КЪ ТЕОРІИ КОННЕКСОВЪ.

[Коннексы съ элементомъ (точка, прямая, плоскость)].

Д. М. Синцова.

§ 1.

Общія понятія о конфигураціяхъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

1. Принимая за основной элементъ не точку, прямую или плоскость трехмѣрнаго (Евклидова) пространства въ отдѣльности, а сочетаніе изъ всѣхъ этихъ трехъ основныхъ элементовъ пространства, получаемъ всего ∞^{10} различныхъ элементовъ: каждая изъ ∞^3 точекъ можетъ быть соединена въ элементъ конфигураціи съ каждою изъ ∞^4 прямыхъ и ∞^3 плоскостей: пространство является поэтому многообразіемъ *десяти* измѣреній, притомъ квадратичнаго характера, потому что шесть однородныхъ координатъ p_{ik} прямой связаны уравненіемъ

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0.$$

Такимъ образомъ разсматриваемое многообразіе можетъ быть отображено не въ плоскомъ многообразіи 10 измѣреній, а выдѣлено изъ плоскаго многообразія 11 измѣреній квадратичнымъ соотношеніемъ между 11 координатами.

Налагая на элементъ (x, p, u) одно простое условіе выдѣляемъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ совокупность ∞^9 элементовъ, налагая два простыхъ условія выдѣлимъ ∞^8 элементовъ и т. д.

Обращаемся сначала къ конфигураціи, выдѣляемой однимъ условіемъ. Пусть связь, налагаемая этимъ условіемъ, выражается аналитически однимъ уравненіемъ между координатами точки x, прямой p и плоскости u элемента (x, p, u):

$$f(x_1x_2x_3x_4;\quad p_{12}p_{13}\dots p_{34};\quad u_1u_2u_3u_4)=0 \tag{1}$$

однороднымъ въ отдѣльности относительно x_i, относительно p_{ik} и относительно u_e. Такую совокупность ∞^9 элементовъ будемъ называть *коннексомъ* (x, p, u).

Характеризовать эту конфигурацію можно такъ. Беремъ какую-нибудь точку x_0 пространства. Можетъ случиться что подстановка ея координатъ въ уравненіе (1) обратитъ его въ тождество; тогда всякая прямая и всякая плоскость составятъ вмѣстѣ съ такою точкою элементъ (x_0, p, u), удовлетворяющій уравненію (1). Такую точку будемъ называть *основною точкою* коннекса.

Такъ если (1) приводится къ виду:

$$\varphi_1(x_1 x_3 x_3 x_4) f_1(x, p, u) +$$
$$+ \varphi_2(x_1 x_2 x_3 x_4) f_2(x, p, u) + \varphi_3(x_1 \ldots x_4) f_3(x, p, u) = 0$$

то основными точками будутъ точки пересѣченія поверхностей

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0.$$

Такія точки могутъ составлять цѣлую кривую,—напримѣръ въ коннексѣ вида:

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_4) f_1(x, p, u) + \varphi_2(x_1 \ldots x_4) f_2(x, p, u) = 0,$$

основными точками будутъ всѣ точки кривой

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0.$$

Основныя точки могутъ составить и поверхность, если уравненіе (1) распадается на два множителя, изъ которыхъ одинъ содержитъ только координаты x:

$$\varphi(x_1 \ldots x_4)\ f_1(x, p, u) = 0.$$

Въ частности уравненіе поверхности

$$f(x_1 \ldots x_4) = 0$$

можетъ быть разсматриваемо какъ уравненіе коннекса (x, p, u): каждая точка этой поверхности можетъ быть соединена съ каждою прямой и съ каждою плоскостью пространства и будетъ основною точкою, точки же, не лежащія на поверхности, не даютъ ни одного элемента.

Такимъ образомъ основная точка даетъ начало ∞^7 элементовъ.

Вообще говоря, однако, подстановка координатъ точки x_0 въ уравненіе (1), не обращаетъ его въ тождество, а даетъ уравненіе между координатами прямой и координатами плоскости, т. е. опредѣляетъ ∞^6 сочетаній (p, u), образующихъ коннексъ съ элементомъ (прямая, плоскость), который будемъ называть коннексомъ (p, u), принадлежащимъ точкѣ x_0, и обозначать $K_{x_0}(p, u)$.

Такіе коннексы имѣютъ въ свою очередь основныя прямыя и основныя плоскости, и слѣдовательно, если въ добавокъ къ точкѣ x_0 мы возьмемъ какую-нибудь прямую p_0, то можетъ случиться, что уравненіе (1) при такой подстановкѣ:

$$f(x_0, p_0, u) = 0,$$

обратится въ тождество независимо отъ значеній кординатъ $u_1 \ldots u_4$. Примѣромъ можетъ послужить коннексъ, опредѣляемый уравненіемъ:

$$\varphi_1(x, p) f_1(x, p, u) +$$
$$+ \varphi_2(x, p) f_2(x, p, u) + \ldots + \varphi_7(x, p) f_7(x, p, u) = 0,$$

которое удовлетворяется независимо отъ значеній u всѣми сочетаніями (x, p), удовлетворяющими уравненіямъ

$$\varphi_1(x, p) = 0, \qquad \varphi_2(x, p) = 0 \ \ldots \ \varphi_7(x, p) = 0.$$

Эти семь уравненій опредѣляютъ сочетанія (x, p) пересѣченія 7 коннексовъ съ элементомъ (точка, прямая), и число такихъ сочетаній (если φ_i напр. алгебраическія функціи между собою различныя) конечно. Подобныя сочетанія (точка, прямая), можно также называть *основными сочетаніями* (x, p) коннексовъ (1). Каждая основная точка $x_{осн}$ даетъ начало ∞^4 основныхъпаръ $(x_{осн}, p)$, гдѣ p любая прямая.

Если же взятыя точка и прямая не составляютъ основного сочетанія (x, p), то (1) сводится при подстановкѣ координатъ точки и прямой къ уравненію между координатами плоскости и слѣдовательно опредѣляетъ ∞^2 плоскостей, огибающихъ нѣкоторую поверхность,—только касательныя къ этой поверхности плоскости составляютъ элементъ коннекса (1) вмѣстѣ съ взятыми точкою и плоскостью. Эту поверхность можно называть поверхностью, принадлежащею въ коннексѣ (1) взятымъ прямой и точкѣ. Будемъ обозначать ее U_{xp}.

Такимъ образомъ если (x, p) есть основное сочетаніе, то въ коннексѣ (1) имѣется ∞^3 элементовъ, въ составъ которыхъ она входитъ, если же (x, p) обыкновенная (не основная), то ∞^2.

Подобнымъ образомъ придемъ къ представленію объ *основныхъ прямыхъ* и *основныхъ плоскостяхъ* и объ *основныхъ сочетаніяхъ* (p, u) и (x, u), причемъ основная прямая даетъ начало ∞^3 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (p, u) и основная плоскость ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u) и ∞^4 основныхъ сочетаній (p, u), основная точка — ∞^4 основныхъ сочетаній (x, p) и ∞^3 основныхъ сочетаній (x, u).

Если сочетаніе (p, u) не основное, то ему принадлежитъ точечная поверхность X_{up}, неосновному сочетанію (x, u) комплексъ P_{xu}, прямой вообще коннексъ $K_p(x, u)$ съ элементомъ (точка, плоскость), плоскости (не основной)—коннексъ $K_u(x, p)$ съ элементомъ (точка, прямая).

Если (1) алгебраическое раціональное степени m относительно x_i, степени r относительно p_{ik} и степени n относительно u_i, то X_{pu} есть поверхность порядка m, P_{xu} — комплексъ ранга r и U_{xp} — поверхность класса n. Числа m, r, n называемъ соотвѣтственно порядкомъ, рангомъ и классомъ коннекса (1).

2. Коинциденція. Элементы общіе двумъ коннексамъ (2)

$$f(x, p, u) = 0 \qquad f_1(x, p, u) = 0$$

(выдѣляемые двумя условіями)—ихъ всего ∞^8—образуютъ *коинциденцію* (*простую* въ отличіе отъ дальнѣйшихъ, или просто коинциденцію). Здѣсь каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція прямыхъ (какъ и въ послѣдующемъ мы употребляемъ терминъ „принадлежитъ“ въ томъ смыслѣ, что каждая прямая конгруэнціи дополняетъ (x, u) до элемента (x, p, u) коинциденціи) ранга rr', если данные коннексы суть

$$(m, r, n) \text{ и } (m', r', n').$$

Каждому сочетанію (x, p) принадлежитъ развертывающаяся класса nn' и каждому сочетанію (p, u) — кривая двоякой кривизны порядка mm'. Далѣе коинциденція содержитъ $mn' + nm'$ элементовъ, которыхъ прямая задана, точка лежитъ на нѣкоторой другой данной прямой и плоскость проходитъ черезъ какую нибудь третью данную прямую; она содержитъ $mr' + rm'$ элементовъ, которыхъ плоскость задана, прямая принадлежитъ данному пучку, и точка лежитъ на данной прямой, и $rn' + nr'$ элементовъ которыхъ точка есть данная, плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и прямая принадлежитъ данному пучку. Иначе говоря, въ коинциденціи (2) каждой точкѣ x пространства принадлежитъ коинциденція (p, u) съ характеристиками

$$(rr', nr' + rn', nn') \text{ —}$$

пересѣченіе двухъ коннексовъ (p, u):

$$(r, n) \text{ и } (r', n'),$$

прямой p принадлежитъ вообще коинциденція (x, u)—пересѣченіе двухъ коннексовъ (x, u), одного порядка m и класса n, другого порядка m' и класса n'; характеристики этой коинциденціи (x, u) будутъ слѣдовательно:

$$mm', \; mn' + nm' \quad \text{и} \quad rn'.$$

Наконецъ плоскости u принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, p), какъ пересѣченіе двухъ коннексовъ съ элементомъ (x, p), имѣющая характеристическія числа

$$mm', \; mr' + rm', \; rr'.$$

2а. Вышеприведенныя характеристическія числа получаются непосредственно изъ разсмотрѣнія уравненій, какъ числа элементовъ удовлетворяющихъ тѣмъ или другимъ условіямъ, поставленнымъ выше. Для разсмотрѣнія двухъ простѣйшихъ въ алгебраическомъ отношеніи конфигурацій это не представляетъ затрудненій. Но уже начиная съ конфигураціи опредѣляемой какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p, u) получаются въ числѣ характеристикъ такія, которыя даютъ количество элементовъ (x, p, u) конфигураціи, удовлетворяющихъ условіямъ, наложеннымъ одновременно и на точку и на прямую и на плоскость элемента: такія характеристики такимъ образомъ не сводятся къ характеристикамъ конфигурацій съ болѣе простыми элементами, которыя получаемъ предполагая что точка, прямая или плоскость элемента заданы. Хотя и эти числа могутъ быть получаемы изъ чисто-алгебраическихъ соображеній, но удобно примѣнить для систематическаго вывода ихъ пріемы энумеративной геометріи.

Именно, можно условіе принадлежать данному коннексу (m, r, u)—условіе простое—выразить равенствомъ:

$$\xi_1 = \alpha . p + \beta . g + \gamma . e$$

гдѣ p — условіе для точки лежитъ въ данной плоскости, g — условіе для прямой встрѣчать данную прямую, и e — простое же условіе для плоскости проходить черезъ данную точку. Наложивъ на элементъ (x, p, u) добавочное девятерное условіе: точка x должна лежать на данной прямой, прямая и плоскость должны быть даны, находимъ:

$$\xi_1 p^2 . G . e^3 = \alpha . p^3 . G . e^3 + \beta . p^2 . gG . e^3 + \beta . p^2 . Ge^4$$

и такъ какъ

$$G = 1, \quad e^3 = p^3 = 1, \quad gG = 0, \quad e^4 = 0.$$

$$\xi_1 p^2 G e^3 = \alpha.$$

Но мы можемъ число элементовъ, удовлетворяющихъ этому условію получить чисто алгебраически,—оно равно числу элементовъ, которые при данныхъ p_{ik} и u_i удовлетворяютъ (1) и уравненіямъ

$$\sum A_i x_i = 0, \quad \sum B_i x_i = 0 \quad (A_i \text{ и } B_i\text{—постоянныя}).$$

Эти уравненія, если (1) порядка m относительно x, имѣютъ m общихъ рѣшеній, слѣдовательно $\alpha = m$.

Точно также найдемъ $\beta = r$, $\gamma = n$, и простое условіе принадлежать данному коннексу (1) выразится

$$\xi_1 = m.p + r.g + n.e.$$

Отсюда для коинциденціи (2)—пересѣченія двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n') получимъ аналогичный символъ,—двойное условіе для (x, p, u) принадлежать тому и другому коннексу одновременно выразится произведеніемъ условій принадлежности элемента каждому изъ нихъ въ отдѣльности:

$$\xi_2 = \xi_1 \cdot \xi_1' = (m.p + r.g + n.e)(m'.p + r'.g + n'.e) =$$
$$= mm'.p^2 + (mr' + rm').pg + (mn' + nm')pe + rr'.g^2 +$$
$$+ (nr' + rn')ge + nn'.e^2.$$

Предполагая, что прямая и плоскость даны, накладываемъ семерное условіе $G.e^3$, получимъ слѣдовательно ∞' элементовъ, и можно еще добавить одно условіе для точки лежать въ данной плоскости u; такимъ образомъ:

$$\xi_2.pGe^3 = mm'$$

что и выражаетъ высказанное выше: если прямая и плоскость даны, то точекъ x заключается въ каждой плоскости mm' — всѣ эти точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка mm' и т. д.

Но коинциденція можетъ и не составлять полнаго пересѣченія двухъ коннексовъ (x, p, u). Тогда для опредѣленія нужно знать всѣ ея характеристики. Условіе (двойное) принадлежать коинциденціи напишемъ вообще:

$$\xi_2 = \alpha_{200}p^2 + \alpha_{110}pg + \alpha_{101}pe + \alpha_{020}g^2 + \alpha_{011}ge + \alpha_{002}e^2$$

или сокращенно:

$$\xi_2 = \sum \alpha_{ikl} p^i g^k e^l$$

причемъ i, k, l цѣлыя положительныя числа или нули, подчиненныя условію

$$i + k + l = 2.$$

Здѣсь слѣдовательно, $(\alpha_{200}, \alpha_{101}, \alpha_{002})$ характеристики коинциденціи (x, u), принадлежащей данной прямой, $(\alpha_{200}, \alpha_{110}, \alpha_{020})$—характеристики коинциденціи (x, p), принадлежащей данной плоскости, $(\alpha_{020}, \alpha_{011}, \alpha_{002})$—характеристики коинциденціи (p, u), принадлежащей по (2) данной точкѣ.

3. Двойная коинциденція. Совокупность ∞^7 элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ, можно, какъ и въ коннексахъ съ элементомъ (точка, плоскость), назвать *бикоинциденціей.* Но здѣсь явится надобность разсматривать еще элементы общіе 4, 5 и т. д. коннексамъ (x, p, u). Поэтому будемъ называть совокупность элементовъ, общихъ тремъ коннексамъ $(m, r, n,)$ (m', r', n'), (m'', r'', n''):

$$f(x, p, u)=0, \qquad f_1(x, p, u)=0, \qquad f_2(x, p, u)=0$$

и всякую вообще совокупность ∞^7 элементовъ (x, p, u) *двойною коинциденціею.*

Каждому сочетанію (p, u) здѣсь принадлежитъ $mm'm''$ точекъ пересѣченія поверхностей

$$X_{pu}, X'_{pu}, X''_{pu},$$

принадлежащихъ (p, u) въ коннексахъ

$$f=0, f_1=0, f_2=0;$$

каждому сочетанію (x, p)—$nn'n''$ плоскостей—общихъ касательныхъ поверхностей

$$U_{xp}, U'_{xp}, U''_{xp}$$

тѣхъ же коннексовъ. Наконецъ каждому сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность ранга $2rr'r''$, образуемая прямыми, общими тремъ комплексамъ

$$P_{xu}, P'_{xu}, P''_{xu},$$

принадлежащимъ (x, u) въ тѣхъ же трехъ коннексахъ.

Плоскости u принадлежитъ бикоинциденція сочетаній (x, p), какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ (x, p) съ характеристиками

$$(mm'm'', \sum mm'r'', \sum mr'r'', 2rr'r'').$$

Изъ числа этихъ характеристикъ двѣ уже встрѣчены выше; изъ двухъ остальныхъ первая означаетъ число элементовъ (x, p), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а прямая принадлежитъ данному пучку, и слѣдовательно, можетъ быть также истолкована какъ порядокъ кривой двоякой кривизны, принадлежащей прямымъ даннаго пучка, или какъ рангъ комплекса прямыхъ, составляющихъ сочетанія (x, p) взятой бикоинциденціи съ точками данной плоскости; вторая означаетъ число сочетаній (x, p), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, а прямая лежитъ въ данной плоскости или проходитъ черезъ данную точку, и слѣдовательно можетъ быть также истолкована, какъ порядокъ поверхности, образуемой точками, дополняющими до сочетанія разсматриваемой бикоинциденціи прямыя данной связки или даннаго поля, или же какъ рангъ конгруэнціи прямыхъ, дополняющихъ до сочетанія той же бикоинциденціи точки данной прямой. Зададимся далѣе прямою p; ей принадлежитъ бикоинциденція (∞^3) сочетаній (точка x, плоскость u) съ характеристиками:

$$(mm'm'', \sum mm'n'', \sum mn'n'', nn'n'')$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ порядокъ поверхности, точки которой составляютъ сочетаніе этой бикоинциденціи съ плоскостями данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, касательныя къ которой составляютъ сочетаніе бикоинциденціи съ точками данной прямой; третье—порядокъ кривой двоякой кривизны, точки которой составляютъ сочетаніе бикоинциденціи съ плоскостями даннаго пучка, и порядокъ поверхности, касательныя которой соединяются въ сочетаніе бикоинциденціи съ точками даннаго точечнаго поля. Данной точкѣ принадлежитъ въ двойной коинциденціи (3) бикоинциденція сочетаній (p, u) съ характеристиками

$$(2rr'r'', \sum nr'r'', \sum nn'r'', nn'n'');$$

второе изъ этихъ чиселъ означаетъ число сочетаній (p, u), которыхъ прямая принадлежитъ данной связкѣ или данному полю, а плоскость—данному пучку, и слѣдовательно, означаетъ также классъ поверхности, принадлежащей прямымъ данной связки или поля, и рангъ конгруэнціи, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка; $\sum nn'r''$ означаетъ подобнымъ образомъ число сочетаній (p, u), которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, а плоскости—данной связкѣ, и слѣдовательно, есть рангъ комплекса, принадлежащаго плоскостямъ данной связки, и классъ развертывающейся поверхности, принадлежащей прямымъ даннаго пучка.

Кромѣ перечисленныхъ характеристикъ, остается упомянуть еще объ одной, которую нельзя получить, предполагая данными точку, прямую или плоскость элемента (x, p, u) разсматриваемой двойной коинциденціи. Это число ея элементовъ (x, p, u), которыхъ точка лежитъ на данной прямой, прямая принадлежитъ данной связкѣ или полю, и плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Число это равно для двойной коинциденціи (3) $\sum mr'n''$.

Условіе (тройное) принадлежать данной двойной бикоинциденціи можетъ быть изображено такъ:

$$\S_3 = \beta_{300} . p^3 + \beta_{210} p^2 g + \beta_{201} p^2 e + \beta_{120} p g^2 + \beta_{111} p g e + \beta_{102} p e^2 + \beta_{030} g^3 +$$
$$+ \beta_{021} g^2 e + \beta_{012} g e^2 + \beta_{003} e^3 = \sum \beta_{ikl} p^i g^k e^l$$

(гдѣ $i + k + l = 3$ и i, k, l равны или болѣе 0 и не болѣе 3).

Если какъ выше было взято, двойная коинциденція опредѣляется, какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ

$$(m, r, n), (m', r', n') \text{ и } (m'', r'', n''),$$

то

$$\beta_{300} = mm'm'', \beta_{210} = \sum mm'r'', \beta_{201} = \sum mm'n'', \beta_{120} = \sum mr'r'',$$
$$\beta_{111} = \sum mr'n'', \beta_{102} = \sum mn'n'', \beta_{030} = rr'r'', \beta_{021} = \sum nr'r'',$$
$$\beta_{012} = \sum nn'r'', \beta_{003} = nn'n''.$$

Двойная коинциденція можетъ быть также задана, какъ пересѣченіе нѣкоторой простой коинциденціи съ характеристиками (α_{200}, α_{110}, ...) и коннекса (m, r, n). Тогда для нея характеристики выразятся такъ:

$$\beta_{300} = m\alpha_{210}; \beta_{210} = m\alpha_{110} + r\alpha_{200}; \beta_{201} = m\alpha_{101} + n\alpha_{200};$$
$$\beta_{120} = m\alpha_{020} + r\alpha_{110}; \beta_{111} = m\alpha_{011} + r\alpha_{101} + n\alpha_{110}; \beta_{102} = m\alpha_{002} + n\alpha_{101};$$
$$\beta_{030} = r\alpha_{020}; \beta_{021} = r\alpha_{011} + n\alpha_{020}; \beta_{012} = r\alpha_{002} + n\alpha_{011}; \beta_{003} = n\alpha_{002}.$$

4. Тройная коинциденція. Четверное условіе, наложенное на элементы (x, p, u), выдѣляетъ совокупность ∞^6 такихъ элементовъ, которую мы назовемъ тройною коинциденціею. Она можетъ быть получена, какъ пересѣченіе четырехъ коннексовъ, или двухъ простыхъ коинциденцій или двойной коинциденціи съ коннексомъ или составлять неполное пересѣченіе одного изъ указанныхъ типовъ.

