Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

В. П. Ермакова.

1. Постановка задачи.

Въ XLVIII томѣ „Mathematische Annalen" (стр. 317—364) А. Н. Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Составить дифференціальное уравненіе

$$M dy + N dx = 0 \tag{1}$$

такъ, чтобы полный интегралъ этого уравненія имѣлъ форму

$$(y - v_1)^{m_1} (y - v_2)^{m_2} \dots (y - v_n)^{m_n} = C, \tag{2}$$

гдѣ показатели $m_1, m_2, \dots, m_n$ — числа постоянныя. При этомъ предполагается, что число n дано, а также дана степень функцій M и N относительно y. Предполагается, что M и N суть цѣлыя функціи относительно y.

Въ этой задачѣ показатели $m_1, m_2, \dots, m_n$ можно считать данными; неизвѣстными функціями будутъ $v_1, v_2, \dots, v_n$ и коэффиціенты при различныхъ степеняхъ y въ M и N. Опредѣленіе неизвѣстныхъ функцій приводится къ рѣшенію системы обыкновенныхъ и дифференціальныхъ уравненій. *Коркинъ показалъ, что для этой системы дифференціальныхъ уравненій всегда могутъ быть найдены полные интегралы въ конечной формѣ.* Сверхъ того Коркинъ показалъ, что рѣшеніе задачи можетъ принимать нѣсколько различныхъ формъ. Въ этомъ заключается глубокій интересъ мемуара Коркина.

Въ общемъ изложеніи Коркина для читателя не выступаетъ со всей рельефностью общая мысль, которою руководствовался авторъ при своихъ изслѣдованіяхъ, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ изслѣдованіе усложнено болѣе, чѣмъ слѣдуетъ.

А. Н. Коркинъ прежде всего предполагаетъ, что M и N первой степени относительно y, т. е. рѣшаетъ задачу для такого уравненія

$$(y+P)\,dy+(Qy+R)\,dx=0. \tag{3}$$

Еще Эйлеръ въ своихъ изслѣдованіяхь замѣтилъ, что простою замѣною перемѣнныхъ можно достигнуть того, чтобы было $P=0$, $Q=1$. Эти положенія оказываются несущественными для теоріи. Между тѣмъ первое изъ этихъ положеній, $P=0$, въ изслѣдованіи Коркина приводитъ къ такой зависимости между искомыми функціями $v_1, v_2, \ldots, v_n$, которая какъ будто играетъ основную роль во всемъ изслѣдованіи.

Въ настоящей статьѣ я желаю выяснить, какими соображеніями руководствовался А. Н. Коркинъ при производствѣ своихъ изслѣдованій, выяснить общій путь разсужденій, при помощи которыхъ можно построить всѣ вычисленія, дѣйствительно приводящія къ полному рѣшенію задачи.

Такимъ образомъ, смѣю надѣяться, что моя статья облегчитъ читателю пониманіе прекраснаго мемуара А. Н. Коркина.

Напомню прежде всего, что число множителей n въ интегралѣ (2) предполагается даннымъ, а также дана степень функцій M и N относительно y.

Введу нѣкоторыя сокращенныя обозначенія.

Выраженіе въ первой части уравненія (2) я буду сокращенно обозначать черезъ

$$\Pi\,(y-v)^m.$$

Логариѳмъ отъ этого выраженія будетъ

$$m_1\log(y-v_1)+m_2\log(y-v_2)+\ldots+m_n\log(y-v_n),$$

что сокращенно я буду обозначать черезъ

$$\sum m\log(y-v).$$

Подобнымъ образомъ имѣемъ сокращенныя обозначенія

$$\sum m=m_1+m_2+\ldots+m_n,$$

$$\sum\frac{m}{y-v}=\frac{m_1}{y-v_1}+\frac{m_2}{y-v_2}+\ldots+\frac{m_n}{y-v_n}$$

и т. д.

2. Рѣшеніе задачи въ простѣйшемъ случаѣ.

Мы ищемъ такое дифференціальное уравненіе, полный интегралъ котораго будетъ

$$\Pi (y - v)^m = C. \qquad (2)$$

Взявъ логариѳмы отъ обѣихъ частей, получимъ

$$\sum m \log (y - v) = \log C.$$

Дифференцируя это уравненіе, получаемъ искомое дифференціальное уравненіе

$$\sum \frac{m\,(\partial y - v'\partial x)}{y - v} = 0. \qquad (4)$$

Остается освободить это уравненіе отъ знаменателей, для каковой цѣли вводимъ слѣдующія обозначенія

$$F(y) = (y - v_1)(y - v_2) \ldots (y - v_n),$$

$$\left.\begin{aligned} F_1(y) &= F(y) \sum \frac{m}{y - v}, \\ F_2(y) &= F(y) \sum \frac{mv'}{y - v}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Уравненіе (4), послѣ освобожденія отъ знаменателей, приметъ слѣдующую форму

$$F_1(y)\,\partial y - F_2(y)\,\partial x = 0. \qquad (6)$$

Полный интегралъ этого уравненія выражается формулою (2).

Степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ равна $n - 1$.

Поэтому мы рѣшили задачу въ томъ случаѣ, когда данная степень функцій M и N равна $n - 1$. Въ этомъ случаѣ функціи $v_1, v_2, \ldots, v_n$ произвольны; искомое дифференціальное уравненіе опредѣляется формулой (6), при чемъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ опредѣляются по формуламъ (5). Но если степень функцій M и N ниже $n - 1$, то рѣшеніе нашей задачи усложняется.

3. Пониженіе степени на единицу; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что степень функцій M и N равна $n-2$. Въ такомъ случаѣ въ выраженіи (6) функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго дѣлителя первой степени: $y-p$; слѣдовательно

$$F_1(p)=0\,, \qquad F_2(p)=0\,.$$

На основаніи формулъ (5) эти уравненія могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum\frac{m}{p-v}=0\,, \tag{7}$$

$$\sum\frac{mv'}{p-v}=0\,. \tag{8}$$

Уравненіе (8) дифференціальное; полный интегралъ этого уравненія легко можетъ быть найденъ. Для этой цѣли умножимъ уравненіе (7) на ∂p, а уравненіе (8) на ∂x и вычтемъ; получимъ

$$\sum\frac{m\,(\partial p-\partial v)}{p-v}=0\,.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum a\log\,(p-v)=\log C\,,$$

или

$$\Pi\,(p-v)^m=C\,. \tag{9}$$

Остается теперь изъ уравненій (7) и (9) опредѣлить p и v_n черезъ остальныя функціи $v_1\,,\ v_2\,,\ldots,v_{n-1}\,,$ которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M=\frac{F_1(y)}{y-p}\,,\qquad N=-\frac{F_2(y)}{y-p}\,.$$

4. Пониженіе степени на единицу; второе рѣшеніе.

Пониженіе степени на единицу въ функціяхъ M и N можетъ быть сдѣлано еще другимъ способомъ. Мы можемъ наши величины подобрать такъ, чтобы въ функціяхъ $F_1(y)$ и $F_2(y)$ [уравненія (6)] коэффиціенты при y^{n-1} обращались въ нули.

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$; положимъ

$$\sum m = 0. \tag{10}$$

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mv'$; положимъ

$$\sum mv' = 0.$$

Полный интегралъ этого уравненія будетъ

$$\sum mv = C. \tag{11}$$

Если равенства (10) и (11) удовлетворяются, то рѣшеніе нашей задачи дается уравненіемъ (6), т. е. въ настоящемъ случаѣ

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

5. Пониженін степени на два; первое рѣшеніе.

Положимъ теперь, что данная степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ функціи $F_1(y)$ и $(F_2(y)$ должны имѣть общій квадратный множитель: $(y-p)(y-q)$. Въ § 3 было показано, что корни этого множителя должны удовлетворять уралненіямъ

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \qquad \Pi (p-v)^m = C,$$

$$\sum \frac{m}{q-v} = 0, \qquad \Pi (q-v)^m = C'.$$

Остается изъ этихъ уравненій опредѣлить p, q, v_n и v_{n-1} черезъ остальныя функціи $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$, которыя можно считать произвольными. Послѣ такого опредѣленія функціи M и N опредѣляются слѣдующимъ образомъ

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

6. Пониженіе степени на два; второе рѣшеніе.

Положимъ опять, что данная степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ такомъ случаѣ, какъ сказано раньше, функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ должны имѣть общаго квадратнаго множителя. Мы предполагали, что корни этого квадратнаго множителя различны. Но можетъ случиться, что корни квадратнаго множителя равны, т. е. самъ общій множитель превращается въ полный квадратъ: $(y-p)^2$. Въ такомъ случаѣ должны удовлетворяться слѣдующія уравненія

$$F_1(p)=0\,, \qquad F_1'(p)=0\,, \tag{12}$$

$$F_2(p)=0\,, \qquad F_2'(p)=0\,. \tag{13}$$

На основаніи формулъ (5) уравненія (12) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{m}{p-v}=0\,, \tag{14}$$

$$\sum \frac{m}{(p-v)^2}=0\,. \tag{15}$$

Уравненія (13) могутъ быть замѣнены слѣдующими

$$\sum \frac{mv'}{p-v}=0\,, \tag{16}$$

$$\sum \frac{mv'}{(p-v)^2}=0\,. \tag{17}$$

Покажемъ теперь, что эти четыре уравненія зависимы, что уравненіе (17) будетъ слѣдствіемъ уравненій (14) и (15). Дифференцируя уравненіе (14), находимъ

$$\sum \frac{m(p'-v')}{(p-v)^2}=0\,.$$

Если это послѣднее уравненіе вычтемъ изъ уравненія (15), умноженнаго на p', то получимъ уравненіе (17). Итакъ, уравненіе (17) можно отбросить. Далѣе, дифференціальное уравненіе (16), какъ показано въ § 3, можетъ быть замѣнено его полнымъ интеграломъ

$$\Pi\,(p-v)^m=C\,. \tag{18}$$

Остается функціи $p\,,\ v_1\,,\ v_2\,,\dots,v_n$ подобрать такъ, чтобы удовлетворялись уравненія (14), (15) и (18). Изъ этихъ трехъ уравненій могутъ быть опредѣлены три функціи черезъ $n-2$ остальныя функціи, которыя остаются произвольными. Послѣ этого искомыя функціи M и N опредѣляются такъ

$$M=\frac{F_1(y)}{(y-p)^2}\,, \qquad N=-\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}\,.$$

7. Пониженіе степени на два; третье рѣшеніе.

Покажемъ еще третье рѣшеніе той же самой задачи, т. е. мы опять предполагаемъ, что степень искомыхъ функцій M и N равна $n-3$. Въ § 4 было показано, что степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ можно понизить на единицу, если коэффиціенты при y^{n-1} въ этихъ функціяхъ приравняемъ нулю. Въ результатѣ получимъ уравненія

$$\sum m = 0\,, \qquad \sum mv = C. \tag{19}$$

Нужно понизить степень функцій M и N еще на единицу. Для этой цѣли нужно подобрать $v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ имѣли общій корень p. По доказанному въ § 3 получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0\,, \qquad \Pi(p-v)^m = C'. \tag{20}$$

Остается подобрать показатели $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и функціи $p, v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись четыре уравненія (19) и (20). Послѣ этого искомыя функціи опредѣляются по формуламъ

$$M = \frac{F_1(y)}{y-p}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

8. Пониженіе степени на два; четвертое рѣшеніе.

Мы можемъ понизить степень функцій $F_1(y)$ и $F_2(y)$ на двѣ единицы, если коэффиціенты при двухъ высшихъ степеняхъ въ каждой функціи приравняемъ нулю.

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_1(y)$ будетъ $\sum m$.

Коэффиціентъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mv - \sum m \sum v$. Приравнявъ эти коэффиціенты нулю, получимъ слѣдующія уравненія

$$\sum m = 0\,, \qquad \sum mv = 0. \tag{21}$$

Коэффиціентъ при y^{n-1} въ $F_2(y)$ будетъ $\sum mv'$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль на основаніи второго уравненія (21). Коэффиціентъ при y^{n-2} въ той же функціи будетъ $\sum mvv' - \sum v \sum mv'$. Этотъ коэффиціентъ обращается въ нуль, если

$$\sum mvv' = 0.$$

Полный интегралъ этого дифференціальнаго уравненія будетъ

$$\sum mv^2 = C. \tag{22}$$

Остается подобрать $m_1, m_2, \ldots, m_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ такъ, чтобы удовлетворялись три уравненія (21) и (22). Послѣ этого искомыя функціи M и N будутъ

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

Въ этомъ рѣшеніи опять $n-2$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

9. Пониженіе степени на три.

Мы можемъ понижать степень искомыхъ функцій M и N далѣе. Изъ предыдущаго становится уже яснымъ дальнѣйшій ходъ рѣшенія. Положимъ, что степень функцій M и N понижается на три единицы, т. е. равна $n-4$. Въ такомъ случаѣ задача допускаетъ семь слѣдующихъ рѣшеній.

Первое рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{r-v} = 0,$$

$$\Pi(p-v)^m = C, \qquad \Pi(q-v)^m = C', \qquad \Pi(r-v)^m = C'',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)(y-r)}.$$

Второе рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0,$$

$$\Pi(p-v)^m = C, \qquad \Pi(q-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^2(y-q)}, \qquad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^2(y-q)}.$$

Третье рѣшеніе.

$$\sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^3} = 0,$$

$$\Pi (p-v)^m = C,$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^3}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^3}.$$

Четвертое рѣшеніе.

$$\sum m = 0, \quad \sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{q-v} = 0,$$

$$\sum mv = C, \qquad \Pi (p-v)^m = C', \qquad \Pi (q-v)^m = C'',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)(y-q)}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)(y-q)}.$$

Пятое рѣшеніе.

$$\sum m = 0, \quad \sum \frac{m}{p-v} = 0, \quad \sum \frac{m}{(p-v)^2} = 0,$$

$$\sum mv = C, \qquad \Pi (p-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{(y-p)^2}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{(y-p)^2}.$$

Шестое рѣшеніе.

$$\sum m = 0, \quad \sum mv = 0, \quad \sum \frac{m}{p-v} = 0,$$

$$\sum mv^2 = C, \qquad \Pi (p-v)^m = C',$$

$$M = \frac{F_1(y)}{y-p}, \quad N = -\frac{F_2(y)}{y-p}.$$

Седьмое рѣшеніе.

$$\sum m = 0, \quad \sum mv = 0, \quad \sum mv^2 = 0, \quad \sum mv^3 = C,$$

$$M = F_1(y), \qquad N = -F_2(y).$$

Во всѣхъ рѣшеніяхъ $n-3$ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$ остаются произвольными.

Мы можемъ это пониженіе продолжить до тѣхъ поръ, пока M и N будутъ содержать y въ первой степени, т. е. искомое уравненіе приведется къ формѣ (3). При этомъ придется сдѣлать пониженіе на $n-2$. Согласно данной выше теоріи въ окончательномъ результатѣ останутся произвольными двѣ изъ функцій $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

10. Общая задача.

Дано дифференціальное уравненіе

$$Mdy + Ndx = 0, \tag{23}$$

въ которомъ M и N суть цѣлыя алгебраическія функціи относительно y; требуется узнать, можетъ ли быть полный интегралъ этого уравненія выраженъ въ формѣ (2).

Эта задача можетъ быть рѣшена лишь въ томъ случаѣ, когда число n дано. Въ такомъ случаѣ мы можемъ составить всѣ формы дифференціальныхъ уравненій, допускающихъ общій интегралъ въ формѣ (2) и содержащихъ y въ той же степени, какъ и данное уравненіе (23). Потомъ останется узнать, заключается ли данное уравненіе въ одной изъ найденныхъ формъ.