REMARQUES RELATIVES AUX FORMULES SOMMATOIRES D'EULER ET DE BOOL

PAR
W. Stekloff.

---

1. On sait beaucoup de démonstrations simples de la formule sommatoire d'Euler. Néanmoins je me permets de publier quelques remarques relatives à cette formule, ainsi qu' à la formule analogue de M. Bool, qui me semblent non dénuées d'intérêt au point de vue didactique.

Je vais attirer l'attention sur ce fait qu'on peut déduire les formules en question, ainsi qu'étudier les propriétés fondamentales des polynomes qui s'y rattachent, par un procédé uniforme et très élégant, en partant d'une formule élémentaire, qu'on peut considérer en même temps comme une formule sommatoire générale contenant comme des cas très particuliers celles d'Euler et de Bool.

2. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de la variable réelle x admettant les dérivées de n premiers ordres dans un intervalle quelconque (a, b).

Désignons par $g^{(k)}(-x)$ la dérivée d'ordre k de $g(x)$, où l'on remplace x par $-x$.

Faisant dans l'identité

$$f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(-x) - f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k+1)}(-x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k)}(-x)\right]$$

successivement $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ et additionnant, on trouve

$$f^{(n)}(x)\, g(-x) - f(x)\, g^{(n)}(-x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(x)\, g^{(n-k)}(-x),$$

d'où, en intégrant entre les limites a et b, on tire, après une réduction simple,

$$f(b)\,g^{(n-1)}(-b) - f(a)\,g^{(n-1)}(-a) =$$

$$= -\int_a^b f(x)\,g^{(n)}(-x)\,dx - \sum_{k=2}^{n} [f^{(k-1)}(b)\,g^{(n-k)}(-a) - f^{(k-1)}(b)\,g^{(n-k)}(-a)] +$$

$$+ \int_a^b f^{(n)}(x)\,g(-x)\,dx. \qquad (1)$$

C'est la formule de Kronecker.

3. Posons $b = a + h$, et

$$g(x) = \varphi\left(-\frac{x+a}{h}\right).$$

On aura

$$g^{(n-k)}(-x) = \frac{(-1)^{n-k}}{h^{n-k}}\,\varphi^{(n-k)}(z), \quad z = \frac{x-a}{h}.$$

L'égalité (1) devient

$$f(a+h)\,\varphi^{(n-1)}(1) - f(a)\,\varphi^{(n-1)}(0) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\varphi^{(n)}\left(\frac{x-a}{h}\right) dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(a+h)\,\varphi^{(n-k)}(1) - f^{(k-1)}(a)\,\varphi^{(n-k)}(0)] +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\,\varphi(z)\,dz, \qquad (2)$$

car

$$\int_a^{a+h} f^{(n)}(x)\,\varphi\left(\frac{x-a}{h}\right) dx = h\int_0^1 f^{(n)}(a+hz)\,\varphi(z)\,dz.$$

Remplaçant dans (2) a par $a + jh$, j étant un entier, faisant ensuite successivement $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ et additionnant les résultats, on trouve, après des réductions simples,

$$[\varphi^{(n-1)}(1) - \varphi^{(n-1)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f(a+jh) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{k-1} [f^{(k-1)}(b)\, \varphi^{(n-k)}(0) - f^{(k-1)}(a)\, \varphi^{(n-k)}(1)] + \tag{3}$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k h^{k-1} [\varphi^{(n-k)}(1) - \varphi^{(n-k)}(0)] \sum_{j=0}^{m} f^{(k-1)}(a+jh) +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz) dz.$$

C'est la formule sommatoire générale, analogue à celle de M. Kronecker [1]).

4. Considérons le cas le plus simple, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n.

Il est évident que la formule (3) se réduira à celle d'Euler, si nous déterminerons le polynome $\varphi(z)$ à l'aide des conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) = \varphi^{(n-k)}(0). \qquad (k=2,3,\ldots,n) \tag{4}$$

La formule (3) se réduira à celle de Bool, si nous supposons que le polynome $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions

$$\varphi^{(n-k)}(1) + \varphi^{(n-k)}(0) = 0. \qquad (k=1,2,3,\ldots,n) \tag{5}$$

Nous considérons, dans ce qui va suivre, ces deux cas les plus intéressants, sans traiter la question générale.

5. Supposons d'abord que $\varphi(z)$ satisfasse aux conditions (4).

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(0) = A'_n, \qquad \varphi^{(n-k)}(0) = A_k. \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1) \tag{6}$$

---

[1]) Comparer L. Kronecker: „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale". Leipzig, 1894, p. 148.

On a

$$\varphi^{(n-k)}(z) = A_k + z\frac{A_{k-1}}{1\,!} + z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + z^{k-1}\frac{A_1}{(k-1)\,!} + z^k\frac{A_0}{k\,!}. \quad (7)$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n)$$

En posant $z=1$, on trouve, en vertu de (4),

$$A_{k-1} + \frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + \frac{A_1}{(k-1)\,!} + \frac{A_0}{k\,!} = 0. \quad (8)$$
$$(k=2,3,\ldots,n)$$

Ces $n-1$ équations déterminent successivement les rapports

$$\frac{A_k}{A_0}. \qquad (k=1,2,\ldots,n-1)$$

Les coefficients A_0 et A'_n restent indéterminés.
Nous posons, pour plus de simplicité,

$$A'_n = 0, \qquad A_0 = 1. \quad (9)$$

Nous obtiendrons ainsi le polynome

$$\varphi(z) = \frac{z^n}{n\,!} + z^{n-1}\frac{A_1}{(n-1)\,!} + z^{n-2}\frac{A_2}{(n-2)\,!} + \ldots + z^2\frac{A_{n-2}}{2\,!} + zA_{n-1}, \quad (10)$$

A_k étant des constantes, définies par les équations (8), où il faut poser $A_0=1$.

En prennant pour n les valeurs entières à partir de $n=2,3,\ldots$, nous obtiendrons une suite de polynomes de degré $2,3,\ldots$ qu'on appelle *polynomes de Bernoulli.*

6. Désignons maintenant le polynome de Bernoulli de degré n par $\varphi_n(z)$.

En tenant compte de (10) et (4), on trouve immédiatement

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0. \quad (11)$$

Posons dans l'équation

$$\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = A_k - z\frac{A_{k-1}}{1\,!} +$$
$$+ z^2\frac{A_{k-2}}{2\,!} + \ldots + (-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{\varphi_n^{(n-1)}(1)}{(k-1)\,!} + (-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (7) $k=2$.

On aura

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) = A_2 + zA_1 + \frac{z^2}{2!}, \quad \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = A_2 - z\varphi_n^{(n-1)}(1) + \frac{z^2}{2!},$$

d'où

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = z[A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1)].$$

Or, l'équation (7) donne, pour $k=1$, $z=1$,

$$\varphi_n^{(n-1)}(1) = A_1 + 1. \tag{12}$$

On a donc, en vertu de (8) (pour $k=2$),

$$A_1 + \varphi_n^{(n-1)}(1) = 2A_1 + 1 = 0, \tag{13}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_n^{(n-2)}(z) - \varphi_n^{(n-2)}(1-z) = 0.$$

On tire de là, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-3)}(z) + \varphi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 2A_3,$$

$$\varphi_n^{(n-4)}(z) - \varphi_n^{(n-4)}(1-z) = 2A_3 z + \text{Const.} = 2A_3 z,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$A_3 = 0.$$

Par conséquent,

$$\varphi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\varphi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k = 2, 3, 4. \tag{14}$$

Supposons que cette égalité soit exacte pour une valeur quelconque paire de k; montrons qu'elle le sera aussi pour $k+1$ et $k+2$.

De l'égalité (14) on tire, en intégrant,

$$\varphi_n^{(n-k-1)}(z) + (-1)^k \varphi_n^{(n-k-1)}(1-z) = 2A_{k+1},$$

$$\varphi_n^{(n-k-2)}(z) + (-1)^{k+1} \varphi_n^{(n-k-2)}(1-z) = 2A_{k+1} z.$$

Il s'ensuit que

$$A_{k+1} = 0.$$

Or l'équation (14) est exacte pour $k=2$; elle reste donc exacte pour toutes les valeurs de l'indice $k = 2, 3, 4, \ldots, n$.

On a en même temps

$$A_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ impair.} \tag{15}$$

Posant $k = n$, on trouve

$$\varphi_n(z) + (-1)^{n-1} \varphi_n(1 - z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ impair.}$$

7. Remplaçons maintenant dans (3) φ par φ_n.

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x)\, \varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad b = a + mh,$$

car dans le cas considéré

$$\varphi_n^{(n)}\left(\frac{x-a-jh}{h}\right) = 1,$$

et la formule (3) devient, en vertu de (4), (6), (12) et (13),

$$\sum_{j=0}^{m} f(a+jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\, dx + \frac{1}{2}[f(b) + f(a)] +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} h^{k-1} A_k [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a + jh + hz)\, dz,$$

où nous avons supprimé, eu égard à (15), le facteur $(-1)^k$ dans la somme du second membre.

C'est la formule d'Euler sous sa forme usuelle.

8. Pour achever l'étude, il ne reste qu'à réduire l'expression

$$R_n = (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \varphi_n(z) \sum_{j=0}^{m} f^{(n)}[a + h(j+z)]\, dz,$$

aux formes usuelles, dues par Poisson, Ostrogradsky (Malmsten), Jacobi, Schlömilch etc.

Je renverrai, pour la démonstration, à l'Ouvrage de M. A. Markoff: „Calcul des différences finies" (St. Pétersbourg, Partie II, 1891, p.p. 25—27) et aux Mémoires connus de M. Imchenetsky (Annales de l'Université de Kasan, 1870) et de M. Sonin (Annales de l'Ecole Normale, 3 série, T. VI, 1889), où le lecteur trouvera la solution complète et la plus élegante du problème en question.

9. Passons maintenant à l'étude des polynomes vérifiant les conditions (5).

Je désignerai dès à présent un tel polynome par $\psi(z)$ et je poserai

$$\psi^{(n-k)}(0)=C_k. \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{16}$$

On a

$$\psi^{(n-k)}(z)=C_k+z\frac{C_{k-1}}{1!}+z^2\frac{C_{k-2}}{2!}+\ldots+z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!}+z^k\frac{C_0}{k!}, \tag{17}$$

d'où, en vérifiant les conditions (5), on tire

$$2C_k+\frac{C_{k-1}}{1!}+\frac{C_{k-2}}{2!}+\ldots+\frac{C_1}{(k-1)!}+\frac{C_0}{k!}=0. \tag{18}$$

$$(k=1,2,2,\ldots,n)$$

On obtient ainsi le système de n équations linéaires qui permettent de calculer successivement les rapports des constantes $C_k (k=1, 2, 3, \ldots, n)$ à la constante C_0 qui reste indéterminée.

Posant, pour plus de simplicité, $C_0=1$, nous obtiendrons le polynome $\psi(z)$ de degré n, complètement déterminé et satisfaisant aux conditions (5).

Faisant successivement $n=1, 2, 3, \ldots$, nous construirons une suite de polynomus de degré $1, 2, 3, \ldots$, que nous désignerons, d'une manière générale, par $\psi_n(z)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$:

$$\psi_n(z)=C_n+z\frac{C_{n-1}}{1!}+z^2\frac{C_{n-2}}{2!}+\ldots+z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!}+\frac{z^n}{n!}, \tag{19}$$

$C_k (k=1, 2, \ldots, n)$ étant des constantes complètement déterminées par les équations (18), où il faut poser $C_0=1$.

10. Posons dans l'équation [voir les notations (16) et les équations (5)]

$$-\psi_n^{(n-k)}(1-z)=$$

$$=C_k-z\frac{C_{k-1}}{1!}+z^2\frac{C_{k-2}}{2!}-\ldots+(-1)^{k-1}z^{k-1}\frac{C_1}{(k-1)!}-(-1)^k\frac{z^k}{k!}$$

et dans (17) $k=2$; il viendra

$$\psi_n^{(n-2)}(z) = C_2 + z\frac{C_1}{1!} + \frac{z^2}{2!},$$

$$-\psi_n^{(n-2)}(1-z) = C_2 - z\frac{C_1}{1!} - \frac{z^2}{2!},$$

d'où l'on tire

$$\psi_n^{(n-2)}(z) - \psi_n^{(n-2)}(1-z) = 2C_2.$$

Posant $z=1$, on trouve, en tenant compte de (5),

$$C_2 = 0.$$

De l'égalité précédente on tire, en intégrant,

$$\psi_n^{(n-3)}(z) + \psi_n^{(n-3)}(1-z) = \text{Const.} = 0,$$

$$\psi_n^{(n-4)}(z) - \psi_n^{(n-4)}(1-z) = \text{Const.} = 2C_4,$$

d'où l'on conclut, en posant $z=1$,

$$C_4 = 0.$$

On a donc

$$\psi_n^{(n-k)}(z) + (-1)^{k-1}\,\psi_n^{(n-k)}(1-z) = 0 \qquad \text{pour } k = 2,\,3,\,4. \tag{20}$$

En répétant les raisonnements du n° 6, on s'assure aisément que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k = 2, 3, \ldots, n$.

Il est évident aussi qu'elle reste vraie et pour $k=1$.

