_1. Обозначимъ значенія L въ трехъ подобныхъ случаяхъ черезъ L', L'', L'''.

---

[1]) Malet. Two theorems in integration (Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI, p. 252).

Полагая въ первой изъ формулъ (80) $n=2$, $\varphi=1$, получимъ

$$J=\int \frac{x^2-2Lx-M}{x-L}\frac{dx}{\sqrt{X_1}}=\int\frac{x-L}{\sqrt{X_1}}dx-(M+L^2)\int\frac{dx}{(x-L)\sqrt{X_1}},$$

гдѣ J выражается черезъ

$$\lg\frac{P+Q\sqrt{X_1}}{P-Q\sqrt{X_1}},$$

гдѣ P и Q цѣлыя функціи отъ x [1]).

Отсюда получаемъ

$$\int\left(\frac{1}{x-L'}+\frac{1}{x-L''}+\frac{1}{x-L'''}\right)\frac{dx}{\sqrt{X_1}}=$$

$$=\alpha\int\frac{xdx}{\sqrt{X_1}}-\beta\int\frac{dx}{\sqrt{X_1}}+J'+J''+J''', \tag{111}$$

гдѣ J', J'', J''' представляютъ три логариѳма упомянутаго типа, а

$$\alpha=\frac{1}{L'^2+M'}+\frac{1}{L''^2+M''}+\frac{1}{L'''^2+M'''},$$

$$\beta=\frac{L'}{L'^2+M'}+\frac{L''}{L''^2+M''}+\frac{L'''}{L'''^2+M'''}.$$

Черезъ простое вычисленіе легко убѣдиться, что

$$L'^2+M'^2=(L'-L'')(L'-L''')=\varphi'(L'),$$

гдѣ

$$\varphi(L)=(L-L')(L-L'')(L'-L''').$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{1}{\varphi'(L')}+\frac{1}{\varphi'(L'')}+\frac{1}{\varphi'(L''')}=0, \tag{112}$$

$$\beta=\frac{L'}{\varphi'(L')}+\frac{L''}{\varphi'(L'')}+\frac{L'''}{\varphi'(L''')}=0. \tag{113}$$

---

[1]) Это новый выводъ формулы Абеля для выраженія

$$\int\frac{k+k'x}{\sqrt{R}}dx \quad \text{черезъ} \quad \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} \quad \text{и логариѳмъ.}$$

Abel. Théorie des transcendantes elliptiques. T. II, p. 110.

На основаніи полученныхъ равенствъ (111), (112) и (113) и принимая во вниманіе (109) и (110), получимъ

$$\int\left(\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}+\frac{1}{x-\lambda'''}\right)\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{abcd}}\lg\frac{M+N\sqrt{X}}{M-N\sqrt{X}}+C, \quad (114)$$

гдѣ M и N цѣлыя функціи отъ x, которыя легко вычислить на основаніи вышесказаннаго.

Вторая теорема Малле состоитъ въ слѣдующемъ:

Теорема XIV.

Если положить

$$X=(1+ax)(1+bx)(1+cx), \quad (115)$$

$$\mu'=\frac{bc}{a-b-c},$$

$$\mu''=\frac{ac}{b-a-c}, \quad (116)$$

$$\mu'''=\frac{ab}{c-a-b},$$

то дифференціалъ

$$\left[\frac{1}{1-\mu'x}+\frac{1}{1-\mu''x}+\frac{1}{1-\mu'''x}\right]\frac{xdx}{\sqrt{X}} \quad (117)$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Эту теорему можно разсматривать, между прочимъ, какъ частный случай предыдущей. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x=\frac{1}{z},$$

получаемъ

$$\sqrt{X}=\frac{\sqrt{Z}}{z^2},$$

гдѣ

$$Z=(z+a)(z+b)(z+c)(z),$$

$$\frac{xdx}{\sqrt{X}}=\frac{dz}{z\sqrt{Z}}.$$

Дифференціалъ (117) преобразовывается въ слѣдующее выраженіе

$$-\left[\frac{1}{z-\mu'}+\frac{1}{z-\mu''}+\frac{1}{z-\mu'''}\right]\frac{dz}{\sqrt{Z}}, \tag{118}$$

гдѣ μ', μ'', μ''' выраженія (110) при

$$\alpha_1 = , -a , \alpha_2 = 0 , \alpha_3 = b \quad \alpha_4 = C .$$

Дифференціалъ (118) есть, въ сущности, частный случай (107).

