ПЕРІОДИЧЕСКІЯ ФУНКЦІИ.

В. П. Ермакова.

1. Абелевы функціи.

Абелева функція есть мероморфная періодическая функція, причемъ число основныхъ періодовъ вдвое болѣе числа перемѣнныхъ. Напомню вкратцѣ, какъ получаются Абелевы функціи.

Дано нѣкоторое алгебраическое уравненіе съ двумя перемѣнными:

$$F(z\,,\ s)=0. \tag{1}$$

Изъ этого уравненія мы можемъ разсматривать s какъ функцію z. Разсмотримъ интегралъ:

$$\int \varphi(z\,,\ s)\,dz\,,$$

въ которомъ подъинтегральная функція выражается раціонально черезъ z и s. Можетъ случиться, что такой интегралъ не обращается въ безконечность для всякаго значенія независимаго перемѣннаго z. Тогда мы имѣемъ такъ называемый интегралъ *перваго рода*.

Число линейно независимыхъ интеграловъ перваго рода всегда конечно, это число называется *рангомъ алгебраическаго уравненія* (1).

Пусть независимые интегралы перваго рода будутъ:

$$\int \varphi_1(z\,,\ s)dz\,,\quad \int \varphi_2(z\,,\ s)dz\,,\ \ldots\,,\quad \int \varphi_m(z\,,\ s)dz.$$

Составимъ слѣдующія уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z\,,\ s)\,dz = x_j. \tag{2}$$

$$(j=1\,,\,2\,,\ldots,n)$$

Изъ этихъ уравненій мы можемъ разсматривать верхніе предѣлы $z_1, z_2, \ldots z_n$ какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$. Произвольная алгебраическая симметрическая функція верхнихъ предѣловъ будетъ Абелевой функціей.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи говоря о періодической функціи, мы будемъ подразумѣвать лишь такую функцію, число основныхъ періодовъ которой вдвое болѣе числа перемѣнныхъ.

2. Цѣль изслѣдованія.

Теперь является вопросъ: кромѣ Абелевыхъ функцій, существуютъ ли еще другія періодическія функціи.

Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ доказать слѣдующую теорему:

Всякая мероморфная функція n перемѣнныхъ, имѣющая $2n$ періодовъ, выражается раціонально черезъ Абелевы функціи.

Послѣ открытія Göpel'емъ и Rosenhain'омъ функцій Θ многихъ перемѣнныхъ возникъ вопросъ: можетъ ли произвольная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами выражаться раціонально черезъ функціи Θ. На первый взглядъ казалось, что нѣтъ, потому что между періодами функцій Θ существуетъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ извѣстныхъ соотношеній. Въ разговорѣ съ Гермитомъ Риманъ въ 1860 году утверждалъ, что эти соотношенія должны существовать между $2n$ періодами всякой функціи n перемѣнныхъ, по крайней мѣрѣ послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій. Тоже утверждалъ и Вейерштрасъ на своихъ лекціяхъ. Но ни тотъ, ни другой не дали доказательства [1]). Такое доказательство въ первый разъ было дано Poincaré и Picard'омъ въ замѣткѣ, представленной въ Парижскую Академію Наукъ 3 декабря 1883 года.

Такимъ образомъ изъ указанной замѣтки Poincaré и Picard'a вытекаетъ и изложенная здѣсь теорема. Остается только подъ сомнѣніемъ: выражается ли всякая періодическая функція черезъ Абелевы функціи *раціонально* или *алгебраически*.

Сверхъ того, по краткости изложенія, вышеупомянутая замѣтка доступна лишь небольшому кругу читателей. Вотъ почему я полагаю, что настоящая статья будетъ не безполезна для русскихъ читателей.

---

[1]) См. по этому поводу: Monatsber. d. Berl. Akademie der Wissensch., 1869, p. 855.

Journal für d. reine u. angew. Mathem., Bd. LXXXIX.

Bulletin des Sciences mathém. et astronom., 2-e série, t. VI, 1882. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C. W. Borchardt). Прим. ред.

3. Особенныя точки функціи.

Чтобы для читателя ничего не оставалось неяснымъ, я долженъ выяснить, что называется мероморфною функціей. Не безполезно также упомянуть о томъ, какія могутъ быть особенныя точки функціи.

Прежде всего я предполагаю, что мы имѣемъ дѣло съ функціей одного перемѣннаго.

Точка $x = a$ называется *полюсомъ* функціи, если функція въ этой точкѣ обращается въ безконечность, но по умноженіи на нѣкоторую цѣлую степень $x - a$ принимаетъ конечное значеніе, отличное отъ нуля.