On a en même temps

$$C_k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ pair}. \tag{21}$$

11. Posons dans (20) $k=n$; on trouve

$$\psi_n(z) + (-1)^{n-1}\,\psi_n(1-z) = 0,$$

d'où l'on conclut que

$$\psi_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Si n est pair, on aura, eu égard à (21),

$$\psi_n(z) = z\frac{C_{n-1}}{1!} + z^2\frac{C_{n-2}}{2!} + \ldots + z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où, en tenant compte de (5), on tire

$$\psi_n(0) = \psi_n(1) = 0 \qquad \text{pour } n \text{ pair.} \tag{22}$$

12. L'égalité (19) donne

$$\psi'_n(z) = C_{n-1} + z\frac{C_{n-2}}{1!} + z^2\frac{C_{n-3}}{2!} + \ldots + z^{n-2}\frac{C_1}{(n-2)!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc toujours, quel que soit l'indice n,

$$\psi'_n(z) = \psi_{n-1}(z). \tag{23}$$

Soit n un nombre pair, soit α_n le nombre de racines de $\psi_n(z)$ à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.

Le nombre de racines de $\psi'_n(z)$ sera au moins égal à $\alpha_n + 1$; celles de $\psi''_n(z)$ au moins égal à α_n [en vertu de (22)].

Or, on a, en tenant compte de (23),

$$\psi''_n(z) = \psi'_{n-1}(z) = \psi_{n-2}(z), \tag{24}$$

d'où l'on conclut que

$$\alpha_n \leqq \alpha_{n-2} \leqq \alpha_{n-2} \leqq \ldots \leqq \alpha_2.$$

Mais $\alpha_2 = 0$, car

$$\psi_2(z) = \frac{z(z-1)}{2}.$$

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$, si n est un nombre pair.*

Supposons maintenant que n soit impair.

L'égalité (23) montre que $\psi'_n(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il s'ensuit que *le polynome $\psi_n(z)$ n'admet qu'une seule racine réelle à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$, si n est impair.*

13. Posons $n = 2m$. L'égalité (23) donne, si l'on y remplace n par $2m+1$,

$$\psi_{2m+1}(1) - \psi_{2m+1}(0) = -2C_{2m+1} = \int_0^1 \psi_{2m}(z)\,dz. \tag{25}$$

On voit que le signe de $\psi_{2m}(z)$ est contraire à celui de la constante C_{2m+1}.

D'autre part, on a, eu égard à (24) et (22),

$$\int_0^1 \psi_{2m}(z)\,\psi_{2m-2}(z)\,dz = \int_0^1 \psi_{2m}(z)\,\psi''_{2m}(z)\,dz =$$

$$= -\int_0^1 [\psi'_{2m}(z)]^2\,dz < 0.$$

Il s'ensuit que $\psi_{2m}(z)$ et $\psi_{2m-2}(z)$ ont des signes contraires dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il en est de même, par conséquent, des constantes C_{2m-1} et C_{2m+1}.

Or $C_1 = -\frac{1}{2} < 0$. On a donc

$$(-1)^m C_{2m+1} > 0. \tag{25_1}$$

En remarquant qu'en vertu de (25)

$$\int_0^1 (-1)^{m-1}\,\psi_{2m}(z)\,dz = (-1)^m\,2C_{2m+1} > 0,$$

on trouve

$$(-1)^{m-1}\,\psi_{2m}(z) < 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1. \tag{25_2}$$

Telles sont les propriétés fondamentales des polynomes $\psi_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, analogues, comme l'on voit, à ceux de Bernoulli.

14. Si nous remplaçons maintenant dans (3) la fonction φ par $\psi_n(z)$, nous obtiendrons la formule sommatoire de Boole [1])

$$\sum_{j=0}^{m} f(a+jh) = \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^{k-1}\,[f^{(k-1)}(b) + f^{(k-1)}(a)]\,C_k - 2\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\,h^{k-1}\,C_k \sum_{j=0}^{m} f^{(k-1)}(a+jh) +$$

$$+ (-1)^{n-1} h^n \int_0^1 \psi_n(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(n)}(a+jh+hz)\,dz. \tag{26}$$

---

[1]) Nous posons, comme dans le n° 7, $b = a + mh$.

Posons, pour plus de simplicité, $m=1$; il viendra

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k h^k C_k \left[f^{(k-1)}(a+h) + f^{(k-1)}(a)\right] +$$

$$+ (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \psi_n(z) f^{(n)}(a+hz)\,dz. \qquad (27)$$

Soit n un nombre pair ($n=2k$). On a

$$R_{2k} = h^{2k+1} \int_0^1 f^{(2k)}(a+hz)\,\psi_{2k}(z)\,dz.$$

Remarquant que $\psi_{2k}(z)$ ne change pas son signe dans l'intervalle $(0,\ 1)$, on trouve, en tenant compte de (23), (16) et (5),

$$R_{2k} = h^{2k+1} f^{(2k)}(a+h\vartheta) \int_0^1 \psi_{2k}(z)\,dz = -2h^{2k+1} f^{(2k)}(a+h\vartheta)\,C_{2k+1},$$

où $0 < \vartheta < 1$.

On aura de même dans le cas général, où m est un entier quelconque [formule (26)],

$$R_{2k} = -h^{2k} \int_0^1 \psi_{2k}(z) \sum_{j=0}^{m-1} f^{(2k)}(a+jh+hz)\,dz =$$

$$= 2h^{2k} C_{2k+1} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(2k)}(a+jh+h\vartheta),$$

d'où, en désignant par μ un nombre, compris entre le minimum et le maximum de $f^{(2k)}(x)$ dans l'intervalle de a à b, on trouve

$$R_{2k} = 2m\mu h^{2k} C_{2k+1}.$$

Il est aisé de trouver d'autres expressions du reste de la formule (26), analogues à celles dans la formule d'Euler, mais nous n'insistons pas sur ce point.

15. Revenons aux polynomes $\psi_n(z)$ et aux nombres C_n.

Remarquons tout d'abord que le calcul successif des nombres C_n, à l'aide des équations fondamentales (18), ne présente pas des grandes difficultés.

On trouve, par exemple,

$$\begin{gathered} C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{4!}, \quad C_5 = -\frac{1}{2.5!}, \\ C_7 = \frac{17}{8!}, \quad C_9 = -\frac{31}{2.9!}, \quad C_{11} = \frac{2073}{12!}, \quad C_{13} = -\frac{5461}{2.13!}. \end{gathered} \tag{28}$$

Ces constantes étant connues, on obtient les expressions suivantes pour 8 premiers de polynomes $\psi_n(z)$:

$$\begin{aligned} &\psi_1(z) = \frac{2z-1}{2}, \quad \psi_2(z) = \frac{1}{2!}(z^2 - z), \\ &\psi_3(z) = \frac{1}{4!}(1 - 6z^2 + 4z^3), \\ &\psi_4(z) = \frac{1}{4!}(z - 2z^3 + z^4), \\ &\psi_5(z) = \frac{1}{2.5!}(-1 + 5z^2 - 5z^4 + 2z^5), \\ &\psi_6(z) = \frac{1}{6!}(-3z + 5z^3 - 3z^5 + z^6), \\ &\psi_7(z) = \frac{1}{8!}(17 - 84z^2 + 70z^4 - 28z^6 + 8z^7), \\ &\psi_8(z) = \frac{1}{8!}(17z - 28z^3 + 14z^5 - 4z^7 + z^8). \end{aligned} \tag{28_1}$$

16. Appliquons maintenant la formule de Taylor à la fonction $\psi_n(1+z)$.

On trouve, en tenant compte de (16) et (5),

$$\psi_n(1+z) = -C_n - z\frac{C_{n-1}}{1!} - z^2\frac{C_{n-2}}{2!} - \ldots - z^{n-1}\frac{C_1}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!},$$

d'où l'on tire, eu égard à (19),

$$\left.\begin{aligned}\psi_n(1+z)+\psi_n(z)&=2\frac{z^n}{n!},\\ \psi_n(2+z)+\psi_n(1+z)&=2\frac{(1+z)^n}{n!}.\end{aligned}\right\}\qquad(28_2)$$

Ces égalités donnent

$$\psi_n(2+z)-\psi_n(z)=\frac{2}{n!}[(1+z)^n-z^n],$$

$$\psi_n(4+z)-\psi_n(2+z)=\frac{2}{n!}[(3+z)^n-(2+z)^n],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(2j+z)-\psi_n(2j-2+z)=\frac{2}{n!}[(z+2j-1)^n-(z+2j-2)^n],$$

d'où

$$\psi_n(z+2j)-\psi_n(z)=\frac{2}{n!}\sum_{s=1}^{s=j}[(z+2s-1)^n-(z+2s-2)^n].$$

Supposons d'abord que n soit pair:

$$n=2m \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

et posons $z=0$.

On trouve, en se rappelant que $\psi_{2m}(0)=0$,

$$\frac{2m!}{2}\psi_{2m}(2j)=$$

$$=1^{2m}-0^{2m}+3^{2m}-2^{2m}+5^{2m}-4^{2m}+\ldots+(2j-1)^{2m}-(2j-2)^{2m}.\quad(\beta)$$

Les polynomes $\psi_{2m}(z)$ fournissent donc un moyen de sommation des sommes algébriques de la forme

$$1^{2m}-0^{2m}+3^{2m}-2^{2m}+5^{2m}-4^{2m}+\ldots+(2j-1)^{2m}-(2j-2)^{2m}.$$

On a, par exemple, en vertu de (28_1),

$$1^2-0^2+3^2-2^2+\ldots+(2j-1)^2-(2j-2)^2=2j^2-j\,,$$

$$1^4-0^4+3^4-2^4+\ldots+(2j-1)^4-(2j-2)^4=j-8j^3+8j^4\,,$$

$$1^6-0^6+3^6-2^6+\ldots+(2j-1)^6-(2j-2)^6=$$
$$=32j^6-48j^5+20j^3-3j\,,$$

$$1^8-0^8+3^8-2^8+\ldots+(2j-1)^8-(2j-2)^8=$$
$$=17j-112j^3+224j^5-256j^7+128j^8.$$

Posons, pour exemple, dans la dernière de ces égalités, $j=10$.

On trouve aisément

$$1^8-0^8+3^8-2^8+5^8-4^8+\ldots+19^8-18^8=10262\ 288170.$$

17. Transformons maintenant l'égalité (β) de la manière suivante:

$$\frac{2m!}{2}\psi_{2m}(2j)=1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+4^{2m}+\ldots+(2j-2)^{2m}+(2j-1)^{2m}-$$
$$-2[2^{2m}+4^{2m}+6^{2m}+\ldots+(2j-2)^{2m}]=$$
$$=1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+\ldots+(2j-1)^{2m}-$$
$$-2^{2m+1}[1^{2m}+2^{2m}+3^{2m}+\ldots+(j-1)^{2m}].$$

Soient p et q deux nombres entiers quelconques.

On sait que

$$1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots+(q-1)^{p-1}=(p-1)!\,\varphi_p(q)\,,$$

$\varphi_p(q)$ désignant, comme précédemment, le polynome de Bernoulli de dégré p.

Moyennant cette égalité, on trouve

$$\frac{1}{2}\psi_{2m}(2j)=\varphi_{2m+1}(2j)-2^{2m+1}\varphi_{2m+1}(j)\,,$$

l'égalité ayant lieu quel que soit le nombre entier j.

On en déduit l'identité suivante

$$\frac{1}{2}\psi_{2m}(2z)=\varphi_{2m+1}(2z)-2^{2m+1}\varphi_{2m+1}(z)\,, \qquad (\gamma)$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z et pour toutes les valeurs de l'indice $m=1, 2, 3, \ldots$.

De cette identité on tire immédiatement les relations suivantes entre les nombres C_{2m-1} et A_{2m}, coefficients des polynomes de Bernoulli:

$$C_{2m-1} = 2(1-2^{2m})\,A_{2m}. \qquad (\delta)$$

Désignant par B_m les nombres de Bernoulli et en se rappelant que

$$A_{2m} = (-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m!},$$

on trouve

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m\,2\,(2^{2m}-1)}{2m!}\,B_m, \qquad (\delta_1)$$

ou encore

$$C_{2m-1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}(2m-1)!}\,D_m,$$

où

$$D_m = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}\,B_m \qquad (m=1,2,3,\ldots)$$

sont des nombres entiers, qui se rencontrent dans le développement bien connu

$$\operatorname{tang} x = D_1\frac{x}{1!} + D_2\frac{x^3}{3!} + \ldots + D_m\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots .$$

18. Posons maintenant dans (α)

$$n = 2m-1, \qquad z = 0.$$

On trouve

$$\frac{(2m-1)!}{2}[\psi_{2m-1}(2j) - C_{2m-1}] =$$

$$= 1^{2m-1} - 0^{2m-1} + 3^{2m-1} - 2^{2m-1} + \ldots + (2j-1)^{2m-1} - (2j-2)^{2m-1}.$$

De cette égalité générale on tire, eu égard à (28_1)),

$$1 - 0 + 3 - 2 + 4 - 3 + \ldots + (2j-1) - (2j-2) = j,$$

$$1^3 - 0^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + (2j-1)^3 - (2j-2)^3 = 4j^3 - 3j^2,$$

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 4^5 - 3^5 + \ldots + (2j-1)^5 - (2j-2)^5 =$$
$$= 5j^2 - 20j^4 + 16j^5,$$

$$1^7 - 0^7 + 3^7 - 2^7 + 4^7 - 3^7 + \ldots + (2j-1)^7 - (2j-2)^7 =$$
$$= 64j^7 - 112j^6 + 70j^4 - 21j^2.$$

Posons, par exemple, dans la 3-me de ces équations $j = 10$.

On trouve aisément

$$1^5 - 0^5 + 3^5 - 2^5 + 5^5 - 4^5 + \ldots + 19^5 - 18^5 = 1400500.$$

19. De l'égalité (δ) on tire, en répétant les raisonnements du nº 17,

$$\frac{1}{2}[\psi_{2m-1}(2z) - C_{2m-1}] = \varphi_{2m}(2z) - 2^{2m}\varphi_{2m}(z).$$

On peut donc écrire, eu égard à (γ),

$$\frac{1}{2}[\psi_n(2z) - C_n] = \varphi_{n+1}(2z) - 2^{n+1}\varphi_{n+1}(z). \qquad (\varepsilon)$$

Cette égalité a lieu toujours, quel que soit le nombre entier n, car $C_n = 0$ pour n pair.