Мы можемъ произвольно взять прямую p. Ей принадлежитъ пара (точечная поверхность, плоскостная поверхность),—точки одной и плоскости, касательныя ко второй, находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи. Если тройная коинциденція опредѣляется четырьмя коннексами

$$(m, r, n), \quad (m', r', n'), \quad (m'', r'', n''), \quad (m''', r''', n'''),$$

то порядокъ первой

$$\sum mn'n''n''',$$

классъ второй

$$\sum mm'm''n''';$$

число сочетаній (точка, плоскость), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку (иными словами порядокъ кривой, принадлежащей въ этой парѣ данной связкѣ или классъ развертывающейся, которой касательныя составляютъ сочетаніе пары съ точками даннаго поля) есть

$$\sum mm'n''n'''.$$

Прямымъ даннаго пучка принадлежитъ бикоинциденція съ характеристиками

$$\left(\sum rn'n''n''',\ \sum mr'n''n''',\ \sum mm'r''n''',\ \sum mm'm''r'''\right)$$

прямымъ данной связки—коинциденція сочетаній (точка, плоскость) съ характеристиками

$$\left(\sum mm'r''r''',\ \sum mn'r''r''',\ \sum nn'r''r'''\right),$$

наконецъ если прямыя элемента (x, p, u) должны встрѣчать данную прямую, то сочетанія (x, u), соединяемыя съ этими прямыми, образуютъ коннексъ (∞^5) сочетаній (x, u) порядка

$$2\sum mr'r''r'''$$

и класса

$$2\sum nr'r''r'''.$$

Если зададимся точкою и прямою элемента, то такихъ элементовъ въ тройной коинциденціи имѣется

$$2rr'r''r'''.$$

Можно тѣ же числа истолковать и иначе изъ данной точки или задаваясь плоскостью. Въ общемъ условіе принадлежать тройной коинциденціи есть четверное условіе, которое можетъ быть изображено:

$$\xi_4 = \gamma_{310}p^3g + \gamma_{301}p^3e + \gamma_{220}p^2g^2 + \gamma_{211}p^2ge + \gamma_{202}p^2e^2 + \gamma_{130}pg^3 +$$
$$+ \gamma_{121}pg^2e + \gamma_{112}pge^2 + \gamma_{103}pe^3 + \gamma_{040}g^4 + \gamma_{031}g^3e + \gamma_{022}g^2e^2 + \gamma_{012}ge^3.$$

Если тройная коинциденція задана пересѣченіемъ четырехъ коннексовъ, какъ выше, то

$$\gamma_{310} = \sum rm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}m^{\mathrm{III}},\ \gamma_{301} = \sum mm^{\mathrm{I}}m^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}},\ \gamma_{220} = \sum mm^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}},$$
$$\gamma_{211} = \sum mm^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}},\ \gamma_{202} = \sum mm^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}},\ \gamma_{130} = \sum mr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}},$$
$$\gamma_{121} = \sum mr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}},\ \gamma_{103} = \sum mn^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}},\ \gamma_{040} = rr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}},\ \gamma_{031} = \sum nr^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}},$$
$$\gamma_{022} = \sum nn^{\mathrm{I}}r^{\mathrm{II}}r^{\mathrm{III}},\ \gamma_{013} = \sum rn^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}},\ \gamma_{112} = \sum mr^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{II}}n^{\mathrm{III}}.$$

Если тройная коинциденція задана пересѣченіемъ двойной коинциденціи

$$(\beta_{300}, \beta_{210}, \beta_{201}, \beta_{120}, \beta_{111}, \beta_{030}, \beta_{021}, \beta_{012}, \beta_{003})$$

съ коннексомъ $(m^{\text{III}}, r^{\text{III}}, n^{\text{III}})$, то для тѣхъ же чиселъ получаемъ выраженія:

$$\gamma_{310} = \beta_{300} r + \beta_{210} m;\ \gamma_{301} = \beta_{300} n + \beta_{201} m;\ \gamma_{220} = \beta_{120} m + \beta_{210} r;$$

$$\gamma_{211} = m\beta_{111} + r\beta_{201} + n\beta_{210};\ \gamma_{202} = m\beta_{102} + n\beta_{201};\ \gamma_{130} = m\beta_{030} + r\beta_{120};$$

$$\gamma_{121} = m\beta_{021} + r\beta_{111} + n\beta_{120};\ \gamma_{112} = m\beta_{012} + r\beta_{102} + n\beta_{111};$$

$$\gamma_{103} = m\beta_{003} + n\beta_{102};\ \gamma_{040} = r\beta_{030};\ \gamma_{031} = r\beta_{021} + n\beta_{030};$$

$$\gamma_{022} = r\beta_{012} + n\beta_{021};\ \gamma_{013} = r\beta_{003} + n\beta_{012}.$$

5. Четверная коинциденція состоитъ изъ ∞^5 элементовъ и можетъ быть выдѣлена изъ совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) какимъ либо пятернымъ условіемъ. Она можетъ быть, слѣдовательно, опредѣлена какъ пересѣченіе пяти коннексовъ, простой коинциденціи съ двойною или тройной съ коннексомъ.

Условіе ξ_5 принадлежать такой конфигураціи есть условіе пятерное, которое можетъ быть въ тѣхъ же символахъ изображено

$$\xi_5 = \sum \delta_{ilk} p^i g^l e^k \qquad (i + k + l = 5).$$

Данной прямой принадлежитъ ∞^1 сочетаній (x, u) образующихъ пару (кривая двоякой кривизны порядка δ_{203}, развертывающаяся поверхность класса δ_{302}), данной точкѣ ∞^2 сочетаній (прямая, плоскость), образующихъ пару (конгруэнція ранга δ_{023}, плоскостная поверхность класса $2\delta_{041}$), причемъ имѣется $2\delta_{032}$ сочетаній (p, u), которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую, а плоскость проходитъ черезъ данную точку. Данной плоскости принадлежитъ пара (точечн. поверхность порядка $2\delta_{140}$, конгруэнція ранга δ_{320}), причемъ $2\delta_{230}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую въ данной связкѣ. Если возьмемъ пучекъ плоскостей, то сочетанія (x, p), составляющія элементъ съ одной изъ плоскостей этого пучка, образуютъ пару (точечное пространство, комплексъ ранга $2\delta_{321}$), въ которой съ каждою точкою можетъ соединено $2\delta_{041}$ прямыхъ этого комплекса, прямыя, составляющія сочетаніе съ одною изъ точекъ данной прямой, образуютъ линейчатую поверхность ранга δ_{131}, а составляющія сочетанія съ одною изъ точекъ даннаго поля—конгруэнцію ранга δ_{221}. Двойственно сочетаніе (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (комплексъ ранга δ_{113}, плоскостное пространство), въ которой съ каждой плоскостью можетъ быть соединено $2\delta_{140}$ прямыхъ; прямыя сочетаній (p, u), которыхъ плоскости принадлежатъ данному пучку, образуютъ линейчатую поверхность ранга $2\delta_{131}$, а прямыя сочетаній, которыхъ плоскости принадлежатъ данной связкѣ,— конгруэнцію ранга δ_{122}. Можно замѣтить также, чтобы исчерпать всѣ характеристики,—что въ совокупности элементовъ, которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, сочетанія (x, u) образуютъ пару (поверхность порядка δ_{113}, поверхность класса δ_{311}), причемъ сочетаній, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣемъ δ_{212}.

Если четверная коинциденція задана какъ пересѣченіе пяти коннексовъ

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{IV}}, r^{\mathrm{IV}}, n^{\mathrm{IV}}),$$

то:

$$\delta_{041} = \sum n r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{032} = \sum n n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{023} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{140} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{230} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{320} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{131} = \sum m n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{122} = \sum m n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{221} = \sum m m^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{113} = \sum m r^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{212} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{203} = \sum m m^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}},$$

$$\delta_{311} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}, \quad \delta_{302} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}}.$$

Если четверная коинциденція является, какъ пересѣченіе тройной коинциденціи съ коннексомъ (m, r, n), то имѣемъ, означая γ_{ikl} $(i + k + l = 4)$ характеристики тройной коинциденціи:

$$\delta_{041} = \gamma_{031} r + \gamma_{040} n; \quad \delta_{032} = \gamma_{022} r + \gamma_{031} n; \quad \delta_{023} = \gamma_{013} r + \gamma_{022} n;$$

$$\delta_{140} = \gamma_{040} m + \gamma_{130} r; \quad \delta_{230} = \gamma_{130} m + \gamma_{220} r; \quad \delta_{320} = \gamma_{220} m + \gamma_{310} r;$$

$$\delta_{131} = \gamma_{031} m + \gamma_{121} r + \gamma_{130} n; \quad \delta_{122} = \gamma_{022} m + \gamma_{112} r + \gamma_{121} n;$$

$$\delta_{221} = \gamma_{121} m + \gamma_{211} r + \gamma_{220} n; \quad \delta_{113} = \gamma_{013} m + \gamma_{103} r + \gamma_{112} n;$$

$$\delta_{212} = \gamma_{112} m + \gamma_{202} r + \gamma_{211} n; \quad \delta_{311} = \gamma_{211} m + \gamma_{301} r + \gamma_{310} n;$$

$$\delta_{203} = \gamma_{103} m + \gamma_{202} n; \quad \delta_{302} = \gamma_{202} m + \gamma_{301} n.$$

6. Пятерная коинциденція, составляемая ∞^4 элементами (x, p, u), удовлетворяющими какому нибудь шестерному условію, можетъ быть получена въ пересѣченіи шести коннексовъ, или въ пересѣченіи четверной коинциденціи съ коннексомъ или тройной съ простою

или въ пересѣченіи двухъ двойныхъ коинциденцій (пересѣченіе трехъ простыхъ коинциденцій есть частный случай пересѣченія простой коинциденціи съ тройной).

Если условіе для (x, p, u) принадлежать такой коинциденціи (алгебраической) изобразимъ:

$$\xi_6 = \mu_{330}p^3g^3 + \mu_{321}p^3g^2e + \mu_{312}p^3ge^2 + \mu_{303}p^3e^3 + \mu_{240}p^2g^4 + \mu_{231}p^2g^3e +$$

$$+ \mu_{222}p^2g^2e^2 + \mu_{213}p^2ge^3 + \mu_{141}pg^4e + \mu_{132}pg^3e^2 + \mu_{123}pg^2e^3 +$$

$$+ \mu_{042}g^4e^2 + \mu_{033}g^3e^3$$

то значенія отдѣльныхъ характеристикъ таковы.

Данной прямой принадлежитъ конечное число μ_{303} сочетаній (x, u) составляющихъ съ нею элементъ. Данной плоскости принадлежитъ пара (кривая двоякой кривизны порядка $2\mu_{240}$, линейчатая поверхность ранга $2\mu_{330}$). Данной точкѣ—пара (линейчатая поверхность ранга $2\mu_{033}$, развертывающаяся класса $2\mu_{042}$). Прямымъ даннаго пучка принадлежатъ (т. е. составляютъ элементъ съ одною изъ прямыхъ пучка) сочетанія (x, u), образующія пару (кривая двоякой кривизны порядка μ_{213}, развертывающаяся класса μ_{312}). Прямымъ данной связки—пара (поверхность порядка μ_{123}, поверхность класса μ_{321}),—каждая точка первой поверхности въ соединеніи съ опредѣленною касательною плоскостью второй дополняетъ одну изъ прямыхъ связки до элемента пятерной коинциденціи; при этомъ число сочетаній (x, u), которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, а плоскость проходитъ черезъ данную точку, равно μ_{222}.

Сочетанія (x, p) тѣхъ элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, образуютъ пару (поверхность порядка $2\mu_{141}$, конгруэнція ранга μ_{231}), причемъ $2\mu_{132}$ сочетаній имѣютъ точку въ данной плоскости и прямую встрѣчающую данную прямую. Сочетанія (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точка лежитъ на данной прямой образуютъ пару (конгруэнція ранга μ_{123}; поверхность класса $2\mu_{141}$) причемъ $2\mu_{132}$ сочетанія имѣютъ плоскость, проходящую черезъ данную точку, и прямую, встрѣчающую данную прямую.

Если пятерная коинциденція опредѣляется какъ пересѣченіе шести коннексовъ

$$(m, r, n) \; (m^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{I}}, n^{\mathrm{I}}) \ldots (m^{\mathrm{V}}, r^{\mathrm{V}}, n^{\mathrm{V}}),$$

то ея характеристики выражаются съ помощью порядка, класса и ранга отдѣльныхъ коннексовъ слѣдующимъ образомъ

$$\mu_{330} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{321} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{312} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{303} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{240} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{231} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{222} = \sum m m^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{213} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{141} = \sum m n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{132} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{123} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} n^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} \qquad \mu_{042} = \sum n n^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}}$$

$$\mu_{033} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}}$$

Если пятерная коинциденція опредѣляется пересѣченіемъ четверной съ коннексомъ (m, r, n), то

$$\mu_{330} = m\delta_{230} + r\delta_{230}; \quad \mu_{321} = \delta_{221} m + \delta_{311} r + \delta_{320} n;$$

$$\mu_{312} = \delta_{212} m + \delta_{302} r + \delta_{311} n; \quad \mu_{303} = m\delta_{203} + n\delta_{302};$$

$$\mu_{240} = \delta_{140} m + \delta_{230} r; \quad \mu_{231} = \delta_{131} m + \delta_{221} r + \delta_{230} n;$$

$$\mu_{222} = \delta_{122} m + \delta_{212} r + \delta_{211} n; \quad \mu_{213} = \delta_{113} m + \delta_{203} r + \delta_{212} n;$$

$$\mu_{141} = \delta_{041} m + \delta_{131} r + \delta_{140} n; \quad \mu_{132} = \delta_{032} m + \delta_{122} r + \delta_{131} n;$$

$$\mu_{123} = \delta_{023} m + \delta_{113} r + \delta_{122} n; \quad \mu_{042} = \delta_{032} r + \delta_{041} n;$$

$$\mu_{033} = \delta_{023} r + \delta_{032} n.$$

7. Шестерная коинциденція. Семь коннексовъ или коннексъ и пятерная коинциненція или коинциденціи простая и четверная или коинциденціи двойная и тройная имѣютъ общими ∞^3 элементовъ, совокупности которыхъ придадимъ названіе шестерной коинциденціи.

Произвольная прямая пространства не принадлежитъ вообще такой конфигураціи, т. е. не входитъ въ составъ ни одного ея элемента; всѣ прямыя, входящія въ составъ элементовъ шестерной коинциденціи, образуютъ комплексъ, котораго рангъ означимъ λ_{313}, и каждой такой прямой принадлежитъ опредѣленное сочетаніе (x, u), вмѣстѣ съ этою прямою образующее элементъ конфигураціи. Произвольно заданной точкѣ принадлежитъ $2\lambda_{043}$ сочетаній (прямая, плоскость), произвольно заданной плоскости—$2\lambda_{340}$ сочетаній (точка, прямая). Элементовъ, которыхъ прямыя принадлежатъ данному пучку, имѣется λ_{313},—ихъ прямыя суть прямыя комплекса. Элементовъ, которыхъ прямая проходитъ черезъ данную точку или лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1: прямыя суть прямыя вышеупомянутаго комплекса, принадлежащія связкѣ съ вершиною въ данной точкѣ и образующія конусъ порядка $2\lambda_{313}$ (или лежащія въ данной плоскости и огибающія плоскую кривую порядка $2\lambda_{313}$), точки этихъ элементовъ заполняютъ кривую двоякой кривизны порядка λ_{223}, а плоскости огибаютъ развертывающуюся класса λ_{322}. Совокупность сочетаній (p, u) тѣхъ элементовъ, которыхъ точки лежатъ на данной прямой, образуютъ пару (линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{133}$, развертывающаяся класса $2\lambda_{142}$). Если соберемъ всѣ элементы, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, то сочетанія (x, p) этихъ элементовъ образуютъ пару (кривая двоякой кривизны порядка $2\lambda_{241}$, линейчатая поверхность ранга $2\lambda_{331}$). Наконецъ $2\lambda_{232}$ элементы имѣютъ точку въ данной плоскости, плоскость въ данной связкѣ, и прямую въ данномъ специальномъ линейномъ комплексѣ. Перечисленныя 10 характеристикъ такъ выражаются въ случаѣ, если шестерная коинциденція задана, какъ пересѣченіе семи коннексовъ

$$(m, r, n), \quad (m^{\mathrm{I}}, r^{\mathrm{I}}, n)\ldots(m^{\mathrm{VI}}, r^{\mathrm{VI}}, n^{\mathrm{VI}}):$$

$$\lambda_{340} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{331} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{322} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{043} = \sum n n^{\mathrm{I}} n^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{133} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{223} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{241} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{142} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}};$$

$$\lambda_{313} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} n^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}; \quad \lambda_{232} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}}.$$

Если получаемъ шестерную коинциденцію въ пересѣченіи пятерной съ коннексомъ (m, r, n), то тѣ же характеристики выразятся:

$$\lambda_{340} = m\mu_{240} + r\mu_{330}; \quad \lambda_{331} = m\mu_{231} + r\mu_{321} + n\mu_{330};$$

$$\lambda_{322} = m\mu_{222} + r\mu_{312} + n\mu_{321}; \quad \lambda_{043} = r\mu_{033} + n\mu_{042};$$

$$\lambda_{133} = m\mu_{033} + r\mu_{123} + n\mu_{132}; \quad \lambda_{223} = m\mu_{123} + r\mu_{213} + n\mu_{222};$$

$$\lambda_{241} = m\mu_{141} + r\mu_{231} + n\mu_{240}; \quad \lambda_{142} = m\mu_{042} + r\mu_{132} + n\mu_{141};$$

$$\lambda_{313} = m\mu_{213} + r\mu_{303} + n\mu_{312}; \quad \lambda_{232} = m\mu_{132} + r\mu_{222} + n\mu_{231}.$$

Въ виду того, что въ шестерной коинциденціи устанавливается извѣстнаго рода соотвѣтствіе между всѣми точками пространства, прямыми нѣкотораго комплекса и всѣми плоскостями пространства, можно называть шестерную коинциденцію элементовъ (x, p, u) *тройкою* (точечное пространство, комплексъ, плоскостное пространство).

8. Семерная коинциденція. Дальнѣйшую конфигурацію представляетъ совокупность ∞^2 элементовъ (x, p, u), выдѣляемая восьмернымъ условіемъ: пересѣченіемъ восьми коннексовъ или шестерной коинциденціи съ коннексомъ, пятерной коинциденціи съ простою, четверной съ двойною или двухъ тройныхъ. Характеристики ея

$$v_{341}, \; v_{242}, \; v_{143}, \; v_{332}, \; v_{202}, \; v_{323},$$

имѣютъ слѣдующее значеніе. Точки элементовъ образуютъ поверхность порядка $2v_{143}$, прямыя—конгруэнцію ранга v_{323}, плоскости огибаютъ поверхность класса $2v_{341}$. Элементовъ, которыхъ точка лежитъ въ данной плоскости, имѣется ∞^1: точки эти образуютъ кривую пересѣченія вышеупомянутой поверхности съ данною плоскостью, прямыя покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2v_{233}$, плоскости огибаютъ развертывающуюся класса $2v_{242}$; двойственно элементовъ, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную точку, имѣется также ∞^1: ихъ точки образуютъ кривую двоякой кривизны порядка $2v_{242}$, прямыя покрываютъ линейчатую поверхность ранга $2v_{332}$ и плоскости огибаютъ конусъ, касательный къ вышеупомянутой поверхности класса $2v_{341}$ и имѣющій вершину въ данной точкѣ. Поэтому можемъ называть нашу фигуру тройкою: (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность).

Если семерная коинциденція задана восемью коннексами

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{VII}}, r^{\mathrm{VII}}, n^{\mathrm{VII}}),$$

то

$$v_{341} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}; \quad v_{143} = \sum m r^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}};$$

$$v_{242} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}; \quad v_{323} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}};$$

$$v_{332} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}; \quad v_{233} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} n^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}}.$$

Отсюда если всѣ коннексы

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{VII}}, r^{\mathrm{VII}}, n^{\mathrm{VII}}),$$

суть трилинейные, то порядокъ точечной поверхности тройки равенъ 560, рангъ конгруэнціи 560 и классъ плоскостной поверхности 560. Кривая двоякой кривизны и линейчатая поверхность, принадлежащія плоскостямъ данной связки, будутъ порядка 840 и ранга 1120; принадлежащія точкамъ данной плоскости линейчатая поверхность и развертывающаяся оказываются ранга 1120 и класса 840.

Если поверхность задана пересѣченіемъ коннекса (m, r, n) съ шестерной коинциденціей, то

$$v_{341} = m\lambda_{340} + r\lambda_{331} + n\lambda_{340}; \qquad v_{143} = m\lambda_{043} + r\lambda_{133} + n\lambda_{142};$$

$$v_{242} = m\lambda_{142} + r\lambda_{232} + n\lambda_{241}; \qquad v_{323} = m\lambda_{223} + r\lambda_{313} + n\lambda_{332};$$

$$v_{332} = m\lambda_{232} + r\lambda_{322} + n\lambda_{331}; \qquad v_{233} = m\lambda_{133} + r\lambda_{223} + n\lambda_{232}.$$

9. Девять условій отдѣляютъ изъ всей совокупности ∞^{10} элементовъ (x, p, u) ∞^1 такихъ элементовъ, которые образуютъ *тройку (кривая двоякой кривизны порядка $2\varkappa_{243}$, линейчатая поверхность ранга $2\varkappa_{333}$, развертывающаяся класса $2\varkappa_{342}$)*. Точка первой въ соединеніи съ опредѣленной образующей второй и опредѣленною плоскостью третьей образуютъ элементъ конфигураціи.