Въ такомъ случаѣ функція можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ по цѣлымъ возрастающимъ степенямъ $x - a$, причемъ въ первомъ членѣ $x - a$ войдетъ въ отрицательной степени.

Можетъ случиться, что въ нѣкоторой точкѣ функція можетъ принимать произвольное значеніе, что зависитъ отъ того пути, по которому мы приходимъ въ разсматриваемую точку. Такая точка называется *существенно особенною точкою.* Для примѣра разсмотримъ функцію:

$$e^{\frac{1}{x}}.$$

Покажемъ, что въ точкѣ $x = 0$ эта функція можетъ принимать произвольное значеніе:

$$e^{\frac{1}{x}} = A,$$

Пусть одинъ корень этого уравненія будетъ $x = \alpha$,

$$e^{\frac{1}{\alpha}} = A;$$

тогда всякій другой корень будетъ

$$x = \frac{\alpha}{1 + 2n\pi\alpha i}.$$

Съ возрастаніемъ цѣлаго числа n до безконечности этотъ корень стремится къ нулю.

Точка $x = a$ называется *критическою точкою* функціи, если функція можетъ быть разложена въ рядъ по дробнымъ степенямъ $x - a$.

При обходѣ около критической точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній конечно.

Точка $x = a$ называется *трансцендентною* точкою функціи, если функція въ этой точкѣ принимаетъ опредѣленное значеніе (конечное или безконечное), но не можетъ быть разложена въ рядъ ни по цѣлымъ, ни по дробнымъ степенямъ $x-a$. Такова точка $x=0$ въ функціи $\log x$. Точка $x=a$ будетъ трансцендентною въ функціи $(x-a)^m$, если показатель m есть число дѣйствительное несоизмѣримое. При обходѣ около трансцендентной точки функція мѣняетъ свое значеніе. Число такихъ значеній безконечно велико [1]).

Функція, не имѣющая конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *голоморфною.*

Такая функція всегда можетъ быть разложена въ рядъ по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $x-a$. Этотъ рядъ сходится для всѣхъ значеній x.

Функція, имѣющая полюсы и не имѣющая другихъ конечныхъ особенныхъ точекъ, называется *мероморфною;* Вейерштрасъ показалъ, что мероморфная функція всегда можетъ быть выражена отношеніемъ двухъ голоморфныхъ функцій.

Функція, имѣющая конечныя существенно особенныя точки и не имѣющая ни критическихъ, ни трансцендентныхъ точекъ, называется *однозначною* (uniforme, eindeutig).

Функція, имѣющая критическія или трансцендентныя точки, называется *многозначною.*

Положимъ теперь, что мы имѣемъ функцію многихъ перемѣнныхъ, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Совокупность частныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ называется точкою функціи. Чтобы опредѣлить характеръ точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, нужно положить:

$$x_1 = a_1 + h_1 t, \quad x_2 = a_2 + h_2 t, \ldots x_n = a_n + h_n t,$$

гдѣ $h_1, h_2, \ldots h_n$ произвольныя постоянныя числа. Послѣ такой подстановки функція многихъ перемѣнныхъ обратится въ функцію одного перемѣннаго t.

Остается теперь опредѣлить характеръ точки $t=0$.

4. Приводимость періодическихъ функцій.

Пусть даны три періодическія функціи двухъ перемѣнныхъ съ тѣми же четырьмя періодами:

$$f_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2), \quad f_3(x_1, x_2). \tag{3}$$

---

[1]) Существенно особенная точка можетъ комбинироваться съ критическою точкою и съ трансцендентною точкою. Такъ, если показатель m есть число мнимое, то точка $x=a$ въ функціи $(x-a)^m$ будетъ одновременно и существенно особенной и трансцендентной. Въ функціи $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ точка $x=0$ будетъ и существенно особенной и критической.

Пусть даны еще двѣ періодическія функціи:

$$\varphi_1(x_3, x_4), \quad \varphi_2(x_3, x_4). \tag{4}$$

Предположимъ, что эти функціи имѣютъ четыре одинаковые основные періода. Возьмемъ какое нибудь раціональное выраженіе изъ функцій (3) и (4); тогда получимъ періодическую функцію четырехъ перемѣнныхъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

съ восьмью періодами. Эта функція обращается въ періодическую функцію двухъ перемѣнныхъ, если вмѣсто x_3 и x_4 подставимъ какія нибудь постоянныя величины.