20. Les formules (26) et (27) ont une grande analogie avec la formule classique d'Euler (Mac-Laurin) et peuvent avoir, comme celle-ci, des diverses applications intéressantes dont j'indiquerai quelques-unes dans ce qui va suivre.

Posons dans (26)

$$f(x) = x^{m-1}, \quad a = 0, \quad h = 1, \quad b = n - 1,$$

m et n étant des nombres entiers.

Remarquant que

$$f^{(k-1)}(x) = (m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)x^{m-k},$$

$$1^s + 2^s + 3^s + \ldots + (n-1)^s = s!\,\varphi_{s+1}(n),$$

$\varphi_{s+1}(n)$ étant le polynome de Bernoulli, et que $C_k = 0$, si k est un nom bre pair, on peut écrire

$$(m-1)!\,\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} C_k(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1)(n-1)^{m-k} - 2\,C_m(m-1)! +$$

$$+ 2(m-1)!\sum_{k=2}^{m-1} C_k\,\varphi_{m-k+1}(n) + 2\,C_m n(m-1)! =$$

$$= (m-1)!\left\{\frac{(n-1)^m}{m} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k\varphi_{m-k+1}(n)\right\}.$$

Par suite,

$$\varphi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k} + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{m-k+1}(n),$$

où l'on a posé

$$\varphi_1(z) = \frac{2z-1}{2}.$$

Or on a, eu égard aux propriétés des polynomes $\psi_m(z)$ et des nombres C_m,

$$\psi_m(1+z) = -C_m - \frac{C_{m-1}}{1!}z - \frac{C_{m-2}}{2!}z^2 - \ldots - \frac{C_1}{(m-1)!}z^{m-1} + \frac{z^m}{m!}.$$

d'où l'on tire, en posant $z = n-1$,

$$\psi_m(n) = \frac{(n-1)^m}{m!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{C_k}{(m-k)!}(n-1)^{m-k}.$$

Par conséquent,

$$\varphi_m(n) = \psi_m(n) + 2\sum_{k=2}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n)$$

ou

$$\psi_m(n) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(n) = 0,$$

puisque $2C_1 = -1$.

Il en résulte l'identité suivante

$$\psi_m(z) + 2\sum_{k=1}^{m} C_k \varphi_{n-k+1}(z) = 0,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de la variable z.

On trouve donc les relations suivantes entre les polynomes $\psi_m(z)$ et les polynomes $\varphi_m(z)$ de Bernoulli:

$$\psi_m(z) + 2C_1\varphi_m(z) + 2C_3\varphi_{m-2}(z) + 2C_5\varphi_{m-4}(z) + \ldots + 2C_m\varphi_1(z) = 0,$$

si m est impair,

$$\psi_m(z)+2C_1\varphi_m(z)+2C_3\varphi_{m-2}(z)+2C_5\varphi_{m-4}(z)+\ldots+2C_{m-1}\varphi_2(z)=0,$$

si m est pair.

Remplaçons dans (ε) $2z$ par z, n par m. On aura

$$\frac{1}{2}\psi_m(z)=\varphi_{m+1}(z)-2^{m+1}\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}C_m,$$

d'où l'on tire, eu égard aux égalités précédentes, les formules suivantes concernant la theorie des polynomes de Bernoulli:

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z)+C_1\varphi_m(z)+C_3\varphi_{m-2}(z)+\ldots+C_{m-2}\varphi_3(z)+C_m z],$$

si m est impair, et

$$\varphi_{m+1}\left(\frac{z}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{m+1}}[\varphi_{m+1}(z)+C_1\varphi_m(z)+C_3\varphi_{m-2}(z)+\ldots+C_{m-3}\varphi_4(z)+C_{m-1}\varphi_2(z)],$$

si m est pair.

Ces équations expriment le théorème de la division par deux de l'argument des polynomes de Bernoulli.

Si l'on pose $z=1$ dans la première de ces équations, on trouve, en outre, eu égard à (δ_1),

$$\varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{C_{2k-1}}{2^{2k+1}}=(-1)^{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}2k!}B_k. \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

21. Considérons maintenant la formule simple (27).

Posons

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{(x+2k)^p}-\frac{1}{(x+2k+1)^p}\right),$$

m étant un entier, p un nombre positif quelconque.

On a

$$f^{(s)}(x) =$$

$$= (-1)^s p(p+1) \ldots . (p+s-1) \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(x+2k)^{p+s}} - \frac{1}{(x+2k+1)^{p+s}} \right),$$

$$f^{(s)}(a+1) + f^{(s)}(a) =$$

$$= (-1)^s p(p+1) \ldots . (p+s-1) \left[\frac{1}{a^{p+s}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+s}} \right],$$

$$\int_a^{a+1} f(x)\,dx = \frac{2}{1-p} \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}} \right] -$$

$$- \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}} \right).$$

Remplaçant dans (27) h par 1, n par $2n$, on trouve, après des réductions simples,

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^{p-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^{p-1}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p-1}} \right) -$$

$$- C_1 \frac{1-p}{2} \left(\frac{1}{a^p} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^p} \right) -$$

$$- C_3 \frac{(1-p)\,p(p+1)}{2} \left(\frac{1}{a^{p+2}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2}} \right) -$$

$$- \ldots - C_{2n-1} \frac{(1-p)\,p(p+1)\ldots(p+2n-3)}{2} \left(\frac{1}{a^{p+2(n-1)}} - \frac{1}{[a+2(m+1)]^{p+2(n-1)}} \right) +$$

$$+ R_{2n}, \tag{29}$$

où l'on a posé

$$R_{2n} = \frac{1}{2} (1-p)\,p(p+1)\ldots(p+2n-1) \int_0^1 \psi_{2n}(z)\,\varphi(a+z)\,dz,$$

$$\varphi(a+z) = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{p+2n}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{p+2n}} \right).$$

Comme

$$\varphi(a+z) > 0 \qquad \text{pour } a > 0, \qquad 0 < z < 1,$$

on en conclut que

$$\varphi(a+z) < \frac{1}{a^{p+2n}}.$$

Par suite $(p > 1)$,

$$|R_{2n}| < \frac{(p-1)p(p+1)\ldots(p+2n-1)}{a^{p+2n}} |C_{2n+1}|.$$

L'égalité (29) fournit un moyen simple de calculer les séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right),$$

si le nombre a est plus grand que l'unité.

22. Posons, par exemple,

$$a = 100, \qquad m = 49, \qquad p = 5, \qquad n = 2.$$

La formule (29) donne, en vertu de (28),

$$S = \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{(101+2k)^4} - \frac{1}{(102+2k)^4} \right) =$$

$$= \frac{15}{2^5.10^8} - \frac{3}{2^5.10^9} + \frac{5.127}{2^8.10^{14}} + R_4,$$

où

$$|R_4| < \frac{28}{10^{18}}.$$

Or

$$\frac{15}{2^5.10^8} = 0{,}0000000046875,$$

$$\frac{5.127}{2^8.10^{14}} = 0{,}0000000000000248,$$

$$\frac{3}{2^5.10^9} = 0{,}000000000093750,$$

d'où

$$S = 0{,}0000000045937748\,,$$

le résultat avec 16 décimales exact.

Posant dans (29) $m = \infty$, nous obtiendrons la formule commode pour calculer la somme de la série infinie

$$S_p = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+2k+1)^p} - \frac{1}{[a+2(k+1)]^p} \right).$$

En l'appliquant au cas de

$$a = 100\,, \qquad p = 5\,, \qquad n = 3\,,$$

on trouve

$$S_4 = \frac{1}{2.10^8} - \frac{1}{10^{10}} + \frac{2.5}{10^{15}} - \frac{14}{10^{18}} =$$

$$= 0{,}0000000051000264000\,,$$

le résultat avec 19 décimales exact.

On pourrait, sans doute, déduire les mêmes résultats en partant de la formule sommatoire d'Euler, mais par un procédé moins direct et un peu plus compliqué.

23. Faisons maintenant dans (27)

$$h = 1\,, \qquad f(x) = \frac{d}{dx} \log u(x)\,,$$

$$u(x) = \frac{(x+1)^{(x+1)^\lambda} (x+3)^{(x+3)^\lambda} \ldots (x+2m+1)^{(x+2m+1)^\lambda}}{x^{x^\lambda} (x+2)^{(x+2)^\lambda} \ldots (x+2m)^{(x+2m)^\lambda}}\,,$$

m et λ étant des entiers.

On a

$$f^{(k-1)}(a+1) + f^{(k-1)}(a) = \frac{d^k}{da^k} \log u(a+1)\, u(a).$$

Or,

$$\log u(a+1)\, u(a) = \log \frac{[a+2(m+1)]^{[a+2(m+1)]^\lambda}}{a^{a^\lambda}} = \xi_1 - \xi_0\,,$$

où l'on a posé

$$\xi_1 = [a+2(m+1)]^\lambda \log [a+2(m+1)]\,,$$

$$\xi_0 = a^\lambda \log a\,.$$

On a donc

$$f^{(k-1)}(a+1)+f^{(k-1)}(a)=\xi_1^{(k)}-\xi_0^{(k)}.$$

Désignons maintenant par

$$\mu_0\,,\ \mu_1\,,\ \mu_2\,,\,\ldots\,,\mu_s\,,$$

une suite des polynomes en λ, définis par les relations suivantes

$$\mu_0=1\,,$$

$$\mu_1=\lambda+(\lambda-1)\,\mu_0\,,$$

$$\mu_2=\lambda(\lambda-1)+(\lambda-2)\,\mu_1\,,$$

$$\mu_3=\lambda(\lambda-1)\,(\lambda-2)+(\lambda-3)\,\mu_2\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_s=\lambda(\lambda-1)\,(\lambda-2)\ldots(\lambda-s+1)+(\lambda-s)\,\mu_{s-1}\,.$$

On trouve, pour $k\leqq\lambda$,

$$\xi_1^{(k)}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)\,[a+2(m+1)]^{\lambda-k}\log\,[a+2(m+1)]+$$
$$+\mu_{k-1}\,[a+2(m+1)]^{\lambda-k}\,, \qquad (30)$$

$$\xi_0^{(k)}=\lambda(\lambda-1)\,(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)\,a^{\lambda-k}\log a+\mu_{k-1}\,a^{\lambda-k}\,, \qquad (30_1)$$

d'où

$$\xi_1^{(\lambda)}=\lambda!\log\,[a+2(m+1)]+\mu_{\lambda-1}\,,$$

$$\xi_0^{(\lambda)}=\lambda!\log a+\mu_{\lambda-1}\,.$$

Par suite,

$$\xi_1^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}\,(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{[a+2(m+1)]^s}\,, \qquad (31)$$

$$\xi_0^{(\lambda+s)}=(-1)^{s-1}(s-1)!\,\lambda!\,\frac{1}{a^s}\,. \qquad (32)$$

$$(s=1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots)$$

Remarquons enfin que

$$\int_a^{a+1}\frac{d}{dx}\log u(x)\,dx=\log\frac{u(a+1)}{u(a)}=2\log v_\lambda(a,\,m)+\xi_1-\xi_0\,,$$

où l'on a posé

$$v_\lambda(a, m) = \frac{1}{u(a)} =$$

$$= \frac{a^{a\lambda}(a+2)^{(a+2)\lambda} \dots (a+2m)^{(a+2m)\lambda}}{(a+1)^{(a+1)\lambda}(a+3)^{(a+3)\lambda} \dots (a+2m+1)^{(a+2m+1)\lambda}}. \tag{33}$$

24. Supposons d'abord que λ soit pair:

$$\lambda = 2j.$$

Remplaçons dans (27) n par $2n$ et posons

$$2n = \lambda + 2s.$$

On trouve

$$2 \log v_\lambda(a, m) = -(\xi_1 - \xi_0) - C_1(\xi_1' - \xi_0') -$$

$$- C_3(\xi_1^{(3)} - \xi_0^{(3)}) - \dots - C_{\lambda-1}(\xi_1^{(\lambda-1)} - \xi_0^{(\lambda-1)}) - C_{\lambda+1}(\xi_1^{(\lambda+1)} - \xi_0^{(\lambda+1)}) -$$

$$- C_{\lambda+3}(\xi_1^{(\lambda+3)} - \xi_0^{(\lambda+3)}) - \dots - C_{\lambda+2s-1}(\xi_1^{(\lambda+2s-1)} - \xi_0^{(\lambda+2s-1)}) + R_s,$$

où

$$R_s = \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \frac{d^{\lambda+2s+1} \log u(a+z)}{dz^{\lambda+2s+1}} dz =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Posons

$$\varrho_s^{(\lambda)}(a) =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{34}$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] =$$

$$= -2s!\,\lambda! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz, \tag{35}$$

$$Q_s(a) = \xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \dots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} + C_{\lambda+1}\xi_0^{(\lambda+1)} +$$

$$+ \dots + C_{\lambda+2s-1}\xi_0^{(\lambda+2s-1)} + \varrho_s^{(\lambda)}(a). \tag{36}$$

On aura

$$R_s = \varrho_s^{(\lambda)}(a) - \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)]$$

et

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_s(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$

$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$

$$- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)], \tag{37}$$

d'où l'on tire encore, en remplaçant s par $s+1$,

$$2\log v_\lambda(a, m) = Q_{s+1}(a) - \xi_1 - C_1\xi_1' - C_3\xi_1^{(3)} -$$

$$- \ldots - C_{\lambda-1}\xi_1^{(\lambda-1)} - C_{\lambda+1}\xi_1^{(\lambda+1)} - \ldots - C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s-1)} -$$

$$- C_{\lambda+2s+1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)} - \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)].$$

Ces égalités fournissent la relation suivante

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a) + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] -$$

$$- \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] + C_{\lambda+2s-1}\xi_1^{(\lambda+2s+1)},$$

ayant lieu quels que soient les nombres s et m.

Supposons que m croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve, en tenant compte de (31) et (35),

$$\lim_{m=\infty} \varrho_{s+1}^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = \lim_{m=\infty} \varrho_s^{(\lambda)}[a + 2(m+1)] = 0,$$

$$\lim_{m=\infty} \xi_1^{(\lambda+2s+1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Q_{s+1}(a) = Q_s(a).$$

Il s'ensuit que l'expression $Q_s(a)$ ne dépend pas de l'indice s, mais elle dépend, évidemment, de λ et de a, ce que nous exprimerons par cette notation nouvelle

$$Q_s(a) = q_\lambda(a).$$

25. Cela posé, transformons les seconds membres des équations (36) et (37).

Les égalités (30_1) donnent

$$\xi_0 + C_1\xi_0' + C_3\xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1}\xi_0^{(\lambda-1)} =$$

$$= [a^\lambda + C_1\lambda a^{\lambda-1} + C_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1}\lambda!\, a]\log a + p_\lambda(a),$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,

$$p_\lambda(a) = C_1 \mu_0 a^{\lambda-1} + C_3 \mu_2 a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1} \mu_{\lambda-2} a. \qquad (38)$$

Or,

$$a^\lambda + C_1 \lambda a^{\lambda-1} + C_3 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) a^{\lambda-3} + \ldots + C_{\lambda-1} \lambda!\, a = \lambda!\, \psi_\lambda(a).$$

On a donc

$$\xi_0 + C_1 \xi_0' + C_3 \xi_0^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1} \xi_0^{(\lambda-1)} = \lambda!\, \psi_\lambda(a) \log a + p_\lambda(a).$$

D'autre part, en vertu de (32),

$$C_{\lambda+1} \xi_0^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3} \xi_0^{(\lambda+3)} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \xi_0^{(\lambda+2s-1)} =$$

$$= \lambda! \left[C_{\lambda+1} \frac{1}{a} + C_{\lambda+3}\, 2! \frac{1}{a^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} [2(s-1)]! \frac{1}{a^{2s-1}} \right].$$

On trouve donc, en tenant compte de (36),

$$\frac{1}{\lambda!} q_\lambda(a) = \psi_\lambda(a) \log a + \frac{1}{\lambda!} p_1(a) +$$

$$C_{\lambda+1} \frac{1}{a} + C_{\lambda+3}\, 2! \frac{1}{a^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} [2(s-1)]! \frac{1}{a^{2s-1}} + \frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(a). \qquad (39)$$

26. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right)$$

étant convergente pour toutes les valeurs positives de a, on trouve l'expression de $\frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(a)$ sous la forme de la série aussi convergente:

$$\frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)}(a) = u^{(0)}_{\lambda,s}(a) + u^{(1)}_{\lambda,s}(a) + \ldots + u^{(k)}_{\lambda,s}(a) + \ldots,$$

où l'on a posé [voir l'égalité (34)],

$$u^{(k)}_{\lambda,s}(a) =$$

$$= -2s! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z) \left(\frac{1}{(a+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(a+z+2k+1)^{2s+1}} \right) dz.$$

Si l'on pose $s=0$, on aura

$$\frac{1}{\lambda!}\, q_\lambda(a) = \psi_\lambda(a)\log a + \frac{1}{\lambda!} p_\lambda(a) +$$

$$+ u_\lambda^{(0)}(a) + u_\lambda^{(1)}(a) + \ldots + u_\lambda^{(k)}(a) + \ldots\,, \tag{40}$$

où

$$u_\lambda^{(k)}(a) = -\int_0^1 \psi_\lambda(z)\left(\frac{1}{a+z+2k} - \frac{1}{a+z+2k+1}\right) dz.$$

$$(k=0\,,\,1\,,\,2\,,\ldots)$$

Il est aisé d'évaluer chacune de ces quadratures, mais ici nous n'insistons pas sur ce point.

La formule (40) est analogue à celle de Goudermann dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$ et définit une fonction $q_\lambda(a)$, continue pour toutes les valeurs positives de la variable a.

On pourrait, moyennant la formule (40), étendre la notion de la fonction $q_\lambda(a)$ aux valeurs complexes de a, mais je me bornerai, dans ce qui va suivre, au cas de a réel et positif.

27. La formule (39) correspond à la série de Stirling et fournit un moyen simple de calcul numérique de la fonction $q_\lambda(a)$ pour les valeurs de a plus grandes que l'unité.

Écrivons (39) sous la forme suivante

$$q_\lambda(x) = A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + \varrho_s^{(\lambda)}(x) =$$

$$= A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} +$$

$$+ C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}} + \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x)\,,$$

où

$$A_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x)\,,$$

$$\varrho_s^{(\lambda)}(x) =$$

$$= -2s!\int_0^1 \psi_{\lambda+2s}(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+1}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+1}}\right] dz\,,$$

$$\varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) =$$

$$= -[2(s+1)]! \int_0^1 \psi_{\lambda+2s+2}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(x+z+2k)^{2s+3}} - \frac{1}{(x+z+2k+1)^{2s+3}} \right] dz.$$

Supposons que $\frac{\lambda}{2}+s$ soit pair.

On trouve, eu égard à (25_1) et (25_2),

$$C_{\lambda+2s-1} < 0\,; \qquad \psi_{\lambda+2s}(z) < 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1\,,$$

$$C_{\lambda+2s+1} > 0\,, \qquad \psi_{\lambda+2s+2}(z) > 0 \qquad \text{pour } 0 < z < 1.$$

Si nous supposons que $\frac{\lambda}{2}+s$ soit impair, nous aurons

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\lambda+2s-1} > 0\,, & \psi_{\lambda+2s}(z) > 0\,, \\ C_{\lambda+2s+1} < 0\,, & \psi_{\lambda+2s+2}(z) < 0 \end{array}\right\} \text{pour } 0 < z < 1.$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\lambda+2s-1} < 0\,, & \varrho_s^{(\lambda)}(x) > 0\,, \\ C_{\lambda+2s+1} > 0\,, & \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) < 0\,, \end{array}\right\} \text{si } \frac{\lambda}{2}+s \text{ est pair,}$$

et

$$\left.\begin{array}{ll} C_{\lambda+2s+1} > 0\,, & \varrho_s^{(\lambda)}(x) < 0\,, \\ C_{\lambda+2s+1} < 0\,, & \varrho_{s+1}^{(\lambda)}(x) > 0\,, \end{array}\right\} \text{si } \frac{\lambda}{2}+s \text{ est impair.}$$

On trouve donc, dans le premier cas,

$$q_\lambda(x) > A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}}\,,$$

$$q_\lambda(x) < A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}$$

et

$$q_\lambda(x) < A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + \dots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}},$$

$$q_\lambda(x) > A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + \dots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}},$$

dans le second cas.

Il en résulte l'égalité suivante

$$q_\lambda(x) = A_\lambda(x) + C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} +$$

$$+ C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \dots + C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} + \Theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}} \text{[1]}, \quad (39_1)$$

ayant lieu toujours, quels que soient les nombres λ et s.

On peut donc poser approximativement

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x) +$$

$$+ C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{x} + C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{x^3} + \dots + \Theta C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{x^{2s-1}} \qquad (39_2)$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon_s^{(\lambda)} = |C_{\lambda+2s+1}|\frac{2s!\,\lambda!}{x^{2s+1}}.$$

Si l'on pose, pour exemple,

$$x = 10, \qquad \lambda = 2, \qquad s = 5,$$

on aura

$$q_2(10) = 2\psi_2(10)\log 10 + p_2(10) +$$

$$+ 2C_3\frac{1}{10} + 2C_5 2!\frac{1}{10^3} + 2C_7\frac{4!}{10^5} + 2C_9\frac{6!}{10^7} + 2C_{11}\frac{8!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(2)} = |C_{13}|\frac{10!\,2}{10^{11}} < 0{,}000000000032.$$

---

[1]) Θ est un nombre positif plus petit que l'unité.

Disposant le calcul dans les tableaux suivants:

$$2\psi_2(10)\log 10 = 207{,}23265\ 83694\ 636\ldots\ ,$$

$$2C_3\frac{1}{10} = \quad 0{,}00833\ 33333\ 333\ldots\ ,$$

$$2C_7\frac{4!}{10^5} = \quad 0{,}00000\ 02023\ 809\ldots\ ,$$

$$2C_{11}\frac{8!}{10^9} = \quad 0{,}00000\ 00003\ 489\ldots\ ,$$

$$207{,}24099\ 19055\ 267\ldots\ .$$

$$p_2(10) = -5$$

$$2C_5\frac{2!}{10^3} = -0{,}00001\ 66666\ 666\ldots\ ,$$

$$2C_9\frac{6!}{10^7} = -0{,}00000\ 00061\ 507\ldots\ ,$$

$$-5{,}00001\ 66728\ 174\ldots$$

on trouve

$$q_2(10) = 202{,}24097\ 52327\ldots\ ,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

28. Nous trouverons encore les valeurs approchées de

$$q_4(10)\,,\qquad q_6(10)$$

qui nous seront nécessaires plus loin.

La formule (39_2) donne

$$q_4(10) = 4!\,\psi_4(10)\log 10 + p_4(10) +$$

$$+ C_5\frac{4!}{10} + C_7\frac{2!\,4!}{10^3} + C_9\frac{4!\,4!}{10^5} + C_{11}\frac{6!\,4!}{10^7} + C_{13}\frac{8!\,4!}{10^9}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_5^{(4)} = |C_{15}|\frac{10!\,4!}{10^{11}} < 0{,}000000000039\,.$$

On trouve, en vertu de (19), (38), (28) et (28_1),

$$4!\,\psi_4(z) = z^4 - 2z^3 + z\,, \qquad p_4(z) = -\frac{z^3}{2} + \frac{26}{4!}z\,,$$

car, dans le cas considéré (n° 23),

$$\mu_2 = \lambda(\lambda - 1) + (\lambda - 2)(2\lambda - 1) = 26\,.$$

On a donc

$$4!\,\psi_4(10)\log 10 = 18443{,}70659\ 48823\ 0592\ldots\,,$$

$$p_4(10) = -489{,}16666\ 66666\ 6666\ldots\,.$$

D'autre part,

$$C_7\,\frac{2!\,4!}{10^3} = 0{,}00002\ 02380\ 9523\ldots\,,$$

$$C_{11}\,\frac{6!\,4!}{10^7} = 0{,}00000\ 00074\ 7835\ldots\,,$$

$$+\,0{,}00002\ 02455\ 7358\ldots$$

$$C_5\,\frac{4!}{10} = -0{,}01$$

$$C_9\,\frac{4!\,4!}{10^5} = -0{,}00000\ 02460\ 3174\ldots\,,$$

$$C_{13}\,\frac{4!\,8!}{10^9} = -0{,}00000\ 00004\ 2432\ldots\,,$$

$$-\,0{,}01000\ 02464\ 5606\ldots\,.$$

Par conséquent,

$$q_4(10) = 17954,\ 52994\ 82147\ 5678\ldots\,,$$

le résultat avec 10 décimales exact.

29. Appliquons enfin l'égalité (39_1) au cas de

$$\lambda = 6\,, \qquad s = 3\,, \qquad x = 10\,.$$

On trouve

$$q_6(10) = 6!\,\psi_6(10)\log 10 + p_6(10) + C_7\frac{6!}{10} + C_9\frac{2!\,6!}{10^3} + C_{11}\frac{4!\,6!}{10^5}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(6)} = |C_{13}|\frac{6!\,6!}{10^7} < 0{,}000000023.$$

On a

$$6!\,\psi_6(z) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x,$$

$$p_5(z) = C_1\mu_0 z^5 + C_3\mu_2 z^3 + C_5\mu_4 z,$$

où (voir n⁰ 23)

$$\mu_0 = 1, \qquad \mu_2 = 74, \qquad \mu_4 = 1044.$$

Par conséquent,

$$6!\,\psi_6(10)\log 10 = 10^6 - 3.10^5 + 5.10^3 - 3.10 =$$

$$= 1623253{,}41300\ 8012\ldots,$$

$$p_6(10) = -5.10^4 + \frac{37.10^3}{12} - \frac{87}{2} =$$

$$= -46960{,}16666\ 6666\ldots\ .$$

D'autre part,

$$C_7\frac{6!}{10} = 0{,}03035\ 7142\ldots,$$

$$C_9\frac{2!\,6!}{10^3} = -0{,}00006\ 1507\ldots,$$

$$C_{11}\frac{4!\,6!}{10^5} = 0{,}00000\ 0747\ldots\ .$$

On trouve donc

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\ldots,$$

le résultat avec 7 décimales exact.