Ограничиваясь разборомъ этихъ наиболѣе извѣстныхъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, мы не будемъ заниматься составленіями имъ подобныхъ псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, что легко сдѣлать по формуламъ (80). Но въ заключеніе приведемъ примѣръ одного дифференціала довольно общаго характера, допускающаго инваріантное преобразованіе. Предположимъ, что дифференціалъ $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$ таковъ, что

$$\int\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{2}\lg\frac{-S+\sqrt{X}}{-S-\sqrt{X}} + C$$

и

$$S^2 - X = a , \tag{119}$$

гдѣ a постоянное, или, что тоже

$$\int\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}} = \lg\frac{-S+\sqrt{X}}{R} + C , \tag{120}$$

гдѣ R постоянное, которое затѣмъ надлежащимъ образомъ выберемъ.

Равенство (119) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = X , \tag{11}$$

гдѣ полагаемъ

$$T = 1 , \quad R = a . \tag{121}$$

Тогда уравненіе

$$\frac{-S+\sqrt{X}}{R} = y ,$$

при условіи (11), будетъ опредѣлять рѣшенія $x_1, x_2, \cdots, x_n$ системы дифференціальныхъ уравненій Якоби

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(1)$$

$$\frac{x_1^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}dx_1}{\sqrt{X_2}}+\ldots+\frac{x_n^{n-2}dx_n}{\sqrt{X_n}}=0\,,$$

а при условіяхъ (121), т. е. при

$$r_n=0\,,\;r_{n-1}=0\,,\ldots,r_1=0\,,\;r_0=\alpha\,,$$

$$t_n=0\,,\;t_{n-1}=0\,,\ldots,t_1=0\,,\;t_0=1\,,$$

по уравненіямъ (5) и (7) эти рѣшенія будутъ таковы, что

$$p_1=\text{const.},\;p_2=\text{const.},\ldots,p_{n-1}=\text{const.},$$

а по теоремѣ IV должны имѣть

$$p_1=\pi'_1\,,\;p_2=\pi'_2\,,\ldots,p_{n-1}=\pi'_{n-1}\,,\qquad(22)$$

при условіяхъ относительно корней полинома X

$$\pi'_i=\pi''_i\,.\qquad(i=1,2,\ldots,n-1)\qquad(23)$$

Съ другой стороны, означая черезъ S_i, R_i, T_i, X_i значенія S, R, T, X при $x=x_i$,

$$\frac{-S_1+\sqrt{X_1}}{R_1}=\frac{-S_2+\sqrt{X_2}}{R_2}=\ldots=\frac{-S_n+\sqrt{X_n}}{R_n}=y.$$

Отсюда

$$\int\frac{\varrho_1 dx_1}{\sqrt{X_1}}=\int\frac{\varrho_2 dx_2}{\sqrt{X_2}}=\ldots=\int\frac{\varrho_n dx_n}{\sqrt{X_n}}\,,$$

или

$$\frac{\varrho_1 dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{\varrho_2 dx_2}{\sqrt{X_2}}=\ldots=\frac{\varrho_n dx_n}{\sqrt{X_n}}\,.$$

Такъ какъ, по уравненіямъ (1),

$$\frac{F'(x_1)dx_1}{\sqrt{X_1}}=\frac{F'(x_2)dx_2}{\sqrt{X_2}}=\ldots=\frac{F'(x_n)dx_n}{\sqrt{X_n}}\,,\qquad(2)$$