Теперь четыре независимыя перемѣнныя выразимъ линейно черезъ новыя перемѣнныя:

$$x_j = \alpha_j y_1 + \beta_j y_2 + \gamma_j y_3 + \delta_j y_4. \atop (j=1,2,3,4)$$

Тогда наша функція превратится въ періодическую функцію новыхъ перемѣнныхъ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi(y_1, y_2, y_3, y_4). \tag{5}$$

Сообразно своему составу послѣдняя функція обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ. Если изъ уравненій:

$$\alpha_1 y_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 + \delta_1 y_4 = a_1,$$

$$\alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 + \delta_2 y_4 = a_2,$$

опредѣлимъ двѣ перемѣнныя и подставимъ въ функцію (5), то эта функція превращается въ функцію двухъ перемѣнныхъ съ четырьмя періодами. Отсюда выясняется слѣдующая теорема.

Дана мероморфная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами; выразимъ $n-r$ независимыхъ перемѣнныхъ линейно черезъ остальныя независимыя перемѣнныя и подставимъ въ данную функцію; если послѣ этого данная функція превращается въ періодическую функцію съ $2r$ періодами, то данная функція можетъ быть выражена раціонально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

Точность этой теоремы подлежитъ нѣкоторому сомнѣнію, но это сомнѣніе можетъ быть устранено послѣ теоремы, которая будетъ доказана въ § 7.

Періодическую функцію назовемъ *неприводимою*, если она не можетъ быть выражена раціонально черезъ періодическія функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ.

5. Неприводимыя рѣшенія періодическихъ уравненій.

Если дана одна періодическая функція, содержащая n перемѣнныхъ, то легко можно составить n независимыхъ функцій съ тѣми же $2n$ періодами. Покажемъ это.

Пусть дана періодическая функція:

$$f(x_1\,,\ x_2\,,\ldots x_n).$$

Ясно, что слѣдующая функція:

$$f(x_1+a_1\,,\ x_2+a_2,\ldots,x_n+a_n)$$

будетъ также періодическою съ тѣми же періодами. Мы можемъ всегда подобрать $a_1\,,\ a_2,\ldots,a_n$ такъ, чтобы эти функціи были независимы.

Подобнымъ же образомъ имѣемъ еще третью періодическую функцію:

$$f(x_1+b_1\,,\ x_2+b_2,\ldots,x_n+b_n).$$

Постоянныя $b_1\,,\ b_2,\ldots,b_n$ опять можно выбрать такъ, чтобы послѣдняя функція не могла быть выражена черезъ предъидущія.

Продолжая далѣе, мы можемъ составить n независимыхъ періодическихъ функцій.

Положимъ, что мы имѣемъ n мероморфныхъ независимыхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами; приравняемъ эти функціи произвольнымъ постоянымъ:

$$u_j(x_1\,,\ x_2,\ldots,x_n)=A_j. \qquad (6)$$
$$(j=1,2,\ldots,n)$$

Число рѣшеній этихъ уравненій безконечно велико.

Если къ одному рѣшенію прибавимъ какой нибудь періодъ, то получимъ другое рѣшеніе.

Два рѣшенія періодическихъ уравненій назовемъ неприводимыми, если ихъ разность не приводится къ періоду.

Покажемъ, что число неприводимыхъ рѣшеній періодическихъ уравненій (6) конечно, если функціи, стоящія въ первыхъ частяхъ, мероморфны.

Для этой цѣли перейдемъ отъ мнимыхъ величинъ къ дѣйствительнымъ:

$$x_j = \xi_j + \eta_j i\,, \quad A_j = B_j + C_j i\,,$$

$$u_j = \varphi_j + \psi_j i.$$

Уравненія (9) превратятся въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} \varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) &= B_j\,, \\ \psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) &= C_j. \end{aligned} \qquad (7)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Первыя части будутъ уже функціями $2n$ дѣйствительныхъ перемѣнныхъ съ $2n$ дѣйствительными періодами. Мы полагаемъ, что *опредѣлитель, составленный изъ элементовъ основныхъ періодовъ не обращается въ нуль.* Если бы этотъ опредѣлитель обратился въ нуль, то періодическая функція была бы невозможна, такъ какъ тогда можно было бы составить такой періодъ, всѣ элементы котораго были бы безконечно малы.

