LE PROBLÈME MATHÉMATIQUE DES VIBRATIONS UNIVERSELLES.

Par A. Korn.

Le problème „des vibrations universelles“ me paraît, après le problème de Dirichlet, le problème mathématique le plus important pour la physique, parce qu'il sera à l'avenir le fondement des théories, qui expliquent les forces apparentes à distance d'une manière purement mécanique.

Il s'agit de la question suivante:

Nous supposons dans un continu infini, qui se comporte, du moins, quand il s'agit de mouvements rapides, comme un liquide parfait, un nombre quelconque de particules faiblement compressibles; en appelant u, v, w les vitesses d'un point (x, y, z) quelconque du système (supposées continues dans tout l'espace et s'annulant à l'infini), peut-on démontrer l'existence d'une vibration de la forme

$$\begin{aligned} u &= U \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\ v &= V \sin \frac{t}{T} 2\pi, \\ w &= W \sin \frac{t}{T} 2\pi, \end{aligned} \tag{1}$$

où T représente une durée très petite; il faut ajouter que U, V, W, quoique assez grandes, ne doivent pas être de l'ordre $\frac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de la vitesse, ni

$$\frac{dU}{dt}, \frac{dV}{dt}, \frac{dW}{dt}$$

de l'ordre $\dfrac{\text{Unité de temps}}{T}$ en comparaison avec l'unité de l'accélération. Quelles sont les valeurs possibles de T, et comment peut-on trouver les fonctions correspondantes U, V, W?

Une première analyse des équations du mouvement de notre système nous mène au résultat suivant:

Il faut que

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{2}$$

$$W = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{3 a}$$

à l'extérieur,

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \tag{3 b}$$

à l'intérieur des particules, où

$$k^2 = 4\pi^2 \frac{\alpha^2}{T^2} \tag{4}$$

(α^2 une constante dépendant de la compressibilité des particules), et Φ doit être continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini comme un potentiel.

Les domaines i et e, c'est ainsi que je désignerai l'intérieur et l'extérieur des particules, étant donnés, il s'agit de démontrer l'existence de solutions Φ, k et de trouver des méthodes pour obtenir ces solutions dans les cas les plus importants pour la physique. Voilà ce que j'appelle le problème mathématique des vibrations universelles.

Pour la première partie de notre tâche, concernant l'existence des solutions, nous pouvons nous servir d'une méthode analogue à celle imaginée par M. Poincaré [1]) à l'occasion du problème:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0$$

à l'intérieur d'une surface fermée ω,

$$\Phi = 0 \quad \text{à la surface } \omega;$$

[1]) H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1894.

mais il est à remarquer que ces deux problèmes diffèrent en bien des points, comme on verra déjà par l'exemple le plus simple, par le cas d'une sphère. À cause de ces divergences il m'a paru utile de donner la démonstration complète pour l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2,\ \ldots,\ k_j^2,\ \ldots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_j,\ \ldots,$$

qui représentent des solutions de notre problème, dans la première partie de cet ouvrage.

Dans la deuxième partie nous traiterons des méthodes, par lesquelles on peut obtenir ces solutions dans les cas les plus simples et en même temps les plus importants pour la physique, c'est-à-dire quand les particules sont de petites sphères dont les rayons sont assez petits en comparaison avec leurs distances. Le problème d'une seule sphère trouve sa solution complète à l'aide des fonctions de Bessel, pour le problème de plusieurs sphères nous démontrerons une méthode, analague à celle de Murphy pour le problème analogue de l'électrostatique. J'ai déjà fait usage de cette méthode dans ma théorie du frottement dans les masses continues [1]), mais sans donner une démonstration de cette méthode, évidente au premier aspect comme celle de Murphy. Mais comme on ne doit pas toujours se fier à ces évidences apparentes, il m'a paru nécessaire de combler cette lacune et de démontrer la méthode en question avec toute la rigueur nécessaire. On sait que des méthodes analogues existent pour les problèmes les plus différents de la physique théorique; nous retrouvons ici un des instruments les plus puissants de l'analyse mathématique.

---

[1]) A. Korn, Eine Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massensystemen. Berlin, 1901. (Ferd. Dümmlers Verlag).

PREMIÈRE PARTIE.

LES THÉORÈMES D'EXISTENCE ET LES FONCTIONS UNIVERSELLES.

CHAPITRE I.

COROLLAIRE D'UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

§ 1. En m'appuyant sur un théorème de M. Poincaré, que j'ai démontré récemment dans toute sa généralité [1]), je me propose de démontrer le lemme suivant:

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_p$ p fonctions continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace sur lesquelles nous ferons la seule supposition qu'elles soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe entre elles aucune relation

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots + \beta_p f_p = 0$$

dans tout l'espace, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant des constantes réelles satisfaisant à l'équation

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1,$$

et qu'elles aient toutes les qualités de potentiels à l'extérieur d'une surface fermée ω de courbure continue, qui peut se composer de plusieurs nappes séparées; on peut toujours (pour un nombre p assez grand) trouver p constantes réelles

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

de manière que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_p^2 = 1 \tag{5}$$

et que la fonction

$$\psi = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p \tag{6}$$

satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau} \overline{\overline{<}}\, \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}} \text{ [2])}, \tag{7}$$

---

[1]) Abhandlungen zur Potentialtheorie, № 4, p. 6, Berlin 1902. (Ferd. Dümmler's Verlag).

[2]) On peut aussi bien écrire $\overline{\overline{<}}\, \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$.

où a^2 représente une constante finie ne dépendant que de la forme de la surface ω et tout à fait indépendante des fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_p$.

§ 2. La démonstration à l'aide du théorème de M. Poincaré est extrêmement facile; on peut d'après ce théorème toujours obtenir l'inégalité

$$\frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_i \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{<} \frac{a^2}{\sqrt[3]{(p-1)^2}}$$

et d'autant plus l'inégalité (7), puisque

$$\frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau} \overline{<} \frac{\int\limits_i \psi^2 d\tau}{\int\limits_i \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}.$$

CHAPITRE II.

SOLUTION D'UN PROBLÈME TRÈS GÉNÉRAL.

§ 1. Nous nous occuperons maintenant d'un problème très général, que nous énoncerons de la manière suivante:

Soient f et φ deux fonctions continues avec leurs premières dérivées à l'intérieur d'une surface ω de courbure continue (qui peut se composer de plusieurs nappes séparées) et $\varphi \neq 0$.

On cherche une fonction U, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, qui satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f, \tag{8}$$

et qui a toutes les qualités d'un potentiel à l'extérieur de ω (k^2 un nombre positif quelconque donné d'avance).

Nous formons successivement les fonctions

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_i f(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \\ u_j(x, y, z) &= +\frac{1}{4\pi}\int\limits_i \varphi^2 u_{j-1}(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\tau}{r}, \\ &(j = 1, 2, 3 \ldots) \end{aligned} \tag{9}$$

r étant la distance du point (x, y, z) d'un élément $d\tau$ (ξ, η, ζ); alors on a

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= f, \\ \Delta u_1 &= -\varphi^2 u_0, \\ \Delta u_2 &= -\varphi^2 u_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta u_j &= -\varphi^2 u_{j-1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{10}$$

à l'intérieur de ω.

S'il était possible de démontrer que

$$\lim_{j=\infty} u_j = 0,$$

et que la série

$$u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \dots$$

représente une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, on pourrait affirmer que cette fonction est une solution de notre problème.

Avant d'analyser ces questions de convergence à l'aide de la méthode connue de M. Poincaré, il nous faut démontrer quelques propriétés des fonctions $u_0, u_1, u_2, \dots$

§ 2. Supposons qu'il y ait entre les $p+1$ fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}, u_p$$

une relation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_p u_p = 0, \tag{11}$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_p^2 = 1 \tag{12}$$

(p un nombre entier et fini).

Nous allons d'abord démontrer que l'on peut toujours déduire de (11) une relation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0, \tag{13}$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1}$ étant des constantes réelles, qui satisfont à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_{p-1}^2 = 1, \tag{14}$$

dans ces trois cas:

1) si l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p = 0 \tag{15a}$$

ou

$$\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \beta_2 x^{p-2} + \dots + \beta_p = 0 \tag{15b}$$

admet une racine imaginaire

$$x_1 + ix_2 \quad (x_2 \neq 0);$$

2) si cette équation a une racine réelle et négative;

3) si cette équation a une racine double.

En effet, définissons les $p+2$ constantes

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}, x, a$$

par les équations

$$\begin{aligned} a\gamma_0 &= \beta_0, \\ a\gamma_1 &= \beta_1 + ax\gamma_0, \\ a\gamma_2 &= \beta_2 + ax\gamma_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a\gamma_{p-1} &= \beta_{p-1} + ax\gamma_{p-2}, \\ 0 &= \beta_p + ax\gamma_{p-1}, \\ \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 &+ \dots + \gamma_{p-1}^2 = 1, \end{aligned} \tag{16}$$

ce qui est possible de p manières, x étant une racine quelconque de l'équation (15b); alors on a

$$\begin{aligned} &\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{p-1} u_{p-1} \\ &= x(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p) \end{aligned} \tag{17}$$

et à cause de (10)

$$\begin{aligned} &\Delta \{\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p\} \\ &= -x\varphi^2 \{\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \dots + \gamma_{p-1} u_p\} \end{aligned} \tag{18}$$

à l'intérieur de ω; si maintenant l'équation (15b) admet une racine imaginaire

$$x = x_1 + ix_2 \quad (x_2 \neq 0),$$

on n'a qu'à poser

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = X + iY,$$

à multiplier l'équation (18) par $(X - iY)$ et à intégrer sur le domaine intérieur de ω pour arriver à la relation

$$-\int\limits_{i+e}\left[\frac{\partial(X-iY)}{\partial x}\frac{\partial(X+iY)}{\partial x}+\frac{\partial(X-iY)}{\partial y}\frac{\partial(X+iY)}{\partial y}+\frac{\partial(X-iY)}{\partial z}\frac{\partial(X+iY)}{\partial z}\right]d\tau$$

$$= -(x_1 + ix_2)\int\limits_i \varphi^2(X^2+Y^2)\,d\tau,$$

qui mène, comme le premier membre est réel et $x_2 \neq 0$, au résultat

$$\int\limits_i \varphi^2(X^2+Y^2)\,d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p = 0, \tag{19}$$

ou, par l'opération Δ,

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_{p-1} u_{p-1} = 0. \tag{20}$$

Si l'équation (15*b*) a une racine réelle et négative

$$x = -x_0^2,$$

on trouve en multipliant (18) par

$$\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p$$

et en intégrant sur le domaine intérieur de ω

$$-\int\limits_{i+e}\sum\left[\frac{\partial(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p)}{\partial x}\right]^2 d\tau$$

$$-x_0^2\int\limits_i \varphi^2(\gamma_0 u_1 + \gamma_1 u_2 + \cdots + \gamma_{p-1} u_p)^2\,d\tau = 0,$$

et on arrive de nouveau aux résultats (19) et (20), parce que le premier membre de cette équation se composerait de termes négatifs, qui devraient tous s'annuler.