то

$$\frac{\varrho_1}{F'(x_1)} = \frac{\varrho_2}{F'(x_2)} = \ldots = \frac{\varrho_n}{F'(x_n)} ,$$

или

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_n} = 0 ,$$

$$\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_2}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n}{\varrho_n} = 0 , \tag{122}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{\varrho_1} + \frac{x_2^{n-2}}{\varrho_2} + \ldots + \frac{x_n^{n-2}}{\varrho_n} = 0 ,$$

т. е. $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$ допускаетъ инваріантное преобразованіе и именно характера (22). Слѣдовательно, $\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$, при условіи (120), подходитъ подъ первую изъ формулъ (81) и, какъ легко убѣдиться, тогда въ этой формулѣ слѣдуетъ положить $\varphi = 1$.

§ 7. Интегралы (80) приводятся къ

$$\int \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}} , \tag{123}$$

гдѣ $\varphi(\xi)$ раціональная функція, при помощи подстановки

$$\frac{\lambda}{\mu} = \xi ,$$

гдѣ λ и μ цѣлыя функціи $n^{\text{-ой}}$ и $(n-1)^{\text{-ой}}$ степеней

$$\begin{aligned} M &= x^n - M_1^{(k)} x^{n-1} + M_2^{(k)} x^{n-2} - \ldots - (-1)^n M_n^{(k)} , \\ \lambda &= \quad\; - L_1^{(k)} x^{n-1} + L_2^{(k)} x^{n-2} + \ldots + (-1)^n L_n^{(k)} , \end{aligned} \tag{124}$$

а $L_i^{(k)}$ и $M_i^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Можно доказать, что всѣ интегралы вида $\int \frac{f(x)}{\sqrt{X}} dx$, приводящіеся къ интегралу (123) подстановкой

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \xi ,$$

гдѣ ϱ и σ цѣлыя функціи степени не выше $n^{\text{-ой}}$ каждая, заключаются въ формулахъ (80).

Положимъ

$$\eta = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}.$$

Тогда интегралъ (123) обратится въ другой интегралъ того же типа

$$\int \frac{\Psi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{a\eta^2 + b\eta + c}},$$

гдѣ

$$\eta = \frac{\alpha\varrho + \beta\sigma}{\gamma\varrho + \delta\sigma}.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \varrho_n x^n + \varrho_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varrho_1 x + \varrho_0, \\ \sigma &= \sigma_n x^n + \sigma_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \sigma_1 x + \sigma_0, \end{aligned}\right. \tag{125}$$

выберемъ α, β, γ, δ такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\varrho_n \quad + \beta\delta_n \quad = 1, \\ &\alpha\varrho_{n-k} + \beta\delta_{n-k} = 0, \\ &\gamma\varrho_n \quad + \delta\sigma_n \quad = 0, \\ &\gamma\varrho_{n-k} + \delta\sigma_{n-k} = (-1)^k. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

При нѣкоторыхъ значеніяхъ k можно опредѣлить α, β, γ, δ, удовлетворяющія этой системѣ уравненій, ибо не можетъ для всѣхъ значеній k опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \varrho_n & \sigma_{n-1} \\ \varrho_k & \sigma_{n-k} \end{vmatrix}$$

равняться нулю или, что тоже, не могутъ имѣть равенства

$$\frac{\varrho_n}{\sigma_n} = \frac{\varrho_{n-1}}{\sigma_{n-1}} = \ldots = \frac{\varrho_1}{\sigma_1} = \frac{\varrho_0}{\sigma_0},$$

ибо тогда

$$\frac{\varrho}{\sigma} = \text{const}.$$

Слѣдовательно, если $\dfrac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ приводится къ дифференціалу

$$\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$$

подстановкой $\xi = \frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ, σ имѣютъ значенія (125), то тотъ же дифференціалъ приводится къ

$$\frac{\Psi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{A'\eta^2 + B'\eta + C'}}$$