Если тройка задана, какъ пересѣченіе девяти коннексовъ

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{VIII}}, r^{\mathrm{VIII}}. n^{\mathrm{VIII}}),$$

то

$$\varkappa_{342} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}};$$

$$\varkappa_{333} = \sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}};$$

$$\varkappa_{243} = \sum m m^{\mathrm{I}} r^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} n^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}}.$$

Если, напримѣръ беремъ девять трилинейныхъ коннексовъ, то порядокъ кривой есть 2520, рангъ линейчатой поверхности 3360 и классъ развертывающейся 2520.

Тройка можетъ быть задана также пересѣченіемъ коннекса съ тройкою (точечная поверхность, конгруэнція, плоскостная поверхность). Тогда три ея характеристики выразятся

$$\varkappa_{342} = m v_{242} + r v_{332} + n v_{341}, \quad \varkappa_{333} = m v_{233} + r v_{323} + n v_{332},$$

$$\varkappa_{243} = m v_{143} + r v_{233} + n v_{242}.$$

10. Десятерное условіе, наложенное на элементы, даетъ конечное ихъ число. Такимъ образомъ десять коннексовъ

$$(m, r, n) \ldots (m^{\mathrm{IX}} r^{\mathrm{IX}} n^{\mathrm{IX}})$$

имѣютъ общихъ элементовъ

$$N = 2\sum m m^{\mathrm{I}} m^{\mathrm{II}} r^{\mathrm{III}} r^{\mathrm{IV}} r^{\mathrm{V}} r^{\mathrm{VI}} n^{\mathrm{VII}} n^{\mathrm{VIII}} n^{\mathrm{IX}}.$$

Конечное число общихъ элементовъ имѣютъ далѣе коннексъ и тройка (кривая двоякой кривизны, линейчатая поверхность, развертывающаяся). Число это равно

$$N = 2(m\varkappa_{243} + r\varkappa_{333} + n\varkappa_{342}).$$

Простая коинциденція пересѣкается съ тройкою (точечн. поверхность, конгруэнція, плоскостн. поверхность) въ

$$N = 2(\alpha_{200}v_{143} + \alpha_{110}v_{233} + \alpha_{101}v_{242} + \alpha_{020}v_{323} + \alpha_{011}v_{332} + \alpha_{002}v_{341})$$

элементахъ. Число элементовъ пересѣченія двойной коинциденціи съ шестерною опредѣляется формулою:

$$N = 2(\beta_{300}\lambda_{043} + \beta_{210}\lambda_{133} + \beta_{201}\lambda_{142} + \beta_{120}\lambda_{223} + \beta_{111}\lambda_{232} + \beta_{102}\lambda_{241} + \\ + \beta_{030}\lambda_{313} + \beta_{021}\lambda_{322} + \beta_{012}\lambda_{331} + \beta_{003}\lambda_{340}).$$

Тройная коинциденція въ пересѣченіи съ пятерною даетъ

$$N = \gamma_{310}\mu_{033} + \gamma_{301}\mu_{042} + \gamma_{220}\mu_{123} + \gamma_{211}\mu_{132} + \gamma_{202}\mu_{141} + \gamma_{130}\mu_{213} + \\ + \gamma_{121}\mu_{222} + \gamma_{112}\mu_{231} + \gamma_{103}\mu_{240} + \gamma_{040}\mu_{303} + \gamma_{031}\mu_{312} + \gamma_{022}\mu_{321} + \gamma_{012}\mu_{331})$$

элементовъ и наконецъ двѣ четверныхъ коинциденціи имѣютъ

$$N = 2(\delta_{320}\delta^{\mathrm{I}}_{023} + \delta_{311}\delta^{\mathrm{I}}_{032} + \delta_{302}\delta^{\mathrm{I}}_{041} + \delta_{230}\delta^{\mathrm{I}}_{113} + \delta_{221}\delta^{\mathrm{I}}_{122} + \delta_{212}\delta^{\mathrm{I}}_{131} + \\ + \delta_{203}\delta^{\mathrm{I}}_{140} + \delta_{140}\delta^{\mathrm{I}}_{203} + \delta_{131}\delta^{\mathrm{I}}_{212} + \delta_{122}\delta^{\mathrm{I}}_{221} + \delta_{113}\delta^{\mathrm{I}}_{230} + \delta_{041}\delta^{\mathrm{I}}_{302} + \\ + \delta_{032}\delta^{\mathrm{I}}_{311} + \delta_{023}\delta^{\mathrm{I}}_{320})$$

общихъ элементовъ.

Въ частности, напримѣръ, число элементовъ пересѣченія 10 трилинейныхъ коннексовъ равно

$$2520 + 3360 + 2520 = 8400.$$

11. Въ послѣдующемъ мы будемъ разсматривать главнымъ образомъ коннексъ и простую коинциденцію. Поэтому въ заключеніе настоящаго §-а остановимся еще на числѣ произвольныхъ коэффиціентовъ,

которое содержитъ общее уравненіе коннекса (m, r, n). Число членовъ его уравненія, а слѣдовательно, и число коэффиціентовъ равно

$$N_{(m, r, n)} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}{1.2.3.4.5} \cdot$$

$$\cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}.$$

Число постоянныхъ, входящихъ въ это уравненіе, можетъ быть однако понижено съ помощью уравненія, связывающаго координаты прямой:

$$\frac{1}{2}(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Поэтому одинъ и тотъ же коннексъ можетъ быть опредѣленъ не только уравненіемъ

$$f(x, p, u) = 0$$

но и всякимъ уравненіемъ

$$f(xpu) + (p, p).f_1(xpu) = 0$$

гдѣ f_1 функція однородная и степени m отн. x_i, $r-2$ отн. p_{ik} и степени n отн. u съ совершенно произвольными коэффиціентами. Съ помощью ея мы можемъ, слѣдовательно, во всякомъ уравненіи $f = 0$ уничтожить

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r-1).r.(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

коэффиціентовъ, такъ что дѣйствительно независимыхъ остается

$$N^{\mathrm{I}}_{(m, r, n)} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} \cdot \frac{(r+1)(r+2)^2(r+3)}{1.3.4} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}$$

формула эта справедлива и при $r < 2$.

На единицу меньшее число условій (напр., элементовъ) должно быть дано, чтобы опредѣлить вполнѣ коннексъ.

§ II.

Простѣйшія конфигураціи съ элементомъ (x, p, u).

1. Трилинейный коннексъ.

Уравненіе

$$f(x\,,\,p\,,\,u)=\sum a_{i,k,jl}x_i u_k p_{jl}=a_x(\mathfrak{aa}\,pp)u_\alpha=0 \qquad (1)$$

линейное относительно x_{it} p_{jl} и u_k опредѣляетъ трилинейный коннексъ. Оно содержитъ 96 коэффиціентовъ, и для полнаго опредѣленія конфигураціи должны быть заданы 95 ея элементовъ $(x\,,\,p\,,\,u)$.

Основныхъ точекъ, прямыхъ или плоскостей общій (т. е. имѣющій уравненіе съ произвольными коэффиціентами) трилинейный коннексъ не содержитъ.

Но *основныя сочетанія* $(x\,,\,p)$, $(p\,,\,u)$, $(x\,,\,u)$ принадлежатъ и общему коннексу $(1\,,\,1\,,\,1)$.

Таковы будутъ прежде всего пары (точка, плоскость), общія шести билинейнымъ коннексамъ $(x\,,\,u)$:

$$\frac{df}{dp_{jl}}=\sum a_{ikjl}\,x_i u_k=0 \quad (j\,,\;l=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4). \qquad (2)$$

Основныхъ сочетаній (точка, плоскость) общій трилинейный коннексъ имѣетъ 20,—по числу элементовъ пересѣченія шести билинейныхъ коннексовъ $(x\,,\,u)$.

Основныя сочетанія (точка, прямая) общаго трилинейнаго коннекса суть элементы пересѣченія четырехъ билинейныхъ коннексовъ $(x\,,\,p)$:

$$\sum a_{i,k,jl}x_i p_{jl}=0 \quad (k=1\,,\,2\,,\,3\,,\,4) \qquad (3)$$

Трилинейный коннексъ (1) *имѣетъ* ∞^3 *основныхъ сочетаній (точка, прямая) образующихъ пару (точечное пространство, комплексъ 4 ранга).* Прямыя этихъ сочетаній заполняютъ комплексъ 4 ранга

$$\Delta=\left|\frac{d^2f}{dx_i du_k}\right|=(\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}p^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{I}})(\mathfrak{cc}p^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{II}})\,(\mathfrak{dd}p^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{III}})(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)=0. \quad (4)$$

Каждой прямой принадлежитъ опредѣленная вообще точка, координаты которой выполняютъ уравненія (3), при условіи (4) совмѣстныя. Исключенія составляютъ тѣ прямыя, которыя уничтожаютъ не только (4), но и всѣ его первые миноры. Такихъ прямыхъ трилинейный коннексъ содержитъ 162,—по числу прямыхъ пересѣченія четырехъ комплексовъ 3 ранга, опредѣляемыхъ уравненіями

$$\frac{d\Delta}{df_{11}}=0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{22}}=0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{33}}=0 \qquad \frac{d\Delta}{df_{44}}=0$$

гдѣ мы для краткости обозначили

$$f_{ii} = \frac{d^2 f}{dx_i du_i}.$$

Обратно, каждой точкѣ пространства принадлежатъ двѣ прямыхъ вещественныхъ, или мнимыхъ, прямыя пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ (3). Прямымъ комплекса (4), лежащимъ въ данной плоскости, или проходящимъ черезъ данную точку, принадлежатъ точки кривой 6-го порядка, и точкамъ данной плоскости принадлежитъ конгруэнція 6-го ранга, лежащая въ комплексѣ (4). Прямымъ комплекса (4), встрѣчающимъ данную прямую, принадлежитъ поверхность 4-го порядка, и точкамъ данной прямой—линейчатая поверхность ранга 4, всѣ прямыя которой составляютъ основныя сочетанія трилинейнаго коннекса съ опредѣленными точками данной прямой.

Основныхъ сочетаній (прямая, плоскость) трилинейный коннексъ имѣетъ также ∞^3: *они опредѣляются уравненіями*

$$\frac{df(x, p, u)}{dx_i} = \sum a_{i,k;jl}\, u_k p_{jl} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \qquad (5)$$

и образуютъ пару (комплексъ 4 ранга, плоскостное пространство). Комплексъ этотъ, какъ легко видѣть, совпадаетъ съ полученнымъ выше комплексомъ (4).

Замѣтимъ, что комплексъ (4) не будетъ самымъ общимъ комплексомъ 4 ранга—онъ зависитъ не отъ 104 параметровъ, какъ общій, а лишь отъ 95.

Можно замѣтить, подобно тому, какъ имѣли выше для основныхъ сочетаній (точка, прямая): съ прямыми комплекса (4), принадлежащими данной связкѣ (или данному полю), составляютъ основное сочетаніе плоскости, огибающія развертывающуюся поверхность 6 класса, и прямыя комплекса (4), образующія основныя сочетанія съ плоскостями данной связки, образуютъ конгруэнцію 6 ранга, наконецъ прямымъ комплекса (4), встрѣчающимъ данную прямую, принадлежатъ (въ указанномъ смыслѣ) касательныя къ поверхности 4 порядка плоскости, и плоскостямъ даннаго пучка—лучи линейчатой поверхности 4 ранга.

Произвольно взятому сочетанію (p, u),—если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ плоскость v, координаты которой суть

$$\sigma v_i = \frac{df}{dx_i} = a_i(\,\mathrm{aa}\,pp)\,u_\alpha.$$

Плоскость v пересѣкается съ плоскостью u взятаго сочетанія по прямой q, аксіальныя координаты которой суть

$$\tau . q_{ik} = \sigma(v_i u_k) = (\text{аа}pp) u_\alpha (a_i u_k) .$$

Эта прямая встрѣчаетъ прямую p сочетанія, если выполнено условіе

$$\sum q_{ik} p_{ik} = 0$$

т. е.

$$(\text{аа}pp)(au\pi\pi) u_\alpha = 0 \tag{6}$$

(гдѣ π означаютъ аксіальныя координаты прямой p), т. е. если взятое (p, u) принадлежитъ опредѣленному этимъ уравненіемъ коннексу 2 ранга и 2-го класса. Итакъ существуетъ ∞^6 сочетаній (p, u), обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что точки встрѣчи прямой p элемента трилинейнаго коннекса съ плоскостью u того же элемента, и съ v совпадаютъ.

Прямая q совпадаетъ съ прямою p, если существуютъ равенства

$$\lambda(\text{аа}pp) u_\alpha (a_i u_k) = \mu . p_{ik}$$

независимыхъ соотношеній по исключеніи λ/μ получаемъ пять,—такихъ сочетаній имѣемъ слѣдовательно ∞^2,—они образуютъ пару: (конгруэнція, поверхность), характеристики этой пары суть (30, 160, 120), гдѣ 120—рангъ конгруэнціи, 30—классъ поверхности пары—т. е. число сочетаній пары, которыхъ плоскость проходитъ черезъ данную прямую, и 160—число сочетаній, которыхъ прямая встрѣчаетъ данную прямую и плоскость проходитъ черезъ данную точку, иными словами рангъ линейчатой поверхности, образуемой прямыми сочетаній, которыхъ плоскости принадлежитъ данной связкѣ, или классъ развертывающейся, огибаемой плоскостями, касательными къ поверхности пары, входящими въ составъ тѣхъ сочетаній, которыхъ прямыя встрѣчаютъ данную прямую.

Двойственно, если возьмемъ сочетаніе (x, p)—не принадлежащее къ числу основныхъ,—то ему въ коннексѣ принадлежитъ точка y какъ центръ связки плоскостей, составляющихъ съ (x, p) элементъ трилинейнаго коннекса. Координаты этой точки y:

$$\varrho y_k = a_x (\text{аа}pp) \alpha_k ;$$

и слѣдовательно, прямая, соединяющая x и y, имѣетъ радіальныя координаты пропорціональныя опредѣлителямъ:

$$a_x (\text{аа}pp)(\alpha_i x_k) = \tau . q'_{ik}$$

прямая эта встрѣчаетъ прямую p элемента, если взятое нами сочетаніе (x, p) принадлежитъ коннексу 2-го порядка и 2-го ранга

$$a_x(\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}\,pp)\,(\alpha x\,pp) = 0 \tag{7}$$

Точно такъ же, какъ и выше получимъ далѣе пару (поверхность, конгруэнція) съ характеристиками (30, 160, 120), для сочетаній (x, p) которой прямыя $q' = (x, y)$ и p совпадаютъ, 30 есть порядокъ поверхности, 120—рангъ конгруэнціи и аналогичное предыдущему значеніе имѣетъ третья характеристика 160.

Для сочетаній (x, p), принадлежащихъ (7), точка y лежитъ въ плоскости, опредѣляемой точкою x и прямой p сочетанія, или плоскости (x, p) и (y, p) совпадаютъ.

Сочетанію (x, u) принадлежитъ вообще линейный комплексъ. Комплексъ этотъ будетъ спеціальнымъ, если (x, u) принадлежитъ коннексу (x, u) порядка 2 и класса 2:

$$a_x\, b_x\, u_\alpha\, u_\beta\, (\mathfrak{a}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\mathfrak{b}) = 0. \tag{8}$$

Прямой p принадлежитъ въ трилинейномъ коннексѣ (1) опредѣленный билинейный коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), устанавливающій, какъ извѣстно, коллинеарное преобразованіе пространства. Соотвѣтственно всѣмъ ∞^4 прямымъ пространства получимъ распредѣленіе всѣхъ ∞^9 элементовъ (x, p, u) трилинейнаго коннекса на ∞^4 системъ по ∞^5 элементовъ. Можно сказать, что изъ всего многообразія ∞^{15} коллинеацій, трилинейный коннексъ выдѣляетъ многообразіе ∞^4 коллинеацій, которыя для общаго трилинейнаго коннекса всѣ между собою различны (для совпаденія двухъ коллинеацій должны быть выполнены 15 условій, а величинъ для ихъ выполненія имѣемъ лишь 10). Всѣ ∞^4 билинейныхъ коннексовъ, устанавливающихъ эти коллинеаціи имѣютъ 20 общихъ элементовъ—основныя сочетанія (x, u) трилинейнаго коннекса. Особенности коллинеаціи, принадлежащей прямой, выдѣляютъ эту прямую изъ числа другихъ, и такимъ образомъ устанавливая инваріантныя формы для коллинеаціи, получаемъ коваріанты трилинейнаго коннекса.

Такимъ образомъ получаемъ прежде всего новое значеніе установленнаго выше комплекса 4-го ранга (4). *Его прямымъ принадлежатъ вырожденныя коллинеаціи.* Дѣйств., уравненіе его выражаетъ, что опредѣлитель коллинеаціи, принадлежащей прямой p, обращается въ 0.

Подобнымъ образомъ прямыя p, принадлежащія которымъ коллинеаціи находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ (т. е. если существуетъ ∞^9 тетраэдровъ, соотвѣтствующіе которымъ въ коллинеаціи тетраэдры въ нихъ вписаны), образуютъ линейный комплексъ

$$P_1 = (\,\mathfrak{a}\mathfrak{a}\,pp)\,a_\alpha = 0. \tag{9}$$

Это приводитъ насъ между прочимъ къ инваріанту трилинейнаго коннекса $(\mathfrak{a}a\mathfrak{b}b)\, a_\alpha\, b_\beta$ $(9a)$, уничтоженіе котораго выражаетъ, что этотъ комплексъ есть вырожденный. Во вписанномъ положеніи тетраэдра находится квадратъ коллинеаціи принадлежащей p

$$(\mathfrak{a}a\, pp)\,(\mathfrak{b}b\, pp)\, a_x\, b_\alpha\, u_\beta = 0$$

если прямая принадлежитъ квадратичному комплексу

$$P_2 = (\mathfrak{a}a\, pp)\,(\mathfrak{b}b\, pp)\, a_\beta\, b_\alpha = 0 \tag{10}$$

и точно также прямыя комплекса 3 ранга:

$$P_3 = (\mathfrak{a}a\, pp)\,(\mathfrak{b}b\, pp)\,(\mathfrak{c}c\, pp)\, a_\beta\, b_\gamma\, c_\alpha = 0 \tag{11}$$

даютъ коллинеаціи, 3-я степень которыхъ находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ.

Можно установить еще комплексъ

$$P_3' = (\mathfrak{a}a\, pp)\,(\mathfrak{b}b\, pp)\,(\mathfrak{c}c\, pp) \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

прямыя котораго даютъ коллинеаціи въ описанномъ положеніи тетраэдровъ.

Плоскости u принадлежитъ билинейный коннексъ (x, p) и соотвѣтственно всѣмъ плоскостямъ пространства получаемъ ∞^3 такихъ коннексовъ, т. е. распредѣляемъ ∞^9 элементовъ на ∞^3 системъ по ∞^6 элементовъ каждая. Получаемая система коннексовъ (x, p) линейна и опирается на пару [точечное пространство, комплексъ 4 ранга (4)].

Каждый билинейный коннексъ (x, p) имѣетъ двѣ основныхъ прямыхъ, которыя могутъ быть вещественны и различны, вещественны и совпадать или наконецъ могутъ быть мнимы. Такимъ образомъ каждой плоскости пространства принадлежатъ двѣ прямыя,—это именно прямыя комплекса (4), принадлежащія этой плоскости, и основной комплексъ (4) есть слѣдовательно, геометрическое мѣсто паръ основыхъ прямыхъ билинейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ плоскостямъ пространства.

Произвольно взятый билинейный коннексъ, принадлежащій плоскости, основныхъ точекъ не имѣетъ. Но въ числѣ ∞^3 плоскостей пространства существуетъ 20, которымъ принадлежатъ билинейные коннексы (x, p), имѣющіе основную точку,—эти плоскости и соотвѣтствующія имъ точки опредѣляются уравненіями

$$\sum a_{i,\,k,\,jl}\ x_i u_k = \frac{df}{dp_{jl}} = 0 \qquad (2)$$

и суть слѣдовательно, плоскости и точки основныхъ сочетаній (x, u) трилинейнаго коннекса.

Двойственно точкѣ x принадлежитъ опредѣленный билинейный коннексъ (p, u), а всѣмъ ∞^3 точкамъ пространства—линейная система ∞^3 билинейныхъ коннексовъ (p, u). Основныя прямыя этихъ коннексовъ образуютъ тотъ же комплексъ 4 ранга (4).

Основныя плоскости имѣются только въ тѣхъ коннексахъ, которые выполняютъ тѣже уравненія (2), и слѣдовательно, тѣже 20 точекъ даютъ линейные комплексы (p, u), имѣющія каждый основную плоскость.

2. Коинциденція—пересѣченіе двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Элементы (x, p, u), общіе двумъ трилинейнымъ коннексамъ

$$\begin{aligned} f(x, p, u) &= \sum a_{i,\,k,\,jl}\ x_i u_k p_{jl} = 0, \\ F(x, p, u) &= \sum a'_{i,\,k,\,jl}\ x_i u_k p_{jl} = 0, \end{aligned} \qquad (13)$$

образуютъ коинциденцію (простую) изъ ∞^8 элементовъ.

Произвольно взятому сочетанію (p, u) принадлежитъ вообще опредѣленная прямая — пересѣченіе плоскостей v и v', принадлежащихъ (p, u) въ томъ и другомъ коннексѣ,—точки этой прямой вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (p, u) составляютъ элементъ коинциденціи. Координаты этой прямой выразятся

$$\tau \,.\, Q_{ik} = \frac{df}{dx_i}\cdot\frac{dF}{dx_k} - \frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dF}{dx_i} = (\mathrm{aa}\,pp)\,(\mathrm{a'a'}\,pp)u_\alpha u_{\alpha'}\ \ (a_i a'_k).$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ также прямая, какъ ось пучка плоскостей, каждая изъ которыхъ составляетъ элементъ коинциденціи вмѣстѣ съ взятымъ сочетаніемъ (x, p). Прямая эта соединяетъ точки y и y', принадлежащія сочетанію (x, p) въ томъ и другомъ трилинейныхъ коннексахъ.