Si enfin l'équation (15b) a une racine double que nous pouvons du reste supposer réelle et positive

$$x = \bar{x},$$

on peut déterminer les p constantes $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{p-2}$, b de façon qu'elles satisfassent aux équations

$$\begin{aligned} b\delta_0 &= \gamma_0, \\ b\delta_1 &= \gamma_1 + b\bar{x}\delta_0, \\ b\delta_2 &= \gamma_2 + b\bar{x}\delta_1, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b\delta_{p-2} &= \gamma_{p-2} + b\bar{x}\delta_{p-3}, \\ 0 &= \gamma_{p-1} + b\bar{x}\delta_{p-2}, \\ \delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 &+ \ldots + \delta_{p-2}^2 = 1, \end{aligned} \tag{21}$$

et l'équation (17) devient

$$F - 2\bar{x}F_1 + \bar{x}^2 F_2 = 0, \tag{22}$$

où

$$\begin{aligned} F &= \delta_0 u_0 + \delta_1 u_1 + \ldots + \delta_{p-2} u_{p-2}, \\ F_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_i \frac{\varphi^2 F}{r}\, d\tau, \\ F_2 &= \frac{1}{4\pi}\int_i \frac{\varphi^2 F_1}{r}\, d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

De (22) et (23) on tire

$$\Delta F + 2\bar{x}\varphi^2 F - \bar{x}^2\varphi^2 F_1 = 0$$

à l'intérieur de ω; en multipliant par $(-F_1)\, d\tau$ et en intégrant sur i on obtient [1])

$$\int_i \varphi^2 (F^2 - 2\bar{x}FF_1 + \bar{x}^2 F_1^2)\, d\tau = 0,$$

---

[1]) On a

$$\int_i F_1 \Delta F\, d\tau = \int_i F \Delta F_1\, d\tau = -\int_i \varphi^2 F^2\, d\tau.$$

d'où

$$F - xF_1 = 0\,, \tag{24}$$

uue équation de la forme

$$\Gamma_0 u_0 + \Gamma_1 u_1 + \cdots + \Gamma_{p-1} u_{p-1} = 0\,,$$

$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ étant des constantes auxquelles on peut encore imposer la condition

$$\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + \ldots + \Gamma_{p-1}^2 = 1\,.$$

Nous avons ainsi démontré la proposition que l'on peut toujours réduire l'équation

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_p u_p = 0$$

à une équation

$$\gamma_0 u_0 + \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots + \gamma_m u_m = 0\,, \quad (m \overline{\overline{<}} p) \tag{25}$$

dans laquelle $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ représentent des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \ldots + \gamma_m^2 = 1 \tag{26}$$

et possédant la propriété, que l'équation

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_m x^m = 0 \tag{27}$$

admet m racines positives et simples.

Désignons ces racines par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots x_m^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \ldots x_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

(parce qu'il n'y a pas de racines multiples), et on pourra, à l'aide des m relations

$$\left.\begin{array}{rl}
u_0 & = U_1 + U_2 + \dots + U_m, \\
u_1 & = x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_m U_m, \\
u_2 & = x_1^2 U_1 + x_2^2 U_2 + \dots + x_m^2 U_m, \\
\dots & \dots \\
u_{m-1} & = x_1^{m-1} U_1 + x_2^{m-1} U_2 + \dots + x_m^{m-1} U_m,
\end{array}\right\} \qquad (28)$$

trouver pour $U_1, U_2, \dots, U_m$ des expressions linéaires par rapport à $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$. Comme $x_1, x_2, \dots, x_m$ satisfont à l'équation (27), on tire de (25) et (28)

$$u_m = x_1^m U_1 + x_2^m U_2 + \dots + x_m^m U_m,$$

et on pourra remplacer la définition (28) des $U_1, U_2, \dots, U_m$ par la définition

$$u_j = x_1^j U_1 + x_2^j U_2 + \dots + x_m^j U_m. \quad (j=1,2,\dots,m) \qquad (29)$$

Par l'opération Δ il s'ensuit

$$-\varphi^2 u_{j-1} = x_1^j \Delta U_1 + x_2^j \Delta U_2 + \dots + x_m^j \Delta U_m \qquad (30)$$
$$(j=1,2,\dots m)$$

ou, comme on a d'après (28)

$$\varphi^2 u_{j-1} = x_1^{j-1} \varphi^2 U_1 + x_2^{j-1} \varphi^2 U_2 + \dots + x_m^{j-1} \varphi^2 U_m, \qquad (31)$$
$$(j=1,2,\dots,m)$$

on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}
0 = x_1^{j-1}(x_1 \Delta U_1 + \varphi^2 U_1) + x_2^{j-1}(x_2 \Delta U_2 + \varphi^2 U_2) + \dots \\
\qquad + x_m^{j-1}(x_m \Delta U_m + \varphi^2 U_m),
\end{array}\right\} \qquad (32)$$

c'est-à-dire m équations linéaires et homogènes par rapport aux m quantités

$$x_1 \Delta U_1 + \varphi^2 U_1, \quad x_2 \Delta U_2 + \varphi^2 U_2, \dots, x_m \Delta U_m + \varphi^2 U_m,$$

dont le déterminant est $\neq 0$; il faut donc que

$$x_j \Delta U_j = -\varphi^2 U_j, \quad (j=1,2,\dots,m) \qquad (33)$$

(à l'intérieur de ω).

Il y a pour chaque U_j deux possibilités

$$U_j = 0,$$

ou

$$U_j \neq 0;$$

dans le dernier cas il faut aussi que le x_j correspondant soit $\neq 0$.

La première équation (28) nous apprend donc que l'on pourra toujours tirer d'une équation de la forme (11) la conclusion suivante: On aura

$$u_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_n, \text{[1]} \qquad (n \gtreqless p)$$

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ étant des fonctions, continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à des équations

$$\Delta U_j = -\frac{1}{x_j}\varphi^2 U_j \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{34}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω; les x_j sont des nombres positifs, différents de zéro, satisfaisant à l'équation

$$\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_p x^p = 0. \tag{35}$$

On peut toujours en conséquence de la supposition (11) affirmer que la fonction

$$U = -\sum_{1}^{n}{}_j \frac{\frac{1}{x_j}}{k^2 - \frac{1}{x_j}} U_j \tag{36}$$

représente une solution de notre problème

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U = f \quad \text{(à l'intérieur de } \omega),$$
$$\Delta U \qquad\quad = 0 \quad \text{(à l'extérieur de } \omega),$$

pourvu que $k^2 \neq \frac{1}{x_j}$.

La solution (36) a, comme fonction de k^2, n pôles simples

$$k^2 = \frac{1}{x_j}. \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

---

[1]) Pour f on trouvera la relation

$$f = -\varphi^2 \sum_{1}^{n}{}_j \frac{U_j}{x_j}.$$

Supposons qu'il y ait une autre solution U' de notre problème; il faut alors que la fonction $U' - U$, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfasse à la condition

$$\Delta(U' - U) = -k^2\varphi^2(U' - U) \quad \text{(à l'intérieur de } \omega\text{)}, \tag{37}$$

et qu'elle ait toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

§ 3. Supposons maintenant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_p u_p = 0,$$

p étant un nombre *fini*, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1.$$

Nous formerons successivement les fonctions

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{1}{4\pi}\int_i [\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})] \frac{d\tau}{r}, \\ w_j &= +\frac{1}{4\pi}\int_i \varphi^2 w_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \qquad (j=1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{38}$$

p étant un nombre entier et fini, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des constantes réelles satisfaisant à la condition

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1.$$

Nous allons, d'une manière analogue à la méthode connue de M. Poincaré, démontrer que l'on peut (en prenant p asser grand) choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de façon que

$$\text{abs.}(k^{2j} w_j) \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \tag{39}$$

si A représente une constante finie, L satisfait à la condition

$$0 < L < 1;$$

k^2 peut être un nombre aussi grand que l'on veut, mais donné à l'avance.

L'inégalité (39) une fois démontrée, on pourra affirmer que la fonction

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \dots \tag{40}$$

représente une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \dots + \alpha_p u_{p-1}) \tag{41}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

Nous chercherons pour la démonstration de notre proposition une limite supérieure pour le quotient

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau},$$

m étant un nombre entier et fini quelconque, mais donné à l'avance.