подстановкой

$$\eta = \frac{\varrho'}{\sigma'},$$

гдѣ

$$\varrho' = \varrho'_n x^n + \varrho'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \varrho'_1 x + \varrho'_0,$$

$$\sigma' = \sigma'_n x^n + \sigma'_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \sigma'_1 x + \sigma'_0,$$

$$\sigma'_n = 0\,, \quad \varrho'_n = 1\,, \quad \sigma'_{n-k} = (-1)^k, \quad \varrho'_{n-k} = 0\,. \tag{127}$$

Положимъ сперва A' отличнымъ отъ нуля. Тогда

$$A'\eta^2 + B'\eta + C' = A'(\eta + \alpha)(\eta + \beta)\,,$$

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sigma'\varphi\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)\frac{d\left(\frac{\varrho'}{\sigma'}\right)}{dx}}{\sqrt{a_{2n}}\sqrt{(\varrho + \sigma\alpha)(\varrho + \sigma\beta)}}\,dx.$$

Отсюда

$$\frac{\sqrt{(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma\beta)}}{\sqrt{X}} = \text{раціональной функціи отъ } x\,, \text{ или}$$

$$\omega_1^2(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma'\beta) = \omega_2^2\,X\,, \tag{128}$$

гдѣ ω_1 и ω_2 цѣлые полиномы, которые можно предположить взаимно-простыми.

Если предположить, что у полинома X нѣтъ кратныхъ корней, а потому X не можетъ дѣлиться на квадратъ ω_1^2, то

$$\omega_1 = 1\,.$$

Такъ какъ $(\varrho + \sigma\alpha)(\varrho + \sigma\beta)$ той же степени, что и X въ случаѣ, если X степени $2n$-ой, т. е. a_{2n} не равно нулю, то $\omega_2^2 = \text{const}$. Сравнивая при этомъ коэффиціенты при высшихъ степеняхъ, получаемъ

$$\omega_2^2 = a_{2n}\,.$$

Въ случаѣ $a_{2n} = 0$, равенства (121) быть не можетъ при конечныхъ значеніяхъ α и β, ибо въ лѣвой части полиномъ четной степени, въ правой нечетной.

Полагая же $A' = 0$ [или, что тоже, $\beta = \infty$, $A'\beta = B'$], получимъ

$$B'(\varrho' + \sigma'\alpha)\sigma' = X, \tag{129}$$

равенство возможное только въ случаѣ $a_{2n} = 0$.

Изъ тождества (128), которое по вышедоказанному можно написать такъ

$$\begin{gathered}(\varrho' + \sigma'\alpha)(\varrho' + \sigma'\beta) = X = \\ = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1})\ldots(x - \alpha_{2n}),\end{gathered} \tag{130}$$

имѣемъ

$$\begin{gathered}\varrho'_n \quad + \sigma'_n\,\alpha = 1\,,\; \varrho'_n \quad + \sigma'_n\,\beta = 1\,,\\ \varrho'_{n-1} + \sigma'_{n-1}\alpha = -\pi'_1\,,\; \varrho'_{n-1} + \sigma'_{n-1}\beta = -\pi''_1\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varrho'_{n-k} + \sigma'_{n-k}\,\alpha = (-1)^k\pi'_k\,,\; \varrho'_{n-k} + \sigma'_{n-k}\,\beta = (-1)^k\pi''_k\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varrho'_0 + \sigma'_0\,\alpha = (-1)^n\pi'_k\,,\; \varrho'_0 + \sigma'_0\beta = (-1)^n\pi''_n.\end{gathered}$$

Легко видѣть, что изъ этихъ условій при значеніяхъ $\sigma'_n, \varrho'_n, \sigma'_{n-k}, \varrho'_{n-k}$ (127) получаемъ

$$\alpha = \pi'_k\,,\; \beta = \pi''_k$$

$$\varrho'_{n-l} = (-1)^l M_l^{(k)}\,,\; \sigma'_{n-l} = (=1)^l L_l^{(k)}, \tag{131}$$

гдѣ $M_l^{(k)}$, $L_l^{(k)}$ имѣютъ значенія (20) и (21).