Преобразуемъ перемѣнныя $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ линейно къ новымъ перемѣннымъ: $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$. Коэффиціенты линейнаго преобразованія всегда можно подобрать такъ, чтобы каждый основной періодъ приводился къ увеличенію одного изъ новыхъ перемѣнныхъ на единицу. Такимъ образомъ уравненія (7) превращаются въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} p_j(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) &= B_j\,, \\ q_j(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) &= C_j. \end{aligned} \qquad (8)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Функціи, стоящія въ первой части, не измѣняются, если каждое перемѣнное увеличимъ на единицу.

Мы ищемъ неприводимыя рѣшенія уравненій (8); но каждое такое рѣшеніе при помощи періодовъ можно привести въ такой видъ, чтобы

$$0 < y_j < 1\,. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Такимъ образомъ *всѣ неприводимыя рѣшенія будутъ заключаться въ конечномъ объемѣ* ($2n$ измѣреній). Еслибъ число неприводимыхъ рѣшеній было безконечно велико, то эти рѣшенія сгущались бы въ нѣкоторой точкѣ. Но въ такомъ случаѣ эта точка была бы существенно особенной точкой, по крайней мѣрѣ для одной изъ періодическихъ функцій. Но мероморфныя функціи не имѣютъ существенно особенныхъ точекъ.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключенiе.

Число неприводимыхъ рѣшенiй уравненiй (6) всегда конечно.

Съ измѣненiемъ постоянныхъ $B_1, \ldots, B_n$, $C_1, \ldots, C_n$ измѣняются и рѣшенiя уравненiй (8). Эти рѣшенiя, какъ показано выше, заключаются въ конечномъ объемѣ, слѣдовательно ни одно изъ перемѣнныхъ не обратится въ безконечность. Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключенiе:

Уравненiя (6) всегда имѣютъ конечныя рѣшенiя, каковы бы ни были числа A_1, $A_2, \ldots, A_n$, *стоящiя во вторыхъ частяхъ уравненiй.*

6. Зависимость между перiодическими функцiями.

Пусть имѣемъ $n+1$ мероморфныхъ функцiй n перемѣнныхъ съ $2n$ перiодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Между этими функцiями должна существовать зависимость:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{10}$$

Нужно доказать, что эта зависимость будетъ алгебраическая относительно каждой функцiи.

Для этой цѣли n какихъ нибудь изъ данныхъ функцiй приравняемъ произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j. \tag{11}$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

Было показано, что число неприводимыхъ рѣшенiй этихъ уравненiй конечно; пусть это число равно m.

Подставивъ эти рѣшенiя въ функцiю v, найдемъ для этой послѣдней функцiи только m значенiй.

Итакъ, произвольной системѣ значенiй u_1, $u_2, \ldots, u_n$ соотвѣтствуетъ m значенiй v. Отсюда слѣдуетъ, что уравненiе (10) относительно v будетъ алгебраическое степени m. Сказанное распространяется на каждую функцiю. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Между $n+1$ *мероморфными функцiями* n *перемѣнныхъ, имѣющими* $2n$ *перiодовъ, существуетъ зависимость, алгебраическая относительно каждой функцiи.*

Если число неприводимыхъ рѣшенiй уравненiй (11) равно m, то уравненiе (10) будетъ, какъ показано выше, степени m относительно v. Можетъ ли это уравненiе имѣть кратные корни относительно v?

Положимъ, что уравненіе (10) имѣетъ кратные корни относительно v. Въ такомъ случаѣ кратные корни должны удовлетворять алгебраическому уравненію низшей степени:

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{12}$$

Но такъ какъ между функціями (9) существуетъ только одна зависимость, то уравненія (10) и (12) должны имѣть одинаковые корни, что возможно лишь въ томъ случаѣ, когда уравненіе (10) можетъ быть представлено въ формѣ:

$$F_1^{\mu} = 0.$$

Каждый корень этого уравненія будетъ кратный, и степень кратности будетъ одна и та же, равна μ, причемъ μ должно быть дѣлителемъ числа m. Сказанное обстоятельство можетъ имѣть мѣсто только при частномъ выборѣ функціи v. Вообще же всегда можно выбрать функцію v такъ, чтобы уравненіе (10) не имѣло кратныхъ корней.

Функціи (9) назовемъ основными, если уравненіе (10) не имѣетъ кратныхъ корней.

7. Раціональное выраженіе періодической функціи черезъ основныя функціи.