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ конгруэнція—пересѣченіе двухъ линейныхъ комплексовъ, принадлежащихъ (x, u) въ томъ и другомъ коннексахъ (1).

Основными сочетаніями явятся тѣ, которымъ принадлежитъ высшее многообразіе точекъ, соотвѣтств. плоскостей и прямыхъ, чѣмъ для произвольно взятаго.

Такимъ образомъ основнымъ сочетаніемъ (p, u) будетъ такое, съ которымъ элементъ коинциденціи составятъ не ∞^1 точекъ, а ∞^2 или даже ∞^3. Впрочемъ послѣдняго обстоятельства не можетъ встрѣтиться, если оба трилинейныхъ коннекса, опредѣляющіе коинциденцію, будутъ общими. Въ самомъ дѣлѣ, для этого необходимо было бы одновременное выполненіе восьми уравненій

$$\frac{df}{dx_i}=0 \qquad \frac{dF}{dx_i}=0 \qquad (i=1, 2, 3, 4)$$

съ семью неизвѣстными. Исключеніе u_k и p_{il} изъ этихъ восьми уравненій доставитъ соотношеніе между коэффиціентами коинциденціи, которое и будетъ выражаться уничтоженіемъ соотвѣтств. совмѣстнаго инваріанта двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Поэтому для коинциденціи возможны въ общемъ случаѣ только такія основныя сочетанія (p, u), съ которыми элементъ ея составляютъ ∞^2 точекъ, образующихъ плоскость. Возможно это прежде всего если (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ одного изъ трилинейныхъ коннексовъ, т. е. если (p, u) выполняютъ уравненія

$$\frac{df}{dx_i}=0 \qquad (i=1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

или уравненія

$$\frac{dF}{dx_i}=0 \qquad (i-1, 2, 3, 4) \tag{5^1}$$

Такихъ сочетаній коинциденція имѣетъ ∞^3.

Но кромѣ того, указанное обстоятельство встрѣтится всякій разъ, когда совпадутъ принадлежащія сочетанію плоскости v и v', и благодаря этому прямая ихъ пересѣченія станетъ неопредѣленною. Чтобы обстоятельство это встрѣтилось, должны быть выполнены уравненія

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{dF}{dx_1}}=\frac{\frac{df}{dx_2}}{\frac{dF}{dx_2}}=\frac{\frac{df}{dx_3}}{\frac{dF}{dx_3}}=\frac{\frac{df}{dx_4}}{\frac{dF}{dx_4}} \tag{14}$$

что даетъ три независимыхъ соотношенія между величинами p_{ik} u_l. Такимъ образомъ коинциденція (13) имѣетъ ∞^4 основныхъ сочетаній

(x, u) образующихъ двойную коинциденцію (p, u). Чтобы получить характеристики этой послѣдней, замѣнимъ (14) тремя независимыми соотношеніями, напримѣръ,

$$f'_{x_1}F'_{x_2} - f'_{x_2}F'_{x_1} = 0\,, \quad f'_{x_2}F'_{x_3} - f'_{x_3}F'_{x_2} = 0\,, \quad f'_{x_3}F'_{x_4} - f'_{x_4}F'_{x_3} = 0\,. \quad (15)$$

или символически—тремя независимыми опредѣлителями матрицы

$$(\mathrm{aa}\,pp)\,(\mathrm{a'a'}\,pp)\,u_\alpha u_{\alpha'} \begin{Vmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 \end{Vmatrix} = 0\,.$$

Но система (15) не вполнѣ эквивалентна системѣ (14),—она удовлетворяется, если (p, u) удовлетворяетъ такимъ системамъ:

$$\begin{aligned} &F'_{x_2} = 0\,, \quad f'_{x_2} = 0 \quad f'_{x_3}F'_{x_4} - f'_{x_4}F'_{x_3} = 0 \\ \text{и} \qquad &&(16) \\ &F'_{x_3} = 0\,, \quad f'_{x_3} = 0 \quad f'_{x_1}F'_{x_2} - f'_{x_2}F'_{x_1} = 0 \end{aligned}$$

но эти послѣднія не выполняютъ тождественно уравненія

$$F'_{x_4}f'_{x_1} - F'_{x_1}f'_{x_4} = 0$$

слѣдующаго изъ (14),—которое также должно быть выполнено искомыми сочетаніями (p, u). Такія (p, u) должны быть отброшены. Отсюда находимъ, что полученное M_4 [1]) сочетаній (p, u) имѣетъ характеристики $(4, 12, 12, 8)$. Значеніе чиселъ таково: въ разсматриваемой двойной коинциденціи сочетаній (p, u) данной плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 8 ранга, данной прямой—4 плоскости; прямымъ даннаго поля („Strahlenfeld") или данной связки—поверхность 12 класса, прямымъ даннаго пучка—развертывающаяся поверхность 12 класса, обратно плоскостямъ данной связки—комплексъ 12 ранга, плоскостями даннаго пучка—конгруэнція 12 ранга. Въ составъ этой двойной коинциденціи входятъ и основныя сочетанія того и другого коннексовъ (13).

Аналогичнымъ образомъ мы находимъ основныя сочетанія (x, p) коинциденціи (13) изъ уравненій

$$\frac{\dfrac{df}{du_1}}{\dfrac{dF}{du_1}} = \frac{\dfrac{df}{du_2}}{\dfrac{dF}{du_2}} = \frac{\dfrac{df}{du_3}}{\dfrac{dF}{du_3}} = \frac{\dfrac{df}{du_4}}{\dfrac{dF}{du_4}} \qquad (17)$$

---

[1]) M_4 = многообразіе четырехъ измѣреній,—обозначеніе, которымъ для краткости будемъ пользоваться и далѣе.

которыя символически изобразятся

$$(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)\,a_x a'_x \left\| \begin{matrix} \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4 \\ \alpha'_1\,\alpha'_2\,\alpha'_3\,\alpha'_4 \end{matrix} \right\| = 0\,.$$

Уравненія (17) можно замѣнить другими тремя

$$f'_{u_1}F'_{u_2} - f'_{u_2}F'_{u_1} = 0 \quad f'_{u_2}F'_{u_3} - f'_{u_3}F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_3}F'_{u_4} - f'_{u_4}F'_{u_3} = 0 \quad (18)$$

къ которымъ слѣдуетъ добавлять слѣдующее уже изъ нихъ уравненіе

$$f'_{u_4}F'_{u_1} - f'_{u_1}F'_{u_4} = 0$$

чтобы исключить постороннія сочетанія $(x\,,\,p)$, удовлетворяющія уравненіямъ

$$f'_{u_2} = 0 \quad F'_{u_2} = 0 \quad f'_{u_3}F'_{u_4} - f'_{u_4}F'_{u_3} = 6$$

и

$$f'_{u_3} = 0 \quad F'_{u_3} = 0 \quad f'_{u_1}F'_{u_2} - f'_{u_2}F'_{u_1} = 0$$

что даетъ для характеристикъ двойной коинциденціи основныхъ сочетаній $(x\,,\,p)$:

$$G.\xi_3 = 4\,; \qquad pg_s\xi_3 = 12 \qquad p^2g_p\xi_3 = p^2g_e\xi_3 = 12\,. \qquad p^3g\xi_3 = 8$$

которыя показываютъ, что данной прямой принадлежатъ 4 точки, данной точкѣ—линейчатая поверхность восьмого ранга, прямымъ данной связки—кривая двоякой кривизны 12 порядка и точкамъ данной плоскости—комплексъ 12 ранга; прямымъ данной связки или даннаго поля—поверхность 12 порядка, и точкамъ данной прямой — конгруэнція 12 ранга.

Эта двойная коинциденція $(x\,,\,p)$ содержитъ разумѣется основныя сочетанія и того и другого коннекса.

Наконецъ основныя сочетанія $(x\,,\,u)$ коинциденціи (13) опредѣляются уравненіями:

$$\frac{\dfrac{df}{dp_{12}}}{\dfrac{dF}{dp_{12}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{13}}}{\dfrac{dF}{dp_{13}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{14}}}{\dfrac{dF}{dp_{14}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{34}}}{\dfrac{dF}{dp_{34}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{42}}}{\dfrac{dF}{dp_{42}}} = \frac{\dfrac{df}{dp_{23}}}{\dfrac{dF}{dp_{23}}} \qquad (19)$$

Замѣняя эту систему уравненіями:

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,, \qquad \frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,,\\
&\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,, \qquad \frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,,\\
&\qquad\qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0\,,
\end{aligned} \tag{20}$$

опредѣляющими ∞^1 элементовъ $(x\,,\,u)$ образующихъ пару (кривая двойной кривизны, развертывающаяся поверхность), вводимъ посороннія рѣшенія,—пары, опредѣляемыя системами уравненій:

$$a)\ \frac{dF}{dp_{13}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{13}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,, \qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$b)\ \frac{dF}{dp_{14}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{14}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}-\frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}=0\,, \qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$c)\ \frac{dF}{dp_{34}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{34}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,, \qquad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0$$

$$d)\ \frac{dF}{dp_{42}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{42}}=0 \qquad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}-\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0\,,$$

$$\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}-\frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=0\,, \qquad \frac{df}{dp_{14}}\cdot\frac{dF}{dp_{34}}-\frac{df}{dp_{34}}\cdot\frac{dF}{dp_{14}}=0\,,$$

которыя не выполняютъ уравненія, слѣдующаго также изъ (19):

$$\frac{dF}{dp_{23}}\cdot\frac{df}{dp_{12}}-\frac{dF}{dp_{12}}\cdot\frac{df}{dp_{23}}=0\,.$$

Постороннія рѣшенія эти должны быть отброшены при подсчетѣ порядка и класса пары. Но при этомъ мы дважды отбрасываемъ пары:

$$\frac{dF}{dp_{13}}=0 \quad \frac{df}{dp_{13}}=0 \quad \frac{dF}{dp_{34}}=0 \quad \frac{df}{dp_{34}}=0 \quad \frac{df}{dp_{42}}\cdot\frac{dF}{dp_{23}}-\frac{df}{dp_{23}}\cdot\frac{dF}{dp_{42}}=0.$$

$$\frac{dF}{dp_{14}}=0 \quad \frac{df}{dp_{14}}=0 \quad \frac{dF}{dp_{42}}=0 \quad \frac{df}{dp_{42}}=0 \quad \frac{df}{dp_{12}}\cdot\frac{dF}{dp_{13}}=\frac{df}{dp_{13}}\cdot\frac{dF}{dp_{12}}=0.$$

Поэтому порядокъ и классъ этихъ паръ должны быть добавлены. Такимъ образомъ въ концѣ концовъ получаемъ на основаніи теоремы о пересѣченіи пяти коннексовъ (x, u) [1]).

Точки основныхъ сочетаній (x, u) коинциденціи—пересѣченія двухъ трилинейныхъ коннексовъ образуютъ кривую 32-го порядка, а плоскости этихъ сочетаній огибаютъ развертывающуюся 32-го класса. Кривая эта проходитъ черезъ 20 точекъ основныхъ сочетаній (x, u) коннекса $f=0$ и черезъ 20 такихъ же точекъ коннекса $F=0$, а развертывающаяся касается 40 соотвѣтствующихъ плоскостей.

До сихъ поръ мы брали сочетанія (p, u), (x, p) и (x, u). Зададимся теперь прямою p^0. Въ разсматриваемой коинциденціи (13) этой прямой принадлежитъ коинциденція сочетаній (x, u), пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ

$$f(x, p^0, u)=0, \quad F(x, p^0, u)=0. \tag{13}$$

Всѣмъ прямымъ пространства принадлежитъ такимъ образомъ ∞^4 такихъ коинциденцій (x, u), и по свойствамъ ихъ можно классифицировать прямыя.

Такъ прежде всего каждая коинциденція имѣетъ основной тетраэдръ, четыре вершины и четыре грани котораго преобразуются одинаково въ коллинеаціяхъ, устанавливаемыхъ тѣмъ и другимъ билинейнымъ коннексомъ. Тетраэдръ этотъ можетъ быть вполнѣ вещественный, или же нѣкорые или даже всѣ его элементы могутъ быть мнимыми, наконецъ возможны его вырожденія. Отсюда является средство классифицировать коинденціи (x, u), а слѣдовательно, и прямыя, которымъ онѣ принадлежатъ въ (13).

Четыре основныя точки для коинциденціи

$$f(x, u)=a_x u_\alpha=0, \quad F(x, u)=a'_x u'_\alpha=0$$

---

[1]) Теорія коннексовъ, стр. 23.

опредѣляются изъ уравненій

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, 3\,, 4)$$

что даетъ уравненіе 4-й степени для λ/μ:

$$0 = (abcd)\,(\alpha\beta\gamma\delta)\,\lambda^4 + 4\,(a'bcd)\,(\alpha'\beta\gamma\delta)\,\lambda^3\mu +$$

$$+ 6\,(abc'd')\,(\alpha\beta\gamma'\delta')\,\lambda^2\mu^2 + 4\,(ab'c'd')\,(\alpha\beta'\gamma'\delta')\,\lambda\mu^3 + (a'b'c'd')\,(\alpha'\beta'\gamma'\delta')\,\mu^4\,.$$

Примѣняя къ нашей коинциденціи, соотвѣтствующей прямой p, получимъ:

$$0 = \lambda^4\,(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)\,(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)\,(\mathfrak{c}\mathfrak{c}pp)\,(\mathfrak{d}\mathfrak{d}pp)\,(abcd)\,(\alpha\beta\gamma\delta) +$$

$$+ 4\,(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'pp)\,(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)\,(\mathfrak{c}\mathfrak{c}pp)\,(\mathfrak{d}\mathfrak{d}pp)\,(a'bcd)\,(\alpha'\beta\gamma\delta).\,\lambda^3\mu +$$

$$+ 6\,\lambda^2\mu^2\,(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)\,(\mathfrak{b}\mathfrak{b}pp)\,(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)\,(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)\,(abc'd')\,(\alpha\beta\gamma'\delta') +$$

$$+ 4\,(\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp)\,(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'pp)\,(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)\,(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)\,(ab'c'd')\,(\alpha\beta'\gamma'\delta')\,\lambda\mu^3 +$$

$$+ (\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'pp)\,(\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'pp)\,(\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'pp)\,(\mathfrak{d}'\mathfrak{d}'pp)\,(a'b'c'd')\,(\alpha'\beta'\gamma'\delta')\,\mu^4\,.$$

Отдѣльные коэффиціенты суть совмѣстные коваріанты двухъ трилинейныхъ коннексовъ.

Приведу еще только одинъ примѣръ установленія подобнаго совмѣстнаго коваріанта.

Возьмемъ простѣйшій совмѣстный инваріантъ двухъ билинейныхъ кватернарныхъ формъ

$$f(x\,,\,u) = a_x u_\alpha \qquad \text{и} \qquad F(x\,,\,u) = a'_x u'_\alpha\,,$$

именно

$$j = a_{\alpha'} a'_\alpha = \sum_i \sum_k a_{ik} a'_{ki}\,.$$

Геометрическое его значеніе заключается въ томъ, что при $j = 0$ произведенія коллинеацій $f = 0$, $F = 0$ и лѣвое и правое: fF и Ff находятся во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, т. е. если $f(x\,,\,u) = 0$ переводитъ точки A, B, C, D, въ A_1, B_1, C_1, D_1, а $F(x, u) = 0$ въ точки A_2, B_2, C_2, D_2, затѣмъ производя сначала коллинеацію, устанавливаемую $f(x\,,\,u) = 0$, а потомъ коллинеацію $F(x\,,\,u) = 0$ переведемъ A, B, C, D, въ $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$, $D_{1,2}$, а при обратномъ порядкѣ выполненіе этихъ коллинеарныхъ преобразованій въ $A_{2,1}$, $B_{2,1}$, $C_{2,1}$, $D_{2,1}$, то оба тетраэдра $A_{12}\ B_{12}\ C_{12}\ D_{12}$ и $A_{21}\ B_{21}\ C_{21}\ D_{21}$ вписаны въ тетраэдръ $ABCD$, т. е. A_{12} и A_{21} лежатъ въ плоскости BCD и т. д.

Составляя такой совмѣстный инваріантъ для коллинеацій, принадлежащихъ въ коинциденціи (13) прямой p, получимъ: прямыя, принадлежащая которымъ коинциденція (x, u) находится во вписанномъ положеніи тетраэдровъ, образуютъ комплексъ 2 ранга:

$$(\mathrm{aa}pp)\,(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)\,a'_{\alpha}\,a_{\alpha'} = 0\,.$$

Плоскости u принадлежитъ ∞^5 сочетаній (x, p), образующихъ коинциденцію—пересѣченіе двухъ билинейныхъ коннексовъ (x, p), и точкѣ x — ∞^5 сочетаній (p, u), образующихъ коинциденцію пересѣченія двухъ билинейныхъ коннексовъ (p, u).

Чтобы воспользоваться этимъ сведеніемъ на болѣе простыя образованія для изученія самой коинциденціи (13), нужно предварительно ознакомиться ближе со свойствами этихъ послѣднихъ болѣе простыхъ образованій, пока еще очень мало изученныхъ. Ограничимся поэтому въ настоящей статьѣ только указаніемъ на этотъ пріемъ сведенія.

3. Двойная коинциденція—пересѣченіе трехъ трилинейныхъ коннексовъ:

$$f(xpu) = 0\,, \qquad F(xpu) = 0\,, \qquad \Phi(xpu) = 0\,. \tag{15}$$

Сочетанію (p, u) принадлежитъ, вообще говоря, совершенно опредѣленная точка x съ координатами

$$\varrho x_i = (\,\mathrm{aa}\,pp)\;(\,\mathrm{a}'\mathrm{a}'\,pp)\;(\mathrm{a}''\mathrm{a}''\,pp)u_{\alpha}u_{\alpha'}u_{\alpha''}(aa'a'')_i$$

гдѣ такимъ образомъ символически изображенъ опредѣлитель матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{df}{dx_1} & \dfrac{df}{dx_2} & \dfrac{df}{dx_3} & \dfrac{df}{dx_4} \\[2ex] \dfrac{dF}{dx_1} & \dfrac{dF}{dx_2} & \dfrac{dF}{dx_3} & \dfrac{dF}{dx_4} \\[2ex] \dfrac{d\Phi}{dx_1} & \dfrac{d\Phi}{dx_2} & \dfrac{d\Phi}{dx_3} & \dfrac{d\Phi}{dx_4} \end{matrix} \right\| \tag{16}$$

Сочетанію (x, p) принадлежитъ подобнымъ образомъ совершенно опредѣленная вообще плоскость u, координаты которой пропорціональны опредѣлителямъ матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} \dfrac{df}{du_1} & \dfrac{df}{du_2} & \dfrac{df}{du_3} & \dfrac{df}{du_4} \\ \dfrac{dF}{du_1} & \dfrac{dF}{du_2} & \dfrac{dF}{du_3} & \dfrac{dF}{du_4} \\ \dfrac{d\Phi}{du_1} & \dfrac{d\Phi}{du_2} & \dfrac{d\Phi}{du_3} & \dfrac{d\Phi}{du_4} \end{array} \right\| \qquad (17)$$

или символически.

$$\sigma . u_i = (\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a'a'}pp)(\mathrm{a''a''}pp)\, a_x a'_x a''_x (\alpha\alpha'\alpha'')_i .$$

Наконецъ сочетанію (x, u) принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга—пересѣченіе трехъ линейныхъ комплексовъ принадлежащихъ сочетанію (x, u) въ коннексахъ $f = 0$, $F = 0$ и $\Phi = 0$.

Одна и таже точка принадлежитъ безчисленному множеству сочетаній (p, u). Если зададимся точкою x, то ей будутъ принадлежать ∞^4 сочетаній (p, u), образующихъ бикоинциденцію (p, u), въ которой плоскости принадлежитъ линейчатая поверхность 2. ранга, прямой—одна плоскость, плоскостямъ пучка—конгруэнція 3 ранга, плоскостямъ связки—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—развертывающаяся 3. класса и прямымъ связки (поля)—поверхность 3. класса.

Если зададимся прямою, то ей принадлежитъ бикоинциденція ∞^3 сочетаній (x, u), въ которой точкѣ принадлежитъ плоскость, плоскости—точка, точкамъ прямой—развертывающаяся 3. класса, точкамъ плоскости поверхность 3. класса, плоскостямъ пучка—кривая двойной кривизны 3. порядка и плоскостямъ связки—поверхность 3. порядка.

Наконецъ плоскости u принадлежитъ ∞^4 сочетаній (x, p) образующихъ бикоинциденцію этихъ сочетаній, въ которой прямой принадлежитъ опредѣленная точка, точкѣ—линейчатая поверхность 2. ранга, точкамъ прямой—конгруэнція 3. ранга, точками плоскости—комплексъ 3. ранга, прямымъ пучка—кривая 3 порядка (двоякой кривизны), прямымъ связки—поверхность 3. порядка.

До сихъ поръ мы говорили относительно обыкновенныхъ сочетаній.

Обращаясь къ *основнымъ сочетаніямъ,* опредѣлимъ прежде всего основныя сочетанія (p, u). Каждому такому сочетанію должна принадлежать въ двойной коинциденціи не одна точка, а безчисленное множество.

Таковы будутъ прежде всего сочетанія (p, u), основныя въ одномъ изъ трехъ трилинейныхъ коннексовъ $f = 0$, $F = 0$ или $\Phi = 0$; во вторыхъ тѣ, которыя будутъ основными сочетаніями въ одной изъ простыхъ коинциденцій, образуемыхъ двумя какими-либо изъ трехъ этихъ коннексовъ. Наконецъ, основными сочетаніями (p, u) будутъ тѣ, для которыхъ три плоскости, подчиняемыя этому сочетанію коннексами $f=0$, $F=0$ $\Phi=0$, проходятъ черезъ одну прямую. Для этого должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы (16).