Исходя изъ тождества (129), придемъ къ тому же результату (131), только $L_k^{(l)}$, $M_k^{(l)}$ будутъ имѣть значенія не (20) и (21), а (89) и (90).

Такимъ образомъ получаемъ теорему:

Теорема XV.

Всякій интегралъ $\displaystyle\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\displaystyle\int\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2 + B\xi + C}}$ раціональной подстановкой $\xi = \dfrac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ и σ полиномы каждый степени не ниже n, если X есть полиномъ степени $2n$ или $2n-1$, не имѣющій кратныхъ корней, заключается въ классѣ интеграловъ, опредѣляемомъ формулами (80), и дифференціалъ $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$ допускаетъ инваріантное преобразованіе (19).

Интегралы $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, приводящіеся къ интегралу (123) подстановками

$$\xi=\frac{\varrho}{\sigma},$$

въ которыхъ ϱ и σ полиномы степеней высшихъ n, уже не опредѣляются формулами (80), но для этихъ интеграловъ можно установить точку зрѣнія, подобную предыдущей. Можно разсматривать $\frac{f(x)dx}{\sqrt{X}}$, какъ дифференціалъ $\frac{\psi(x)dx}{\sqrt{\Phi}}$, гдѣ Φ полиномъ высшей степени, чѣмъ X, имѣющій кратныя корни, такъ что

$$\Phi=X\Theta^2,$$

$$\psi(x)=f(x)\Theta,$$

гдѣ Θ цѣлая функція. При надлежащемъ выборѣ Θ дифференціалъ $\frac{\psi(x)dx}{\sqrt{\Phi}}$ будетъ дифференціаломъ, допускающимъ инваріантное преобразованіе, т. е. допускающимъ совмѣстное существованіе двухъ системъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{\sqrt{\Phi_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{\Phi_2}}+\ldots+\frac{dx_m}{\sqrt{\Phi_m}}=0,$$

$$\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{\Phi_1}}+\frac{x_2dx_2}{\sqrt{\Phi_2}}+\ldots+\frac{x_m dx_m}{\sqrt{\Phi_m}}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (132)$$

$$\frac{x_1^{m-2}dx_1}{\sqrt{\Phi_1}}+\frac{x_2^{m-2}dx_2}{\sqrt{\Phi_2}}+\ldots+\frac{x_m^{m-2}dx_m}{\sqrt{\Phi_m}}=0,$$

гдѣ степень Φ равна $2m$, и обыкновенныхъ

$$\frac{1}{\psi(x_1)}+\frac{1}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{1}{\psi(x_m)}=0\,,$$

$$\frac{x_1}{\psi(x_1)}+\frac{x_2}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{x_m}{\psi(x_m)}=0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (133)$$

$$\frac{x_1^{m-2}}{\psi(x_1)}+\frac{x_2^{m-2}}{\psi(x_2)}+\ldots+\frac{x_m^{m-2}}{\psi(x_m)}=0\,.$$

Разсуждая, какъ при доказательствѣ предыдущей теоремы, выводимъ тождество (128). въ которомъ, въ предположенiи, что X не имѣетъ кратныхъ корней, должны положить $\omega_1 = 1$. Полагая $\omega_2 = \Theta$, докажемъ совмѣстное существованiе равенствъ (132) и (133).

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$(\varrho'+\sigma'\alpha)(\varrho'+\sigma'\beta)=\Theta^2 X=\Phi\,, \qquad (134)$$

когда a_{2n} не равно нулю, и

$$B'(\varrho'+\sigma'\alpha)\,\sigma'=\Theta^2 X=\Phi \qquad (135)$$

въ противномъ случаѣ.