On a évidemment

$$\int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = - \int_i w_m \Delta w_m d\tau$$

$$\overline{\gtrless} \sqrt{\int_i w_m^2 d\tau \int_i (\Delta w_m)^2 d\tau} \,\overline{\gtrless}\, \max.\varphi^2 \sqrt{\int w_m^2 d\tau \int w_{m-1}^2 d\tau},$$

en désignant par max. φ^2 la plus grande valeur que φ^2 puisse avoir; donc

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \,\overline{\gtrless}\, (\max.\varphi^2)^2 \left[\frac{\int_i w_m^2 d\tau}{\int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}\right]^2.$$

Si l'on prend p suffisamment grand, on pourra, d'après le lemme p. 4, choisir $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ de façon que

$$\frac{\int\limits_i w_m^2 d\tau}{\int\limits_{i+e}\left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w_m}{\partial z}\right)^2\right]d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{a^2}{\sqrt[3]{p^2}}$$

(a^2 une constante finie ne dépendant nullement de p ni de w_m), puisque

$$w_m = \alpha_0 u_{m-1} + \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_{m+1} + \ldots + \alpha_p u_{m+p-1} .$$

Il viendra donc

$$\frac{\int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau}{\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{C^{te} \textit{ finie}}{\sqrt[3]{p^4}} \tag{42}$$

pour un m fini quelconque (mais donné à l'avance), en choisissant p assez grand et en prenant pour $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des valeurs $\alpha_0^{(m)}$, $\alpha_1^{(m)}$, $\alpha_2^{(m)}, \ldots, \alpha_p^{(m)}$ proprement choisies [1]).

Comme on a

$$\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau = -\int\limits_i w_{m-1} \varDelta w_m d\tau = -\int\limits_i w_m \varDelta w_{m-1} d\tau$$

$$= \int\limits_i \varphi^2 w_m w_{m-2} d\tau , \qquad {\scriptstyle (m=1,2,3,\ldots)} \; ^{2)}$$

on conclura

$$\left[\int\limits_i \varphi^2 w_{m-1}^2 d\tau\right]^2 \overline{\overline{<}} \int\limits_i \varphi^2 w_m^2 d\tau \int\limits_i \varphi^2 w_{m-2}^2 d\tau ,$$

et ainsi successivement en tenant compte de l'inégalité (42)

---

[1]) Nous ajoutons les indices (m), parce que les α varieront avec le nombre m, pendant que p sera tout à fait indépendant de m.

[2]) On posera pour $m = 1$

$$-\varphi^2 w_{m-2} = \alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}).$$

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_0^2 \, d\tau}{\int_i \frac{1}{\varphi^2}\left\{\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})\right\}^2 d\tau}$$

$$\overline{\overline{<}} \frac{\int_i \varphi^2 w_1^2 \, d\tau}{\int_i \varphi^2 w_0^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \ldots \overline{\overline{<}} \frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 \, d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{C^{\text{te}} \, finie}{\sqrt[3]{p^4}}.$$

Ce résultat n'est démontré jusqu'à présent que pour un m fini quelconque, mais donné à l'avance, il importe de le démontrer pour un m croissant indéfiniment. Nous regarderons pour cela $\alpha_0^{(m)}, \alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_p^{(m)}$ comme les coordonnées d'un point sur la sphère

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1 \tag{44}$$

dans un espace de $p+1$ dimensions, alors la condition (43) sera remplie pour un centain domaine δ_m de cette sphère.

Nous pourrons de la même manière, en choisissant proprement

$$\alpha_0^{(m+1)}, \ \alpha_1^{(m+1)}, \ldots, \alpha_p^{(m+1)},$$

obtenir les inégalités

$$\frac{\int_i \varphi^2 w_0^2 \, d\tau}{\int_i \frac{1}{\varphi^2}\left\{\alpha_0 f - \varphi^2(\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1})\right\}^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i \varphi^2 w_1^2 \, d\tau}{\int_i \varphi^2 w_0^2 \, d\tau} \tag{44}$$

$$\overline{\overline{<}} \ldots \overline{\overline{<}} \frac{\int_i \varphi^2 w_m^2 \, d\tau}{\int_i \varphi^2 w_{m-1}^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{\int_i \varphi^2 w_{m+1}^2 \, d\tau}{\int_i \varphi^2 w_m^2 \, d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{C^{\text{te}} \, finie}{\sqrt[3]{p^4}}$$

(la C^{te} finie étant toujours tout à fait indépendante de m et de p). Les points

$$\alpha_0^{(m+1)}, \ \alpha_1^{(m+1)}, \ldots, \alpha_p^{(m+1)}$$

qui satisfont à la condition (44) se trouveront dans un domaine δ_{m+1} interieur à δ_m, puisque les conditions (43) sont toujours remplies à la suite des conditions (44). En continuant de cette manière, on trouvera que le domaine δ_{m+2} correspondant doit être intérieur à δ_{m+1}, et ainsi de suite; il faut donc qu'il y ait des valeurs

$$\alpha_j = \lim_{m=\infty} \alpha_j^{(m)}, \qquad (j=0,1,2,\ldots,p) \tag{45}$$

pour lesquelles les inégalités (44) seront toujours vraies, même si m croît indéfiniment.

Alors nous aurons en posant

$$L_p = \frac{1}{\sqrt[3]{p^2}} \tag{46}$$

et en désignant par B une constante finie, indépendante de j,

$$\int_i \varphi^2 w_j^2 d\tau \overline{\overline{<}} B \cdot L_p^{2j}. \qquad (j=0,1,2\ldots) \tag{47}$$

En tenant compte que

$$w_j = \frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 w_{j-1} \frac{d\tau}{r},$$

on trouvera

$$w_j^2 \overline{\overline{<}} \frac{\mathrm{Max.}\,\varphi^2}{16\pi^2} \int_i \varphi^2 w_{j-1}^2 d\tau \int_i \frac{d\tau}{r^2},$$

donc:

$$\mathrm{abs.}\, w_j \overline{\overline{<}} A \cdot L_p^j, \qquad (j=0,1,2\ldots) \tag{48}$$

A étant une constante finie, indépendante de j.

Si nous prenons maintenant pour k^2 un nombre fini quelconque, mais donné d'avance, nous pourrons toujours en choisissant p assez grand obtenir que

$$k^2 L_p \overline{\overline{<}} L,$$

si L est un nombre quelconque satisfaisant à la condition

$$0 < L < 1,$$

et on aura alors

$$\mathrm{abs.}\, (k^{2j} w_j) \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \tag{49}$$

ce que nous voulions démontrer.

La série

$$w = w_0 + k^2 w_1 + k^4 w_2 + \ldots \tag{50}$$

représentera donc une fonction, continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'équation

$$\Delta w + k^2 \varphi^2 w = \alpha_0 f - \varphi^2 (\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 + \ldots + \alpha_p u_{p-1}) \tag{51}$$

à l'intérieur de ω et ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω.

§ 4. Nous supposerons d'abord que k^2 ne soit pas une des racines de l'équation

$$(-k^2)^p \alpha_0 + (-k^2)^{p-1} \alpha_1 + \ldots - k^2 \alpha_{p-1} + \alpha_p = 0,$$

c'est-à-dire que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_p \\ 1 & -k^2 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -k^2 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & -k^2 \end{vmatrix} \tag{52}$$

soit $\neq 0$; on pourra alors définir les $p+1$ fonctions

$$U \quad U' \quad U'', \ldots, U^{(p)}\ ^{1)}$$

par les $p+1$ équations linéaires

$$\begin{aligned} \alpha_0 U + \alpha_1 U' + \alpha_2 U'' + \ldots + \alpha_p U^{(p)} &= w\ , \\ U - k^2 U' &= u_0\ , \\ U' - k^2 U'' &= u_1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ U^{(p-)} - k^2 U^{(p)} &= u_{p-1}. \end{aligned} \tag{53}$$

Chacune des fonctions $U, U', \ldots, U^{(p)}$ représentera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace et ayant toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω; nous verrons facilement que la première, la fonction U, satisfait à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f. \tag{54}$$

---

[1]) Les indices (j) ne doivent pas être pris ici dans le sens que $U^{(j)}$ représente la j-me dérivée de U par rapport à une variable quelconque.

En effet, écrivons les équations (53), à l'exception de la première, de la manière suivante

$$U^{(j-1)} - k^2 U^{(j)} - u_{j-1} = 0\,, \quad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots p)}$$ [1]

appliquons-y l'opération Δ:

$$\Delta U^{(j-1)} - k^2 \Delta U^{(j)} + \varphi^2 u_{j-2} = 0\,, \quad {\scriptstyle (=1,2,\ldots,p)}$$ [2]

additionnons ces deux groupes d'équations, après avoir multiplié le premier par $k^2\varphi^2$; on trouvera

$$\begin{aligned}
(\Delta U + k^2\varphi^2 U - f) - k^2(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) &= 0\,, \\
(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0) - k^2(\Delta U'' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1) &= 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(\Delta U^{(p-1)} + k^2\varphi^2 U^{(p-1)} + \varphi^2 u_{p-2}) - k^2(\Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}) &= 0\,.
\end{aligned} \tag{55}$$

Si l'on ajoute à ces p équations la première relation (53) que l'on peut écrire, en tenant compte de (51), de la manière suivante

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\Delta U + k^2\varphi^2 U - f) + \alpha_1(\Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0)& \\
+ \alpha_2(\Delta U' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1)& \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots& \\
+ \alpha_p(\Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1}) = 0&,
\end{aligned} \tag{56}$$

on a $p+1$ équations linéaires et homogénes par rapport aux p quantités

$$\Delta U + k^2\varphi^2 U - f,\ \Delta U' + k^2\varphi^2 U' + \varphi^2 u_0,\ \Delta U'' + k^2\varphi^2 U'' + \varphi^2 u_1,$$
$$\ldots, \Delta U^{(p)} + k^2\varphi^2 U^{(p)} + \varphi^2 u_{p-1},$$

dont le déterminant (D) est $\neq 0$; ces quantités doivent donc s'annuler, en particulier la fonction U doit satisfaire à l'équation (54) à l'intérieur de ω.