Независимыхъ между ними только два, и мы получаемъ такимъ образомъ что основныя сочетанія (p, u) для (15) имѣются въ количествѣ ∞^5 и образуютъ коинциденцію (p, u).

Характеристики этой коинциденціи опредѣлимъ замѣтивъ, что если взять два какіе нибудь опредѣлителя матрицы (16) и приравнять нулю, то введемъ лишнюю коинциденцію сочетаній, которыя дѣлаютъ равными два столбца, общіе этимъ двумъ опредѣлителямъ, но не могутъ обратить въ нуль вообще двухъ остальныхъ опредѣлителей матрицы.

Мы получимъ такимъ образомъ, что въ коинциденціи основныхъ сочетаній (p, u) прямой принадлежитъ развертывающаяся 6 класса, плоскости конгруэнція 6 ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 класса, и плоскостямъ пучка—комплексъ 12 ранга.

Совершенно подобнымъ образомъ найдемъ, что ∞^5 основныхъ сочетаній (x, p) образуютъ коинциденцію, въ которой прямой принадлежитъ кривая двоякой кривизны 6. порядка, точкѣ—конгруэнція 6. ранга, прямымъ пучка—поверхность 12 порядка и точкамъ прямолинейнаго ряда—комплексъ 12. ранга.

Основныя сочетанія (x, u) должны обращать въ нуль всѣ 15 опредѣлителей матрицы

$$\left\| \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial p_{jl}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial p_{jl}} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial p_{jl}} \end{array} \right\| = 0. \qquad (jl = 1, 2, 3, 4) \qquad (18)$$

Независимыхъ между ними четыре: основныхъ сочетаній (x, u) двойная коинциденція (15) имѣетъ ∞^2, образующихъ пару поверхностей. Порядокъ и классъ этихъ поверхностей опредѣлятся равными 36, а рангъ пары, т. е. порядокъ кривой, принадлежащей плоскостямъ даннаго пучка, и классъ развертывающейся, принадлежащей точкамъ даннаго прямолинейнаго ряда, равенъ 54.

4. Если обратимся теперь къ тройной коинциденціи, опредѣляемой пересѣченіемъ четырехъ трилинейныхъ коннексовъ, то замѣтимъ что основныхъ сочетаній (x, p) и (p, u), здѣсь уже не существуетъ, и до извѣстной степени можно сказать, что основнымъ сочетаніямъ предыдущихъ конфигурацій здѣсь соотвѣтствуютъ обыкновенныя сочетанія,—та-

кія, которыя даютъ элементы опредѣляемой коинциденціи. Дѣйствительно, если имѣемъ четыре трилинейныхъ коннекса

$$f(xpu)=0\,,\quad g(xpu)=0\,,\quad F(xpu)=0\,,\quad \Phi(xpu)=0\,,$$

то произвольному взятому сочетанію не соотвѣтствуетъ вообще говоря ни одной точки, произвольно взятое сочетаніе $(x\,,\,p)$ или $(p\,,\,u)$ не входитъ вообще говоря въ составъ ни одного элемента конфигураціи. Только тѣ сочетанія $(p\,,\,u)$ изъ общаго ихъ многообразія ∞^7 входятъ въ составъ элемента конфигурацій, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)=0$$

или символически

$$0=(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)(\mathrm{a}''\mathrm{a}''pp)(\mathrm{a}'''\mathrm{a}'''pp)\,u_\alpha u_{\alpha'} u_{\alpha''} u_{\alpha'''}(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') \tag{19}$$

и слѣдовательно, принадлежатъ коннексу $(p\,,\,u)$ 4 ранга и 4 класса.

Точно также только тѣ сочетанія $(x\,,\,p)$ входятъ въ составъ элементовъ конфигураціи, которыя принадлежатъ коннексу $(x\,,\,p)$ 4 порядка и 4 ранга

$$0=a_x a'_x a''_x a'''_x\,(\mathrm{aa}pp)(\mathrm{a}'\mathrm{a}'pp)(\mathrm{a}''\mathrm{a}''pp)(\mathrm{a}'''\mathrm{a}'''pp)(\alpha\alpha'\alpha''\alpha''') \tag{20}$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial g}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial u_3}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_4}\right)=0\,.$$

Если обратимся къ сочетаніямъ $(x\,,\,u)$, то замѣтимъ что каждому такому сочетанію принадлежатъ двѣ прямыхъ—прямыя пересѣченія четырехъ линейныхъ комплексовъ. Слѣдовательно, въ тройной коинциденціи только сочетанія $(x\,,\,u)$ и могутъ быть основными: для этого необходимо, чтобы принадлежащія такому сочетанію четыре линейныхъ комплекса имѣли общую линейчатую поверхность. Для этого должны обращаться въ нуль опредѣлители матрицы, составленной изъ коэффиціентовъ этихъ четырехъ комплексовъ, что даетъ три независимыхъ условія: *тройная коинциденція — пересѣченіе четырехъ трилинейныхъ коннексовъ—имѣетъ M_3 основныхъ сочетаній $(x\,,\,u)$, образующихъ бикоинциденцію съ характеристиками (64, 192, 192, 64).*

5. Мы здѣсь ограничивались общими случаями, т. е. случаями, когда между коэффиціентами уравненій, опредѣляющихъ конфигураціи, не существуетъ связей. Но было бы, конечно, весьма важно, особенно въ виду дальнѣйшихъ приложеній, остановиться на случаяхъ вырожденій трилинейныхъ коннексовъ и ихъ коинциденцій.

Укажемъ только на нѣкоторые отдѣльные случаи. Трилинейный коннексъ имѣетъ вершину $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ координатнаго тетраэдра основною точкою, если его уравненіе имѣетъ видъ

$$x_1 f_1(p, u) + x_2 f_2(p, u) + x_3 f_3(p, u) = 0 \qquad (a)$$

къ такому виду помощію преобразованія координатъ можетъ быть сведено уравненіе всякаго трилинейнаго коннекса, имѣющаго основную точку, и слѣдовательно, вообще это уравненіе напишется

$$\alpha_x . f_1(p, u) + \beta_x . f_2(p, u) + \gamma_x . f_3(p, u) = 0 \qquad (a')$$

гдѣ α_x, β_x и γ_x означаютъ линейные однородные многочлены отъ $x_1 \dots x_4$.

Замѣтимъ, что трилинейный коннексъ (a) имѣетъ уже не ∞^3 основныхъ сочетаній, а ∞^4, они опредѣляются уравненіями

$$f_1(p, u) = 0, \quad f_2(p, u) = 0, \quad f_3(p, u) = 0$$

и слѣдовательно образуютъ бикоинциденцію съ характеристиками *(1, 3, 3, 1)*.

Если многочлены α_x, β_x и γ_x связаны линейнымъ соотношеніемъ съ постоянными коэффиціентами, то преобразованіемъ координатъ можно уравненіе коннекса привести къ виду

$$x_1 . f_1(p, u) + x_2 . f_2(p, u) = 0 .$$

Здѣсь каждая точка прямой—ребра $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ координатнаго тетраэдра будетъ основною, и такой коннексъ имѣетъ основныхъ сочетаній (p, u) ∞^5, образующихъ коинциденцію (1, 2, 1).

Наконецъ ∞^2 основныхъ точекъ—которыя притомъ составятъ плоскость,—трилинейный коннексъ можетъ имѣть только тогда, когда уравненіе его распадается:

$$\alpha_x . f(p, u) = 0 .$$

Совершенно аналогичны двойственные случаи наличности одной основной плоскости, или пучка плоскостей или наконецъ связки плоскостей,—въ послѣднемъ случаѣ въ уравненіи коннекса долженъ выдѣляться множитель 1-й степени относительно u.

Комплексъ (4), о которомъ мы говорили въ началѣ этого §-а при этомъ уничтожается тождественно.

Аналогичныя замѣчанія могутъ быть сдѣланы и относительно основныхъ прямыхъ.

Трилинейный коннексъ можетъ имѣть пару основныхъ прямыхъ,— если 16 линейныхъ комплексовъ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ всѣ таковы, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} = \lambda_{ik}\varphi_1 + \mu_{ik}\varphi_2 + \nu_{ik}\varphi_3 + \sigma_{ik}\varphi_4.$$

Далѣе всѣ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ могутъ быть выражены какъ линейныя функціи однихъ и тѣхъ же трехъ линейныхъ функцій отъ p, — тогда основныя прямыя образуютъ линейчатую поверхность 2 ранга, или наконецъ двухъ,— когда основныя прямыя образуютъ линейчатую конгруэнцію—пересѣченіе двухъ этихъ комплексовъ.

6. Остановимся теперь на значеніи въ теоріи коннексовъ (x, p, u) уравненій не содержащихъ одного ряда перемѣнныхъ, и притомъ на тѣхъ уравненіяхъ въ особенности, которыя выражаютъ соединенное положеніе точки, прямой, плоскости между собою.

Вообще говоря, уравненіе $f(x, u) = 0$, изображающее коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость), представляетъ теперь, когда за элементъ принимаемъ соединеніе (точка, прямая, плоскость), коннексъ (x, p, u), которому принадлежатъ такіе элементы (x, p, u), которыхъ прямая произвольна, а сочетаніе (x, u) должно принадлежать коннексу $f(x, u) = 0$. Такой коннексъ слѣдовательно имѣетъ ∞^5 основныхъ сочетаній (x, u) и ни одного не основнаго.

Въ частности уравненіе $u_x = (ux) = \sum u_i x_i = 0$ тождественнаго коннекса (x, u) удовлетворяется такими элементами (x, p, u), которыхъ точка x лежитъ въ плоскости u, а прямая можетъ быть совершенно произвольна. Каждое изъ ∞^5 сочетаній (x, u) въ соединенномъ положеніи дастъ начало ∞^4 элементовъ (x, p, u) этого коннекса и никакихъ другихъ элементовъ принадлежащихъ $u_x = 0$ не существуетъ.

Нѣсколько сложнѣе обстоитъ дѣло съ условіями соединеннаго положенія точки и прямой.

Прежде всего условій этихъ не одно, а четыре выражаемыхъ уничтоженіемъ опредѣлителей матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{Vmatrix} = 0 \tag{21}$$

изъ которыхъ независимы только два.

Разъ точка и прямая находятся въ соединеніи то къ каждому изъ такихъ ∞^5 сочетаній можетъ быть добавлена каждая изъ ∞^3 плоскостей пространства.

Но чтобы получить только тѣ элементы (x, p, u), которыхъ сочетаніе (x, p) находится въ соединеніи, недостаточно разсматривать только два какія либо изъ указанныхъ опредѣлителей, а нужно одновременно разсматривать всѣ четыре.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ одно которое-нибудь изъ четырехъ уравненій (21), напримѣръ,

$$(xpp)_1 = x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0.$$
$$= \pi_{12} x_2 + \pi_{13} x_3 + \pi_{14} x_4 = 0. \qquad (A)$$

Оно изображаетъ конфигурацію такого характера.

Точкѣ x пространства, принадлежитъ вообще спеціальный линейный комплексъ (въ самомъ дѣлѣ для этого комплекса коэффиціенты при p_{12}, p_{13} и p_{14} равны нулю и слѣд., инваріантъ $c_{12} c_{34} + c_{13} c_{42} + c_{14} c_{23}$ обращается въ нуль). Этотъ спеціальный комплексъ образуется прямыми, лежащими въ плоскостяхъ проходящихъ черезъ точку x и черезъ вершину $u_1 = 0$ или $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, координатнаго тетрэдра и слѣдовательно, встрѣчающими прямую, соединяющую двѣ эти точки.

Комплексъ этотъ будетъ одинъ и тотъ же для всѣхъ точекъ такой прямой, за исключеніемъ только точки $u_1 = 0$ или $(x_u = x_2 = x_3 = 0)$, для которой ось коннекса становится неопредѣленною, и съ которою элементъ конфигураціи составляетъ каждая прямая пространства, эта вершина координатнаго тетраэдра есть основная точка коннекса (A).

Если зададимся прямою p, то ей принадлежитъ плоскость, проведенная черезъ прямую и черезъ туже вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра—т. е. каждая точка x этой плоскости даетъ вмѣстѣ съ взятою прямою элементъ коннекса (A). Если однако прямая взятая проходитъ черезъ вершину $u_1 = 1$, то плоскость—мѣсто точекъ x—становится неопредѣленною: всѣ прямыя

$$p_{34} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{23} = 0$$

которыя въ количествѣ ∞^2 образуютъ указанную связку, суть основныя прямыя коннекса (A).

Подобнымъ образомъ уравненіе

$$(xpp)_2 = x_1 p_{34} + x_3 p_{41} + x_4 p_{12} = 0 \qquad (B)$$

представляетъ коннексъ, въ которомъ точкѣ x принадлежитъ спеціальный линейный комплексъ, составленный прямыми, встрѣчающими прямую

$(x, u_2 = 0)$, и прямой—точки плоскости, проведенной черезъ эту прямую и туже вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра, и основными прямыми—прямыя связки, имѣющей ее центромъ.

Если возьмемъ оба уравненія (A) и (B), то вмѣстѣ они опредѣлятъ коинциденцію сочетаній (x, p). Если теперь задаться точкою x, то соотвѣтственная прямая p должна встрѣчать прямую $(x, u_1 = 0)$ и прямую $(x, u_2 = 0)$,—т. е. это будутъ 1^0 прямыя проходящія черезъ x, 2^0 прямыя, лежащія въ плоскости, опредѣленной точками x, $u_1 = 0$ и $u_2 = 0$. Но если точка x лежитъ на прямой $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, т. е. если изъ ея координатъ $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то всякая прямая встрѣчающая эту прямую составляетъ съ такою точкою элементъ коинциденціи (A), (B). Такимъ образомъ всѣ точки прямой $(u_1 = 0, u_2 = 0)$ суть основныя точки коинциденціи.

Если зададимся прямой p, то соотвѣтствующія точки x должны лежать въ плоскостяхъ $(p, u_1 = 0)$ и $(p, u_2 = 0)$ т. е. должны лежать на прямой p, ихъ пересѣченіи. Но если прямая p встрѣчаетъ ось $(u_1 = 0, u_2 = 0)$, т. е. лежитъ въ одной изъ плоскостей пучка $\lambda u_1 + \varkappa u_2 = 0$, то каждая изъ точекъ этой плоскости составляетъ съ нею элементъ коиндиденціи, каждая такая прямая будетъ основною. Условіе этого $p_{34} = 0$. Въ самомъ дѣлѣ при этомъ (A) и (B) сводятся къ

$$x_3 p_{12} + x_4 p_{23} = 0, \quad x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0$$

которыя будутъ совмѣстны при всякихъ p,— ибо исключая $x_3 . x_4$ имѣемъ

$$p_{42} . p_{13} - p_{23} . p_{41} = p_{13} p_{42} + p_{14} p_{13} = 0, —$$

въ силу $p_{34} = 0$ къ этому сводится основное уравненіе

$$(p, p) = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0.$$

Итакъ получаемъ ∞^3 основныхъ прямыхъ,

Отсюда видимъ, сколько два взятыя уравненія (A) и (B) допускаютъ лишнихъ рѣшеній, кромѣ элементовъ (x, p) въ соединеніи.

Добавимъ теперь третье уравненіе (E)

$$(xpp)_3 = x_1 p_{24} + x_2 p_{41} + x_4 p_{12} = 0.$$

Съ точкою x составляютъ элементъ конфигураціи тѣ прямыя, которыя встрѣчаютъ три сходящихся въ точкѣ x прямыхъ, соединяющихъ x съ вершинами $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ координатнаго тетраэдра. Слѣдовательно, если x не лежитъ въ плоскости этихъ трехъ вершинъ, то прямыми, принадлежащими конфигураціи, могутъ быть только прямыя, проходящія черезъ самую точку x. Но если точка x лежитъ въ плоскости $x_4 = 0$ координатнаго тетраэдра, то кромѣ вышеупомянутыхъ всякая прямая, лежащая въ той же плоскости, пересѣчетъ три прямыя $(x, u_1 = 0)$, $(x, u_2 = 0)$, $(x, u_3 = 0)$ и будетъ вмѣстѣ съ x составлять элементъ конфигураціи. Точки плоскости $x_4 = 0$ обладаютъ теперь тѣмъ свойствомъ, которое при опредѣленіи коинциденціи одними уравненіями (A) и (B) принадлежало всѣмъ точкамъ пространства.

Если возьмемъ точку ребра координатнаго тетраэдра, лежащаго въ грани его $x_4 = 0$,—напр., точку ребра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

то уравненіе (A), (B), (C) примутъ видъ

$$x_2 . p_{34} = 0, \quad x_1 . p_{34} = 0, \quad x_1 . p_{24} + x_2 . p_{41} = 0$$

которыя—при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ приводятся къ двумъ

$$p_{34} = 0, \quad x_1 p_{24} + x_2 p_{41} = 0.$$

Такимъ образомъ такой точкѣ принадлежитъ снова ∞^2 прямыхъ, точка ребра основной не будетъ, съ нею могутъ быть соединены прямыя связки съ центромъ въ $(x_1, x_2, 0, 0)$ и прямыя плоскости $x_4 = 0$.

Если наконецъ возьмемъ вершину $u_1 = 0$ координатнаго тетраэдра то $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ и (A) удовлетворяется тождественно, а (B) и (C) приводятся къ $x_1 p_{34} = 0$, $x_1 p_{24} = 0$, и такъ какъ $x_1 \neq 0$, то должно быть $p_{34} = 0$, $p_{24} = 0$.

Основное соотношеніе $(p, p) = 0$ даетъ тогда

$$p_{14} . p_{32} = 0 .$$

и такимъ образомъ имѣемъ одну изъ двухъ системъ

$$p_{34} = p_{24} = p_{14} = 0 \qquad \text{или же} \qquad p_{23} = p_{34} = p_{42} = 0.$$

Снова получаемъ ∞^2 прямыхъ, и вершина координатнаго тетраэдра основною точкою не будетъ.

Задаемся прямою p. Точки, принадлежащія этой прямой въ силу (A), (B), (C), должны принадлежать одновременно тремъ плоскостямъ, проведеннымъ черезъ прямую p и черезъ вершины $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ и $u_3 = 0$ координатнаго тетраэдра. Если три эти плоскости различны, или сводятся къ двумъ,—когда прямая p встрѣчаетъ ребро тетраэдра

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \qquad \text{или} \qquad u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \qquad \text{или} \qquad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

то x можетъ быть только точкою пересѣченія этихъ плоскостей, т. е. должна лежать на взятой прямой p. Но если p лежитъ въ плоскости трехъ помянутыхъ вершинъ (т. е. въ плоскости $x_4 = 0$ въ нашемъ случаѣ) то всѣ три плоскости сливаются въ одну, и каждая точка этой плоскости можетъ быть соединяема съ такою прямою въ элементъ конфигураціи. Итакъ получимъ что и при добавленіи 3-го уравненія получается еще ∞^2 основныхъ прямыхъ.

Возьмемъ наконецъ всѣ четыре уравненія:

$$\left.\begin{array}{r}
+x_2 p_{34} + x_3 p_{42} + x_4 p_{23} = 0\,,\\
x_1 p_{34} + \qquad + x_3 p_{41} + x_4 p_{13} = 0\,,\\
x_1 p_{24} + x_2 p_{41} + \qquad + x_4 p_{12} = 0\,,\\
x_1 p_{23} + x_2 p_{31} + x_3 p_{12} + \qquad = 0\,.
\end{array}\right\} \qquad (21')$$

Теперь заданной прямой принадлежатъ точки, лежащія одновременно въ четырехъ плоскостяхъ,—проходящихъ черезъ взятую прямую и черезъ вершины координатнаго тетраэдра. Если даже прямая лежитъ въ одной изъ граней этого тетраэдра или совпадаетъ съ однимъ изъ его реберъ, то изъ четырехъ плоскостей двѣ будутъ различны и слѣдовательно, точки, дающія элементъ конфигураціи со взятою прямой должны непремѣнно лежать на самой прямой. Основныхъ прямыхъ нѣтъ. Если зададимся точкою, то принадлежащія ей прямыя должны встрѣчать четыре прямыхъ, соединяющихъ точку съ вершинами координатнаго тетраэдра; прямыя эти могутъ сводиться къ тремъ, не лежащимъ въ одной плоскости, если точка лежитъ въ одной изъ граней, на одномъ изъ реберъ или совпадаетъ съ одною изъ вершинъ этого тетраэдра, но во всякомъ случаѣ искомыя прямыя могутъ быть только прямыя, проходящія черезъ самую взятую точку.

Итакъ посторонніе рѣшенія устраняются вполнѣ только при одновременномъ привлеченіи всѣхъ четырехъ уравненій (21').

Совершенно аналогично убѣдимся что уравненія, выражающія соединенное положеніе прямой и плоскости

$$\left.\begin{array}{r}
+u_2 \pi_{34} + u_3 \pi_{42} + u_4 \pi_{23} = 0\,,\\
u_1 \pi_{34} + \qquad + u_3 \pi_{41} + u_4 \pi_{13} = 0\,,\\
u_1 \pi_{24} + u_2 \pi_{41} + \qquad + u_4 \pi_{12} = 0\,,\\
u_1 \pi_{23} + u_2 \pi_{31} + u_3 \pi_{12} + \qquad = 0\,,
\end{array}\right\} \qquad (22)$$

должны быть приняты во вниманіе всѣ четыре для того, чтобы со всякою плоскостью могли быть соединены только прямыя, въ ней лежащія, и со всякою прямою только плоскости, черезъ прямую проходящія.