Какъ выше, докажемъ, что можно всегда предполагать

$$\sigma'_n=0\,,\quad \varrho'_n=1\,,\quad \sigma'_{n-k}=(-1)^k\,,\quad \varrho'_{n-k}=0\,, \qquad (127)$$

откуда, пользуясь равенствами (134) и (135), выведемъ для коэффицiентовъ ϱ' и σ' выраженiя, точно такъ же составленныя изъ корней полинома

$$\Phi=\Theta^2 X=(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)\ldots(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}),$$

какъ выраженiя (131) составлены изъ корней

$$X=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{2n}\,.$$

Въ настоящемъ случаѣ интегралъ $\int\frac{f(x)}{\sqrt{X}}dx$ опредѣляется формулами (80), но при условiи, что полиномъ X замѣненъ черезъ $\Phi=\Theta^2 X$, а потому дифференцiалъ $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ можетъ быть представленъ въ видѣ дифференцiала $\frac{\psi(x)}{\sqrt{\Phi}}dx$, допускающаго инварiантное преобразованiе или, что тоже, совмѣстное существованiе уравненiй (132) и (133).

Такимъ образомъ выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема XVI.

Всякій интегралъ $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$, приводящійся къ $\int \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{A\xi^2+B\xi+C}}$ подстановкой $\xi=\frac{\varrho}{\sigma}$, гдѣ ϱ и σ полиномы какой угодно степени, принадлежитъ къ классу псевдо-ультраэллиптическихъ интеграловъ, опредѣляемыхъ формулами (80), но относящимися не къ $\sqrt{X}$, а къ $\sqrt{\Phi}$, гдѣ $\Phi=\Theta^2 X$, а Θ нѣкоторая цѣлая функція, и дифференціалъ $\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ всегда можетъ быть представленъ въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)\,dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инваріантное преобразованіе.

Къ этому типу интеграловъ принадлежатъ всѣ интегралы вида

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}},$$

гдѣ ϱ цѣлая функція $(n-1)^{\text{-ой}}$ степени, X цѣлая функція $2n^{\text{-ой}}$ степени, интегрируемые въ конечномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, изслѣдованія Чебышева [1]) показываютъ, что если интегралъ $\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}}$ находится въ конечномъ видѣ, то

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \beta \lg\left(\frac{-S+\Theta\sqrt{X}}{-S-\Theta\sqrt{X}}\right)+C, \tag{137}$$

гдѣ

$$S^2-\Theta^2 X=\alpha,$$

а α и β постоянныя, или на основаніи этого послѣдняго равенства

$$\int \frac{\varrho\,dx}{\sqrt{X}} = \beta \lg\left(\frac{-S+\Theta\sqrt{X}}{R}\right)+C,$$

гдѣ R какое угодно постоянное, напримѣръ,

$$R=\alpha.$$

---

[1]) П. Л. Чебышевъ. Объ интегрированіи ирраціональныхъ дифференціаловъ. Сочиненія, т. I, ст. 145.

Равенство (136) перепишемъ такъ

$$S^2 - RT = \Theta^2 X,$$

гдѣ

$$R = a, \quad T = -1,$$

или

$$S^2 - RT = \Phi. \tag{138}$$

Изъ этого послѣдняго равенства и изъ (137), представленнаго въ слѣдующемъ видѣ

$$\int \frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\psi(x)\, dx}{\sqrt{\Phi}} = \beta \lg \left(\frac{-S + \sqrt{\Phi}}{R} \right) + C, \tag{139}$$

выводимъ такимъ же образомъ, какъ въ концѣ §-а 6-ого изъ (120) и (11) вывели совмѣстное существованіе уравненій (1) и (122), слѣдующую теорему:

Теорема XVII.