30. Revenons maintenant à la formule (37).

On trouve, en vertu de (30) et (31),

$$\xi_1 + C_1 \xi_1^1 + C_3 \xi_1^{(3)} + \ldots + C_{\lambda-1} \xi_1^{(\lambda-1)} =$$

$$= \lambda! \, \psi_\lambda [a + 2(m+1)] \log [a + 2(m+1)] + p_\lambda [a + 2(m+1)],$$

$$C_{\lambda+1} \xi_1^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+3} \xi_1^{(\lambda+3)} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \xi_1^{(\lambda+2s-1)} =$$

$$= \lambda! \left[C_{\lambda+1} \frac{1}{a+2(m+1)} + C_{\lambda+3} \frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} + \ldots + C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}} \right].$$

Par suite,

$$\frac{2}{\lambda!} \log v_\lambda (a, m) =$$

$$= \frac{1}{\lambda!} q_\lambda (a) - \psi_\lambda [a + 2(m+1)] \log [a + 2(m+1)] -$$

$$- \frac{1}{\lambda!} p_\lambda [a + 2(m+1)] - C_{\lambda+1} \frac{1}{a + 2(m+1)} -$$

$$- C_{\lambda+3} \frac{2!}{[a+2(m+1)]^3} - \ldots - C_{\lambda+2s-1} \frac{[2(s-1)]!}{[a+2(m+1)]^{2s-1}} -$$

$$- \frac{1}{\lambda!} \varrho_s^{(\lambda)} [a + 2(m+1)]. \qquad (41)$$

Cette formule permet de calculer le logarithme du rapport

$$v_\lambda(a, m) = \frac{a^{a^\lambda} (a+2)^{(a+2)^\lambda} \ldots (a+2m)^{(a+2m)^\lambda}}{(a+1)^{(a+1)^\lambda} (a+3)^{(a+3)^\lambda} \ldots (a+2m+1)^{(a+2m+1)^\lambda}},$$

pour les valeurs données de λ et de a, avec une approximation qui sera d'autant plus grande que m sera plus considérable.

31. Considérons le cas particulier de $a = 2$.

Transformons d'abord l'expression de $v_\lambda(2, m)$.

On trouve

$$2^{2^\lambda} 4^{4^\lambda} \ldots [2(m+1)]^{2^\lambda (m+1)^\lambda} =$$

$$= [2^{1 + 2^\lambda + 3^\lambda + \ldots + (m+1)^\lambda} \, 1^{1^\lambda} . 2^{2^\lambda} . 3^{3^\lambda} \ldots (m+1)^{(m+1)^\lambda}]^{2^\lambda} =$$

$$= [2^{\lambda! \varphi_{\lambda+1}(m+2)} \, 1^{1^\lambda} . 2^{2^\lambda} . 3^{3^\lambda} \ldots (m+1)^{(m+1)^\lambda}]^{2^\lambda}$$

et

$$v_\lambda(2, m) = \frac{2^{2\lambda+1}\lambda!\,\varphi_{\lambda+1}{}^{(m+2)}\,[1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\dots(m+1)^{(m+1)\lambda}]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\dots(2m+3)^{(2m+3)\lambda}},$$

d'où l'on tire, en remplaçant $m+2$ par x,

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2\lambda+1}\lambda!\,\varphi_{\lambda+1}{}^{(x)}\,[1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\dots(x-1)^{(x-1)\lambda}]^{2\lambda+1}}{1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\dots(2x-1)^{(2x-1)\lambda}},$$

où il faut poser

$$\varphi_1(x) = x - 1, \qquad 0! = 1,$$

afin que la formule soit vraie pour $\lambda = 0$.

Nous obtenons ainsi une suite de fonctions $v_\lambda(\lambda = 0, 2, 4, \dots)$, intimément liées avec les fonctions, auxquelles M. Beaupain [1]) a donné le nom des fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin.

Ces fonctions se trouvent aussi en relations simples avec les fonctions, étudiées par M. Alexéievsky dans sa Thèse: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$" [2]).

La fonction

$$1^{1\lambda}.2^{2\lambda}.3^{3\lambda}\dots(x-1)^{(x-1)\lambda}$$

représente une généralisation naturelle de la fonction

$$\Gamma(x) = 1.2.3\dots(x-1)$$

pour x entier.

Nous poserons

$$\Gamma_\lambda(x) = 1^{1\lambda}.1^{2\lambda}.3^{3\lambda}\dots(x-1)^{(x-1)\lambda}.$$

---

[1]) S. Beaupain: „Sur les fonctions d'ordre supérieur de Kinkelin". Mémoires, publiés par l'Académie des Sciences de Belgique, 1902.

Compar. aussi Glaischer: „Products and series involving prime numbers only". The Quarterly Journal, 1895 et 1896. (La plupart des Mémoires de M. Glaischer ne faisant partie de Bibliothèque de l'Université de Kharkow, je ne puis les citer que suivant l'analyse, faite par M. Beaupain dans l'Avant-propos à son Mémoire. Voir aussi „Bulletin des Sciences mathématiques", 1899).

[2]) W. Alexéievsky: „Sur les fonctions analogues à la fonction $\Gamma(x)$". Communications de la Société Mathématique de Kharkow, 2-e série, T. I, 1889.

Compar. aussi Barnes: „The Theory of the G Function". Quarterly Journal of Mathematics, T. XXXI.

Idem: „The Theory of the Double Gamma Fonction". Philosophical Transactions of the R. S. L. Series A, Vol. 196, 1901.

On en voit que

$$\Gamma(x) = \Gamma_0(x).$$

Cela posé, on peut écrire

$$v_\lambda(2, x-2) = \frac{2^{2^{\lambda+1}\lambda!\varphi_{\lambda+1}(x)}[\Gamma_\lambda(x)]^{2^{\lambda+1}}}{\Gamma_\lambda(2x)}. \tag{A}$$

Posant $\lambda = 0$, on trouve

$$v_0(2, x-2) = \frac{2^{2(x-1)}[\Gamma_0(x)]^2}{\Gamma_0(2x)} =$$

$$= 2^{2(x-1)}B(x, x) = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y)^{x-1}\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

B désignant l'intégrale eulérienne de première espèce.

On voit que la fonction $v_\lambda(2, x-2)$ représente une généralisation de la fonction $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$.

Je désignerai $B\left(\frac{1}{2}, x\right)$ simplement par $\beta_0(x)$ et, par analogie, $v_\lambda(2, x-2)$ par $\beta_\lambda(x)$.

32. Remplaçons maintenant dans le second membre de l'équation (41) a par 2, $m+2$ par x.

Il viendra

$$\frac{2}{\lambda!}\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda!}q_\lambda(2) - \psi_\lambda(2x)\log 2x - \frac{1}{\lambda!}p_\lambda(2x) -$$

$$-\frac{C_{\lambda+1}}{2}\frac{1}{x} - \frac{C_{\lambda+3}}{2^3}\frac{2!}{x^3} - \ldots - \frac{C_{\lambda+2s-1}}{2^{2s-1}}\frac{[2(s-1)]!}{x^{2s-1}} -$$

$$-\frac{1}{\lambda!}\varrho_s^{(\lambda)}(2x). \tag{42}$$

On peut écrire aussi, en tenant compte de (39),

$$2\log\beta_\lambda(x) = q_\lambda(2) - q_\lambda(2x). \tag{43}$$

Nous avons supposé jusqu'à présent que x soit un entier; mais la série (40) définit la fonction $q_\lambda(a)$ pour toutes les valeurs de a, fractionnaires ou incommensurables.

L'équation (43) permet donc d'étendre la notion de la fonction $\beta_\lambda(x)$ à toutes les valeurs réelles et positives de x, ou même aux valeurs complexes de x, mais je me bornerai, comme dans le n° 26, au cas de x réel et positif.

On voit de ce qui précède que la formule (27) permet de construire les points principaux de la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ [1]), analogues à la fonction primitive $B\left(\frac{1}{2}, x\right) = \beta_0(x)$.

Remarquons que la théorie de ces fonctions peut être déduite de celle de fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, comme le montre la relation (A), mais nous préférons à dessein une méthode directe et plus simple, en désirant attirer l'attention aux applications directes de la formule (27), des polynomes $\psi_n(z)$ et des nombres C_n.

Quant aux fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, ces propriétés fondamentales résulteront presque immédiatement de nos recherches sur la théorie des fonctions $\beta_\lambda(x)$, comme nous le démontrerons à la fin de ce travail.

33. La formule (42), ayant lieu quel que soit le nombre x, fournit un moyen commode de calcul approché de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x assez grand.

La constante $q_\lambda(2)$, qui figure dans la formule (42), jouit par rapport à la fonction $\log \beta_\lambda(x)$ la même rôle que $\log 2\pi$ relativement à $\log \Gamma(x)$, ou, plus généralement, que les constantes $\log \bar{\omega}_{2i}$, introduites par M. Beaupain, par rapport aux transcendantes de Kinkelin.

Le calcul numérique de $\log \beta_\lambda(x)$ exige tout-d'abord le calcul des constantes $q_\lambda(2)$ $(\lambda = 2, 4, \ldots)$ avec une approximation suffisante.

On pourrait, pour cela, employer la formule (39_1) en y posant $x = 2$, mais cette manière du calcul n'est pas assez exacte.

L'égalité (43) fournit un moyen plus commode.

Le calcul de $\log \beta_\lambda(x)$ pour x un entier ne surpassant pas, par exemple, 5 ne présente pas des grandes difficultés; il en est de même du calcul de $q_\lambda(2x)$ pour $x \geqq 5$, comme nous l'avons déjà vu aux n-os 27—30.

Sachant les valeurs de $\log \beta_\lambda(x)$ et $q_\lambda(2x)$, ainsi calculées, nous obtiendrons

$$q_\lambda(2) = 2 \log \beta_\lambda(x) + q_\lambda(2x). \tag{44}$$

Posons, par exemple,

$$x = 5, \qquad \lambda = 2.$$

[1]) Nous avons supposé jusqu'à présent que λ soit pair, mais cette restriction n'a rien d'essentiel.

On a

$$\beta_2(5) = \frac{2^{2^2}.4^{4^2}.6^{6^2}.8^{8^2}}{3^{3^2}.5^{5^2}.7^{7^2}.9^{9^2}},$$

d'où

$$\log \beta_2(5) = 264 \log 2 - 135 \log 3 - 25 \log 5 - 49 \log 7.$$

Or,

$$264 \log 2 = 182{,}99085\ 56678\ 25\ldots,$$

$$135 \log 3 = 148{,}31265\ 89701\ 94\ldots,$$

$$25 \log 2 = 40{,}23594\ 78108\ 52\ldots,$$

$$49 \log 7 = 95{,}34959\ 73037\ 10\ldots.$$

Par conséquent,

$$2 \log \beta_2(5) = -201{,}81469\ 68338\ 64\ldots.$$

D'autre part (n° 27),

$$q_2(10) = 202{,}24097\ 52327\ldots.$$

On trouve donc, eu égard à (44),

$$q_2(2) = 0{,}42627\ 83988\ldots, \tag{45}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

34. Posons encore

$$\lambda = 4, \qquad x = 5.$$

On trouve

$$\log \beta_4(5) = 1412 \log 2 - 11907 \log 3 - 625 \log 5 - 2401 \log 7,$$

$$14112 \log 2 = 9781{,}69301\ 20619\ 4820\ldots,$$

$$11907 \log 3 = 13081{,}17652\ 11711\ 8199\ldots,$$

$$625 \log 5 = 1005{,}89869\ 52713\ 1273\ldots,$$

$$2401 \log 7 = 4672{,}13026\ 78818\ 0724\ldots,$$

d'où

$$2 \log \beta_4(5) = -17955{,}02494\ 45247\ 0753\ldots.$$

D'autre part (voir n⁰ 28),

$$q_4(10) = 17954{,}52994\ 82147\ 5678\ldots\ .$$

On a donc, eu égard à (44),

$$q_4(2) = -0{,}49499\ 63099\ 50\ldots\ , \tag{46}$$

le résultat avec 10 décimales exact.

35. Calculons encore $q_6(2)$.

On trouve, en posant $\lambda = 6$, $x = 5$,

$$\log \beta_6(5) = 841344 \log 2 - 1016955 \log 3 - 25.5^4 \log 5 - 49.7^4 \log 7,$$

$$841344 \log 2 = 583175{,}22148\ 1026\ldots\ ,$$

$$1016\ 955 \log 3 = 1117239{,}26001\ 2377\ldots\ ,$$

$$25.5^4 \log 5 = 25147{,}46738\ 1782\ldots\ ,$$

$$49.7^4 \log 7 = 228934{,}38312\ 6208\ldots\ ,$$

d'où

$$2 \log \beta_6(5) = -1576291{,}77807\ 8684\ldots\ .$$

D'autre part (voir n⁰ 29),

$$q_6(10) = 1576293{,}27663\ 7728\ldots\ .$$

On a donc, en vertu de (44),

$$q_6(2) = 1{,}49855\ 9044\ldots\ , \tag{47}$$

le résultat avec 7 décimales exact.

Si nous introduisons, au lieu de $q_6(2)$, la constante

$$\log \omega_6 = \frac{1}{2^7 - 1} q_6(2),$$

nous obtiendrons

$$\log \omega_6 = 0{,}01179\ 9677\ldots\ , \tag{48}$$

avec 9 figures exactes.

36. Posons, en général,

$$\log \omega_\lambda = \frac{1}{2^{\lambda+1} - 1} q_\lambda(2).$$

Nous verrons plus loin que les constantes ω_λ, ainsi définies, coïncident avec celles de M. Beaupain (voir n° 33).

On trouve, en tenant compte de (39_1),

$$\log \omega_\lambda = \frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\psi_\lambda(2)\log 2 + \frac{1}{2^{\lambda+1}-1}\,p_\lambda(2) +$$

$$+\frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{49}$$

avec une erreur moindre que

$$\varepsilon_3^{(\lambda)} < \frac{6!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{|C_{\lambda+7}|}{2^7}. \tag{50}$$

En se rappelant que les polynomes $\psi_\lambda(z)$ satisfont à l'équation (voir n° 16)

$$\psi_\lambda(1+z) + \psi_\lambda(z) = 2\,\frac{z^\lambda}{\lambda!},$$

on obtient, pour $z = 1$,

$$\lambda!\,\psi_\lambda(2) = 2,$$

car

$$\psi_\lambda(1) = 0 \qquad \text{pour } \lambda \text{ pair.}$$

L'égalité (49) se réduit à

$$\log \omega_\lambda = \frac{2\log 2}{2^{\lambda+1}-1} + \frac{p_\lambda(2)}{2^{\lambda+1}-1} +$$

$$+\frac{\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+1}}{2} + \frac{2!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+3}}{2^3} + \frac{4!\,\lambda!}{2^{\lambda+1}-1}\,\frac{C_{\lambda+5}}{2^5} \tag{51}$$

et fournit un moyen fort simple de calcul des constantes $\log \omega_\lambda$ avec trois ou quatre décimales exactes pour

$$\lambda = 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

On trouve, en effet, eu égard à (50),

$$\varepsilon_3^{(2)} < 0{,}000067\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(4)} < 0{,}000018\ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(6)} < 0{,}000014\ldots, \qquad \varepsilon_3^{(4)} < 0{,}000009\ldots.$$

37. Appliquons la formule (51) au calcul de $\log \omega_8$.

On trouve

$$\log \omega_8 = \frac{2\log 2}{511} + \frac{p_8(2)}{511} - \frac{8!}{511.4.5!} + \frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} - \frac{4!\,8!\,5461}{511.2^6.13!}.$$

Or, dans le cas considéré,

$$p_8(x) = C_1\mu_0 x^7 + C_3\mu_2 x^5 + C_5\mu_4 x^3 + C_7\mu_6 x,$$

où (voir n° 23)

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_2 = 146, \quad \mu_4 = 5944, \quad \mu_6 = 69264.$$

On a donc

$$p_8(2) = -64 + 194{,}6666666\ldots - 198{,}1333333 + 58{,}4071428 =$$

$$= -9{,}0595238\ldots$$

et

$$\frac{p_8(2)}{511} = -0{,}0177290\ldots .$$

D'autre part,

$$\frac{2\log 2}{511} = 0{,}0027129\ldots ,$$

$$\frac{8!}{511.4.5!} = 0{,}1643835\ldots ,$$

$$\frac{2.8!\,2073}{511.2^3.12!} = 0{,}0000853\ldots ,$$

$$\frac{4!\,8!\,5462}{511.2^6.13!} = 0{,}0000259\ldots .$$

Par suite,

$$\log \omega_8 = -0{,}1793\ldots ,$$

le résultat avec 4 décimales exact.

38. Introduisons maintenant les constantes

$$\pi_\lambda \qquad\qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

en posant

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) = (2^{\lambda+1} - 1)\log \omega_\lambda .$$

La formule (42) donne

$$2\log\beta_\lambda(x)+\lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x+p_\lambda(2x)=$$

$$=\log\pi_\lambda-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}-\ldots-C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\,\lambda!}{(2x)^{2s-1}}-\rho_s^{(\lambda)}(2x),$$

d'où

$$\pi_\lambda=\beta_\lambda^2(x)\,e^{p_\lambda(x)}(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\lambda!}{(2x)^{2s-1}}}\,e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}.$$

Cette égalité a lieu, quel que soit le nombre x.

Supposons que x croisse indéfiniment et passons à la limite.

On trouve

$$\pi_\lambda=\lim_{x=\infty}\beta_\lambda^{(2)}(x)\,e^{p_\lambda(2x)}(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)},$$

car

$$\lim_{x=\infty}e^{\rho_s^{(\lambda)}(2x)}\,e^{C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x}+\ldots+C_{\lambda+2s-1}\frac{[2(s-1)]!\lambda!}{(2x)^{2s-1}}}=1.$$

Si x est un entier, on aura

$$\pi_\lambda=\lim_{x=\infty}\frac{2^{2^\lambda}.2^{2^\lambda}.4^{4^\lambda}.4^{4^\lambda}\ldots(2x-2)^{(2x-2)^\lambda}(2x-2)^{(2x-2)^\lambda}}{1^{1^\lambda}.3^{3^\lambda}.3^{3^\lambda}.5^{5^\lambda}\ldots(2x-3)^{(2x-3)^\lambda}(2x-1)^{(2x-1)^\lambda}}\cdot\frac{(2x)^{\lambda!\psi_\lambda(2x)}}{(2x-1)^{(2x-1)^\lambda}}\,e^{p_\lambda(2x)},\qquad(52)$$

la formule représentant une généralisation de celle de Wallis.

En posant $\lambda=0$ et en remarquant que

$$\psi_\lambda(x)=1,\quad p_\lambda(x)=0,\quad \lambda!=1\qquad\text{pour } \lambda=0,$$

on trouve, en effet,

$$\pi_0=\frac{\pi}{2}=\lim_{x=\infty}\frac{2.2.4.4\ldots(2x-2)(2x-2)}{1.3.3.5\ldots(2x-3)(2x-1)}\frac{2x}{2x-1}.\qquad(53)$$

L'égalité (52) définit une suite infinie de nombres

$$\pi_0,\ \pi_2,\ \pi_4,\ \ldots,\ \pi_k,\ \ldots$$

qu'on peut considérer comme les nombres caractéristiques pour les fonctions $\beta_\lambda(x)$ $(\lambda=0,\ 2,\ 4,\ldots)$.

Voici les valeurs approchées des logarithmes de quatre premiers d'entre eux:

$$\log \pi_0 = 0{,}55158\ 27052\ldots\ ,$$

$$\log \pi_2 = 0{,}42627\ 83988\ldots\ ,$$

$$\log \pi_4 = -0{,}49499\ 63099\ldots\ ,$$

$$\log \pi_6 = 1{,}49855\ 90\ldots\ ,$$

39. Les valeurs des constantes

$$\log \pi_\lambda = q_\lambda(2) \qquad (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

étant trouvées, la formule (42) permettra de calculer $\log \beta_\lambda(x) (\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$ pour x assez grand; le calcul sera d'autant plus simple et l'approximation d'autant plus grande que x sera plus considérable.

Posons, pour exemple,

$$\lambda = 2\,, \qquad x = 100\,.$$

On a

$$2 \log \beta_2(100) = 2 \log \frac{2^{2^2}.4^{4^2}.6^{6^2}\ldots 193^{194^2}.196^{196^2}}{3^{3^3}.5^{5^2}.7^{7^2}\ldots 195^{195^2}.197^{197^2}} = q_2(2) - q_2(200)\,,$$

ou, eu égard à (42) et (45),

$$2 \log \beta_2(100) = 0{,}4262783988\ldots - 2\psi_2(200)\log 200 -$$

$$- p_2(200) - C_3 \frac{2!}{200} - C_5 \frac{2!\,2!}{200^3} \ldots\ .$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_7 pour obtenir la valeur de $q_2(200)$ avec 12 décimales exacte.

On a

$$2\psi_2(200)\log 200 = 200.199 \log 2 + 400.199 \log 10\,,$$

$$p_2(200) = -100\,.$$

Formons maintenant le tableau suivant:

$$200.199 \log\ 2 = \ \ 27587{,}25778\ 628612\ldots\ ,$$

$$400.199 \log 10 = 183285{,}77340\ 232602\ldots\ ,$$

$$p_2(200) = -100\,,$$

$$C_3 \frac{2!}{200} = \qquad 0{,}00004\ 166666\ldots\ ,$$

$$C_5 \frac{2!\,2!}{200^3} = - \quad 0{,}00000\ 000208\ldots\ .$$

On en tire

$$\log \beta_2(100) = -105386{,}30247\ 5938\ldots,$$

le résultat avec 9 décimales exact.

Pour le second exemple, posons

$$\lambda = 6, \quad x = 10$$

et calculons

$$\log \beta_6(10) = \log \frac{2^{2^6}.4^{4^6}\ldots 16^{16^6}.18^{18^6}}{3^{3^6}.5^{5^6}\ldots 17^{17^6}.19^{19^6}}.$$

On trouve, eu égard à (42) et (47),

$$2\log \beta_6(10) = 1{,}4985590\ldots - 6!\,\psi_6(20)\log 20 -$$

$$-p_6(20) - C_7\frac{6!}{20} - C_9\frac{2!\,6!}{20^3} - C_{11}\frac{4!\,6!}{20^5} - \ldots.$$

Or,

$$6!\,\psi_6(20)\log 20 = 163087647{,}89788\ 5633\ldots,$$

$$p_6(10) = -1575420{,}\ 33333\ 3333\ldots,$$

$$C_7\frac{6!}{20} = \qquad 0{,}01517\ 8571\ldots,$$

$$C_9\frac{2!\,6!}{20^3} = \qquad -0{,}00000\ 7688\ldots,$$

$$C_{11}\frac{4!\,6!}{20^5} = \qquad 0{,}00000\ 0023\ldots.$$

Par conséquent,

$$\log \beta_6(10) = -80756113{,}04033\ 86\ldots,$$

le résultat avec 7 figures exact.

40. Les égalités (39_1) et (42) donnent

$$2\log \beta_\lambda(x) = \log \pi_\lambda - \lambda!\,\psi_\lambda(2x)\log 2x - p_\lambda(2x) -$$

$$- C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{2x} - C_{\lambda+3}\frac{2!\,\lambda!}{(2x)^3} - \ldots - \Theta C_{\lambda+2s+1}\frac{2s!\,\lambda!}{(2x)^{2s+1}}. \qquad (54)$$

Si x est très grand, il suffit de s'arrêter au terme multiplié par $C_{\lambda+1}$ ou même à celui multiplié par $C_{\lambda+1}$ pour obtenir la valeur de $\log\beta_\lambda(x)$ avec une approximation suffisante.

Nous obtiendrons ainsi la formule suivante

$$\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{2}\log\pi_\lambda - \frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)\log 2x -$$

$$-\frac{1}{2}p_\lambda(2x) - C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x} - \Theta\frac{\lambda!}{8x^3}C_{\lambda+3},$$

d'où

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}-\Theta C_{\lambda+3}\frac{\lambda!}{8x^3}}. \tag{55}$$

Si x est très grand, on peut remplacer cette égalité par la suivante

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}e^{-C_{\lambda+1}\frac{\lambda!}{4x}},$$

ou même par la suivante

$$\beta_\lambda(x) = \sqrt{\pi_\lambda}\,(2x)^{-\frac{\lambda!}{2}\psi_\lambda(2x)}e^{-\frac{1}{2}p_\lambda(2x)}.$$

41. Considérons le cas le plus simple de $\lambda = 0$.

On a, eu égard à (53),

$$\log\pi_0 = \log\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part,

$$\psi_0(z) = 1, \quad p_0(z) = 0, \quad 0! = 1,$$

$$2\beta_0(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\frac{dy}{\sqrt{y}} = B_0(x).$$

Par conséquent [l'égalité (54)],

$$\log B_0(x) = \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log 2x -$$

$$-\frac{C_1}{2}\frac{1}{2x} - \frac{C_3}{2}\frac{2!}{(2x)^3} - \ldots - \Theta\frac{C_{2s+1}}{2}\frac{2s!}{(2x)^{2s+1}}, \tag{56}$$

c'est une formule qu'on pourrait déduire indépendamment de la théorie générale des fonctions $\beta_\lambda(x)$ moyennant la formule de Stirling.

L'égalité (55) fournit un moyen commode de calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

pour x plus grand que l'unité.

Posons, pour exemple,

$$x = \frac{21}{2}.$$

On trouve

$$\log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \log \frac{2\pi}{21} + \frac{1}{4.21} - \frac{2!}{2.4!21^3}$$

avec une erreur moindre que

$$\frac{4!|C_5|}{2.21^5} < 0{,}0000000123.$$

Le calcul nous donne

$$\frac{1}{2}\log 2\pi = 0{,}91893\ 853\dots,$$

$$\frac{1}{2}\log 21 = 1{,}52226\ 121\dots,$$

$$\frac{1}{4.21} = 0{,}01190\ 476\dots,$$

$$\frac{2!}{2.4!\,21^3} = 0{,}00000\ 449\dots.$$

Par conséquent,

$$\log B_0\left(\frac{21}{2}\right) = \log \int_0^1 (1-y)^{\frac{19}{2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -0{,}59142\ 24\dots, \qquad (57)$$

avec 7 décimales exactes.

42. Écrivons (56) sous la forme suivante

$$\log B_0(x) = \log \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} q_0(2x)$$

et posons

$$\frac{dB_0(x)}{dx} = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = -B_1(x). \tag{58}$$

De l'égalité précédente on tire, par différentiation,

$$\frac{1}{B_0(x)} \frac{dB_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx},$$

ou, en vertu de (58),

$$\frac{B_1(x)}{B_0(x)} = \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}, \tag{59}$$

et

$$\log \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \log B_0(x) + \log \frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx}. \tag{60}$$

Cette formule peut servir au calcul approché du logarithme de l'intégrale

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Posant, comme au n^0 précédent,

$$x = \frac{21}{2},$$

on trouve, eu égard à (39_2),

$$\frac{1}{2} \frac{dq_0(21)}{dx} = \frac{1}{21} + \frac{1}{2 . 21^2} - \frac{3!}{4! \, 21^4}.$$

Il suffit de s'arrêter au terme multiplié par C_3 pour obtenir le résultat avec 7 décimales exact.

On a

$$\frac{1}{21} = 0{,}04761\ 904\ldots,$$

$$\frac{1}{2.21^2} = 0{,}00113\ 378\ldots,$$

$$\frac{3!}{4!\,21^4} = 0{,}00000\ 128\ldots,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = 0{,}0487515\ldots.$$

Par conséquent,

$$\log\frac{1}{2}\frac{dq_0(21)}{dx} = -3{,}02102\ldots, \tag{61}$$

le résultat avec 5 décimales exact.

On trouve donc, en tenant compte de (57), (60) et (61),

$$\log B_1\left(\frac{21}{2}\right) = \log\int_1^0 (1-y)^{\frac{19}{2}} \log(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = -3{,}61244\ldots.$$

En raisonnant ainsi de suite, on pourrait construire une série de formules pour calcul successif des logarithmes des intégrales

$$B_k = (-1)^k \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^k(1-y)\frac{dy}{\sqrt{y}}, \qquad (k=3,4,5,\ldots)$$

mais nous nous bornerons aux cas les plus simples correspondant à $k=0$ et $k=1$ [les égalités (56) et (59)].

43. Si l'on pose dans (55) $\lambda = 0$, on aura

$$\beta_0(x) = \frac{B_0(x)}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}-\frac{\Theta}{192x^3}}.$$

On peut donc poser pour x assez grand

$$B_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}} \tag{62}$$

avec une erreur dont la valeur numérique sera plus petite que

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\frac{1}{8x}}\, \frac{1}{192\, x^3}.$$

Si l'on pose, par exemple, $x = 50$, on aura

$$\varepsilon < 0{,}000000013.$$

Faisons dans (62) $x = 100$.
On trouve

$$\frac{e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0{,}10012\ 507\ldots\ ,$$

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 385\ldots\ .$$

Par conséquent,

$$B_0(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0{,}1774670\ldots$$

avec 7 décimales exactes.

44. Considérons encore l'intégrale

$$B_1(x) = \int_1^0 (1-y)^{x-1} \log(1-y)\, \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

On peut poser, pour x assez grand,

$$\frac{1}{2}\frac{dq_0(2x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2},$$

de sorte qu'on aura, en vertu de (59) et (62),

$$B_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}(4x+1)}{8x^2\sqrt{x}}, \tag{63}$$

la formule qui peut être remplacée, pour x très grand, par la suivante

$$B_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{2x\sqrt{x}}. \tag{64}$$

Posons dans (63) $x = 100$. On trouve

$$B_1(100) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{800}}}{10} \cdot \frac{401}{8.10^4}.$$

Or,

$$\frac{\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{800}}}{10} = 0{,}1774670\ldots ,$$

$$\frac{401}{8.10^4} = 0{,}0050125.$$

Par conséquent,

$$B_1(100) = 0{,}0008895\ldots ,$$

avec 7 décimales exactes.

Moyennant la formule plus simple (64) nous obtiendrons

$$B_1(100) = 0{,}00088\ldots ,$$

le résultat avec 5 décimales exact.

45. De l'égalité (59) nous tirerons ensuite

$$B_2(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \log^2(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= B_0(x) \left[\left(\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right)^2 - \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} \right].$$

Pour les valeurs de x assez grandes nous pouvons poser avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 q_0(2x)}{dx^2} = -\frac{1}{2x^2}, \quad \left[\frac{1}{2} \frac{dq_0(2x)}{dx} \right]^2 = \frac{1}{4x^2}$$

et

$$B_2(x) = \frac{3\sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{4x^2\sqrt{x}}. \tag{65}$$

Nous trouverons de la même manière

$$\int_1^0 (1-y)^{x-1} \log^3(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{3^2 \sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{8x}}}{4x^3 \sqrt{x}}$$

et ainsi de suite.

Posant, par exemple, $x = 100$, on trouve, eu égard à (65),

$$B_2(100) = \int_0^1 (1-y)^{99} \log^2(1-y) \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0{,}000013\ldots\,,$$

le résultat avec 6 décimales exact.

46. Revenons maintenant au cas général.

Écrivons l'égalité (41) sous la forme suivante

$$2 \log v_\lambda (2x, m-1) = q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m)\,, \tag{66}$$

en y remplaçant a par $2x$ et $m+1$ par m.

Or, en vertu de (43),

$$q_\lambda(2x) - q_\lambda(2x+2m) = 2\log\beta_\lambda(x+m) - 2\log\beta_\lambda(x).$$

D'autre part (n° 30),

$$v_\lambda(2x\,,\, m-1) =$$

$$= \frac{(2x)^{(2x)\lambda}\,(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\ldots(2x+2m-2)^{(2x+2m-2)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}\,(2x+3)^{(2x+3)\lambda}\ldots(2x+2m-1)^{(2x+2m-1)\lambda}}.$$

Par conséquent,

$$\log\beta_\lambda(x) = \log\beta_\lambda(x+m) -$$

$$- \log \frac{(2x)^{(2x)\lambda}\,(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\ldots(2x+2m-2)^{(2x-2m-2)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}\,(2x+3)^{(2x+3)\lambda}\ldots(2x+2m-1)^{(2x-2m-1)\lambda}}.$$

Cette formule permet de calculer $\log\beta_\lambda(x)$ pour les valeurs de x plus petites que l'unité; il suffit de prendre pour m un entier ni trop petit, ni trop grand.

Si l'on pose, par exemple, $m = 4$, on trouve, eu égard à (43),

$$\log\beta_\lambda(x) = \frac{1}{2} q_\lambda(2) - \frac{1}{2} q_\lambda(2x+8) -$$

$$- \log \frac{(2x)^{(2x)\lambda}\,(2x+2)^{(2x+2)\lambda}\,(2x+4)^{(2x+4)\lambda}\,(2x+6)^{(2x+6)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}\,(2x+3)^{2(x+3)\lambda}\,(2x+5)^{(2x+5)\lambda}\,(2x+7)^{(2x+7)\lambda}}.$$

Le calcul de dernier terme de cette égalité ne présente pas des grandes difficultés; pour le calcul approché de $q_\lambda(2x+8)$ on peut employer la formule (39_1) dont nous avons déjà indiqué l'usage plus haut.

Sachant la valeur de la constante caractéristique $q_\lambda(2)$, nous obtiendrons la valeur numérique de $\log\beta_\lambda(x)$ pour $x<1$ avec l'approximation suffisante.

Posons, pour exemple, $x=\frac{1}{2}$.

On aura

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_\lambda(2)-\frac{1}{2}q_\lambda(9)+\log\frac{2^{2\lambda}.4^{4\lambda}.6^{6\lambda}.8^{8\lambda}}{1^{1\lambda}.3^{3\lambda}.5^{5\lambda}.7^{7\lambda}}=$$

$$=\frac{1}{2}q_\lambda(2)-\frac{1}{2}q_\lambda(9)+9^\lambda\log 9+\log\beta_\lambda(5).$$

Si l'on pose $\lambda=2$, on trouve (voir nº 33)

$$\log\beta_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}q_2(2)-\frac{1}{2}q_2(9)+9^2\log 9+\log\beta_2(5)=$$

$$=0{,}2131391994\ldots-100{,}9073484168\ldots+162\log 3-\frac{1}{2}q_2(9).$$

Or [l'égalité (39_2)],

$$\frac{1}{2}q_2(9)=\psi_2(9)\log 9+\frac{1}{2}p_2'(9)+C_3\frac{1}{9}+C_5\frac{2!}{9^3}+C_7\frac{4!}{9^5}+C_9\frac{6!}{9^7}+C_{11}\frac{8!}{9^9}$$

avec une erreur moindre que

$$|C_{13}|\frac{10!}{9^{11}}<0{,}00000000005\ldots\,.$$

Le calcul nous donne

$$\begin{aligned}162\log 3-\psi_2(9)\log 9&=98{,}87510\ 59801\ 29\ldots\,,\\ -\frac{1}{2}p_2(9)&=\ \ 2{,}25\,,\\ -C_5\frac{2!}{9^3}&=\ \ 0{,}00001\ 14311\ 84\ldots\,,\\ -C_9\frac{6!}{9^7}&=\ \ 0{,}00000\ 00064\ 29\ldots\,,\\ \hline &+101{,}87510\ 59801\ 29\ldots\,;\end{aligned}$$

$$-\frac{C_3}{9} = -0{,}00462\ 96296\ 29\dots\ ,$$

$$-C_7\frac{4!}{9^5} = -0{,}00000\ 01713\ 66\dots\ ,$$

$$-C_{11}\frac{8!}{9^9} = -0{,}00000\ 00004\ 50\dots\ ,$$

$$-0{,}00462\ 98014\ 45\dots\ .$$

Par conséquent,

$$162\log 3 - \frac{1}{2}q_2(9) = 101{,}12048\ 76162\ 97\dots\ ,$$

et

$$\log\beta_2\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}21313\ 91994\dots - 100{,}90734\ 84168\dots + 101{,}12048\ 76162\dots =$$

$$= 0{,}42627\ 8988\dots$$

avec 9 figures exactes.

C'est le même nombre que nous avons déjà trouvé au n⁰ 43 pour $q_2(2)$ [1]).

47. Remplaçons dans (66) $2x$ par x et posons $m=1$; il viendra

$$2\log v_\lambda(x\,,0) = q_\lambda(x) - q_\lambda(x+2) = 2\log\frac{x^{x\lambda}}{(x+1)^{(x+1)\lambda}}\,,$$

ou

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2\log\frac{(x+1)^{(x+1)\lambda}}{x^{x\lambda}}\,. \tag{67}$$

Reprenons maitenant l'égalité (40) qui peut s'écrire ainsi:

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x +$$

$$+ p_\lambda(x) - \lambda!\int_0^1 \psi_\lambda(z)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+z+2k} - \frac{1}{x+z+2k+1}\right)dz.$$

---

[1]) Nous verrons plus loin qu'on a toujours

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2).$$

De cette égalité on tire, en y remplaçant x par $x+1$,

$$q_\lambda(x+1) = \lambda!\,\psi_\lambda(x+1)\log(x+1) +$$

$$+p_\lambda(x+1) - \lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+z+2k+1} - \frac{1}{x+z+2k+2}\right) dz.$$

On a donc

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) =$$

$$= \lambda!\,[\psi_\lambda(x)\log x + \psi_\lambda(x+1)\log(x+1)] + p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) -$$

$$-\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z)\,\frac{dz}{x+z}. \tag{68}$$

Considérons l'intégrale du second membre de cette équation. Posons

$$x + z = \xi.$$

On aura

$$\int_0^1 \psi_\lambda(z)\,\frac{dz}{x+z} = \int_x^{x+1} \psi_\lambda(\xi - x)\,\frac{d\xi}{\xi}. \tag{69}$$

La formule de Taylor donne

$$\psi_\lambda(-x+\xi) = \psi_\lambda(-x) + \psi'_\lambda(-x)\xi +$$

$$+\psi''_\lambda(-x)\frac{\xi^2}{2!} + \psi^{(3)}_\lambda(-x)\frac{\xi^3}{3!} + \ldots + \psi^{(\lambda-1)}_\lambda(-x)\frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} + \frac{\xi^\lambda}{\lambda!}.$$

Or, en vertu de (20) (pour $k=n$),

$$\psi_k(x) = (-1)^k\,\psi_k(1-x), \qquad (k=1,2,\ldots,\lambda)$$

d'où, en échangeant x par $-x$,

$$\psi_k(-x) = (-1)^k\,\psi_k(1+x).$$

Par conséquent,

$$\frac{\psi_\lambda(-x+\xi)}{\xi} = \frac{\psi_\lambda(x+1)}{\xi} - \psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x)\frac{\xi}{2!} -$$

$$-\psi_{\lambda-3}(1+x)\frac{\xi^2}{3!} + \ldots - \psi_1(1+x)\frac{\xi^{\lambda-2}}{(\lambda-1)!} + \frac{\xi^{\lambda-1}}{\lambda!},$$

car, en vertu de (23),

$$\psi_\lambda^{(k)}(1+x) = \psi_{\lambda-k}(1+x).$$

On trouve donc, en tenant compte de (69),

$$\int_0^1 \psi_\lambda(z)\frac{dz}{x+z} = \psi_\lambda(x+1)\log\frac{x+1}{x} + P_\lambda(x)\frac{1}{\lambda!},$$

où l'on a désigné par $P_\lambda(x)$ le polynome suivant (de degré $\lambda - 1$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(x) = &- \psi_{\lambda-1}(1+x) + \psi_{\lambda-2}(1+x)\frac{(x+1)^2 - x^2}{2.2!} - \\ &- \psi_{\lambda-3}(1+x)\frac{(x+1)^3 - x^3}{3.3!} + \dots \\ &- \psi_1(1+x)\frac{(x+1)^{\lambda-1} - x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{(x+1)^\lambda - x^\lambda}{\lambda.\lambda!}. \qquad (70)\end{aligned}$$

La formule (68) peut s'écrire ainsi

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = \lambda!\,[\psi_\lambda(x) + \psi_\lambda(x+1)]\log x + \Theta_\lambda(x),$$

ou bien, eu égard à (28_2),

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = 2x^\lambda \log x + \Theta_\lambda(x), \qquad (71)$$

où l'on a posé

$$\Theta_\lambda(x) = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x).$$

Remplaçons dans (70) x par $x+1$; il viendra

$$q_\lambda(x+2) + q_\lambda(x+1) = 2(x+1)^\lambda \log(x+1) + \Theta_\lambda(x+1).$$

Soustrayant cette égalité et (71) l'une de l'autre, on trouve

$$q_\lambda(x+2) - q_\lambda(x) = 2\log\frac{(x+1)^{(x+1)^\lambda}}{x^{x^\lambda}} + \Theta_\lambda(x+1) - \Theta_\lambda(x),$$

d'où l'on conclut, eu égard à (67),

$$\Theta_\lambda(x+1) - \Theta_\lambda(x) = 0.$$

Cette identité montre que le polynome $\Theta_\lambda(x)$ doit être égal à une constante que nous désignerons par α_λ.

48. Il est aisé de prouver que

$$\alpha_\lambda = 0.$$

On a, en effet, quel que soit le nombre x,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x), \tag{71}$$

d'où, en remplaçant x par $-x$,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1-x) + p_\lambda(-x) - P_\lambda(-x). \tag{72}$$

Or [l'égalité (38)],

$$p_\lambda(x) = -p_\lambda(-x), \qquad p_\lambda(0) = 0.$$

Posant $x=0$ dans (71) et $x=1$ dans (72), on trouve, par conséquent,

$$\alpha_\lambda = p_\lambda(1) - P_\lambda(0),$$

$$\alpha_\lambda = -p_\lambda(1) - P_\lambda(-1),$$

d'où

$$2\alpha_\lambda = -[P_\lambda(0) + P_\lambda(-1)].$$

Posons maintenant dans (70) $x=0$; on a

$$\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(0) = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3}\frac{1}{3.3!} + C_{\lambda-5}\frac{1}{5.5!} + \dots +$$

$$+ C_1\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda.\lambda!},$$

car

$$\psi_{\lambda-2s-1}(1) = -C_{2s+1}, \qquad \psi_{\lambda+2s}(1) = 0.$$

D'autre part, en se rappelant que

$$\psi_{\lambda-2s-1}(0) = C_{2s+1}, \qquad \psi_{\lambda+2s}(0) = 0$$

et en posant dans (70) $x=-1$, on obtient

$$-\frac{1}{\lambda!}P_\lambda(-1) = C_{\lambda-1} + C_{\lambda-3}\frac{1}{3.3!} + \dots +$$

$$+ C_1\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-1)!} + \frac{1}{\lambda.\lambda!} = \frac{1}{\lambda!}P_\lambda(0).$$

Par conséquent,

$$a_\lambda = 0$$

et l'égalité (71) devient

$$q_\lambda(x+1) + q_\lambda(x) = 2x^\lambda \log x. \tag{73}$$

49. Indiquons, en passant, quelques conséquences de l'identité

$$\Theta_\lambda(x) = p_\lambda(x+1) + p_\lambda(x) - P_\lambda(x) = 0, \tag{71}$$

que nous venons d'établir.

$\Theta_\lambda(x)$ etant un polynome de degré $(\lambda - 1)$, on trouve

$$\Theta_\lambda(x) = \Theta_\lambda(0) + \Theta'_\lambda(0)\, x + \Theta''_\lambda(0)\, \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\dots + \Theta_\lambda^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \dots + \Theta_\lambda^{(\lambda-2)}(0) \frac{x^{\lambda-2}}{(\lambda-2)!} + \Theta_\lambda^{(\lambda-1)}(0) \frac{x^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!},$$

où, en vertu de (74),

$$\Theta_\lambda^{(k)}(0) = p_\lambda^{(k)}(1) + p_\lambda^{(k)}(0) - P_\lambda^{(k)}(0). \tag{75}$$

En se rappelant que $C_k = 0$ pour k pair, on peut écrire [l'égalité (38)]

$$p_\lambda(x) = \sum_{j=0}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\, u_{\lambda-j-1}\, x^j,$$

d'où

$$p_\lambda^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\, u_{\lambda-j-1}\, j(j-1)\dots(j-k+1)\, x^{j-k}.$$

On a donc

$$p_\lambda^{(k)}(0) = C_{\lambda-k}\, u_{\lambda-k+1}\, k!, \tag{76}$$

$$p_\lambda^{(k)}(1) = \sum_{j=k}^{\lambda-1} C_{\lambda-j}\, u_{\lambda-j-1}\, j(j-1)\dots(j-k+1). \tag{77}$$

Formons maintenant les dérivées de divers ordres du polynome $P_\lambda(x)$.

Il est aisé de s'assurer que

$$\frac{1}{\lambda!\,k!}\,P_\lambda^{(k)}(x) = -\psi_{\lambda-k-1}(1+x)\,\frac{1}{1.(k+1)!} +$$

$$+\psi_{\lambda-k-2}(1+x)\,\frac{(x+1)^2-x^2}{2.(k+2)!} - \psi_{\lambda-k-3}(1+x)\,\frac{(x+1)^3-x^3}{3.(k+3)!} +$$

$$+\ldots+(-1)^{k-1}\psi_1(1+x)\,\frac{(x+1)^{\lambda-k-1}-x^{\lambda-k-1}}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} +$$

$$+(-1)^k\,\frac{(x+1)^{\lambda-k}-x^{\lambda-k}}{(\lambda-k)\,\lambda!} \tag{78}$$

pour $k=1,\ 2,\ 3$.

De cette égalité on tire par différentiation, en tenant compte de (20),

$$\frac{1}{\lambda!\,(k+1)!}\,P_\lambda^{(k+1)}(x) = -\psi_{\lambda-k-2}(1+x)\,\frac{1}{1.(k+2)!} +$$

$$+\psi_{\lambda-k-3}(1+x)\,\frac{(x+1)^2-x^2}{2.(k+3)!} - \psi_{\lambda-k-4}(1+x)\,\frac{(x+1)^3-x^3}{3.(k+4)!} +$$

$$+\ldots+(-1)^k\,\psi_1(1+x)\,\frac{(x+1)^{\lambda-k-2}-x^{\lambda-k-2}}{(\lambda-k-2)(\lambda-1)!} +$$

$$+(-1)^{k+1}\,\frac{(x+1)^{\lambda-k-1}-x^3}{(\lambda-k-1)\,\lambda!}\,.$$

Donc l'égalité précédente étant exacte pour $k=1,\ 2,\ 3$, elle le sera aussi pour la valeur de k plus grande d'une unité; par conséquent, cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de $k=1,\ 2,\ 3,\ldots,\lambda-1$.

Si l'on y pose $x=0$, on trouve

$$\frac{1}{\lambda!\,k!}\,P_\lambda^{(k)}(0) = \sum_{j=k}^{\lambda-1}(-1)^{j-k}\,\frac{C_{\lambda-1-j}}{(j+1)!\,(j-k)!}$$

et, eu égard à (75), (76), (77) et (74),

$$\frac{\Theta_\lambda^{(k)}(0)}{k!} = C_{\lambda-k}\mu_{\lambda-k-1} +$$

$$+\sum_{j=k}^{\lambda-1}\left[\frac{C_{\lambda-j}\mu_{\lambda-j-1}\,j(j-1)\ldots(j-k+1)}{k!} - (-1)^{j-k}\,\frac{C_{\lambda-j-1}\,\lambda!}{(j+1)!\,(j-k)!}\right] = 0\,.$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\lambda-1)$$

Moyennant les équations (δ_1) du n° 16 nous obtiendrons les relations correspondantes entre les nombres de Bernoulli.

50. Revenons à l'équation générale (73).

L'égalité (67) du n° 47 donne [1])

$$q_\lambda[2(x+1)] - q_\lambda(2x) = 2\log\frac{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}{(2x)^{(2x)\lambda}},$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (43),

$$\log\frac{\beta_\lambda(x+1)}{\beta_\lambda(x)} = \log\frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}$$

ou

$$\beta_\lambda(x+1) = \frac{(2x)^{(2x)\lambda}}{(2x+1)^{(2x+1)\lambda}}\,\beta_\lambda(x). \tag{79}$$

Cette équation a lieu, comme l'on voit, pour toutes les valeurs réelles et positives de x.

Pour x un entier elle résulte immédiatement de la définition de β_λ à l'aide du rapport que nous avons désigné plus haut (n^os 30 et 31) par $v_\lambda(2, x-2)$.

Si l'on remplace dans (73) $q_\lambda(x)$ par son expression en $\log\beta_\lambda(x)$

$$q_\lambda(x) = q_\lambda(2) - \log\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right) = \log\pi_\lambda - \log\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right),$$

on trouve encore l'équation suivante

$$\beta_\lambda\left(\frac{x}{2}\right)\beta_\lambda\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\pi_\lambda}{x^{x\lambda}}. \tag{80}$$

Posant enfin dans (73) $x = 1$, on obtient

$$q_\lambda(2) + q_\lambda(1) = 0.$$

Par conséquent, en vertu de (43),

$$\log\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = q_\lambda(2) = \log\pi_\lambda, \tag{81}$$

$$\beta_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \pi_\lambda, \tag{81$_1$}$$

[1]) Remarquons, en outre, que cette dernière égalité résulte immédiatement de l'équation (73).

résultat, déjà trouvé au n° 46 par le calcul direct dans le cas particulier de $\lambda = 2$.

Remarquons d'avance qu'il existe encore une relation simple entre $\log \beta_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(1-x)$, mais nous la déduirons plus tard.

51. Passons maintenant au développement des fonctions $q_\lambda(x)$ et $\log \beta_\lambda(x)$ en séries convergentes.

L'égalité (40) du n° 26 donne

$$q_\lambda(x) = \lambda!\, \psi_\lambda(x) \log x + p_\lambda(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_\lambda^{(k)}(x), \tag{82}$$

où le terme général a l'expression suivante

$$u_\lambda^{(k)}(x) = -\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \left[\frac{1}{x+2k+z} - \frac{1}{x+2k+1+z}\right] dz.$$

Il est évident, d'après ce que nous avons dit au n° 49, que

$$\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+z} =$$

$$= P_\lambda(x+2k) + \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k+1}{x+2k},$$

$$\lambda! \int_0^1 \psi_\lambda(z) \frac{dz}{x+2k+1+z} =$$

$$= P_\lambda(x+2k+1) + \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+2) \log \frac{x+2k+2}{x+2k+1}.$$

On en tire, après des réductions simples,

$$u_\lambda^{(k)}(x) = P_\lambda(x+2k+1) - P_\lambda(x+2k) + \tag{83}$$

$$+ \lambda!\, \psi_\lambda(x+2k+1) \log \frac{x+2k}{x+2k+2} + \log\left(1 + \frac{1}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)^\lambda}.$$

Remplaçons $x+2k+1$ par ξ et posons

$$S_\lambda(\xi) = P_\lambda(\xi) - P_\lambda(\xi - 1).$$

Remarquant que

$$P_\lambda(\xi) = P_\lambda(0) + \xi P'_\lambda(0) + \frac{\xi^2}{2!} P''_\lambda(0) + \ldots +$$

$$+ \frac{\xi^k}{k!} P^{(k)}_\lambda(0) + \ldots + \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P^{(\lambda-1)}_\lambda(0),$$

$$P_\lambda(\xi - 1) = P_\lambda(-1) - \xi P'_\lambda(-1) + \frac{\xi^2}{2!} P''_\lambda(-1) + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \frac{\xi^k}{k!} P^{(k)}_\lambda(-1) + \ldots - \frac{\xi^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} P^{(\lambda-1)}_\lambda(-1),$$

on trouve

$$S_\lambda(\xi) = \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{\xi^k}{k!} \left(P^{(k)}_\lambda(0) - (-1)^k P^{(k)}_\lambda(-1) \right).$$

Or, en vertu de (78),

$$P^{(k)}_\lambda(0) + P^{(k)}_\lambda(-1) = 0.$$

Par conséquent,

$$S_\lambda(\xi) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{\lambda-2}{2}} \frac{\xi^{2k}}{2k!} P^{(2k)}_\lambda(0).$$

Désignons par $F_{\lambda, k}$ la constante suivante

$$F_{\lambda, k} = 2\lambda! \Bigg[C_{\lambda-k-1} \frac{1}{(k+1)!} - C_{\lambda-k-2} \frac{1}{2(k+2)!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^k C_1 \frac{1}{(\lambda-k-1)(\lambda-1)!} + (-1)^k \frac{1}{(\lambda-k)\lambda!} \Bigg].$$

On aura

$$S_\lambda(x + 2k + 1) = P_\lambda(x + 2k + 1) - P_\lambda(x + 2k) =$$

$$= F_{\lambda, 0} + (x + 2k + 1)^2 F_{\lambda, 2} + (x + 2k + 1)^4 F_{\lambda, 4} + \ldots +$$

$$+ (x + 2k + 1)^{\lambda-2} F_{\lambda, \lambda-2}$$

et, en vertu de (83),

$$u_\lambda^{(k)}(x) =$$

$$= \log e^{S_\lambda(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k}{x+2k+2}\right)^{\lambda!\,\psi_\lambda(x+2k+1)} \cdot \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)^\lambda}.$$

On trouve donc, eu égard à (82), le développement suivant

$$q_\lambda(x) = \lambda!\,\psi_\lambda(x)\log x + p_\lambda(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \log e^{S_\lambda(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k}{2+2k+2}\right)^{\lambda!\,\psi_\lambda(x+2k+1)} \left(\frac{x+2k+2}{x+2k+1}\right)^{2(x+2k+1)^\lambda},$$

convergent pour toutes les valeurs positives de la variable x.

Le développement de $\log\beta_\lambda(x)$ résulte immédiatement de l'égalité (43).

Posant, en particulier, $\lambda = 0$, nous trouverons

$$\log\beta_0(x) = \log\frac{\pi}{4} - \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{(2x+2k)(2x+2k+2)}{(2x+2k+1)^2},$$

car

$$\psi_\lambda(x) = 1, \quad p_\lambda(x) = 0, \quad S_\lambda(x) = 0, \quad \lambda! = 1 \qquad \text{pour } \lambda = 0.$$

51. Il faudrait maintenant étudier les propriétés des dérivées de divers ordres ainsi que les relations entre celles-ci et les fonctions primitives $q_\lambda(x)$ [ou $\log\beta_\lambda(x)$] correspondant aux diverses valeurs de l'indice λ, déduire les expressions de $\log\beta_\lambda(x)$ sous la forme de certaines intégrales définies et appliquer les résultats obtenus à la théorie des fonctions $\Gamma_\lambda(x)$, mais il est préférable de donner d'abord la définition des fonctions $q_\lambda(x)$ [et $\log\beta_\lambda(x)$] correspondant aux valeurs impaires de l'indice λ, ce qui fera l'objet de la seconde partie de mon travail qui paraîtra sous peu de temps. *(A suivre).*