Наконецъ замѣтимъ, что если хотимъ изъ всѣхъ ∞^{10} элементовъ (x, p, u) пространства выдѣлить тѣ, въ которыхъ точка x, прямая p и плоскость u находятся въ соединеніи, то нужно взять уравненія (21′) и (22), а уравненіе $u_x = 0$ уже въ нихъ заключается и такимъ образомъ получимъ ∞^6 элементовъ, которыхъ точка лежитъ на прямой и прямая лежитъ въ плоскости.

§ III.

Особенные элементы.

1. Если сочетаніе (p, u) не будетъ основнымъ, ему принадлежитъ въ силу уравненія коннекса

$$f(x, p, u) = 0 \tag{1}$$

опредѣленная поверхность X_{pu} порядка m (если f — степени m относительно x).

Если (1) имѣетъ основную точку, то всѣ поверхности X_{pu} проходятъ черезъ эту точку. Если (x, p) или (x, u) суть основныя сочетанія, то черезъ точку x проходятъ всѣ X_{pu} въ которыхъ p, resp. u суть прямая (или плоскость) основного сочетанія.

Изъ точекъ поверхности X_{pu} выдѣляются ея особенныя точки, онѣ даютъ начало кратнымъ элементамъ коннекса: каждую особенную точку можемъ считать соединеніемъ нѣсколькихъ обыкновенныхъ, стало быть и элементъ (x, p, u) коннекса (1), содержащій эту точку, явится кратнымъ элементомъ коннекса по отношенію къ точкѣ или *точечнымъ особеннымъ* элементомъ. Касательная къ X_{pu} въ ея точкѣ x

$$\sum X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

въ случаѣ точечно-особеннаго элемента становится неопредѣленною, потому что для особенной точкѣ поверхности X_{pu} должно быть:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \tag{3}$$

Вмѣсто (2) будемъ поэтому имѣть уравненіе

$$\sum X_i X_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \tag{4}$$

которое изображаетъ при этомъ конусъ, потому что изъ (3) слѣдуетъ, что гессіенъ (1) въ отношеніи x_i равенъ нулю:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| = a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} d_x^{m-2} (\mathfrak{aa}pp)(\mathfrak{bb}pp)(\mathfrak{cc}pp)(\mathfrak{dd}pp)\, u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n u_\delta^n = 0. \quad (5)$$

Уравненія (3) опредѣляютъ ∞^6 элементовъ (x, p, u). Произвольно задать прямую p и плоскость u мы для общаго коннекса не можемъ. Сочетанія (p, u), принадлежащія которымъ поверхности X_{pu} обладаютъ особенною точкою, образуютъ по предыдущему коннексъ ранга $4(m-1)^3 r$ и класса $4(m-1)^3 n$. Каждая точка пространства является особенною точкою на поверхностяхъ X_{pu} принадлежащихъ ∞^3 сочетаніямъ (p, u) образующимъ пару (комплексъ ранга $4rn^3$, плоскостное пространство), въ которой каждой плоскости принадлежитъ $2r^4$ прямыхъ. Если зададимся прямою, то плоскости u огибаютъ поверхность $4(m-1)^3 n$ класса, а принадлежащія всѣмъ такимъ сочетаніямъ: (данная прямая, касательная къ этой поверхности) особенныя точки соотвѣтствующихъ X_{pu} покрываютъ поверхность порядка $4(m-1)^3 n$.

Если и всѣ вторыя производныя $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ обращаются въ нуль, а производныя 3-го порядка въ 0 не обращаются, имѣемъ высшую особенность—касательныя къ такой точкѣ x къ X_{pu} огибаютъ конусъ 3-го порядка,—такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n), заданный общимъ уравненіемъ, содержитъ $13440(m-2)^3 r^4 n^3$.

2. Аналогично можно установить понятіе объ элементахъ, особенныхъ по отношенію плоскости — *плоскостныхъ особенныхъ элементахъ*. Такое наименованіе будемъ придавать тѣмъ элементамъ (x, p, u), которыхъ плоскость u есть особенная касательная поверхности U_{xp}, принадлежащей сочетанію (x, p) въ коннексѣ (1). Плоскости эти при данныхъ (x, p) опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial f(xpu)}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_3} = 0, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial u_4} = 0 \quad (6)$$

которые вообще говоря совмѣстными при данныхъ (x, p) не будутъ.

Но предполагая, что x и p могутъ принимать всевозможныя значенія, получимъ: *плоскостные особенные элементы коннекса* (m, r, n) *образуютъ тройную коинциденцію съ характеристиками*

$$4m^3 r,\ 4m^3(n-1),\ 6m^2 r^2,\ 12m^2 r(n-1),\ 6m^2(n-1)^2,$$
$$4mr^3,\ 12mr^2(n-1),\ 12mr(n-1)^2,\ 4m(n-1)^3,\ r^4,$$
$$4r^3(n-1),\ 6r^2(n-1)^2,\ 4r(n-1)^3, \quad (7)$$

значеніе которыхъ аналогично вышеприведеннымъ.

Для такихъ элементовъ уравненіе точки прикосновенія u и U_{xp}

$$\sum U_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \tag{8}$$

обращается тождественно въ нуль, и точки прикосновенія образуютъ въ плоскости u кривую 2-го класса

$$\sum U_i U_k \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} = 0 \tag{9}$$

потому что при выполненіи (6) опредѣлитель уравненія (9) обращается въ нуль:

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} \right| = 0. \tag{10}$$

Мы предположили при этомъ, что не всѣ производныя $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k}$ обращаются въ нуль.

Если же всѣ эти производныя обращаются въ 0, имѣемъ высшую особенность. Такихъ элементовъ коннексъ (m, r, n), котораго коэффиціенты не связаны никакими добавочными соотношеніями содержитъ конечное число $13440\, m^3 r^4 (n-2)^3$.

При этомъ конечно предполагаемъ, что всѣ производныя 3-го порядка по x одновременно въ 0 не обращаются,—что и будетъ имѣть мѣсто для коннекса, заданнаго общимъ уравненіемъ.

3. Прежде чѣмъ говорить объ элементахъ коннекса (x, p, u), представляющихъ особенность относительно прямой, укажемъ на обстоятельство, которое встрѣчается и въ другихъ коннексахъ, именно на роль основныхъ сочетаній по отношенію къ точечнымъ и плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.

Пусть (p, u) есть основное сочетаніе коннекса (m, r, n)

$$f(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Тогда согласно самому опредѣленію основныхъ сочетаній при замѣнѣ, x_i черезъ $x_i + \varepsilon x'_i$ (гдѣ x'_i—координаты какой нибудь совершенно произвольной точки) уравненіе также должно удовлетворяться при (p, u)—основномъ сочетаніи.

Итакъ при этомъ не только (1) выполнено, но и

$$f(x + \varepsilon x', p, u) = 0$$

или

$$f(x, p, u) + \varepsilon \sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{1.2} \sum\nolimits_2 = 0.$$

Отбрасывая въ силу (1) 1-й членъ, раздѣляя на ε и переходя къ предѣлу $\varepsilon = 0$ получимъ: если (p, u) основное сочетаніе, то при совершенно произвольныхъ x'_i имѣемъ

$$\sum x'_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

а для этого необходимо должны обращаться въ нуль производныя, т. е. уравненія (3) выполнены. Итакъ: *если коннексъ (1) имѣетъ основное сочетаніе (p, u), то это сочетаніе въ соединеніи съ каждою точкою x пространства образуетъ элементъ удовлетворяющій уравненіямъ (3).*

Можно бы поэтому сказать, что *каждое основное сочетаніе (p, u) даетъ начало ∞^3 точечно-особенныхъ элементовъ,* но въ этомъ, — какъ уже приходилось говорить въ другомъ мѣстѣ [1]), — является нѣкоторая натянутость: для основного сочетанія (p, u) уравненіе (1) удовлетворяется независимо отъ значеній x, уравненіе X_{pu} есть $0 = 0$.

Совершенно подобнымъ образомъ покажемъ, что *каждому основному сочетанію коннекса (1) соотвѣтствуетъ ∞^3 элементовъ (x, p, u), выполняющихъ уравненія (6).*

Поэтому въ дальнѣйшемъ прибѣгнемъ къ другому опредѣленію особенныхъ элементовъ. но предварительно закончимъ разборъ типовъ особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u).

4. Линейчатыми особенными элементами можно называть,— аналогично предыдущему,—тѣ элементы коннекса, которыхъ прямая есть особенная прямая коннекса K_{xu} принадлежащаго сочетанію (x, u) элемента.

Но при этомъ необходимо условиться относительно того, что называть особенными прямыми комплекса.

Koenigs [2]), слѣдуя Пашу, называетъ *особенными* прямыми комплекса $F = 0$ тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial p}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_{12}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{34}} + \frac{\partial F}{\partial p_{13}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{12}} + \frac{\partial F}{\partial p_{14}} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_{23}} = 0. \qquad (11)$$

Въ коннексѣ (m, r, n) элементовъ, которыхъ прямыя выполняютъ уравненіе (11), имѣется коинциденція, которой характеристики:

$$\alpha_{200} = 2m^2, \quad \alpha_{110} = 2m(2r-1), \quad \alpha_{101} = 4mn, \quad \alpha_{020} = 2r(r-1),$$
$$\alpha_{110} = 2n(2r-1), \quad \alpha_{002} = 2n^2.$$

---

[1]) Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса § 1. Изв. Каз. Физ. Мат. Общ. 1902 г.

[2]) La géométrie réglée et ses applications, p. 77.

Въ послѣдующемъ намъ придется еще встрѣтиться съ этою коинциденціею. Замѣтимъ здѣсь, что пучекъ касательныхъ комплексовъ

$$\sum \frac{\partial F}{\partial p_{ik}} P_{ik} + \lambda \sum \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = 0 \tag{12}$$

состоитъ для подобной прямой весь изъ спеціальныхъ комплексовъ, и всѣ оси этихъ комплексовъ образуютъ плоскій пучекъ.

Казалось бы однако болѣе правильнымъ давать подобнымъ прямымъ иное наименованіе, напримѣръ *спеціальныхъ*, сохраняя названіе особенныхъ прямыхъ для тѣхъ, свойства которыхъ имѣютъ большее сходство со свойствами особенныхъ точекъ кривыхъ линій и поверхностей.

Если линейчатое пространство изобразимъ въ плоскомъ пространствѣ пяти измѣреній квадратичнымъ M_4, то комплексъ p-го ранга выдѣлится изъ этого M_4 уравненіемъ p-ой степени между 5-ью координатами точки (или между 6-ью однородными), т. е. изобразится M_3 — пересѣченіемъ двухъ M_4. Особенною точкою такого M_3 будетъ такая точка, въ которой два M_4 между собою касаются, и слѣдовательно, производныя ихъ уравненій по координатамъ пропорціональны.

Соотвѣтственно этому можемъ называть *особенною* прямою комплекса такую его прямую, которая выполняетъ шесть уравненій

$$\lambda' \frac{\partial F(p)}{\partial p_{ik}} + \mu' \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} = 0. \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{13}$$

Для такой прямой уравненіе пучка линейныхъ комплексовъ (12) приводится къ виду

$$\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'}\right) \sum \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{ik}} P_{ik} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{\mu'}{\lambda'}\right)(p\,,\,P) = 0$$

т. е. сводится къ одному только спеціальному линейному комплексу, образуемому прямыми встрѣчающими „прямую прикосновенія“ p.

Уравненій (13) по исключеніи λ'/μ' пять, уравненіе комплекса въ силу (13) есть слѣдствіе основного уравненія $\frac{1}{2}(p\,,\,p) = 0$, слѣдовательно, такихъ особенныхъ прямыхъ комплексъ вообще не содержитъ а для существованія ихъ необходимо одно соотношеніе между коэффиціентами.

Другое свойство этихъ особенныхъ прямыхъ заключается въ слѣдующемъ. Линейные комплексы, содержащіе данную прямую p комплекса и находящіеся въ инволюціи съ каждымъ изъ касательныхъ по этой прямой линейныхъ комплексовъ, образуютъ M_3—они опредѣляются уравненіями

$$(c\,,\ p)=0\,, \quad \sum c_{ik}\frac{\partial f}{\partial p_{ik}}=0\,.$$

Но для особенной прямой два эти уравненія сводятся къ одному, и линейные комплексы указаннаго свойства образуютъ уже M_4.

Для специальной же прямой (особенной по Koenigs'у) линейные комплексы эти образуютъ M_3 комплексовъ, содержащихъ двѣ данныхъ прямыхъ.

Очевидно, что каждая прямая, особенная въ указанномъ здѣсь смыслѣ, будетъ особенною и для Koenigs'а, т. е. будетъ также и спеціальною, но не обратно.

Принимая такое опредѣленіе особенныхъ прямыхъ можемъ ввести теперь понятіе о линейчатыхъ особенныхъ элементахъ коннекса (x, p, u).

Эти элементы опредѣляются слѣдовательно, уравненіями

$$\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{12}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{13}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}}{\dfrac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{14}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}}{\dfrac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{34}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}}{\dfrac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{42}}}=\frac{\dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{13}}} \qquad (14)$$

которыя могутъ быть замѣнены напримѣръ, такими

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{13}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}-\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{12}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,,\\
&\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}-\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{13}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}=0\,,\\
&\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,, \qquad (15)\\
&\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}-\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0\,,\\
&\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial (p\,,\ p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}=0\,.
\end{aligned}$$

Къ уравненіямъ (14) должно быть конечно присоединено еще основное уравненіе $(p\,,\ p)=0$, и тогда уравненіе самаго коннекса есть слѣдствіе уравненій (14) и основного уравненія.

Чтобы опредѣлить характеристики этой четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ замѣтимъ, что переходъ отъ системы (14) къ системѣ (15) сопровождается введеніемъ излишнихъ рѣшеній, опредѣляемыхъ системами

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,, \\
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{d p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,, \\
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{12}}=0\,, \\
\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}=0\,,
\end{gathered} \tag{16}
$$

и еще тремя такими системами, въ которыхъ фигурируютъ послѣдовательно

$\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}=0 \quad \dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{1k}}=0$ и 3 уравненія изъ системы (15)

$\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}=0 \quad \dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0$ „ „ „ „

$\dfrac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0 \quad \dfrac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0.$ „ „ „ „

Но исключая эти системы мы дважды исключаемъ такія системы

1) $$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,, \quad \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}=0\,, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}-\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{23}}\cdot\frac{\partial f(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0\,,$$

2) $$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{13}}=0\,, \quad \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{42}}=0\,, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{13}}=0\,, \quad \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{42}}=0\,,$$

$$\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{34}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{14}}-\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{14}}\cdot\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{34}}=0\,.$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующимъ значеніямъ характеристикъ четверной коинциденціи линейчатыхъ особенныхъ элементовъ коннекса (m, r, n):

$$\delta_{320} = m^3(10r^2 - 16r + 7), \quad \delta_{311} = 4m^3n(5r - 4), \quad \delta_{302} = 10m^3n^2,$$

$$\delta_{230} = m^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{221} = 3m^2n(10r^2 - 16r + 7),$$

$$\delta_{212} = 6m^2n^2(5r - 4), \quad \delta_{203} = 10m^2n^3,$$

$$\delta_{140} = m(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3),$$

$$\delta_{131} = 2mn(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{122} = 3mn^2(10r^2 - 16r + 7),$$

$$\delta_{113} = 4mn^3(5r - 4), \quad \delta_{041} = n(5r^4 - 16r^3 + 21r^2 - 12r + 3),$$

$$\delta_{032} = n^2(10r^3 - 24r^2 + 21r - 6), \quad \delta_{023} = n^3(10r^2 - 16r + 7).$$

Не трудно убѣдиться, что уравненія (14) выполняются элементомъ (x, p, u), если (x, u) есть основное сочетаніе, а p — какая угодно прямая пространства.

Дѣйствительно, уравненіе коннекса, которое можно писать

$$f(xpu) + f_1(xpu)(p, p) = 0 \tag{1'}$$

[гдѣ $f_1(xpu) = 0$ совершенно произвольный, коннекса $(m, r-2, n)$], должно при подстановкѣ вмѣсто x, u координатъ основного сочетанія удовлетворяться не только координатами произвольной прямой p, но и безконечно близкой къ ней $p + \varepsilon p'$ (гдѣ $p + \varepsilon p'$ — также нѣкоторая прямая), т. е. должны имѣть

$$f(x, p + \varepsilon p', u) + f_1(x, p + \varepsilon p', u)(p + \varepsilon p', p + \varepsilon p') = 0.$$

Разлагая по степенямъ ε, отбрасывая члены отъ ε независящіе въ силу $(1')$, раздѣляя на ε и переходя къ предѣлу $\varepsilon = 0$, получимъ, что при произвольныхъ p'_{ik} должно быть

$$\sum p'_{ik} \frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{ik}} + (p, p) \sum p'_{ik} \frac{\partial f_1(xpu)}{\partial p_{ik}} + f_1(xpu) . (p, p') = 0.$$

Второй членъ выпадаетъ въ силу $(p, p) = 0$ и остается уравненіе

$$\sum p'_{ik} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + f_1 \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ik}} \right) = 0,$$

которое при совершенно произвольныхъ p' (ограниченныхъ только условіемъ $p+\varepsilon p'$ — прямая) ведетъ за собою уравненія (14). Но хотя эти уравненія и выполнены, считать всякую прямую p особенною прямою комплекса, принадлежащаго основному сочетанію, является нѣкоторою натяжкою въ томъ отношеніи, что самый комплексъ имѣетъ уравненіе $0=0$ и является совокупностью всѣхъ прямыхъ пространства.

5. Указанными типами особенныхъ элементовъ еще далеко не исчерпываются возможные ихъ типы. Прежде всего элементъ (x, p, u) можетъ одновременно удовлетворять двумъ изъ трехъ системъ (3), (6) и (14).

Если элементъ (x, p, u) выполняетъ уравненія (3) и (6), т. е. точка его есть особенная точка поверхности X_{pu} и плоскость—особенная касательная поверхности U_{xp}, то можно такой элементъ называть *точечно-плоскостнымъ особеннымъ* элементомъ. Подобныхъ элементовъ коннексъ (1) имѣетъ вообще ∞^3, потому что изъ восьми уравненій (3) и (6) независимы только семь въ силу тождества

$$mnf(x, p, u)=n\sum x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=m\sum u_k\frac{\partial f}{\partial u_k}=0.$$

Отсюда замѣняя $\dfrac{\partial f}{\partial x_4}=0$ черезъ $f=0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial u_4}$ также черезъ $f=0$ вводимъ излишнія рѣшенія: отъ шестерной коинциденціи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\quad (i=1, 2, 3),\quad \frac{\partial f}{\partial u_k}=0\quad (k=1, 2, 3),\quad f=0$$

должны быть отброшены:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\quad (i=1, 2, 3),\quad \frac{\partial f}{\partial u_k}=0\quad (k=1, 2, 3)\quad x_4=0 \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\quad (i=1, 2, 5),\quad \frac{\partial f}{\partial u_k}=0\quad (k=1, 2, 3)\quad u_4=0. \tag{18}$$

Отсюда и можемъ найти характеристики шестерной коинциденціи точечно-плоскостныхъ особенныхъ элементовъ:

$$\lambda_{340}=(35m^3-60m^2+30m-4)r^4.\quad \lambda_{043}=(35n^3-60n^2+30n-4)r^4.$$

$$\lambda_{331}=r^3[3n\{m^3+9m^2(m-1)+9m(m-1)^2+(m-1)^3\}+$$
$$+(n-1)\{m^3+27m^2(m-1)+45m(m-1)^2+13(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{133}=r^3[3m\{n^3+9n^2(n-1)+9n(n-1)^2+(n-1)^3\}+$$
$$+(m-1)\{n^3+27n^2(n-1)+45n(n-1)^2+13(n-1)^3\}].$$

$$\lambda_{241} = 3r^4[3n\{m^2 + 3m(m-1) + (m-1)^2\} +$$

$$+ (n-1)\{2m^2 + 11m(m-1) + 7(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{142} = 3r^4[3m\{n^2 + 3n(n-1) + (n-1)^2\} +$$

$$+ (m-1)\{2n^2 + 11n(n-1) + 7(n-1)^2\}].$$

$$\lambda_{232} = 3r^3[n^2\{3m^2 + 6m(m-1) + (m-1)^2\} +$$

$$+ n(n-1)\{6m^2 + 24m(m-1) + 10(m-1)^2\} +$$

$$+ (n-1)^2\{m^2 + 10m(m-1) + 9(m-1)^2\}].$$

$$\lambda_{313} = r[n^3\{m^3 + m^2(m-1)\} + n^2(n-1)\{3m^3 + 27m^2(m-1) + 18m(m-1)^2\} +$$

$$+ n(n-1)^2\{18m^2(m-1) + 45m(m-1)^2 + 9(m-1)^3\} +$$

$$+ (n-1)^3\{9m(m-1)^2 + 7(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{322} = 3r^2[n^2\{m^3 + 6m^2(m-1) + 3m(m-1)^2\} +$$

$$+ n(n-1)\{m^3 + 15m^2(m-1) + 21m(m-1)^2 + 3(m-1)^3\} +$$

$$+ (n-1)^2\{3m^2(m-1) + + 12m(m-1)^2 + 5(m-1)^3\}].$$

$$\lambda_{223} = 3r^2[m^2\{n^3 + 6n^2(n-1) + 3n(n-1)^2\} +$$

$$+ m(m-1)\{n^3 + 15n^2(n-1) + 21n(n-1)^2 + 3(n-1)^3\} +$$

$$+ (m-1)^2\{3n^2(n-1) + 12n(n-1)^2 + 5(n-1)^3\}].$$

Подобнымъ образомъ элементы, которые суть точечные особенные и линейчатые особенные, должны выполнять 4 уравненія (3) и 5 уравненій (14). Но эти девять уравненій опредѣляютъ не восьмерную, а семерную коинциденцію, потому что можемъ писать тождество

$$r\sum x_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + (p\,,\;p)\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) = m\sum p_{jl}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + (p\,,\;p)\frac{\partial f_1}{\partial p_{jl}} + f_1\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{jl}}\right)$$

или

$$r\sum x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} = m\sum p_{jl}\left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + f_1\frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p_{jl}}\right).$$

Для линейчатыхъ особенныхъ элементовъ правая часть сводится къ виду

$$m(f_1 - \lambda/\mu)(p\,,\;p) = 0.$$

Слѣдовательно, въ силу уравненій (14) имѣемъ уже $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, и такимъ образомъ изъ 4 уравненій (3) можемъ удержать только три.