D'après les équations (53) on aura

$$U = \frac{P}{D}\,, \tag{57}$$

---

[1] En posant pour $j = 1$:

$$U^{(j-1)} = U.$$

[2] En posant pour $j = 1$:

$$\varphi^2 u_{j-2} = -f.$$

où

$$P=\begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}; \tag{58}$$

nous avons ainsi obtenu une solution U de notre problème, si l'on choisit p suffisamment grand,

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

et ne satisfaisant pas à l'équation

$$D=0.$$

Le cas exceptionnel demande une discussion spéciale.

§ 5. Si k^2 se rapproche d'une des racines

$$k_1^2,\ k_2^2,\ldots,k_p^2$$

de l'équation

$$D=0,$$

la fonction U croîtra d'après (57) indéfiniment, exception faite pour le cas que P s'annulle en même temps.

Il s'agit d'examiner la fonction P au voisinage des pôles

$$k^2=k_1^2,\ k_2^2,\ldots,k_p^2.$$

On a d'après (58)

$$\Delta P=\begin{vmatrix} \Delta w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \Delta u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \Delta u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix},$$

et à l'intérieur de ω

$$\Delta P+k^2\varphi^2 P=\begin{vmatrix} \alpha_0 f-\varphi^2(\alpha_1 u_0+\alpha_2 u_1+\ldots+\alpha_p u_{p-1}) & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ f+k^2\varphi^2 u_0 & -k^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\varphi^2 u_0+k^2\varphi^2 u_1 & 1 & -k^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varphi^2 u_{p-2}+k^2\varphi^2 u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta P + k^2 \varphi^2 P = f \cdot D. \tag{59}$$

Si nous désignons par P_j les valeurs de P pour

$$k^2 = k_j^2, \qquad (j=1,2,\ldots,p)$$

nous aurons

$$\Delta P_j = -k_j^2 \varphi^2 P_j \quad \text{à l'intérieur de } \omega, \tag{60a}$$

$$\Delta P_j = 0 \quad \text{à l'extérieur de } \omega; \tag{60b}$$

nous savons du reste que les fonctions P_j sont continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace, et qu'elles ont toutes les propriétés de potentiels à l'extérieur de ω.

Nous introduisons maintenant la notion des fonctions universelles par cette définition:

Nous appellerons fonction universelle correspondant à la surface ω d'une seule ou de plusieurs particules chaque fonction Φ_j continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, satisfaisant à l'intérieur de ω aux équations

$$\Delta \Phi_j = -k_j^2 \varphi^2 \Phi_j, \quad \int_i \varphi^2 \Phi_j^2 d\tau = 1 \tag{61}$$

et ayant à l'extérieur de ω toutes les propriétés d'un potentiel; nous appellerons k_j^2 le nombre correspondant à la fonction universelle Φ_j. Dans les applications à la physique nous poserons toujours $\varphi^2 = 1$.

Après cette définition, nous pourrons énoncer notre résultat antérieur ainsi:

Les fonctions

$$P_j = \begin{vmatrix} w & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ u_0 & -k_j^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_1 & 1 & -k_j^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -k_j^2 \end{vmatrix}, \qquad (j=1,2,\ldots,p) \tag{62}$$

sont ou identiquement nulles, ou elles représentent des fonctions universelles avec les nombres correspondants k_j^2.

Il est facile à voir que les racines k_j de l'équation $D=0$ correspondant à des fonctions P_j, qui sont identiquement nulles, ne peuvent être des pôles pour la solution

$$U = \frac{P}{D}$$

de notre problème fondamental. Car on a dans ce cas, si k_j^2 est une valeur dans laquelle coïncident m racines ($m = 1, 2, \ldots, p$)

$$D = \frac{dD}{d(k^2)} = \frac{d^2 D}{d(k^2)^2} = \ldots = \frac{d^{m-1} D}{d(k^2)^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m D}{d(k^2)^m} \neq 0,$$

$$U = \frac{\dfrac{d^m P}{d(k^2)^m}}{\dfrac{d^m D}{d(k^2)^m}},$$

et $\dfrac{d^m P}{d(k^2)^m}$ reste continue avec ses premières dérivées, si l'on donne à k^2 une des valeurs $k_j^2 (j = 1, 2, \ldots, p)$.

On démontre aussi facilement que les racines k_j^2 correspondant à des fonctions universelles ne peuvent être des racines multiples. On aurait pour une racine double [1]) d'après (59) à l'intérieur de ω

$$k_j^2 \varphi^2 P_j = -\Delta P_j$$

$$\Delta \frac{dP_j}{d(k^2)} = -k_j^2 \varphi^2 \frac{dP_j}{d(k^2)} - \varphi^2 P_j.$$

Multiplions ces deux équations, divisons par φ^2 et intégrons sur i; alors en tenant compte de l'identité

$$\int\limits_i P_j \Delta \frac{dP_j}{d(k^2)} d\tau = \int\limits_i \frac{dP_j}{d(k^2)} \Delta P_j d\tau$$

on trouvera

$$\int\limits_i P_j \Delta P_j d\tau = 0,$$

ou

$$\int\limits_{i+e} \left[\left(\frac{\partial P_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$P_j = C^{\text{-te}} = 0;$$

donc P_j ne pourrait être une fonction universelle, $c.q.f.d.$

---

[1]) Comme on aurait

$$\frac{dD}{d(k^2)} = 0.$$

Nous avons obtenu ainsi un résultat qui est d'une grande importance pour les questions concernant les fonctions universelles:

I. En choisissant le nombre p asser grand et en supposant

$$k^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

on pourra toujours trouver une fonction

$$V(k^2, x, y, z)$$

de manière que l'expression

$$U = \frac{V(k^2, x, y, z)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) \ldots (k^2 - k_n^2)}, \qquad (0 \leqq n \leqq p) \text{ [1]}$$

satisfasse à l'intérieur de ω à l'équation

$$\Delta U + k^2 \varphi^2 U = f,$$

si

$$k^2 \neq k_j^2, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

V représentant pour toute valeur $k^2 (< \sqrt[3]{p^2})$ une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω. $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_n^2$ seront des nombres bien définis et $< \sqrt[3]{p^2}$, tous différents entre eux.

Pour $k^2 = k_j^2 (j = 1, 2, \ldots, n)$ la fonction V devient une fonction universelle Φ_j, correspondant à la surface ω, à un facteur constant près.

Nous avons démontré ce résultat en supposant qu'il n'existe entre les fonctions

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_i f \frac{d\tau}{r},$$

$$u_j = +\frac{1}{4\pi} \int_i \varphi^2 u_{j-1} \frac{d\tau}{r}, \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

aucune relation de la forme

$$\beta_0 u_0 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_p u_p = 0,$$

[1]) Pour le cas $n = 0$, on doit poser le second membre $= V(k^2, x, y, z)$.

p étant un nombre fini, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ des constantes réelles, satisfaisant à la condition

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \ldots + \beta_p^2 = 1 ;$$

mais d'après le § 2 [1]) notre résultat reste vrai, même dans ces cas particuliers; donc dans tous les cas.

Nous pouvons ajouter, comme à la fin du § 2:

La solution (63) a, comme fonction de k^2, n pôles simples

$$k^2 = k_j^2, \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (0 \overline{\overline{<}} n \overline{\overline{<}} p)$$

dans l'intervalle

$$0 < k^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

Toute autre solution U' de notre problème pour une valeur donnée $\bar{k}^2$ de k^2 ne diffère de (63) que d'une fonction universelle ayant $\bar{k}^2$ pour nombre correspondant [2]).

CHAPITRE III.

L'EXISTENCE DES FONCTIONS UNIVERSELLES.

§ 1. Nous pourrions démontrer l'existence d'une suite infinie de nombres positifs et croissant indéfiniment

$$k_0^2, \; k_1^2, \; k_2^2, \ldots, k_j^2 \ldots$$

et d'une suite infinie de fonctions correspondantes

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots$$

en démontrant que chaque potentiel

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi}\int f \frac{d\tau}{r},$$

---

[1]) En posant $k_j^2 = \dfrac{1}{xj}$, $\quad (j = 1, 2, \ldots, n)$.

[2]) S'il en existe une; autrement le problème n'admettra que la solution (63).

peut être représenté par une série

$$u_0 = \sum_{0}^{\infty}{}_j C_j \Phi_j,$$

les C_j étant des constantes bien définies et les Φ_j étant les fonctions universelles que l'on obtient par la solution de notre problème fondamental, si nous supposons toujours que f est continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω.

La démonstration serait absolument identique avec la démonstration analogue pour les développements en séries de fonctions harmoniques [1]).

Nous allons, pour abréger, nous contenter de démontrer cette existence des k_j^2, Φ_j en établissant les théorèmes suivants:

II. En partant d'une fonction f [2]) quelconque, continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω, et donnée d'avance, on peut toujours trouver un nombre p fini de manière que la solution de notre problème fondamental nous mène du moins à *une* fonction universelle.

III. Soit p^2 un nombre fini quelconque, il n'y aura qu'un nombre fini de fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres k_j^2 correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}.$$

IV. Si l'on connaît toutes les fonctions universelles avec des nombres correspondants satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$$

(p^2 étant un nombre fini donné d'avance) on pourra toujours trouver un nombre $p'^2 (> p^2)$ fini, de manière qu'il existe au moins *une* fonction universelle avec un nombre correspondant k'^2, satisfaisant à la condition

$$\sqrt[3]{p^2} \overline{\gtrless} k'^2 < \sqrt[3]{p'^2}.$$

Nous poserons dès à présent toujours $\varphi^2 = 1$.

---

[1]) Comp. W. Stekloff, Communications, T. VI, 2 et 3. A. Korn, Abhandlungen zur Potentialtheorie 4, Berlin (F. Dümmler's Verlag).

[2]) Qui n'est pas identiquement nulle.

§ 2. Pour démontrer le théorème II, supposons que p soit un nombre positif assez grand, et que la solution (63) de notre problème fondamental ne nous ait pas mené à une fonction universelle Φ_j avec un nombre correspondant $k_j^2 < \sqrt[3]{p^2}$.