Возьмемъ n независимыхъ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{13}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Приравняемъ эти функціи произвольнымъ постояннымъ:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_j.$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Положимъ, что число неприводимыхъ рѣшеній этихъ уравненій равно m. Подставимъ эти рѣшенія въ двѣ другія періодическія функціи, имѣющія тѣ же періоды, $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для каждой функціи получимъ m значеній:

$$v_1, v_2, \ldots, v_m,$$

$$w_1, w_2, \ldots, w_m. \tag{14}$$

Эти значенія будутъ корнями двухъ алгебраическихъ уравненій:

$$F(u_1\,,\ u_2, \ldots, u_n\,,\ v) = 0\,, \qquad F_1(u_1\,,\ u_2, \ldots, u_n\,,\ w) = 0\,.$$

Мы можемъ, какъ сказано выше, подобрать функцію v такъ, чтобы ея m значеній были различны.

Составимъ теперь слѣдующую функцію:

$$\Phi(t) = (t - v_1)(t - v_2) \ldots (t - v_m).$$

Эта функція симметрична относительно корней (14), а потому коэффиценты при каждой степени t выражаются раціонально черезъ функціи (13).

Составимъ далѣе слѣдующую симметрическую функцію корней (14):

$$\Phi(t)\left(\frac{w_1}{t - v_1} + \frac{w_2}{t - v_2} + \ldots + \frac{w_m}{t - v_m}\right) = \Theta(t). \tag{15}$$

Коэффиціенты этой функціи также выражаются раціонально черезъ функціи (13).

Въ равенствѣ (15) t произвольно; положимъ $t = v_j$. Такъ какъ между значеніями функціи v нѣтъ равныхъ, то получимъ:

$$\Phi'(v_j)\, w_j = \Theta(v_j)\,,$$

откуда

$$w_j = \frac{\Theta(v_j)}{\Phi'(v_j)}\,.$$

Это равенство имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній j отъ 1 до m; поэтому проще можно написать такъ:

$$w = \frac{\Theta(v)}{\Phi'(v)}\,.$$

Во второй части, какъ показано выше, входятъ раціонально функціи (13). Отсюда вытекаетъ слѣдующее заключеніе:

Всякая мероморфная функція n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами выражается раціонально черезъ $n + 1$ основныхъ функцій.

8. Дифференціальныя уравненія періодическихъ функцій.

Возьмемъ систему $n+1$ основныхъ мероморфныхъ функцій n перемѣнныхъ съ $2n$ періодами:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (j=1,2,\ldots,n)$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Между этими функціями существуетъ алгебраическая зависимость:

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = 0. \tag{17}$$

Было показано, что каждая періодическая функція, имѣющая тѣ же періоды, какъ и функціи (16), выражается раціонально черезъ функціи (16). Отсюда слѣдуетъ, что частныя производныя функцій (16) должны выражаться раціонально черезъ тѣ же функціи; положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = P_{jk}.$$

Вторая часть послѣдняго уравненія должна быть раціональною функціей $u_1, u_2, \ldots, u_n, v$.

Такимъ образомъ, должны имѣть мѣсто дифференціальныя уравненія:

$$\partial u_j = P_{j1}\partial x_1 + P_{j2}\partial x_2 + \ldots + P_{jn}\partial x_n. \quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{18}$$

Рѣшивъ эти уравненія относительно $\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n$, получимъ:

$$Q_{j1}\partial u_1 + Q_{j2}\partial u_2 + \ldots + Q_{jn}\partial u_n = \partial x_j. \quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{19}$$

Въ этихъ уравненіяхъ коэффиціенты Q_{jk} должны выражаться раціонально черезъ функціи (16).

Выраженія въ первыхъ частяхъ уравненій (13) должны быть полными дифференціалами; поэтому мы можемъ перейти къ интеграламъ:

$$\int (Q_{j1}\partial u_1 + Q_{j2}\partial u_2 + \ldots + Q_{jn}\partial u_n) = x_j. \quad (j=1,2,\ldots,n) \tag{20}$$

Всѣ эти интегралы берутся отъ постоянной точки до перемѣнной $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Покажемъ, что ни одинъ изъ интеграловъ (20) не обращается въ безконечность ни при какихъ значеніяхъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Допустимъ, что одинъ изъ интеграловъ (20) обращается въ безконечность, когда $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots, u_n = a_n$; тогда одно изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, u_n$ обязательно обращается въ безконечность. Въ такомъ случаѣ уравненія:

$$u_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_j$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

не имѣютъ конечныхъ рѣшеній, что противорѣчитъ доказанному въ концѣ §-а 5-ого.

Интегралы, которые не обращаются въ безконечность при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, принято называть *интегралами перваго рода*.

Въ уравненіяхъ (20) съ измѣненіемъ перемѣнныхъ $u_1, u_2, \ldots, u_n$ измѣняются перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и обратно. Станемъ непрерывно измѣнять перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ къ этимъ перемѣннымъ прибавились элементы какого нибудь періода функцій (16). Въ такомъ случаѣ перемѣнныя $u_1, u_2, \ldots, u_n$, описавъ *замкнутый циклъ*, возвратятся къ своимъ прежнимъ значеніямъ. Отсюда заключаемъ, что должны существовать $2n$ основныхъ цикловъ; интегралы (20), взятые по этимъ цикламъ, превращаются въ такъ называемые *модули періодичности*, т. е. въ элементы основныхъ періодовъ функцій (16). Произвольный замкнутый циклъ можетъ быть приведенъ къ комбинаціи основныхъ цикловъ. Интегралы (20), взятые по произвольному циклу, выразятся линейно черезъ элементы основныхъ періодовъ функцій (16); коэффиціенты въ этихъ выраженіяхъ будутъ цѣлыми числами.

Разсмотримъ такой замкнутый циклъ, когда измѣняется только одно перемѣнное u_1, всѣ же остальныя перемѣнныя не измѣняются,

$$u_2 = a_2, \; u_3 = a_3, \ldots, u_n = a_n.$$

Тогда уравненіе (17) приводится къ слѣдующему:

$$F(u_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, v) = 0. \tag{21}$$

Интегралы (20) приведутся къ слѣдующимъ:

$$\int Q_{11}\,du_1, \quad \int Q_{21}\,du_1, \ldots, \int Q_{n1}\,du_1. \tag{22}$$

Все это интегралы перваго рода.

Предположимъ, что между интегралами (22) нѣтъ линейной зависимости съ постоянными коэффиціентами; въ такомъ случаѣ рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n. Пусть

$$Q_{j1} = \varphi_j(u_1, v).$$

Подставимъ z вмѣсто u_1 и s вмѣсто v. Уравненіе (21) будетъ:

$$F(z, a_2, a_3, \ldots, a_n, s) = 0. \tag{23}$$

Интегралы (22) будутъ:

$$\int \varphi_1(z, s)\partial z, \quad \int \varphi_2(z, s)\partial z, \ldots, \int \varphi_n(z, s)\partial z. \tag{24}$$

Это интегралы перваго рода; поэтому мы можемъ составить Абелевы функціи, какъ показано въ § 1. Для этой цѣли пишемъ уравненія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j(z, s)\partial z = x_j. \tag{25}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

Алгебраическія симметрическія функціи верхнихъ предѣловъ будутъ Абелевыми функціями.

Между этими функціями выберемъ $n+1$ основныхъ функцій и обозначимъ ихъ черезъ

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{26}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Періоды этихъ послѣднихъ функцій будутъ комбинаціями основныхъ періодовъ функцій (16). Отсюда слѣдуетъ, что каждый періодъ функцій (26) будетъ періодомъ и функцій (16); но въ такомъ случаѣ функціи (16), какъ доказано въ § 7, выражаются раціонально черезъ функціи (26). Это и нужно было доказать.

Мы доказали, что періодическія функціи (16) выражаются раціонально черезъ Абелевы функціи (26). Но при этомъ доказательствѣ мы предполагали, что рангъ алгебраическаго уравненія (21) равенъ n.

Предположимъ, что рангъ уравненія (23) меньше n. Въ такомъ случаѣ должна существовать одна или нѣсколько зависимостей формы:

$$\alpha_1\varphi_1(z, s) + \alpha_2\varphi_2(z, s) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(z, s) = 0.$$

Тогда изъ уравненій (25) найдемъ одну или нѣсколько зависимостей формы:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = a. \tag{27}$$

Если мы примемъ во вниманіе только независимые интегралы (24), то въ результатѣ получимъ Абелевы функціи съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ и періодовъ. Черезъ такія Абелевы функціи опять могутъ быть выражены функціи (16), но лишь при томъ условіи, что между перемѣнными существуютъ зависимости (27). Здѣсь мы имѣемъ случай приводимости, указанной въ §-ѣ 4-омъ, когда функціи (16) могутъ быть выражены раціонально черезъ функціи съ меньшимъ числомъ періодовъ. Но въ такомъ случаѣ мы прежде всего выразимъ функціи (16) раціонально черезъ неприводимыя функціи, а эти послѣднія въ свою очередь можемъ выразить черезъ Абелевы функціи. Такимъ образомъ теорема §-а 2-ого доказана.