Подобнымъ образомъ семерную коинциденцію образуютъ *линейчато-плоскостные* особенные элементы, для которыхъ одновременно должны быть выполнены девять уравненій (6) и (14), сводящихся къ восьми независимымъ.

Если наконецъ (x, p, u) выполняетъ всѣ три системы уравненій одновременно т. е. будетъ и точечнымъ особеннымъ, и плоскостнымъ особеннымъ и въ тоже время линейчатымъ особеннымъ элементомъ, то онъ долженъ выполнять тринадцать уравненій, изъ которыхъ два суть слѣдствія остальныхъ. Поэтому коннексъ (1) подобныхъ элементовъ вообще не имѣетъ, и для существованія ихъ между коэффиціентами уравненія (1) должно существовать соотношеніе.

Поэтому можно подобные элементы называть *собственно-особенными элементами* коннекса, въ противоположность вышеперечисленнымъ типамъ особенныхъ элементовъ, которые присущи каждому коннексу.

Собственныхъ особенныхъ элементовъ коннексъ при извѣстныхъ условіяхъ можетъ имѣть не только конечное, но и безконечно большое число, многообразіе ихъ можетъ составлять даже простую коинциденцію, какъ въ поверхностяхъ могутъ быть двойныя кривыя.

Вышеуказанныхъ особенныхъ (точечныхъ и т. д.) элементовъ коннексъ можетъ также содержать болѣе высокое, чѣмъ въ общемъ случаѣ многообразіе, и тогда они не будутъ уже обыкновенными особенностями.

6. Послѣ приведеннаго выше разбора особенныхъ элементовъ коннекса мы можемъ пополнить сказанное въ § I объ основныхъ точкахъ, прямыхъ и плоскостяхъ.

Основная точка, если она въ коннексѣ существуетъ, принадлежитъ всѣмъ ∞^7 поверхностямъ X_{pu} коннекса. Изъ нихъ на ∞^4 поверхностяхъ она будетъ особенною,—на тѣхъ именно, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (p, u), выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial x_i}\right)_{x = x_{осн.}} = 0. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (19)$$

Такимъ образомъ каждая основная точка даетъ начало ∞^4 точечнымъ особеннымъ элементамъ.

Можетъ однако случиться, что уравненія (19) удовлетворяются независимо отъ значеній p и u.

Тогда такая основная точка представитъ высшую особенность и мы можемъ назвать ее *особенною основною точкою.* Она даетъ начало ∞^7

точечнымъ особеннымъ элементамъ. Переходною стадіей являются случаи, когда (19) имѣютъ ∞^5 или ∞^6 общихъ сочетаній (p, u).

Примѣръ такой особенной точки представятъ коннексы вида

$$f(xpu) = \varphi(xpu) \sum a_{ik} x_i x_k + \varphi_1(xpu) \sum a'_{ik} x_i x_k + \\ + \varphi_2(xpu) \sum a''_{ik} x_i x_k = 0\,,$$

если знакъ суммъ распространяется на значенія $i, k = 1, 2, 3$. Тогда при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ обращаются въ нуль независимо отъ значеній p и u не только f, но и всѣ ея производныя по x; здѣсь φ, φ_1, φ_2 означаютъ совершенно произвольные коннексы $(m-2, r, n)$.

Подобнымъ образомъ основная плоскость касается всѣхъ ∞^7 поверхностей U_{xp} коннекса, и будетъ особенно касательною для тѣхъ ∞^4 изъ нихъ, которыя принадлежатъ сочетаніямъ (x, p), выполняющимъ уравненія

$$\left(\frac{\partial f(x, p, u)}{\partial u_k}\right)_{u=u_{осн.}} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \qquad (20)$$

Такимъ образомъ *каждая основная плоскость даетъ начало ∞^4 плоскостнымъ особеннымъ элементамъ.*

Но можетъ случиться, что уравненія (13) сводятся къ двумъ или одному независимому уравненію и стало быть опредѣляютъ ∞^5 или ∞^6 сочетаній (x, p). Наконецъ возможны случаи, когда уравненія (13) выполняются тождественно, и слѣдовательно плоскость будетъ особенною касательною ко всѣмъ ∞^7 поверхностямъ U_{xp} коннекса. Въ послѣднемъ случаѣ называемъ ее *особенною основною плоскостью* коннекса.

То же самое можно замѣтить и относительно основныхъ прямыхъ. Основная прямая принадлежитъ всѣмъ ∞^6 комплексамъ P_{xu} коннекса. Она будетъ особенною прямою въ тѣхъ изъ нихъ, которые принадлежатъ сочетаніямъ (x, u), опредѣляемымъ уравненіями:

$$\lambda \left(\frac{\partial (p, p)}{\partial p_{jl}}\right)_{p=p_{осн.}} + \mu \left(\frac{\partial f(xpu)}{\partial p_{jl}}\right)_{p=p_{осн.}} = 0. \qquad (jl = 1, 2, 3, 4) \qquad (21)$$

Каждая основная прямая ведетъ за собою ∞^1 линейчатыхъ особенныхъ элементовъ.

Можетъ случиться однако, что шесть уравненій сводятся къ меньшему числу независимыхъ или даже сводятся къ одному, опредѣляющему значеніе λ/μ. Въ послѣднемъ случаѣ основная прямая будетъ особенною прямою во всѣхъ ∞^6 комплексахъ P_{xu} и мы придадимъ ей тогда наименованіе *особенной основной прямой* коннекса (1).

Мы можемъ далѣе говорить объ *особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ* (x, u), (x, p), (p, u).

Пусть (x^0, u^0) есть основное сочетаніе коннекса (1). Тогда всѣ коннексы $K_p(x, u)$, принадлежащіе всѣмъ прямымъ пространства, содержатъ элементъ (x^0, u^0). Это сочетаніе для нѣкоторыхъ изъ нихъ можетъ быть собственно особеннымъ элементомъ,—если при извѣстныхъ значеніяхъ p выполняются уравненія.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0.$$

Если же эти уравненія выполняются сочетаніемъ (x^0, u^0) при всякихъ значеніяхъ p, то мы назовемъ (x^0, u^0) особеннымъ основнымъ сочетаніемъ.

Такимъ же образомъ придемъ къ понятію объ особенныхъ основныхъ сочетаніяхъ (x, p) и (p, u).

7. Въ предыдущемъ были указаны недостатки даннаго опредѣленія особенныхъ элементовъ коннекса (x, p, u),—оно только съ натяжкою примѣнимо къ тѣмъ особеннымъ элементамъ, въ составъ которыхъ входитъ какое либо основное сочетаніе коннекса.

Можно избѣжать этого, если разсматривать не поверхность принадлежащую сочетанію (p, u) и т. д., какъ мы это дѣлали выше, а напримѣръ коннексъ $K_p(x, u)$, принадлежащій прямой p въ коннексѣ (1). Тогда точечными особенными элементами коннекса (1) назовемъ тѣ, коихъ сочетаніе (x, u) есть точечный особенный элементъ $K_p(x, u)$, плоскостными особенными тѣ, которыхъ сочетаніе (x, u) есть плоскостной особенный элементъ того же коннекса $K_p(x, u)$, и точечно-плоскостными особенными элементами (1)—тѣ, которыхъ сочетаніе (x, u) есть собственно-особенный элементъ коннекса $K_p(x, u)$.

Предполагая, что опредѣленіе особенныхъ элементовъ для коннекса съ элементомъ (точка, плоскость) достаточно выяснено, придемъ къ опредѣленію вышеуказанныхъ типовъ особенныхъ элементовъ (1). Обращаясь къ особенностямъ коннексовъ $K_u(x, p)$ и $K_x(p, u)$, получимъ представленіе и объ остальныхъ типахъ особенностей коннекса (x, p, u).

Недостатки такого опредѣленія: 1° для коннексовъ съ элементомъ (точка прямая) и (прямая, плоскость) понятіе особеннаго элемента еще недостаточно выяснено, и надо было бы предварительно остановиться на этомъ вопросѣ, не относящемся непосредственно къ предмету настоящей статьи; 2° хотя мы и избѣжимъ, держась этого опредѣленія, неудобствъ, вызываемыхъ при первомъ опредѣленіи основными сочетаніями, но основныя точки, прямыя и плоскости приводятъ къ тѣмъ же затрудненіямъ: уравненія соотвѣтствующихъ имъ коннексовъ приводятся къ виду $0 = 0$.

Связывать подобно Клебшу понятіе объ особенныхъ элементахъ съ понятіемъ о сопряженномъ коннексѣ нельзя потому, что, какъ уже было это мною указано въ другомъ мѣстѣ [1]), сопряженнаго коннекса для разсматриваемыхъ конфигурацій не существуетъ.

8. Соприкасающійся трилинейный коннексъ. Какъ для коннекса съ элементомъ (точки, плоскость) при опредѣленіи особенныхъ элементовъ въ основу можно положить соприкасающійся билинейный коннексъ,—т. е. рядомъ съ уравненіемъ $f(x, u) = 0$ такого коннекса разсматривать уравненіе

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k = 0,$$

можно и для коннексовъ (x, p, u) ввести аналогичный, но уже трилинейный коннексъ. Но такъ какъ уравненіе коннекса (x, p, u) можетъ быть изображено въ различныхъ видахъ

$$f(xpu) + f_1(xpu)(p, p) = 0,$$

смотря по выбору коннекса $f_1 = (m, r-2, n)$, то и за сопряженный трилинейный коннексъ мы не можемъ принять прямо

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0,$$

но должны разсматривать цѣлую систему ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ

$$\sum_{i,k,jl} \frac{\partial^3 f(x, p, u)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i U_k (p, P) = 0. \qquad (22)$$

Это обстоятельство, конечно, нѣсколько усложняетъ примѣненіе соприкасающагося трилинейнаго коннекса для изученія коннекса. Но для установленія понятія объ особенныхъ элементахъ онъ оказывается пригоднымъ.

Элементъ (x, p, u), для котораго составленъ соприкасающійся коннексъ, и который можно назвать элементомъ прикосновенія, принадлежитъ соприкасающемуся коннексу, такъ какъ подстановка $X = x$, $U = u$, $P = p$ даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} X_i P_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} . (p, p) =$$
$$= mrn\, f(xpu) + mn\, f_1(xpu) . (p, p) = 0.$$

---

[1]) Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. „Изв. Каз. Ф.-М. О.“ (2) 1902. Въ § V я остановлюсь на этомъ подробнѣе.

При этомъ сочетаніе (p, u) будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося коннекса (независимо отъ f_1), если его уравненіе выполняется независимо отъ значеній X.

Но подстановка $P=p$, $U=u$ въ уравненіе (22) даетъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} p_{jl} u_k . X_i + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} X_i u_k . (p, p) = 0$$

или

$$rn \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i + n(p, p) \sum_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} X_i = 0$$

и наконецъ, въ силу $(p, p) = 0$,

$$rn \sum_i \frac{\partial f(xpu)}{\partial x_i} X_i = 0 .$$

Итакъ *сочетаніе (p, u) элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса, если (x, p, u) выполняетъ условія*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

т. е. когда по предыдущему *элементъ будетъ точечнымъ особеннымъ элементомъ коннекса (1).*

Мы и можемъ опредѣлить точечный особенный элементъ тѣмъ именно свойствомъ, что его сочетаніе (p, u) есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Точно также нетрудно убѣдиться, что *плоскостной особенный элементъ коннекса таковъ, что его сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе соприкасающагося трилинейнаго коннекса.* Дѣйствительно, подстановка $X = x$, $P = p$ въ уравненіе (28) соприкасающагося коннекса доставитъ

$$\sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial p_{jl} \partial u_k} x_i p_{jl} U_k + \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k} x_i U_k . (p, p)$$

$$= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + m \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k (p, p)$$

$$= mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0 .$$

Уравненіе это удовлетворяется независимо отъ значеній U, если выполнены уравненія

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \qquad (6)$$

Наконецъ, если выполнены уравненія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial (p\,;\,p)}{\partial p_{jl}} = 0\,, \qquad (jl = 1, 2, 3, 4) \qquad (13)$$

то изъ всей совокупности ∞^{16} различныхъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ для ∞^{15} сочетаніе $(x\,,\,u)$ элемента прикосновенія будетъ основнымъ сочетаніемъ, и съ другой стороны всѣ остальные соприкасающія коннексы сводятся для того же сочетанія къ одной и той же совокупности прямыхъ, встрѣчающихъ прямую p элемента прикосновенія.

Дѣйствительно, подставимъ въ уравненіе (22) соприкасающагося трилинейнаго коннекса $X = x\,,\ U = u$. Получимъ:

$$mn \sum_{jl} \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} + mn\, f_1 . (p\,,\ P) = 0\,,$$

или

$$mn \sum_{jl} P_{jl} \left(\frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{jt}} \right) = 0.$$

Для того чтобы сочетаніе $(x\,,\,u)$ было основнымъ, коэффиціенты при 6-и координатахъ P_{jl} должны быть равны нулю, т. е. должно быть

$$-\frac{1}{2} f_1 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{12}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{12}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{13}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{13}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{14}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{14}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{34}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{34}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{42}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{42}}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_{23}}}{\dfrac{\partial (p\,,\,p)}{\partial p_{23}}}.$$

Такимъ образомъ если уравненія (13) выполнены, то равны и эти шесть отношеній. Но отсюда при данныхъ $x\,,\ p\,,\ u$ получаемъ значеніе которое должно имѣть $f_1(x\,,\ p\,,\ u)$, т. е. опредѣляется одна изъ 16 величинъ $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial u_k}$, которыя являются параметрами въ уравненіи соприкасающагося коннекса и произвольныхъ остается только 15.

Если же значеніе шести отношеній (его означимъ λ/μ) не равно $-\dfrac{1}{2} f_1$, то уравненіе комплексовъ сводится къ

$$mn \left(\lambda/\mu + \frac{1}{2} f_1 \right) . (p\,,\ P) = 0\,,$$

т. е. къ

$$(p\,,\ P)=0\,.$$

Если напротивъ уравненія, которыми въ n^0 4 этого §-а мы опредѣлили линейчатые особенные элементы коннекса (1), невыполнены, то $(x\,,\ u)$ не будетъ основнымъ сочетаніемъ ни на одномъ изъ ∞^{16} трилинейныхъ коннексовъ, которые мы объединяемъ подъ именемъ соприкасающагося трилинейнаго коннекса.

Можно поэтому дать такое опредѣленіе: *линейчатые особенные элементы суть тѣ элементы коннекса, для которыхъ изъ общей совокупности* ∞^{16} *соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ выдѣляется группа въ* ∞^{15} *такихъ коннексовъ, имѣющихъ сочетаніе* $(x\,,\ u)$ *элемента своимъ основнымъ сочетаніемъ, а остальные сводятся къ комплексу* $(p,\ P)=0$.

Можно формулировать отношеніе особенныхъ элементовъ къ соприкасающемуся коннексу нѣсколько иначе.

Весь „пучекъ“ соприкасающихся коннексовъ опирается на коинциденцію

$$\sum\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial u_k\partial p_{jl}}\,X_i\,U_k\,P_{jl}=0\,,\quad (p\,,\ P)=0 \tag{23}$$

и элементы этой коинциденціи принадлежатъ каждому изъ ∞^{16} коннексовъ (22).

Въ ней прямая p есть основная прямая, и потому всякое сочетаніе $(X\,,\ p)$ и $(p\,,\ U)$ есть основное сочетаніе ея.

Напротивъ, ни точка x, ни плоскость u не будутъ основными точками, и сочетаніе $(x\,,\ u)$ основнымъ сочетаніемъ коинциденціи вообще не будетъ.

Поэтому относительно сочетаній $(x\,,\ p)$ и $(p\,,\ u)$ элемента прикосновенія можно поставить вопросъ, когда они будутъ основными сочетаніями не только для коинциденціи, но и для всѣхъ ∞^{16} соприкасающихся коннексовъ. Это и приводитъ къ полученному уже выше результату.

1. *Сочетаніе* $(p\,,\ u)$ *есть основное сочетаніе каждаго изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если ими выполнены уравненія*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\,;\qquad (i=1,2,3,4)$$

элементъ $(x\,,\ p\,,\ u)$ *назовемъ точечнымъ особеннымъ.*

2. *Сочетаніе* $(x\,,\ p)$ *есть основное сочетаніе каждаго изъ соприкасающихся трилинейныхъ коннексовъ, если имъ выполнены уравненія*

$$\frac{\partial f}{\partial u_k}=0\,;\qquad (k=1,2,3,4)$$

элементъ (x, p, u) *называемъ плоскостнымъ особеннымъ.*

3. *Сочетаніе* (x, u) *будетъ основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, на которую опираются всѣ соприкасающіеся коннексы, если выполнены уравненія*

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{jl}} = 0, \qquad (j, l = 1, 2, 3, 4)$$

элементъ (x, p, u) *называемъ линейчатымъ особеннымъ.*

§ IV.

Особенные элементы коинциденціи (простой).

1. Ограничимся случаемъ коинциденціи, заданной пересѣченіемъ двухъ коннексовъ (m, r, n) и (m', r', n'):

$$f(x, p, u) = 0, \quad F(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Если f и F различныхъ степеней относительно перемѣнныхъ; то можно назвать все же „пучкомъ" коннексовъ фигуру опредѣляемую уравненіемъ

$$\lambda f(xpu) + \mu F(xpu) = 0 \tag{2}$$

при λ и μ постоянныхъ [1]), такое опредѣленіе соотвѣтствуетъ геометрическому смыслу совокупности коннексовъ, опирающихся на данную коинциденцію, но требуетъ соединенія въ одно уравненіе двухъ формъ различныхъ степеней. Примемъ поэтому, что λ и μ суть однородныя функціи x, p, u степеней $m_0 - m$, $r_0 - r$, $n_0 - n$ и $m_0 - m'$, $r_0 - r'$, $n_0 - n'$, гдѣ m_0, r_0, n_0 наибольшія изъ паръ чиселъ: m и m', r и r', n и n'. Однако при произвольныхъ коэффиціентахъ въ λ и въ μ и при всевозможныхъ значеніяхъ x_i и u_i, отношеніе λ/μ можетъ имѣть только ∞^1 значеній.

Всѣ эти коннексы имѣютъ при произвольныхъ коэффиціентахъ въ λ и μ общими элементы коинциденціи (1).

Точечные особенные элементы этой совокупности коннексовъ опредѣляются уравненіями

$$V = \frac{\partial(\lambda f + \mu F)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} + f \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + F \frac{\partial \mu}{\partial x_i}. \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

---

[1]) Срв., напримѣръ, Study, Methoden zur Theorie der ternärer Formen по отношенію къ тернарнымъ коннексамъ.

Будемъ разыскивать тѣ особенные элементы, которые являются таковыми на всѣхъ коннексахъ (2), т. е. принадлежатъ коинциденціи (1). Для такихъ элементовъ уравненія (3) приводятся съ помощію (1) къ виду

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (4)$$

какъ если бы λ и μ были постоянныя, и даютъ слѣдовательно

$$\frac{F'_{x_1}}{f'_{x_1}} = \frac{F'_{x_2}}{f'_{x_2}} = \frac{F'_{x_3}}{f'_{x_3}} = \frac{F'_{x_4}}{f'_{x_4}}\,. \qquad (4')$$

Уравненія эти показываютъ, что x должно быть или особенною точкою на одной изъ поверхностей X_{pu}, X'_{pu}, принадлежащихъ сочетанію $(p\,,\ u)$ въ томъ и другомъ коннексахъ, или же точкою касанія этихъ поверхностей, т. е. эта точка должна быть особенною точкою кривой, принадлежащей сочетанію $(p\,,\ u)$ въ коинциденціи (1).

Здѣсь однако также является то затрудненіе, что сочетаніе $(p\,,\ u)$ можетъ быть основнымъ сочетаніемъ коинциденціи, для котораго двѣ поверхности X_{pu} и X'_{pu} совпадаютъ вполнѣ или отчасти и уравненія (4′) выполняются всѣми точками этой общей части. Удобно поэтому и для коинциденціи прибѣгнуть къ соприкасающейся коинциденціи, т. е. разсматривать коинциденцію, опредѣленную такими уравненіями:

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + (p\,,\ P) . \sum \frac{\partial^2 f_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i . U_k = 0 \\ &\sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} + (p\,,\ P) . \sum \frac{\partial^2 F_1(xpu)}{\partial x_i \partial u_k} X_i . U_k = 0 . \end{aligned} \qquad (5)$$

Эта коинциденція, зависящая отъ 30 произвольныхъ параметровъ, опирается на двойную коинциденцію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0\,,\ \sum \frac{\partial^3 F(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k P_{jl} = 0 \quad (p\,,\ P) = 0\,, \quad (6)$$

которая прямую p имѣетъ основною прямою, а слѣдовательно, каждое сочетаніе, составленное этою прямою съ какою либо точкою или плоскостью, будетъ ея основнымъ сочетаніемъ.

Напротивъ $(x\,,\ u)$ будетъ вообще не основнымъ сочетаніемъ.

Поэтому можемъ установить такое опредѣленіе особенныхъ элементовъ коинциденціи (1).