Всякій дифференціалъ $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$, въ которомъ ϱ цѣлая функція $(n-1)$-ой степени, X полиномъ $2n$-ой степени безъ кратныхъ корней, можетъ быть представленъ черезъ умноженіе числителя и знаменателя на нѣкоторую цѣлую функцію Θ, въ видѣ дифференціала $\frac{\psi(x)\, dx}{\sqrt{\Phi}}$, допускающаго инваріантное преобразованіе и при томъ типа (22).

Такимъ образомъ, первый случай интегрируемости $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{X}}$ будетъ тотъ, когда

$$\pi_i' = \pi_i'', \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$$

второй, когда корни полинома $(x-a)^2 X$ удовлетворяютъ подобнымъ соотношеніямъ, третій, когда тоже относится къ корнямъ полинома $(x-a)^2 (x-b)^2 X$ и т. д.

Изъ этихъ соотношеній можемъ, во первыхъ, опредѣлить $n-1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять корни полинома X, и затѣмъ неизвѣстныя $a, b, c \ldots$, корни полинома Θ. По этимъ послѣднимъ, на основаніи сказаннаго въ концѣ §-а 6-ого, можно опредѣлить $\psi(x)$ и, наконецъ, ϱ.

§ 8. Въ предыдущемъ параграфѣ мы исключительно говорили о приведеніи $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{A\xi^2+R\xi+C}}\,d\xi$ при помощи раціональной подстановки.

Приведеніе $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ къ $\int \psi(\xi\,,\ \sqrt{A\xi^2+B\xi+C})\,d\xi$ при инваріантномъ преобразованіи (13) совершается при помощи подстановки

$$\frac{M_k+N_k\sqrt{X_i}}{M_1+N_1\sqrt{X_i}}=p_k\,,$$

гдѣ M_k, N_k, M_1, N_1 цѣлыя функціи отъ x. Подстановка эта въ общемъ случаѣ ирраціональна.

Но тотъ же интегралъ приводится къ интегралу отъ раціональной дроби подстановкой

$$y=\frac{-S+\sqrt{X}}{R}\,,$$

гдѣ S, R цѣлыя функціи отъ x (10), такъ какъ p_k выражается раціонально въ y по формуламъ (5); на основаніи тѣхъ же формулъ $dp_k=\Theta(y)\,dy$, гдѣ $\Theta(y)$ раціональная функція отъ y; наконецъ, по формуламъ (48) и (51), $\sqrt{K}$ выражается также раціонально черезъ y.

Отсюда на основаніи того, что

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}=\int \psi(p\,,\ \sqrt{R})\,dp\,, \tag{56}$$

получаемъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}=\int \varDelta(y)\,dy\,,$$

гдѣ $\varDelta(y)$ раціональная функція отъ y.

Въ частномъ случаѣ, когда инваріантное преобразованіе линейнаго характера (19), можно положить (см. доказательство теоремы III)

$$S=0\,,$$

$$-RT=X\,,$$

и $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ приведется къ $\int \varDelta(y)\,dy$ подстановкой

$$\frac{\sqrt{X}}{R}=y\,, \tag{140}$$

или

$$\sqrt{X} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) y, \tag{141}$$

представляющей обобщеніе третьей подстановки Эйлера

$$\sqrt{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = (x - \alpha_1) y.$$

Раффи замѣчаетъ, что всякое Якобіевское преобразованіе, совершенное надъ эллиптическимъ дифференціаломъ, допускающимъ инваріантное преобразованіе, даетъ другой эллиптическій дифференціалъ, допускающій инваріантное преобразованіе.