Alors le rayon de convergence de la série

$$\int_i u_0^2 d\tau + k^2 \int_i u_1^2 d\tau + k^4 \int_i u_1^4 d\tau + \dots$$

sera $\overline{\overline{>}} \sqrt[3]{p^4}$; on aura donc

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}},$$

puisque

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} < \frac{\int_i u_1^2 d\tau}{\int_i u_0^2 d\tau} < \frac{\int_i u_2^2 d\tau}{\int_i u_1^2 d\tau} < \dots$$

et l'inégalité

$$\frac{\int_i u_0^2 d\tau}{\int_i f^2 d\tau} > \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}}$$

entraînerait pour cette raison l'inégalité

$$\int_i u_j^2 d\tau < (\sqrt[3]{p^2})^{2j} \int_i f^2 d\tau.$$

Or la relation

$$\int_i u_0^2 d\tau \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt[3]{p^4}} \int_i f^2 d\tau$$

ne pourrait subsister pour un p^2 aussi grand que l'on veut, à moins que

$$\int_i u_0^2 d\tau = 0,$$

ce qui entraînerait $f \equiv 0$, $c\ q.f.d.$

§ 3. Pour démontrer le théorème III, on remarquera d'abord, qu'en posant dans notre problème fondamental

$$f = -\varphi^2(\alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \ldots \alpha_p \Phi_p), \tag{64}$$

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ étant p fonctions universelles avec les nombres correspondants $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des constantes données, la solution (63) deviendra

$$U = u_0 + k^2 u_1 + k^4 u_2 + \ldots = \sum_1^p{}_j \frac{\alpha_j \Phi_j}{k_j^2 - k^2} \tag{65}$$

aussi longtemps que k^2 reste plus petit que le plus petit des nombres $k_1^2, k_2^2, \ldots, k_p^2$.

Soit p^2 maintenant un nombre quelconque assez grand, mais fini, et supposons que $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ soient linéairement indépendantes, alors on saura trouver les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de façon que la série (65) converge absolument et uniformément pour n'importe quel

$$k^2 < \sqrt[3]{(p-1)^2};$$

mais comme l'expression (65) croît indéfiniment, quand k^2 se rapproche du plus petit k_j^2, il faudrait donc qu'au moins un des k_j^2 soit $> \sqrt[3]{(p-1)^2}$; donc il ne peut exister plus de $p-1$ fonctions universelles linéairement indépendantes avec des nombres correspondants

$$< \sqrt[3]{(p-1)^2},$$

p représentant toujours un nombre quelconque assez grand, mais fini. On n'aura qu'à changer $p-1$ en p, pour arriver à notre théorème III.

§ 4. Supposons pour la démonstration du théorème IV que nous connaissions toutes [1]) les fonctions universelles avec des nombres correspondants, satisfaisant à la condition

$$0 < k_j^2 < \sqrt[3]{p^2},$$

---

[2]) Leur nombre est $\overline{\gtrless} p$ d'après le théorème III, si p^2 est choisi assez grand.

(p^2 étant un nombre fini, donné d'avance), et soit f une fonction quelconque continue avec ses premières dérivées; alors il peut arriver des deux choses l'une: On peut trouver f comme une expression linéaire par rapport aux fonctions universelles données, ou la solution de notre problème fondamental doit nous mener au moins à une nouvelle fonction universelle avec un nombre correspondant fini et

$$\overline{\geqq} \sqrt[3]{p^2}.$$

Comme on peut toujours facilement donner $p + 1$ fonctions f linéairement indépendantes, le dernier des deux cas doit arriver au moins pour une de ces fonctions f.

§ 5. Nous finirons ce Chapitre par un théorème important sur les fonctions universelles, absolument analogue à un théorème connu sur les fonctions harmoniques.

V. Soient Φ_i et Φ_k deux fonctions universelles avec des nombres correspondants k_i^2 et k_k^2, on aura

$$\int\limits_{i+e} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right) d\tau = 0 ,$$

$$\int\limits_i \Phi_i \Phi_k \, d\tau = 0 ,\ ^{1)} \tag{66}$$

si

$$k_i^2 \neq k_k^2 .$$

On n'a, pour la démonstration, qu'à multiplier l'équation

$$\Delta \Phi_i = - k_i^2 \Phi_i \quad \text{à l'intérieur de } \omega$$

par Φ_k et à intégrer sur i; alors on aura

$$\int\limits_i k_i^2 \Phi_i \Phi_k \, d\tau = - \int\limits_i \Phi_k \, \Delta \Phi_i d\tau = - \int\limits_i \Phi_i \Delta \Phi_k d\tau ,$$

d'où

$$k_i^2 \int\limits_i \Phi_i \Phi_k d\tau = k_k^2 \int\limits_i \Phi_i \Phi_k d\tau ,$$

c'est-à-dire on trouvera les relations (66), si $k_i^2 \neq k_k^2$.

[1]) Dans le cas général

$$\int\limits_i \varphi^2 \Phi_i \Phi_k \, d\tau = 0 .$$

DEUXIÈME PARTIE.

SOLUTION DU PROBLÈME DES VIBRATIONS UNIVERSELLES POUR DES PARTICULES SPHÉRIQUES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

CHAPITRE I.

LE CAS D'UNE SEULE PARTICULE.

§ 1. Nous cherchons les fonctions universelles

$$\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2, \ldots, \Phi_j, \ldots$$

avec les nombres correspondants

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2, \ldots, k_j^2, \ldots$$

pour le cas que la surface ω est représentée par une sphère de rayon R.

En prenant le centre de la sphère pour origine et en introduisant les coordonnées sphériques par les transformations

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta\,, \\ y &= r\sin\vartheta\cos\varphi\,, \\ z &= r\sin\vartheta\sin\varphi\,, \end{aligned} \tag{67}$$

nous pourrons écrire les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions universelles:

$$\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}+k^2\Phi=0 \tag{68}$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right\}=0\,, \tag{69}$$

à l'extérieur de la sphère.

Les fonctions Φ doivent être continues avec leurs premières dérivées dans tout l'espace et s'annuler à l'infini.

Assurés de l'existence des fonctions Φ_j et des nombres k_j^2, nous pouvons les représenter sous forme de séries procédant par fonctions sphériques

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty}{}_i\, f_i(r)\,Y_i(\vartheta\,,\ \varphi)\,,$$

où la fonction sphérique $Y_i(\vartheta, \varphi)$, satisfait à l'équation:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y_i}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y_i}{\partial\varphi^2}+i(i+1)Y_i=0. \qquad (71)$$

$$(i=0,1,2,\ldots)$$

Si nous introduisons la valeur (70) de Φ dans les équations (68) et (69), nous trouverons, en tenant compte de (71), que les fonctions $f_i(r)$ doivent être des solutions des équations $(i=0, 1, 2. \ldots)$

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_i}{\partial r}\right)-i(i+1)f_i\right]+k^2 f_i=0 \qquad (72)$$

à l'intérieur de la sphère,

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_i}{\partial r}\right)-i(i+1)f_i\right]=0\,, \qquad (73)$$

à l'extérieur de la sphère.

Les solutions générales de l'équation (73) sont

$$f_i=c_{i1}\frac{1}{r^{i+1}}+c_{i2}r^i \qquad (74)$$

c_{i1}, c_{i2} étant des constantes quelconques; les solutions générales de l'équation (72)

$$f_i=C_{i1}\frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}+C_{i2}\frac{J_{-(i+\frac{1}{2})}(kr)}{\sqrt{kr}}\,, \qquad (75)$$

si C_{i1}, C_{i2} représentent des constantes quelconques et $J_n(x)$ la fonction de Bessel

$$J_n(x)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Pi(\lambda)\,\Gamma(n+\lambda+1)}\,. \qquad (76)$$ [1]

Pour les fonctions $J_{i+\frac{1}{2}}$ et $J_{-(i+\frac{1}{2})}$ qui nous intéressent ici on peut trouver des expressions analytiques plus faciles à manier

---

[1] En posant

$$\Pi(\lambda)=1.2.3.\ldots.\lambda,\quad \Pi(0)=1.$$

$$\Gamma(z)=\lim_{n=\infty}\frac{\Pi(n-1)n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\,.$$

$$J_{i+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{0}^{i}{}_{\lambda}\frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(\lambda)\,\Pi(i-\lambda)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\cos\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right],$$

$$J_{-(i+\frac{1}{2})}(x)=(-1)^{i}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\frac{\Pi(i+\lambda)}{\Pi(i)\,\Pi(i-\lambda)}\left(\frac{1}{2x}\right)^{\lambda}\sin\left[(i+1-\lambda)\frac{\pi}{2}-x\right]. \tag{77}$$

Comme les fonctions f_i doivent être continues à l'intérieur de la sphère aussi bien qu'à l'extérieur de la sphère et s'annuler à l'infini, il faut que

$$c_{i2}=0\,,$$

$$C_{i2}=0\,,$$

de manière que Φ doit avoir la forme

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty}{}_{i}\frac{c_i}{r^{i+1}}\,Y_i(\vartheta\,,\ \varphi)$$

$$\text{(à l'extérieur)}, \tag{78}$$

$$\Phi=\sum_{0}^{\infty}{}_{i}C_i\frac{J_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}\,Y_i(\vartheta\,,\ \varphi)$$

$$\text{(à l'intérieur)};$$

les constantes c_i, C_i doivent en outre satisfaire aux équations suivantes résultant de la continuité de Φ et de ses premières dérivées au passage de la surface, c'est-à-dire aux conditions

$$\Phi_e=\Phi_i\,,$$

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_e=\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_i,$$

d'où

$$c_i=\frac{\sqrt{kR}}{R^{i+1}J_{i+\frac{1}{2}}(kR)}\,C_i\,,$$

$$c_i\,\frac{2kRJ'_{i+\frac{1}{2}}(kR)-J_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{2\sqrt{kR}}=-\frac{i+1}{R^{i+1}}\,C_i\;[1] \tag{79}$$

[1]) Pour ce deuxième groupe d'équations il faut supposer que les premières dérivées de Φ soient aussi développables en séries procédant par fonctions sphériques; on démontre facilement la rigueur de ce développement en tenant compte de ce que *toutes* les dérivées des fonctions Φ sont finies, ce qui résulte de leur définition.