Элементъ (x, p, u) *есть точечный особенный элементъ коинциденціи, если его сочетаніе* (p, u) *есть основное сочетаніе для каждой соприкасающейся коинциденціи.*

Для этого уравненія (5) при постановкѣ $P = p$, $U = u$ должны сводиться къ одному. Но эта подстановка даетъ

$$rn \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0, \qquad r'n' \sum \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i = 0.$$

Чтобы два эти уравненія свелись къ одному, должны быть выполнены условія

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (4)$$

какъ и выше.

Къ четыремъ уравненіямъ (4) можемъ добавить слѣдующее

$$m\lambda f + m' . \mu . F = 0$$

которое показываетъ, что изъ шести уравненій (1) и (4) независимыхъ только пять, а по исключеніи λ/μ только четыре; такимъ образомъ *точечные особенные элементы коинциденціи (1) образуютъ тройную коинциденцію.*

Въ составъ ея входятъ: 1^0 четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $f = 0$, принадлежащихъ коннексу $F = 0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad F = 0,$$

и 2^0 четверная коинциденція точечныхъ особенныхъ элементовъ коннекса $F = 0$, принадлежащихъ коннексу $f = 0$, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad f = 0.$$

Характеристика первой четверной коинциденціи:

$\mu'_{041} = r^3(rn' + 4nr')$; $\mu'_{140} = r^3[rm' + 4(m-1)r']$;

$\mu'_{032} = 2r^2n(2rn' + 3nr')$; $\mu'_{131} = 4r^2[m'nr + 3(m-1)nr' + (m-1)n'r]$;

$\mu'_{230} = 2r^2(m-1)[2m'r + 3(m-1)r']$; $\mu'_{023} = 2n^2r(2nr' + 3n'r)$;

$\mu'_{122} = 6nr[m'nr + 2(m-1)nr' + 2(m-1)n'r]$;

$$\mu'_{221} = 6\,(m-1)\,r\,[2m'nr + 2\,(m-1)\,nr' + (m-1)\,n'r]\,;$$

$$\mu'_{320} = 2\,(m-1)^2\,r\,[3m'r + (m-1)\,r']\,;$$

$$\mu'_{113} = 4n^2\,[m'nr + (m-1)\,nr' + 3\,(m-1)\,n'r]\,;$$

$$\mu'_{311} = 4\,(m-1)^2\,[(m-1)\,n'r + (m-1)\,nr' + 3m'nr]\,;$$

$$\mu'_{212} = 6\,(m-1)\,n\,[2m'nr + (m-1)\,nr' + 2\,(m-1)\,n'r]\,;$$

$$\mu'_{203} = 2\,(m-1)\,n^2\,[2m'n + 3\,(m-1)\,n']\,;$$

$$\mu'_{302} = 2\,(m-1)^2\,n\,[3m'n + 2\,(m-1)\,n']\,.$$

Характеристики 2-ой отличаются только обмѣномъ мѣстъ соотвѣтственно m и m', n и n', r и r'.

Чтобы опредѣлить характеристики тройной коинциденціи, замѣтимъ, что, взявъ уравненія (1) $f=0$, $F=0$, (4) $\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0$, изъ двухъ первыхъ имѣемъ $\sum x_i f'_{x_i} = 0$ $\sum x_i F'_{x_i} = 0$ или, умножая первые на λ, второе на μ и складывая:

$$\sum x_i\,(\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0\,, \tag{7}$$

т. е. одно изъ уравненій (4) есть слѣдствіе 3-хъ остальныхъ и (1).

Но если возьмемъ только пять уравненій

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad \lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i} = 0\,,\qquad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \tag{8}$$

то изъ (7) получимъ:

$$x_4\,.\,(\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4}) = 0\,,$$

т. е. уравненія (8) даютъ не только $\lambda f'_{x_4} + \mu F'_{x_4} = 0$, но еще $x_4 = 0$. Вліяніе этихъ постороннихъ рѣшеній должно быть исключено.

Въ силу $x_4 = 0$ уравненіе (7) приводится къ виду:

$$\sum_{i=1}^{i=3} x_i\,(\lambda f'_{x_i} + \mu F'_{x_i}) = 0$$

и слѣдовательно между тремя послѣдними уравненіями (8) оказывается линейная связь. Поэтому, добавляя уравненіе $x_4 = 0$, можемъ одно изъ нихъ отбросить, т. е. посторонніе рѣшенія опредѣлятся уравненіями

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad \lambda f'_{x_1} + \mu F'_{x_1} = 0\,,\quad \lambda f'_{x_2} + \mu F'_{x_2} = 0\,; \tag{9}$$

но при этомъ опять таки ввели излишнія рѣшенія (т. е. ихъ излишне отбросили и слѣдовательно ихъ нужно добавить), опредѣляемыя уравненіями

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad x_3=0\,,\quad \lambda f'_{x_1}+\mu F'_{x_1}=0. \tag{10}$$

Уравненія (8) замѣнимъ черезъ

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0\,,\quad f'_{x_2}F'_{x_3}-f'_{x_3}F'_{x_2}=0 \tag{8'}$$

причемъ вводимъ излишнія рѣшенія

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad f'_{x_2}=0\,,\quad F'_{x_2}=0. \tag{8''}$$

Точно также (9) замѣнятся уравненіями

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad f'_{x_1}F'_{x_2}-f'_{x_2}F'_{x_1}=0 \tag{9'}$$

и (10) черезъ

$$f=0\,,\quad F=0\,,\quad x_4=0\,,\quad x_3=0\,, \tag{10'}$$

потому что последнее уравненіе (8) даетъ только значеніе λ/μ.

Отсюда найдемъ искомыя характеристики:

$$\gamma_{310}=(mr'+rm')[(m+m'-2)^2+2]+2mm'[(m-2)r+(m'-2)r']\,,$$

$$\gamma_{301}=(mn'+nm')[(m+m'-2)^2+2]+2mm'[(m-2)n+(m'-2)n']\,,$$

$$\gamma_{220}=m'r^2(3m+m'-4)+rr'[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2]+$$
$$+mr'^2(m+3m'-2)\,,$$

$$\gamma_{211}=n[2m'r(3m+m'-4)+r'[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2)]+$$
$$+n'[r(2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2)+2mr'(3m'+m-4)]\,,$$

$$\gamma_{202}=m'n^2(3m+m'-4)+nn'[2(m+m'-2)^2+m^2+m'^2-2]+$$
$$+mn'^2(m+3m'-2)\,,$$

$$\gamma_{130}=(mr'+rm')(r+r')^2+2rr'[(m-2)r+(m'-2)r']\,,$$

$$\gamma_{121}=(mn'+nm')(r+r')^2+2(mr'+rm')(n+n')(r+r')\,,$$

$$\gamma_{112}=(mr'+rm')(n+n')^2+2(mn'+nm')(n+n')(r+r')\,,$$

$$\gamma_{103}=(mn'+nm')(n+n')^2+2nn'[(m-2)n+(m'-2)n']\,,$$

$$\gamma_{040} = rr'(r^2 + rr' + r'^2),$$

$$\gamma_{031} = (nr' + rn')(r + r')^2 + 2rr'(nr + n'r'),$$

$$\gamma_{022} = r^2n'(3n + n') + rr'(3n^2 + 4nn' + 3n'^2) + r'^2n(3n' + n),$$

$$\gamma_{013} = (nr' + rn')(n + n')^2 + 2nn'(nr + n'r').$$

2. *Плоскостные особенные элементы коинциденціи суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, p) есть основное сочетаніе для каждой изъ соприкасающихся коинциденцій.*

Сочетаніе (x, p) будетъ основнымъ для всѣхъ коинциденцій, опредѣленныхъ уравненіями (5), если послѣ подстановки $X = x$, $P = p$ они сводятся къ одному. Но подстановка даетъ

$$mr \sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) \,.\, mr \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

$$m'r' \sum \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k + 2(p, p) . m'r' \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial u_k} U_k = 0,$$

или

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial u_k} U_k = 0. \tag{11}$$

И такимъ образомъ поставленному условію удовлетворимъ

1⁰ если $$\frac{\partial f}{\partial u_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

или

2⁰ если $$\frac{\partial F}{\partial u_k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

или

3⁰ если $$\lambda \frac{\partial f}{\partial u_k} + \mu \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{12}$$

Первыя уравненія даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $f = 0$, принадлежащіе коннексу $F = 0$. Они образуютъ четверную коинциденцію.

Вторыя даютъ плоскостные особенные элементы коннекса $F = 0$, принадлежащіе коннексу $f = 0$,—они также образуютъ четверную коинциденцію.

Наконецъ третья система уравненій вмѣстѣ съ уравненіями коинциденціи даетъ по исключеніи λ/μ четыре независимыхъ уравненія, которыя опредѣляютъ тройную коинциденцію плоскостныхъ особенныхъ элементовъ коинциденціи.

Это будутъ элементы (xpu), для которыхъ U_{xp} и U'_{xp} касаются и u есть касательная въ общей точкѣ.

Характеристики опредѣлимъ такъ же, какъ для многообразія точечныхъ особенныхъ элементовъ.

Наконецъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (1) суть тѣ ея элементы, которыхъ сочетаніе (x, u) есть основное сочетаніе для двойной коинциденціи (6), на которую опирается многообразіе соприкасающихся коинциденцій (5).*

Для такихъ элементовъ три уравненія

$$(p, P) = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} P_{jt} = 0, \tag{13}$$

къ которымъ при подстановкѣ $X = x$, $U = u$ сводятся уравненія (6), должны сводиться къ двумъ, т. е. должны существовать такія λ, μ, ν, что уравненіе

$$\lambda(p, P) + \mu \sum \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} P_{jl} + \nu \sum \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} P_{jl} = 0 \tag{14}$$

выполняется независимо отъ значеній P_{jl}, и слѣдовательно, для такихъ элементовъ имѣемъ при нѣкоторыхъ λ, μ, ν:

$$\frac{1}{2}\lambda \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{jl}} + \mu \frac{\partial f}{\partial p_{jl}} + \nu \frac{\partial F}{\partial p_{jl}} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{15}$$

и слѣдовательно должны обращаться въ нуль всѣ опредѣлители матрицы:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial p_{12}} & \frac{\partial f}{\partial p_{13}} & \frac{\partial f}{\partial p_{14}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{34}} & \frac{\partial f}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_{12}} & \frac{\partial F}{\partial p_{13}} & \frac{\partial F}{\partial p_{14}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{34}} & \frac{\partial F}{\partial p_{23}} \\ \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{12}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{13}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{14}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{42}} & \frac{\partial(p, p)}{\partial p_{23}} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Это даетъ четыре независимыхъ уравненія, но, прибавляя къ нему два уравненія (1), получаемъ не шесть независимыхъ уравненій, а только пять, потому что умножая шесть уравненій (15) каждое на соотвѣтственное p_{jl} и суммируя, получимъ:

$$\lambda(p; p) + r\mu f + r'\nu \; F = 0$$

и слѣдовательно, если къ шести уравненіямъ (15) добавимъ два уравненія (1), то изъ шести первыхъ окажется независимыхъ только пять, и изъ нихъ должны быть исключены λ/ν и μ/ν.

Такимъ образомъ, *линейчатые особенные элементы коинциденціи (простой) образуютъ четверную коинциденцію.*

Характеристики ея опредѣлятся подобно тому, какъ находили характеристики тройной коинциденціи, хотя и нѣсколько сложнѣе. На этомъ я уже не буду останавливаться.

§ V.

Сопряженный коннексъ. Обобщеніе конфигураціи.

1. Подобно сочетанію (точка, плоскость), сочетаніе (точка, прямая, плоскость) является само себѣ двойственнымъ,—поэтому можно было-бы ожидать, что для разсматриваемыхъ коннексовъ долженъ существовать коваріантный сопряженный коннексъ, какъ и для коннексовъ съ элементомъ (точка, плоскость).

На самомъ дѣлѣ оказывается однако, что для разсматриваемыхъ коннексовъ сопряженнаго коннекса, вообще говоря, не существуетъ.

Возьмемъ какой-нибудь элементъ (x, p, u) коннекса

$$f(x, p, u) = 0. \tag{1}$$

Сочетанію (p, u) этого элемента,—если оно не будетъ основнымъ,—принадлежитъ поверхность X_{pu}, на которой и лежитъ точка x элемента. Поверхность X_{pu} имѣетъ въ точкѣ x опредѣленную вообще говоря касательную плоскость, уравненіе которой

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0. \tag{2}$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) въ силу коннекса подчиняется опредѣленная, вообще говоря, плоскость (2), координаты которой

$$\sigma v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{3}$$

Точно также сочетанію (x, p) того же элемента принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная поверхность U_{xp}, и плоскость u элемента есть одна изъ касательныхъ плоскостей этой поверхности. Точка ея прикосновенія къ U_{xp} опредѣлится уравненіемъ

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial u_k} U_k = 0 \tag{4}$$

и такимъ образомъ элементу $(x, p. u)$ подчиняется далѣе опредѣленная, вообще говоря, точка, которой координаты опредѣляются помощью уравненій коннекса (1):

$$\varrho \cdot y_k = \frac{\partial f}{\partial u_k}. \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

До сихъ поръ обращеніе идетъ такъ же, какъ въ тернарномъ коннексѣ и въ коннексѣ съ элементомъ (точка, плоскость).

Но когда возьмемъ сочетаніе (x, u) элемента и будемъ разсматривать соотвѣтственный комплексъ P_{xu}, которому принадлежитъ прямая p элемента, то получится уже нѣчто иное.

Комплексъ P_{xu} имѣетъ для своей прямой p не одинъ касательный линейный комплексъ, а безчисленное множество. Соотвѣтственно этому, если исходить изъ уравненія (1), которое можетъ быть замѣнено любымъ уравненіемъ

$$f(xpu) + \frac{1}{2} f_1(xpu) . (p, p) = 0, \tag{6}$$

уравненіе касательнаго къ P_{xu} комплекса изобразится

$$\sum \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} P_{ik} + f_1 . (p, P) = 0. \tag{7}$$

Такимъ образомъ элементу (x, p, u) подчиняется не прямая, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, потому что при данныхъ x, p, u можно разсматривать $f_1(xpu)$, какъ одинъ произвольный параметръ въ (7).

При этомъ прямая и при томъ одна получится только при условіи

$$\frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = \lambda \frac{\partial (p, p)}{\partial p_{ix}},$$

ибо тогда (7) какъ уже видѣли выше принимаетъ видъ:

$$(\lambda + f_1)\ (p, P) = 0.$$

Такимъ образомъ *элементу (x, p, u) подчиняется одна опредѣленная прямая и при томъ сама прямая элемента, если элементъ будетъ линейчато-особеннымъ.*

Далѣе мы получимъ прямую (хотя и не одну, а ∞^1 прямыхъ), если (7) изображаетъ спеціальный линейный комплексъ,—т. е. если инваріантъ его обращается въ нуль,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p}\,,\;\; \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{2} f_1 \frac{\partial(p\,,\,p)}{\partial p}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial p_{12}} + f_1 . p_{34}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}} + f_1 . p_{12}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_{13}} + f_1 . p_{42}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{42}} + f_1 . p_{13}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial p_{14}} + f_1 . p_{23}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial p_{23}} + f_1 . p_{14}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right) + f_1 \sum p_{ik} \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} + \frac{1}{2} f_1^2 . (p\,,\,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right) + r f_1 . f +$$

$$+ \frac{1}{2} f_1^2 . (p\,,\,p) = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right).$$

Такимъ образомъ касательный комплексъ можетъ быть спеціальнымъ только въ томъ случаѣ, если прямая p есть спеціальная прямая комплекса P_{xu}, и тогда всѣ касательные комплексы будутъ спеціальными. Мы получимъ, какъ совокупность ихъ осей пучекъ прямыхъ, проходящихъ черезъ точку встрѣчи p и прямой q, которой аксіальныя координаты суть $\dfrac{\partial f}{\partial p_{ik}}$.

Итакъ: *элементу* $(x\,,\,p\,,\,u)$ *подчиняется пучекъ прямыхъ, если* p *есть спеціальная прямая комплекса* P_{xu}, *т. е. если элементъ* $(x\,,\,p\,,\,u)$ *принадлежитъ коинциденціи пересѣченія (1) коннексомъ* $(2m\,,\,2r-2,\,2n)$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p}\,,\;\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0\,. \tag{8}$$

Какъ уже было упомянуто ранѣе, въ составъ этой коинциденціи входятъ и линейчатые особенные элементы коинциденціи.

Всѣмъ прочимъ элементамъ коннекса принадлежитъ не прямая и не пучекъ прямыхъ, а пучекъ линейныхъ комплексовъ, содержащихъ прямую элемента и имѣющихъ одинъ и тотъ же параметръ.

Такимъ образомъ для коннексовъ съ элементами $(x\,,\,p\,,\,u)$ какъ въ томъ случаѣ, если (8) не выполняется тождественно, такъ и въ томъ, когда (8) выполняется тождественно для всякаго элемента коннекса, *не существуетъ сопряженнаго коннекса,* т. е. такого коваріантнаго коннекса, которой бы состоялъ изъ такихъ же элементовъ, какъ исходный, и элементы котораго находились бы, вообще говоря, въ однозначномъ и однозначно-обратимомъ соотвѣтствіи съ элементами исходнаго.

Тоже самое, очевидно, имѣетъ мѣсто и по тѣмъ же причинамъ для коннексовъ съ элементомъ $(x\,,\,p)$ и $(p\,,\,u)$, если бы даже условиться ставить два этихъ типа коннексовъ во взаимную связь.

2. Такое отсутствіе сопряженнаго коннекса заставляетъ остановиться на причинахъ его и попытаться такъ измѣнить введенныя опредѣленія, чтобы возможно было построеніе аналогичной теоріи.

Обратимся прежде всего къ опредѣленію касательныхъ линейныхъ комплексовъ. Если прямую трехмѣрнаго пространства изобразимъ точкою пятимѣрнаго плоскаго многообразія, лежащей на квадратичномъ M_4, то комплексъ прямыхъ изобразится пересѣченіемъ двухъ M_4: одного, котораго уравненіе есть уравненіе даннаго комплекса, и другого, упомянутаго выше квадратичнаго многообразія.

Мы имѣемъ такимъ образомъ задачу найти касательное плоское M_3 для трехмѣрнаго же многообразія—пересѣченія двухъ M_4:

$$f(z) = 0\,, \quad (\text{соотвѣт. уравненіе комплекса} \quad f(p) = 0) \tag{1}$$

$$\omega(z) = (z,\ z) = 0 \quad \left(\text{соотв. } \frac{1}{2}(p\,,\ p) = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{12} + p_{14}p_{23} = 0\right). \tag{2}$$

Если z означаетъ точку прикосновенія, Z—точку касательнаго M_3, то уравненія послѣдняго будутъ:

$$\sum_i \frac{\partial f}{z_i} Z_i = 0\,, \quad \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial \omega}{\partial z_i} Z_i = (z\,,\ Z) = 0. \tag{3}$$

Вмѣсто этого разсматриваютъ (ср. Koenigs, l. c. стр. 71 и сл.), какъ касательное многообразіе, такое, которое лежитъ также на $\omega(z) = 0$. Поэтому пришлось бы или принимать за касательное многообразіе такое M_2, которое опредѣляется уравненіями (2) и (3), или же, чтобы имѣть, какъ и въ геометріи точки и плоскости, снова касательное многообразіе 3-хъ измѣреній, взять, какъ это и дѣлается, плоское M_4, опредѣленное уравненіями (3), но тогда получается не одно касательное многообразіе, а ∞^1 ихъ,—ибо черезъ M_3, опредѣленное уравненіями (3), можно провести пучекъ плоскихъ M_4:

$$\lambda \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} Z_i + \mu \sum \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_i} Z_i = 0\,. \tag{4}$$

Имѣя за собою достоинство первенства примѣненія, пріемъ этотъ не болѣе естественъ, чѣмъ указанная выше возможность примѣнять не уравненія (2) и (4), а уравненія (2) и (3), т. е. вмѣсто пучка касательныхъ комплексовъ разсматривать касательную коинциденцію.

При опредѣленіи линейчато-особенныхъ элементовъ—намъ и пришлось воспользоваться этимъ пріемомъ.

Для примѣненій представилъ бы однако извѣстныя удобства другой пріемъ,—именно разсматривать въ качествѣ касательнаго M_3 именно то, которое опредѣляется уравненіями (3).

При этомъ, конечно, придется выйти изъ геометріи прямой въ тѣсномъ смыслѣ слова и перейти до извѣстной степени въ геометрію линейныхъ комплексовъ. Дѣйств., отбрасывая (2) по отношенію къ Z, мы считаемъ Z не прямою, а линейнымъ комплексомъ и слѣдовательно за плоское касательное къ комплексу (1) M_3 беремъ плоское M_3 линейныхъ комплексовъ, полярныхъ данному и содержащихъ прямую прикосновенія.

Полученное плоское M_3 линейныхъ комплексовъ мы имѣемъ право называть касательнымъ потому, что если возьмемъ прямую $z + dz$ (предположеніе, что $z + dz$ есть прямая даетъ $(z, dz) = 0$) и допустимъ, что эта прямая есть одинъ изъ спеціальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3, то она удовлетворитъ уравненію

$$\sum f'_{z_i} \cdot (z_i + dz_i) = 0\,,$$

или въ силу $f(z) = 0$ уравненію

$$\sum f'_{z_i} \cdot dz_i = df(z) = 0\,;$$

и слѣдовательно, подстановка $z + dz$ въ уравненіе комплекса даетъ результатъ 2-го порядка малости, и обратно если прямыя z и $z + dz$ принадлежатъ комплексу, то прямая $z + dz$ представляетъ одинъ изъ спеціальныхъ линейныхъ комплексовъ разсматриваемаго M_3.

3. Примