Зависимость между Кинкелиновыми и гаммаморфными функціями.

В. П. Алексѣевскаго.

Подъ названіемъ функцій Кинкелина г. Бопенъ [1]) разумѣетъ функціи $K_n(x)$, удовлетворяющія уравненію

$$K_n(x+1) = x^{x^n} K_n(x)$$

при условіи $K_n(1) = 1$.

Функція $K_0(x)$ совпадаетъ съ Эйлеровой функціей $\Gamma(x)$; функція $K_1(x)$ была указана и изучена Кинкелиномъ; начало изслѣдованій функцій высшихъ порядковъ было положено Глешеромъ.

Тому-же вопросу посвященъ недавно вышедшій мемуаръ г. Бопэна. Въ послѣдней главѣ авторъ показываетъ связь между функціей $K_1(x)$ и функціей $G(x)$, свойства которой были изучены мною, и строитъ классъ функцій, представляющихъ обобщеніе функціи $G(x)$. Повидимому г. Бопэну не было извѣстно, что функція $G(x)$ является лишь простѣйшей представительницей функцій, подобныхъ функціи гамма, основаніе теоріи которыхъ было дано мною [2]) и недавно изложено въ новой формѣ г. Барнесомъ въ рядѣ мемуаровъ [3]).

---

[1]) Beaupin. „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin". Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie de Belgique. T. 59.

[2]) „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма". Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества. 2 Сер. т. I.

[3]) Barnes. „The Theory of the G Function". Quarterly Journal of Mathematics. Vol. 31.

Barnes. „Genesis of the Double Gamma Function". Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 31.

Barnes. „The Theory of the Double Gamma Function". Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A. Vol. 196.

Въ этой статьѣ я показываю, что теорія Кинкелиновыхъ функцій находится въ самой тѣсной связи съ теоріей функцій, подобныхъ функціи гамма $G_n(x)$: *всѣ* функціи Кинкелина могутъ быть составлены изъ функцій $G_n(x)$ и обратно. То-же заключеніе справедливо и для функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$.

Небезъинтересно замѣтить, что выраженіе Кинкелиновыхъ функцій въ зависимости отъ функцій $G_n(x)$ требуетъ возвышенія послѣднихъ въ степени, показатели которыхъ суть цѣлыя раціональныя функціи x, тогда какъ составъ функцій Якоби, Гейне, Аппеля, модульныхъ Эрмита и, слѣдовательно, двупеіодическихъ гораздо проще: они сводятся къ произведѣніямъ или частнымъ функцій подобныхъ функціи гамма [1]).

1. Дифференціальное уравненіе между двумя послѣдовательными гаммаморфными функціями.

Прежде чѣмъ приступить къ выводу вышеупомянутыхъ зависимостей, я остановлюсь на обобщеніи нѣкоторыхъ свойствъ функцій, подобныхъ функціи гамма, которыя дальше для краткости я буду называть *гаммаморфными.*

Простѣйшій классъ гаммаморфныхъ функцій характеризуется функціональнымъ уравненіемъ:

$$G_n(x+1) = G_{n-1}(x)\, G_n(x) \tag{1}$$

при чемъ

$$G_0(x) = \Gamma(x)\,, \qquad G_1(x) = G(x)\,,$$

слѣдовательно

$$G_1(x+1) = \Gamma(x)\;G_1(x)\,. \tag{2}$$

Выборъ рѣшеній ограничивается слѣдующимъ условіемъ.

Такъ какъ общее рѣшеніе уравненій (1) и (2) получается умноженіемъ частнаго рѣшенія на произвольную періодическую функцію съ періодомъ, равнымъ единицѣ, то, по опредѣленію, подъ $G_n(x)$ мы разумѣемъ функцію не разлагаемую на рѣшеніе того же уравненія (1) и періодическую функцію.

Кромѣ того функціи $G_n(x)$ подчинены условію:

$$G_n(1) = 1\,.$$

Разсмотримъ логариѳмическія производныя тѣхъ-же функцій. Положимъ для краткости обозначеній:

$$D\log\ G_n(x) = \phi_n(x)\,, \qquad D\log\ \Gamma(x) = \psi(x)\,.$$

[1]) См. мою статью: „Über eine Classe von Functionen, die der Gammafunction analog sind“. Berichte der Sächs. Gesellschaft zu Leipzig. Math.-Phys. Cl. Bd. 6.

Функціи $\varphi_n(x)$ въ силу равенствъ (1) и (2) опредѣляются функціональными уравненіями такой формы:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x+1)-\varphi_n(x)&=\varphi_{n-1}(x)\,, \\ \varphi_1(x+1)-\varphi_1(x)&=\psi(x)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Основнымъ предложеніемъ въ теоріи гаммаморфныхъ функцій служитъ дифференціальное уравненіе [1]):

$$D\log\, G_1(x+1)=x\;D\log\Gamma(x)-(x-1)+D\log G_1(1)\,,$$

которое въ новыхъ обозначеніяхъ имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\varphi_1(x+1)=x\psi(x)-(x-1)+\varphi_1(1)\,. \tag{4}$$

Установимъ соотвѣтственное уравненіе для функцій φ высшихъ порядковъ.

Пользуясь символомъ Δ для обозначенія разности, въ силу равенствъ (3) мы можемъ представить уравненіе (4) такъ:

$$\Delta\varphi_2(x+1)=x\Delta\varphi_1(x)-(x-1)+\varphi_1(1)\,.$$

Замѣтивъ, что

$$x\Delta\varphi_1(x)=\Delta[x\varphi_1(x)-\varphi_2(x+1)]\,,$$

находимъ, что

$$\varphi_2(x+1)=x\varphi_1(x)-\varphi_2(x+1)-\frac{(x-1)(x-2)}{2}+x\varphi_1(1)+C.$$

Опредѣливъ постоянное C, полагая $x=0$, получимъ окончательно

$$2\varphi_2(x+1)=x\varphi_1(x)-\frac{(x-1)(x-2)}{2}+x\varphi_1(1)+2\varphi_2(1)\,. \tag{5}$$

Переходъ отъ уравненія (4) къ (5) есть не что иное, какъ интегрированіе въ конечныхъ разностяхъ уравненія (4), поэтому, не повторяя однихъ и тѣхъ-же разсужденій, можемъ сразу получить общій результатъ, взявъ конечный интегралъ $(n-1)$-го порядка отъ обѣихъ частей уравненія (4) и опредѣливъ каждое изъ произвольныхъ постоянныхъ, вводимыхъ послѣдовательнымъ интегрированіемъ, полагая $x=0$.

Такимъ способомъ получимъ:

$$n\varphi_n(x+1)=x\varphi_{n-1}(x)+Q_n(x)\,, \tag{A}$$

[1]) См. „О функціяхъ подобныхъ функціи гамма". § 3.

гдѣ $Q_n(x)$ — полиномъ n-ой степени, именно

$$Q_n(x) = -\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n\,!} +$$

$$+\sum_{k=1}^{k=n} k\varphi_k(1)\frac{x(x-1),\ldots,(x-n+k+1)}{(n-k)\,!}.$$

Уравненіе (A) и есть искомое.

Интегрируя послѣднее уравненіе отъ 0 до x, получимъ:

$$n\log G_n(x+1) = x\log G_{n-1}(x) - \int_0^x \log G_{n-1}(x)\,dx + \int_0^x Q_n(x)\,dx. \quad (B)$$

Отсюда, полагая $x=1$ и перемѣнивъ n на $n+1$, находимъ:

$$\int_0^1 \log G_n(x)\,dx = \int_0^1 Q_{n+1}(x)\,dx.$$

Ясно, что искомый интегралъ есть линейная функція постоянныхъ $\varphi_1(1)$, $\varphi_2(1)$, ..., $\varphi_{n+1}(1)$; причемъ важно замѣтить, что въ число необходимыхъ постоянныхъ для опредѣленія интеграла отъ функціи n-го порядка входитъ $\varphi_{n+1}(1)$.

2. Выраженіе гаммаморфныхъ функцій въ зависимости отъ производной отъ $\log\,\Gamma(x)$.

Изъ того-же уравненія (A) слѣдуетъ, что всякая функція $\varphi_n(x)$ можетъ быть выражена посредствомъ функціи $\psi(x)$. Дѣйствительно, перемѣнивъ въ этомъ уравненіи x на $x+n-1$, найдемъ:

$$n\,\varphi_n(x+n) = (x+n-1)\,\varphi_{n-1}(x+n-1) + Q_n(x+n-1).$$

Слѣдовательно,

$$(n-1)\,\varphi_{n-1}(x+n-1) = (x+n-2)\,\varphi_{n-2}(x+n-2) + Q_{n-1}(x+n-2),$$

. . . .

$$2\varphi_2(x+2) = (x+1)\,\varphi_1(x+1) + Q_2(x+1),$$

$$\varphi_1(x+1) = x\psi(x) + Q_1(x).$$

Исключивъ изъ этой системы $\phi_1(x+1), \ldots, \phi_{n-1}(x+n-1)$, получимъ

$$n!\,\phi_n(x+n) = x(x+1), \ldots, (x+n-1)\,\psi(x) + R_n(x) \qquad (C)$$

гдѣ $R_n(x)$ полиномъ n-ой степени.

Итакъ, производная логариѳма гаммаморфной функціи есть линейная функція отъ производной логариѳма $\Gamma(x)$ съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Взявъ интегралъ отъ обѣихъ частей уравненія (C) въ предѣлахъ отъ 0 до x и замѣтивъ, что $G_n(n)=1$, въ чемъ легко убѣдиться съ помощью равенства (1), получимъ

$$n!\log G_n(x+n) =$$
$$= \int_0^x x(x+1)\,\ldots\,(x+n-1)\,\psi(x)\,dx + \int_0^x R_n(x)\,dx. \qquad (D)$$

Таково выраженіе логариѳма гаммаморфной функціи въ зависимости отъ функціи $\psi(x)$.

3. *Выраженіе Кинкелиновыхъ функцій посредствомъ гаммаморфныхъ и обратно.*

Перейдемъ теперь къ установленію зависимости между функціями $K_n(x)$ и $G_n(x)$.

Основное уравненіе, характерное для Кинкелиновыхъ функцій, можетъ быть записано въ такой формѣ:

$$\log K_n(x+1) - \log K_n(x) = x^n \log x. \qquad (6)$$

По свойству функціи $\Gamma(x)$ имѣемъ

$$\Delta\,[x^n.\log\Gamma(x)] = x^n\log x + \Delta x^n.\log\Gamma(x+1).$$

Точно также по свойству (1) функцій $G_n(x)$, находимъ

$$\Delta\,[\Delta\, x^n.\log G_1(x+1)] = \Delta\, x^n.\log\Gamma\,(x+1) + \Delta^2x^n.\log G_1(x+2),$$

$$\Delta\,[\Delta^2x^n.\log G_2(x+2)] = \Delta^2x^n.\log G_1(x+2) + \Delta^3x^n.\log G_2(x+3),$$

. . . .

$$\Delta\,[\Delta^nx^n.\log G_n(x+n)] = \Delta^nx^n.\log G_{n-1}(x+n),$$

гдѣ $\Delta^nx^n = n!$

Изъ этихъ равенствъ не трудно обнаружить слѣдующее тождество

$$x^n \log x = \Delta \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Delta^k x^n . \log G_k(x+k).$$

Внося это выраженіе въ равенство (6), находимъ

$$\log K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Delta^k x^n . \log G_k(x+k) + C.$$

Отсюда, принимая во вниманіе, что

$$K_n(1) = 1\,, \qquad G_n(1) = 1\,, \qquad G_k(1+k) = 1$$

заключаемъ, что *постоянное* $C = 0$.

Слѣдовательно,

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n . \log G_1(x+1) +$$

$$+ \Delta^2 x^n . \log G_2(x+2) - \ldots + (-1)^n \Delta^n x^n . \log G_n(x+n). \qquad (E)$$

Этотъ выводъ въ силу равенствъ (1) можно формулировать такъ: *логариѳмъ всякой Кинкелиновой функціи есть линейная функція логариѳмовъ гаммаморфныхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.*

Изъ обзора уравненій

$$\log K_1(x) = x \log \Gamma(x) - \log G_1(x+1)$$

$$\log K_2(x) = x^2 \log \Gamma(x) - \Delta x^2 \log G_1(x+1) + 2!\log G_2(x+2)$$

. . . .

$$\log K_n(x) = x^n \log \Gamma(x) - \Delta x^n \log G_1(x+2) + \ldots + (-1)^n n! \log G_n(x+n)$$

ясно, что и обратно, *логариѳмъ всякой гаммаморфной функціи* $G_n(x)$ *есть линейная функція логариѳмовъ Кинкелиновыхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами относительно* x.

И, дѣйствительно, рѣшеніе приведенной системы даетъ:

$$n! \log G_n(x+n) =$$

$$= P_n \log \Gamma(x) - P_n' \log K_1(x) + \frac{P_n''}{2!} \log K_2(x) - \ldots + (-1)^n \frac{P_n^n}{n!} \log K_n(x), \, (F)$$

гдѣ

$$P_n = x(x+1)\,\ldots\,(x+n-1),$$

а P'_n, P''_n, ... суть производныя отъ P_n.

4. Зависимость между основными постоянными обѣихъ системъ функцій.

Мы видѣли въ § 1 какую важную роль играютъ постоянныя $\phi_1(1)$, $\phi_2(1)\ldots$ въ теоріи функцій G_n. Эти постоянныя могутъ быть замѣнены другими системами, между прочимъ вышеупомянутыми интегралами

$$\int_0^1 \log G_n(x)\,dx.$$

Аналогичныя постоянныя имѣютъ огромное значеніе для Кинкелиновыхъ функцій. За основную систему въ теоріи Кинкелиновыхъ функцій Глешеръ и Бопэнъ принимаютъ постоянныя ω_{n-1}, которыя опредѣляются такъ:

$$\int_0^1 \log K_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\log \omega_{n-1}.$$

Для того, чтобы установить связь между обѣими системами постоянныхъ, мы выведемъ выраженіе производной отъ $\log K_n(x)$ изъ формулы (E).

Посредствомъ дифференцированія, получимъ:

$$D\log K_n(x) = n\,[x^{n-1}\log \Gamma(x) - \Delta x^{n-1}.\log G_1(x+1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\Delta^{n-1}x^{n-1}.\log G_{n-1}(x+n-1)] + R_n(x),$$

гдѣ

$$R_n(x) = x^n\psi(x) - \Delta x^n \phi_1(x+1) + \ldots + (-1)^n \Delta^n x^n \phi_n(x+n). \quad (7)$$

Выраженіе въ скобкахъ представляетъ $\log K_{n-1}(x)$, слѣдовательно

$$D\log K_n(x) = n\log K_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Для опредѣленія вида функціи $R_n(x)$ составимъ разность

$$R_n(x+1) - R_n(x) = \Delta R_n(x).$$

Вычисленіе этой разности въ силу равенствъ (3) даетъ

$$\Delta R_n(x) = x^{n-1}.$$

Назовемъ чрезъ $B_n(x)$ полиномъ Бернулли, написанный въ такой формѣ, что

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x^{n-1}.$$

Черезъ сличеніе этихъ результатовъ, находимъ

$$R_n(x) = B_n(x) + A_n \tag{8}$$

гдѣ A_n постоянное.

Отсюда, полагая $x = 0$ и замѣтивъ, что $B_n(0) = 0$, получимъ

$$A_n = R_n(0).$$

Для опредѣленія $R_n(0)$ изъ формулы (7) необходимо напомнить, что 0 есть полюсъ функціи $\psi(x)$, причемъ изъ функціональнаго уравненія

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$$

непосредственно слѣдуетъ, что

$$[x\psi(x)]_{x=0} = -1.$$

Вслѣдствіе этого равенство (7) даетъ при $n > 1$

$$A_n = -\Delta 0^n \phi_1(1) + \Delta^2 0^n \phi_2(2) - \ldots + (-1)^n \Delta^n 0^n \phi_n(n). \tag{9}$$

Въ случаѣ же $n = 1$, получимъ

$$A_1 = -1 - \phi_1(1). \tag{10}$$

Изъ соотношеній (3) ясно, что A_n представляетъ линейную функцію постоянныхъ $\phi_1(1), \phi_2(1), \ldots, \phi_n(1)$.

Опредѣливъ составъ постоянныхъ A_n, мы можемъ остановиться на слѣдующемъ выраженіи производной $\log K_n(x)$:

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + B_n(x) + A_n. \tag{11}$$

Обращаясь къ мемуару Бопэна на стр. 20 мы находимъ слѣдующую зависимость:

$$\log K_n(x) = n \int_0^x \log K_{n-1}(x)\, dx + \frac{1}{n} B_{n+1}(x) - \frac{n}{2} x \log \omega_{n-1}.$$

Откуда чрезъ дифференцированіе находимъ .

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + \frac{1}{n} B'_{n+1}(x) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}.$$

Имѣя въ виду, что по свойству Бернулліевыхъ функцій

$$B'_{n+1}(x) = n\,B_n(x) + B'_{n+1}(0)\,,$$

получимъ

$$D \log K_n(x) = n \log K_{n-1}(x) + B_n(x) + \frac{1}{n} B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}\,.$$

Сравнивая двѣ формы производной $\log K_n(x)$, находимъ

$$A_n = \frac{1}{n} B'_{n+1}(0) - \frac{n}{2} \log \omega_{n-1}\,. \tag{12}$$

Замѣтимъ еще, что полагая $x = 1$, получимъ

$$A_n = D \log K_n(1)\,.$$

5. Выраженіе функцій, обобщающихъ функцію $G(x)$, посредствомъ гамморфныхъ и обратно.

Обратимся къ обобщенію функціи $G_1(x) = G(x)$, данному г. Бопэномъ. Замѣтивъ соотношеніе

$$G_1(x) = \frac{\Gamma^{x-1}(x)}{K_1(x)}\,,$$

Бопэнъ составляетъ такія функціи,

$$J_n(x) = \frac{K_{n-1}^{x-1}(x)}{K_n(x)}\,.$$

Очевидно, что $J_1(x)$ тождественно съ $G_1(x)$, но остальныя функціи $J_n(x)$ суть новыя функціи.

Изъ этого опредѣленія по свойству Кинкелиновыхъ функцій слѣдуетъ, что

$$J_n(x+1) = K_{n-1}(x)\,J_n(x)$$

и

$$J_n(1) = 1\,.$$

Чтобы обнаружить выраженіе функцій $J_n(x)$ чрезъ посредство гамморфныхъ функцій, логариѳмируемъ предыдущее равенство; получимъ:

$$\log J_n(x+1) - \log J_n(x) = \log K_{n-1}(x)\,.$$

Слѣдовательно, $\log J_n(x)$ представляетъ конечный интегралъ отъ $\log K_{n-1}(x)$.

Принимая во вниманіе, что по доказанному имѣемъ

$$\log K_{n-1}(x) =$$

$$= x^{n-1} \log \Gamma(x) - \Delta x^{n-1} \log G_1(x+1) +$$

$$+ \Delta^2 x^{n-1} \log G_2(x+1) - \ldots + (-1)^{n-1} \Delta^{n-1} x^{n-1} \log G_{n-1}(x+n-1),$$

чрезъ конечное интегрированіе, прилагая справа методъ интеграціи по частямъ, находимъ:

$$\log J_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \log G_1(x) - 2\,\Delta x^{n-1} . \log G_2(x+1) +$$

$$+ 3\Delta^2 x^{n-1} . \log G_3(x+2) - \ldots + (-1)^{n-1}\, n\, \Delta^{n-1} x^{n-1} . \log G_n(x+n-1) . \quad (G)$$

Откуда слѣдуетъ, что обратно

$$n! \log G_n(x+n-1) = P_{n-1} \log G_1(x) - P'_{n-1} \log J_2(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{P_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \log J_n(x) \qquad (H)$$

гдѣ

$$P_{n-1} = x(x+1) \ldots (x+n-2).$$

6. Выраженіе тѣхъ-же функцій посредствомъ кратнаго интеграла отъ логариѳма функціи $G_1(x)$.

Равенство (G) даетъ выраженіе $\log J_n(x)$ въ зависимости отъ системы функцій $G_1, G_2, \ldots, G_n$; можно показать, что $J_n(x)$ зависитъ исключительно отъ первой изъ нихъ $G_1(x)$.

Прежде всего это обнаруживается для J_2. Полагая въ формулѣ (G) $n = 2$, находимъ

$$\log J_2(x) = x \log G_1(x) - 2 \log G_2(x+1).$$

Полагая же въ формулѣ (B) тоже $n = 2$, получимъ:

$$2 \log G_2(x+1) = x \log G_1(x) - \int_0^x \log G_1(x)\, dv + \int_0^x Q_2(x)\, dx.$$

Чрезъ сравненіе этихъ двухъ тождествъ имѣемъ

$$\log J_2(x) = \int_0^x \log G_1(x)\,dx - \int_0^x Q_2(x)\,dx\,.$$

Для обобщенія этого вывода, найдемъ сначала выраженіе производной отъ $\log J_n(x)$.

Изъ формулы (G) находимъ:

$$D \log J_n(x) =$$

$$= (n-1)\,[x^{n-2} \log G_1(x) - 2\,\Delta x^{n-2} \log G_2(x+1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}(n-1)\,\Delta^{n-2} x^{n-2} \log G_{n-1}(x+n-2)] + S_n(x),$$

гдѣ

$$S_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \phi_1(x) - 2\,\Delta x^{n-1} . \phi_2(x+1) + \ldots + (-1)^{n-1} n\,\Delta^{n-1} x^{n-1} \phi_n(x+n-1).$$

Составивъ разность отъ $S_n(x)$, находимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) =$$

$$= x^{n-1} \psi(x) - \Delta x^{n-1} \phi_1(x+1) + \ldots + (-1)^{n-1}\,\Delta^{n-1} x^{n-1} . \phi_n(x+n-1).$$

Сравнивая правую часть съ формулой (7) и принимая во вниманіе равенство (8), получимъ

$$S_n(x+1) - S_n(x) = B_{n-1}(x) + A_{n-1}.$$

Такъ какъ $B_{n-1}(x)$ есть полиномъ $(n-1)$-ой степени, то $S_n(x)$ будетъ полиномъ n-ой степени, выраженіе котораго не трудно найти.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ тождества

$$B_n(x+1) - B_n(x) = x\,[B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)]$$

слѣдуетъ, что

$$S_n(x) = (x-1)\,B_{n-1}(x) - B_n(x) + A_{n-1} x + S_n(0).$$

Постоянное $S_n(0)$ получается безъ затрудненій изъ первоначальнаго выраженія $S_n(x)$, принявъ во вниманіе, что

$$[x\phi_1(x)]_{x=0} = 1\,.$$

Выяснивъ это обстоятельство, имѣемъ

$$D \log J_n(x) = (n-1)\, J_{n-1}(x) + S_n(x).$$

Отсюда, дифференцируя $(n-2)$ раза, получимъ

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1)\, D^{n-2} J_{n-1}(x) + F_n^2(x)$$

гдѣ $F_n^2(x)$ полиномъ 2-й степени.

Замѣняя въ предыдущей формулѣ n чрезъ $n-1$, $n-2, \ldots, 2$, получимъ рядъ аналогичныхъ равенствъ

$$D^{n-2} \log J_{n-1}(x) = (n-2)\, D^{n-3} \log J_{n-2}(x) + F_{n-1}^2(x)$$

. . . .

$$D \log J_2(x) = \log G_1(x) + F_2^2(x).$$

Слѣдовательно, путемъ исключенія получимъ:

$$D^{n-1} \log J_n(x) = (n-1)!\log G_1(x) + F^2(x),$$

гдѣ $F^2(x)$ — опять полиномъ второй степени.

Интегрируя это равенство $(n-1)$ разъ въ предѣлахъ отъ 0 до x, находимъ:

$$\log J_n(x) = (n-1)! \int_0^x \int_0^x \ldots \int_0^x \log G_1(x)\, dx^{n-1} + F^{n+1}(x). \qquad (J)$$

Итакъ, логариѳмъ $J_n(x)$ отличается отъ интеграла $(n-1)$-й кратности отъ $\log G_1(x)$ на полиномъ $(n+1)$-ой степени.

7. Обобщеніе.

Строеніе функціональнаго уравненія Кинкелиновыхъ функцій указываетъ на возможность разнообразныхъ обобщеній; напримѣръ, выраженіе каждой изъ функцій $F_n(x)$, удовлетворяющихъ одному изъ уравненій

$$F_n(x+1) = G_j^{x^n}(x) \, . \, F_n(x)$$

$$F_n(x+1) = K_j^{x^n}(x) \, . \, F_n(x)$$

$$F_n(x+1) = J_j^{x^n}(x) \, . \, F_n(x)$$

можетъ быть найдено пріемомъ, указаннымъ выше.

Логариѳмъ каждой изъ такихъ функцій $F_n(x)$ представляетъ линейную функцію логариѳмовъ гаммаморфныхъ функцій съ цѣлыми раціональными коэффиціентами.

Выборъ показателя въ формѣ x^n не существененъ: предыдущее заключеніе остается неизмѣннымъ, если примемъ показателемъ какую угодно цѣлую раціональную функцію x; поэтому къ той-же категоріи относится функція $F_n(x)$, опредѣляемая уравненіемъ:

$$F_n(x+1) = x^{r_0(x)} \,.\, G_l^{r_1(x)}(x) \,.\, K_p^{r_2(x)} \,.\, J_q^{r_3(x)} \,.\, F_n(x).$$

гдѣ r_0, r_1, r_2, r_3 суть цѣлыя раціональныя функціи x.