Comme la première de ces équations donne la valeur de $\frac{e_i}{C_i}$, la deuxième devient une équation pour k seul

$$(2i+1)\,J_{i+\frac{1}{2}}(kR)+2kRJ'_{i+\frac{1}{2}}(kR)=0\,, \qquad (80)$$
$$(i=0,1,2,\ldots)$$

les valeurs possibles de k_0, k_1, k_2, ..., doivent donc être des racines d'une de ces équations (80), et les fonctions Φ_j correspondantes auront la forme

$$\Phi_j=\frac{Y_j(\vartheta\,,\ \varphi)}{r^{j+1}} \quad \text{(à l'extérieur)},$$

$$\Phi_j=\frac{\sqrt{k_jR}}{R^{j+1}\,J_{j+\frac{1}{2}}(k_jR)}\cdot\frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_jr)}{\sqrt{k_jr}}\cdot Y_j(\vartheta\,,\ \varphi) \qquad (81)$$

(à l'intérieur),

les Y_j représentant des fonctions sphériques quelconques d'ordre j, k_j étant une des racines de l'équation

$$(2j+1)\,J_{j+\frac{1}{2}}(kR)+2kRJ'_{j+\frac{1}{2}}(kR)=0\,, \qquad (82)$$

que l'on peut, ce qui est sans grande importance ici pour nous, présenter dans une forme plus simple, en introduisant la fonction $J_{j-\frac{1}{2}}$ [1]).

I. Les fonctions universelles correspondant à une particule de rayon R sont (à un facteur constant près)

$$\Phi_j=\frac{Y_j(\vartheta\,,\ \varphi)}{r^{j+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère)},$$

$$\Phi_j=\frac{\sqrt{k_jR}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_jR)}\cdot\frac{J_{j+\frac{1}{2}}(k_jr)}{\sqrt{k_jr}}\cdot\frac{Y_j(\vartheta\,,\ \varphi)}{R^{j+1}}$$

(à l'intérieur de la sphère),

---

[1]) Dans la forme

$$J_{j-\frac{1}{2}}(kR)=0\,, \qquad (82)$$

en posant

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{x\pi}}\cos x\,.$$

Comp. Graf-Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, I, p. 45.

Y_j représentant une fonction sphérique d'ordre j, $k_j R$ une racine de l'équation transcendante [1])

$$(2j+1) J_{j+\frac{1}{2}}(x) + 2x J'_{j+\frac{1}{2}}(x) = 0, \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

Les exemples les plus simples, que j'ai considérés pour mes théories de la gravitation et du frottement dans les masses continues, sont les fonctions correspondant aux deux nombres k_j^2 les plus petits possibles

$$k_0 = \frac{\pi}{2R},$$

$$\Phi_0 = \frac{c}{r} \quad \text{(à l'extérieur)}, \tag{83}$$

$$\Phi_0 = \frac{c \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{R}\right)}{r} \quad \text{(à l'intérieur)};$$

$$k_1 = \frac{\pi}{R},$$

$$\Phi_1 = c \frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad \text{(à l'extérieur)}, \tag{84}$$

$$\Phi_1 = \frac{c}{\pi} \frac{\sin\frac{\pi r}{R} - \frac{\pi r}{R}\cos\frac{\pi r}{R}}{r^2} \cos\vartheta \quad \text{(à l'intérieur)};$$

la vibration correspondant à (83) est une pulsation de la sphère, celle qui correspond à (84) une oscillation de la sphère dans la direction de l'axe des x.

§ 2. Les calculs qui nous ont mené aux fonctions universelles nous permettent de donner la solution d'un problème un peu plus général.

Nous savons toujours trouver une fonction ψ, continue dans tout l'espace avec ses premières dérivées, qui satisfait à l'intérieur d'une surface ω à l'équation

$$\Delta\psi + k^2\psi = f \tag{85}$$

---

[1]) Ou, ce qui revient au même,

$$J_{j-\frac{1}{2}}(x) = 0, \quad \text{comp. p. 32.}$$

(f une fonction donnée continue avec ses premières dérivées à l'intérieur de ω) et qui a toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω, pourvu que le nombre donné k^2 n'appartienne pas à la suite

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2, \ldots .$$

Pour le cas de la sphère il est facile de donner la solution de ce problème en forme de série. On peut, comme on démontre facilement à l'aide de la théorie des fonctions sphériques et des fonctions de Bessel [1]), développer f et ψ en séries de la forme

$$\left.\begin{aligned} f &= \sum_{0}^{\infty}{}_j\, \Phi_j , \\ \psi &= \sum_{0}^{\infty}{}_j\, \Psi_j , \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

où les Φ_j et Ψ_j sont des fonctions universelles correspondant à la sphère.

Les fonctions Φ_j peuvent être dérivées de f en forme d'intégrales définies, et on arrive ainsi sans difficulté aux inégalités

$$\left|\Phi_j\right| \overline{\gtrless}\, \alpha \left| \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{f}\cdot H_j \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \right| , \qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{87}$$

α étant un nombre fini, H_j une certaine fonction sphérique d'ordre j dont la valeur absolue est $\overline{\gtrless}\, 2j+1$ et $\bar{f}$ représentant les valeurs de f sur la sphère concentrique à la sphère originale, pour laquelle l'intégrale a sa valeur maximum.

Entre les Ψ_j et les Φ_j on a la relation

$$\Psi_j = \frac{\Phi_j}{k^2 - k_j^2} , \qquad (j=0,1,2,\ldots) \tag{88}$$

à cause de (85).

Supposons que k^2 diffère de

$$k_0^2,\ k_1^2, \ldots, k_{n-1}^2,\ k_{n+1}^2,\ k_{n+2}^2, \ldots$$

par des nombres $\overline{\gtrless}\, \alpha$, α étant un nombre fini et bien connu, pendant qu'on ne fait aucune autre restriction sur la grandeur

$$k^2 - k_n^2 ,$$

que la supposition qu'elle ne soit pas nulle.

---

[1]) Des développements analogues sont possibles dans le cas général d'une surface ω quelconque; comp. p. 26.

D'après les raisonnement de ce paragraphe nous pourrons affirmer que dans tout l'espace les valeurs absolues de ψ et des ses premières dérivées seront

$$\overline{\gtrless}\, a.\text{abs. Max.}(f) + b\,\frac{|f_n|}{|k^2 - k_n^2|},$$

où a et b sont des constantes finies ne dépendant ni de la fonction f ni de k^2, abs. Max. (f) la plus grande valeur absolue de f à l'intérieur de la sphère et

$$f_n = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \bar{f}.H_n \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Ce résultat (que l'on peut aisément généraliser pour des surfaces plus générales) sera très utile pour la solution du problème que nous nous poserons maintenant.

CHAPITRE II.

DEUX OU PLUSIEURS PARTICULES DONT LES RAYONS SONT PETITS EN COMPARAISON AVEC LEURS DISTANCES MUTUELLES.

§ 1. Quoique le problème de deux particules puisse trouver sa solution complète à l'aide des coordonnées dipolaires de M. C. Neumann, le physicien préférera toujours à cette méthode une méthode approximative comparable à celle de Murphy pour les problèmes électrostatiques. Il s'agit de démontrer qu'une telle méthode est possible, et qu'elle mène à la solution du problème avec toute l'exactitude que l'on veut.

Supposons toujours pour plus de simplicité que les rayons des deux particules soient égaux; alors la première idée qui se présente, et qui est juste, comme nous verrons, nous suggère que les durées de vibration pour le système composé de deux particules ne différeront des durées de vibration d'une seule particule que par des grandeurs d'ordre $\dfrac{rayon}{distance}$ comparées avec les valeurs originales. Il est vraisemblable qu'à chaque nombre k_n^2 de la suite

$$k_0^2,\ k_1^2,\ k_2^2,\ \ldots,$$

correspondant à une des sphères, on puisse assigner un nombre

$$k_n^2 + \varepsilon_n$$

(ou peut-être plusieurs) qui appartient à la suite

$$K_0^2,\ K_1^2,\ K_2^2,\ \ldots$$

correspondant au système composé des deux sphères, et que chaque ε_n soit d'ordre $\dfrac{\textit{rayon}}{\textit{distance}}$ en comparaison avec k_n^2.

On essayera donc, pour trouver les vibrations universelles des deux sphères correspondant au nombre $k_n^2 + \varepsilon_n$, à poser d'abord

$$\Phi_n^1 = \Phi_n^{1,1} + \Phi_n^{1,2}, \tag{89}$$

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1 \cdot \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère 1)},$$

(90)

$$\Phi_n^{1,1} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{j+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_1)}{\sqrt{k_n^1 r_1}} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{j+1}}$$

(à l'intérieur de la sphère 1),

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \quad \text{(à l'extérieur de la sphère 2)},$$

(91)

$$\Phi_n^{1,2} = \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 r_2)}{\sqrt{k_n^1 r_2}} \cdot \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2)}{R^{n+1}}$$

(à l'intérieur de la sphère 2),

en prenant les deux centres des sphères respectivement comme pôles de deux systèmes de coordonnées polaires $(r_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ et $(r_2, \vartheta_2, \varphi_2)$.

Nous laisserons d'abord les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et la constante k_n^1 arbitraires; la fonction Φ_n^1 serait toujours continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, si k_n^1 était égal à k_n; mais comme nous ne ferons plus cette supposition, on pourra seulement affirmer qu'elle sera continue dans tout l'espace pendant que ces premières dérivées seront discontinues aux deux surfaces ω_1 et ω_2 des sphères. Φ_n^1 satisfait du reste aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_n^1 &= 0, && \text{à l'extérieur des deux sphères,} \\ \Delta\Phi_n^1 + (k_n^1)^2\Phi_n^1 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{1,2}, && \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ \Delta\Phi_n^1 + (k_n^1)^2\Phi_n^1 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{1,1}, && \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \tag{92}$$

Il faut calculer les discontinuités des dérivées normales de Φ_n^1 aux surfaces ω_1 et ω_2. En désignant toujours par r les normales intérieures on aura à la sphère 1

$$\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \left|\frac{\partial \Phi_n^{1,1}}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^{1,1}}{\partial r}\right|_i = (n+1)\frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+2}} +$$
$$+ \frac{\sqrt{k_n^1 R}}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1)}{R^{n+1}} \cdot k_n^1 \left|\frac{d}{dx}\left\{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}\right\}\right|_{x=k_n^1 R},$$

ou

$$\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,1}(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{93a}$$

et d'une manière analogue à la deuxième sphère

$$\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i = \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^{n+1} J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} \cdot Y_n^{1,2}(\vartheta_2, \varphi_2). \tag{93b}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} V_{n,1(2)} &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_{1(2)}} \left[\left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_a - \left|\frac{\partial \Phi_n^1}{\partial r}\right|_i\right]\frac{d\omega}{r}, \\ V_n &= V_{n,1} + V_{n,2}, \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

alors nous pourrons affirmer que la fonction

$$\Psi_n^1 = \Phi_n^1 + V_n,$$

est continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace; d'après (92) elle satisfera aux équations

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \Psi_n^1 = 0, && \text{à l'intérieur des deux sphères}, \\ &\Delta \Psi_n^1 + (k_n^1)^2 \Psi_n^1 = (k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), && \text{à l'intérieur de la sphère 1}, \\ &\Delta \Psi_n^1 + (k_n^1)^2 \Psi_n^2 = (k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), && \text{à l'intérieur de la sphère 2}. \end{aligned}\right\} \tag{96}$$

Nous pourrons toujours développer

$$\Phi_n^{1,2} + V_{n,1} = \varphi_1^1 + \varphi_2^1 + \varphi_3^1 + \dots \tag{97a}$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 1, et

$$\Phi_n^{1,1} + V_{n,2} = \chi_1^1 + \chi_2^1 + \chi_3^1 + \dots$$

en série procédant par les fonctions universelles de la sphère 2, et nous voulons maintenant calculer les $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ et k_n^1 jusqu'à présent arbitraires de manière que

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0\,, \\ \chi_n^1 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Ces équations seront vraies dans tout l'espace, si

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^1 &= 0\,, \quad \text{à la surface } \omega_1\,, \\ \chi_n^1 &= 0\,, \quad \text{à la surface } \omega_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

et la théorie des fonctions sphériques nous mène facilement aux relations auxquelles les $4n+3$ grandeurs

$$Y_n^{1,1}\,,\ Y_n^{1,2}\,,\ k_n^1$$

doivent satisfaire:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} Y_n^{1,1}(\vartheta_1\,,\ \varphi_1) &= \left| \frac{Y_n^{1,2}(\vartheta_2\,,\ \varphi_2)}{r_2^{n+1}} \right|_n^{\omega_1}, \\ \frac{k_n^1 J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{R^n J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} Y_n^{1,2}(\vartheta_2\,,\ \varphi_2) &= \left| \frac{Y_n^{1,1}(\vartheta_1\,,\ \varphi_1)}{r_1^{n+1}} \right|_n^{\omega_2}, \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

en désignant par $\left| - \right|_n^{\omega_1}$ et $\left| - \right|_n^{\omega_2}$ les fonctions sphériques d'ordre n dans les développements à la surface ω_1 et ω_2.

Ce sont

$$4n+2$$

équations linéaires et homogènes en $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$; on peut donc calculer à l'aide des $4n+2$ équations (100) les $Y_n^{1,1}$ et $Y_n^{1,2}$ à un facteur constant près, qui reste arbitraire, et k_n^1.

En formant Ψ_n^1 avec ces valeurs de $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, k_n^1 nous appellerons Ψ_n^1 la première approximation de la fonction universelle cherchée.

Il importe de montrer que k_n^1 défini par les équations (100) ne diffère de k_n que par une quantité qui peut être aussi petite que l'on veut, si l'on prend $\dfrac{R}{\varrho}$ suffisamment petit (ϱ la distance des deux sphères).

En effet, nous pouvons écrire les équations (100) dans la forme suivante

$$x \cdot y_k^1 = \sum_1^{2n+1}{}_j c_{kj} y_j^2 ,$$

$$x \cdot y_k^2 = \sum_1^{2n+1}{}_j c_{kj} y_j^1 ,$$

où nous posons

$$x = \frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} ,$$

où les y_j^1, y_j^2 sont tout à fait indépendants de R et ϱ et supposés de ne pas s'annuler tous en même temps, et où les c_{kj} sont

$$= \alpha_{kj} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} ,$$

α_{kj} représentant des nombres ne dépendant nullement de R et ϱ.

Il faut donc que

$$\frac{k_n^1 R \cdot J_{n-\frac{1}{2}}(k_n^1 R)}{J_{n+\frac{1}{2}}(k_n^1 R)} = \alpha \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} , \tag{101}$$

α représentant un nombre ne dépendant nullement de R et ϱ, fini et différent de zéro, puisque le déterminant des α_{kj} est toujours $\neq 0$.

Comme on a

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_n R) = 0 ,$$

et l'équation

$$J_{n-\frac{1}{2}}(x) = 0$$

n'a au point $x = k_n R$ qu'une racine *simple*, comme à ce point $k_n R$ et $J_{n+\frac{1}{2}}(k_n R)$ ont des valeurs finies différentes de zéro, on conclura

$$\beta \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} \overline{\lessgtr} \left| k_n^1 R - k_n R \right| \overline{\lessgtr} \gamma \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} \tag{102}$$

β et γ représentant deux nombres finis et différents de zéro, ne dépendant nullement de R et ϱ, si $\frac{R}{\varrho}$ est plus petit qu'un nombre positif, différent de zéro, ne dépendant que du nombre n.

§ 2. Nous allons trouver maintenant une deuxième, troisième approximation etc. et démontrer la convergence de ces approximations.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{2,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,1} + (k_n'^1)^2 \Phi_n^{2,1} = -(k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,2} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère } 1, \quad (103a)$$

et la fonction $\Phi_n^{2,2}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{2,2} + (k_n^1)^2 \Phi_n^{2,2} = -(k_n^1)^2 (\Phi_n^{1,1} + V_n), \text{ à l'intérieur de la sphère } 2. \quad (103b)$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura en désignant par C le maximum des valeurs absolues de $\Phi_n^{1,1}$ et $\Phi_n^{1,2}$

$$\left| \Phi_n^{2,1} \right| \leqq a \cdot C \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1},$$

$$\left| \Phi_n^{2,2} \right| \leqq a \cdot C \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+1}, \quad (104)\,[1]$$

où a est un nombre fini ne dépendant ni des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$, ni de $\frac{R}{\varrho}$.

---

[1]) A cause de (98), $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ ne contient pas de fonction universelle d'ordre n, et l'on aura à l'intérieur de ω_1

$$\left| \Phi_n^{1,2} \right| \leqq c^{\text{-}te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{n+1}$$

$$\left| V_{n,1} \right| \leqq c^{\text{-}te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}.$$

Ce qui concerne $V_{n,2}$, on a à l'intérieur de ω_1

$$\left| V_{n,2} \right| \leqq e^{\text{-}te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{3n+2};$$

la fonction universelle d'ordre n, que $V_{n,2}$ contient, a une valeur absolue

$$\left| V_{n,2} \right|_n \leqq c^{\text{-}te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{4n+2},$$

donc

$$\frac{\left| V_{n,2} \right|_n}{\left| (k_n^1)^2 - k_n^2 \right|} \leqq c^{\text{-}te} \text{ finie. } C \left(\frac{R}{\rho} \right)^{2n+1}, \quad \text{(d'après 102).}$$

Le raisonnement du § 2 Chap. I nous donne ainsi la première inégalité (104), la seconde s'obtient d'une manière analogue.

La fonction

$$\chi_n^2 = \Psi_n^1 + \Phi_n^{2,1} + \Phi_n^{2,2} \tag{105}$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\chi_n^2 + (k_n^1)^2\chi_n^2 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 1,} \\ \Delta\chi_n^2 + (k_n^1)^2\chi_n^2 &= (k_n^1)^2\Phi_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de la sphère 2.} \end{aligned} \tag{106}$$

Comme nous avons calculé k_n^1 et les rapports des $Y_n^{1,1}$, $Y_n^{1,2}$ à l'aide des équations (98), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\begin{aligned} \varphi_n^2 &= \varphi_n - \left|\Phi_n^{2,2}\right|_n^{\omega_1} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \chi_n^2 &= \chi_n^1 - \left|\Phi_n^{2,1}\right|_n^{\omega_2} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{107}$$

en prenant les $\left|\ \right|_n^{\omega_1}$ et $\left|\ \right|_n^{\omega_2}$ dans le même sens que p. 38; nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^2, $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$.

On aura

$$\left| k_n^2 - k_n^1 \right| \overline{\gtrless} b \left| k_n^1 - k_n \right| \frac{R}{\varrho},$$

$$\begin{aligned} \left| Y_n^{2,1} - Y_n^{1,1} \right| &\overline{\gtrless} b \cdot C \cdot \frac{R}{\varrho}, \\ \left| Y_n^{2,2} - Y_n^{1,2} \right| &\overline{\gtrless} b \cdot C \cdot \frac{R}{\varrho}, \end{aligned} \tag{108}$$

si b désigne une constante finie ne dépendant nullement de $\frac{R}{\varrho}$.