Производя преобразованіе $z = x^2$ надъ дифференціаломъ

$$\frac{f(z)\,dz}{2k_1 k_2 \sqrt{z\left(z - \frac{1}{k_1^2}\right)\left(z - \frac{1}{k_2^2}\right)}}, \tag{142}$$

получимъ

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - k_1^2 x^2)(1 - k_2^2 x^2)}}. \tag{143}$$

Если

$$f\left(\frac{1}{k_1^2 k_2^2 z}\right) = -f(z),$$

$$f\left(\frac{1 - k_2^2 z}{k_2^2(1 - k_1^2 z)}\right) = -f(z), \tag{144}$$

$$f\left(\frac{1 - k_1^2 z}{k_1^2(1 - k_2^2 z)}\right) = -f(z),$$

то [на основаніи формулъ (89), (90)] дифференціалъ (142) допускаетъ инваріантное преобразованіе (19).

Слѣдовательно, дифференціалъ (143) будетъ допускать инваріантное преобразованіе, если

$$f\left(\frac{1}{k_1^2 k_1^2 x^2}\right) = -f(x^2),$$

$$f\left(\frac{1 - k_2^2 x^2}{k_2^2(1 - k_1^2 x^2)}\right) = -f(x^2), \tag{145}$$

$$f\left(\frac{1 - k_1^2 x^2}{k_1^2(1 - k_2^2 x^2)}\right) = -f(x^2).$$

При $k_1 = 1$, $k_2 = k$ получимъ формулы, упомянутыя въ началѣ статьи.

Замѣтимъ, что первому случаю (145) соотвѣтствуетъ инваріантное преобразованіе тоже линейнаго характера, но въ двухъ другихъ случаяхъ это преобразованіе будетъ типа (13) со второй степенью p_1.

Такимъ образомъ, дифференціалъ (143), какъ допускающій инваріантное преобразованіе, по теоремѣ IX интегрируется въ конечномъ видѣ. Этотъ результатъ, полученный Эрмитомъ, подробно доказывается Раффи въ вышеупомянутой статьѣ.

Къ изложенному Раффи съ своей стороны прибавимъ, что изъ его изслѣдованій можно вывести и подстановки, при помощи которыхъ интегралы Эрмита приводятся къ интеграламъ отъ раціональныхъ дробей. Стоитъ только въ формулѣ (140) положить $R = z$, $R = z - \frac{1}{k_1^2}$ и $R = z - \frac{1}{k_2^2}$.

Тремъ случаямъ (144) соотвѣтствуютъ три подстановки

$$\frac{\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}{z} = y,$$

$$\frac{\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}{z-\frac{1}{k_1^2}} = y, \tag{146}$$

$$\frac{\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}{z-\frac{1}{k_2^2}} = y,$$

при помощи которыхъ интегралъ

$$\int \frac{f(z)\,dz}{2k_1k_1\sqrt{z\left(z-\frac{1}{k_1^2}\right)\left(z-\frac{1}{k_2^2}\right)}}$$

приводится къ интегралу отъ раціональной дроби $\int \Lambda(y)\,dy$.

Къ $\int \Lambda(y)\,dy$ приведется интегралъ

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-k_1^2x^2)(1-k_2^2x^2)}}, \tag{147}$$

при условіяхъ (145), причемъ зависимости между y и x получимъ, замѣнивъ въ уравненіяхъ (146) z на x^2.

Отбрасывая постоянные множители, не имѣющіе очевидно, значенія, получимъ три Эрмитовскія подстановки, приводящія интегралъ (147) къ интегралу отъ раціональной дроби,

$$\frac{\sqrt{(1-k_1^2x^2)(1-k_2^2x^2)}}{x}=p,$$

$$\frac{x\sqrt{1-k_2^2x^2}}{\sqrt{1-k_1^2x^2}}=p, \tag{148}$$

$$\frac{x\sqrt{1-k_1^2x^2}}{\sqrt{1-k_2^2x^2}}=p.$$

Въ частномъ случаѣ для Эйлеровыхъ интеграловъ (91) и (92), гдѣ $k_1^2=i$, $k_2^2=-i$,

$$f\left(\frac{1}{k_1^2k_1^2x^2}\right)=-f(x^2),$$

получаемъ подстановку

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{x\sqrt{2}}=p,$$

указанную еще Эйлеромъ.