Pour démontrer ces inégalités (108), nous n'avons qu'à faire voir que

$$\begin{aligned} \left|\Phi_n^{2,2}\right|_n^{\omega_1} &\overline{\gtrless} B \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_1, \\ \left|\Phi_n^{2,1}\right|_n^{\omega_2} &\overline{\gtrless} B \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+2}, \quad \text{à la surface } \omega_2, \end{aligned} \tag{109}$$

B étant une constante finie $\left(\text{ne dépendant nullement de } \frac{R}{\varrho}\right)$, puisque les termes φ_n^1 et χ_n^1 sont de l'ordre $\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1}$, et ces inégalités (109) découlent immédiatement des inégalités (104).

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^1, $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, χ_n^2, en introduisant partout les valeurs

$$k_n^2,\ Y_n^{2,1},\ Y_n^{2,2}\ \text{au lieu des}\ k_n^1,\ Y_n^{1,1},\ Y_n^{1,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{2,1},\ \psi_n^{2,2},\ \psi_n^2,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$; χ_n^2; alors la fonction ψ_n^2 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2, et elle satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\psi_n^2 + (k_n^2)^2\psi_n^2 &= (k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta\psi_n^2 + (k_n^2)^2\psi_n^2 &= (k_n^2)^2\overline{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{110}$$

où nous posons

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_n^{2,2} &= \psi_n^{2,2} - \left|\psi_n^{2,2}\right|_n^1, \ {}^{1)} \\ \overline{\psi}_n^{2,1} &= \psi_n^{2,1} - \left|\psi_n^{2,1}\right|_n^2. \end{aligned} \tag{111}$$

Nous appellerons ψ_n^2, k_n^2 la deuxième approximation, et nous remarquerons que d'après (104)

$$\begin{aligned} \left|\overline{\psi}_n^{2,2}\right| &\leqq a.C.\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \left|\overline{\psi}_n^{2,1}\right| &\leqq a.C.\left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{112} \ {}^{2)}$$

---

1) $\left|\psi_n^{2,2}\right|_n^1$ la fonction uuiverselle d'ordre n de la sphère 1 que $\psi_n^{2,2}$ contient; $\left|\psi_n^{2,1}\right|_n^2$ a la signification analogue.

2) On pourrait penser au premier aspect que les fonctions $\psi_n^{2,1}$, $\psi_n^{2,2}$ ne satisfassent pas aux mêmes inégalités que $\Phi_n^{2,1}$, $\Phi_n^{2,2}$, puisque les nouvelles fonctions $\Phi_n^{1,2} + V_{n,1}$ et $\Phi_n^{1,1} + V_{n,2}$ contiennent maintenant des fonctions universelles d'ordre n: φ_n^1 et χ_n^1, mais les valeurs absolues de ces fonctions seront d'après (107) et (104)

$$\leqq c\text{-}^{te}\ \text{finie.}\ C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+2},$$

et, divisées par $\left|(k_n^2)^2 - k_n^2\right|$,

$$\leqq c\text{-}^{te}\ \text{finie.}\ C\,\frac{R}{\rho}\ \left|\ \begin{array}{l} \text{pour } \psi_n^{2,1} \text{ à } \omega_1, \\ \text{pour } \psi_n^{2,2} \text{ à } \omega_2; \end{array}\right.$$

donc en tout cas

$$\begin{aligned} \left|\psi_n^{2,1}\right| &\leqq c\text{-}^{te}\ \text{finie.}\ C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \\ \left|\psi_n^{2,2}\right| &\leqq c\text{-}^{te}\ \text{finie.}\ C\left(\frac{R}{\rho}\right)^{n+2} \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1. \end{aligned}$$

et d'après (108) et (104)

$$\left| \psi_n^2 - \psi_n^1 \right| \overline{<} b \cdot C \frac{R}{\varrho}, \tag{113}$$
$$\left| k_n^2 - k_n^1 \right| \overline{<} b \left| k_n^1 - k_n \right| \frac{R}{\varrho}.$$

§ 3. Nous procédons à une troisième approximation.

Nous calculons la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_1 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{3,1} + (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,1} = -(k_n^2)^2 \overline{\psi}_n^{2,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \tag{114a}$$

et la fonction $\Phi_n^{3,1}$ continue aves ses premières dérivées dans tout l'espace ayant à l'extérieur de ω_2 toutes les propriétés d'un potentiel et satisfaisant à l'équation

$$\Delta \Phi_n^{3,2} + (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,2} = -(k_n^2)^2 \overline{\psi}_n^{2,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2. \tag{114b}$$

Nous pouvons trouver ces fonctions (comp. Chap. I, § 2), et l'on aura d'après (112)

$$\left| \Phi_n^{3,1} \right| \overline{<} a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+2}, \tag{115}$$
$$\left| \Phi_n^{3,2} \right| \overline{<} a^2 \cdot C \cdot \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{n+2}.$$

La fonction

$$\chi_n^3 = \psi_n^2 + \Phi_n^{3,1} + \Phi_n^{3,2} \tag{116}$$

sera continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace, aura toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2 et satisfera aux équations

$$\Delta \chi_n^3 + (k_n^2)^2 \chi_n^3 = (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \tag{117}$$
$$\Delta \chi_n^3 + (k_n^2)^2 \chi_n^3 = (k_n^2)^2 \Phi_n^{3,1}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2.$$

Comme nous avons calculé k_n^2 et les rapports des $Y_n^{2,1}$, $Y_n^{2,2}$ à l'aide des équations (107), nous les calculerons maintenant à l'aide des équations

$$\varphi_n^3 = \varphi_n^2 - \left| \Phi_n^{3,2} \right|_n^{\omega_1} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_1, \tag{110}$$
$$\chi_n^3 = \chi_n^2 - \left| \Phi_n^{3,1} \right|_n^{\omega_2} = 0, \quad \text{à la surface } \omega_2;$$

nous appellerons les valeurs correspondantes k_n^3, $Y_n^{3,1}$, $Y_n^{3,2}$.

On aura [la démonstration est analogue à celle des inégalités (108) du § 2]

$$| k_n^3 - k_n^2 | \overline{\overline{<}} b^2 | k_n^1 - k_n | \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2,$$

$$| Y_n^{3,1} - Y_n^{2,1} | \overline{\overline{<}} b^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2, \tag{119}$$

$$| Y_n^{3,2} - Y_n^{2,2} | \overline{\overline{<}} b^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2.$$

Nous recalculerons maintenant les fonctions ψ_n^2, $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^3 en introduisant partout les valeurs

$$k_n^3,\ Y_n^{3,1},\ Y_n^{3,2} \text{ au lieu des } k_n^2,\ Y_n^{2,1},\ Y_n^{2,2},$$

et appelons

$$\psi_n^{3,1},\ \psi_n^{3,2},\ \psi_n^3,$$

ce qui était avant $\Phi_n^{3,1}$, $\Phi_n^{3,2}$, χ_n^2; alors la fonction ψ_n^3 sera une fonction continue avec ses premières dérivées dans tout l'espace ayant toutes les propriétés d'un potentiel à l'extérieur de ω_1 et ω_2, et elle satisfera aux équations

$$\begin{aligned} \Delta\psi_n^3 + (k_n^3)^2\psi_n^3 &= (k_n^3)^2\overline{\psi}_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \Delta\psi_n^3 + (k_n^3)^2\psi_n^3 &= (k_n^3)^2\overline{\psi}_n^{3,2}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{120}$$

où nous posons

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_n^{3,2} &= \psi_n^{3,2} - | \psi_n^{3,2} |_n^1, \ ^{1)} \\ \overline{\psi}_n^{3,1} &= \psi_n^{3,1} - | \psi_n^{3,1} |_n^2. \end{aligned} \tag{121}$$

Nous appellerons ψ_n^3, k_n^3 la troisième approximation, et nous remarquerons que d'après (115)

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_n^{3,2} &\overline{\overline{<}} a^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+3}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_1, \\ \overline{\psi}_n^{3,1} &\overline{\overline{<}} a^2 . C. \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+3}, \quad \text{à l'intérieur de } \omega_2, \end{aligned} \tag{122} \ ^{2)}$$

---

[1]) Comp. la remarque [1]) p. 42.

[2]) On fera le raisonnement analogue à la remarque [2]) p. 42.

et d'après (119) et (115)

$$
\begin{aligned}
&|\psi_n^3 - \psi_n^2| \overline{<} b^2 . C . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 , \\
&| k_n^3 - k_n^2 | \overline{<} b^2 \,| k_n^1 - k_n | \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 .
\end{aligned}
\tag{123}
$$

§ 4. II. En continuant ainsi on obtiendra la solution du problème dans la forme

$$
\begin{aligned}
\Phi_n &= \psi_n^1 + (\psi_n^2 - \psi_n^1) + (\psi_n^3 - \psi_n^2) + \cdots \\
K_n &= k_n + (k_n^1 - k_n) + (k_n^2 - k_n^1) + (k_n^3 - k_n^2) + \cdots .
\end{aligned}
\tag{124}
$$

Ces séries seront absolument et uniformément convergentes, si $\frac{R}{\varrho}$ est suffisamment grand, puisque leurs termes sont respectivement plus petits que ceux des progressions géométriques

$$C\left\{1 + b\frac{R}{\varrho} + b^2\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \cdots\right\},$$

$$k_n + (k_n^1 - k_n)\left\{1 + b\frac{R}{\varrho} + b^2\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

A chaque racine k_n^1 de l'équation algébrique résultant des équations (100) correspondra une valeur K_n.

La méthode analogue à celle de Murphy est donc démontrée; je l'ai déjà employée dans mon livre [1]) „Eine mechanische Theorie der Reibung in kontinuierlichen Massen-systemen“ pour les cas

$n = 0$ (Théorie de la gravitation),

$n = 1$ (Théorie du frottement);

nous savons maintenant qu'elle est applicable pour un n quelconque pourvu que $\frac{R}{\varrho}$ soit assez petit, et la méthode peut être immédiatement généralisée pour un nombre fini de particules.

C'est le résultat que je voulais obtenir.

---

[1]) Comp. p. 3.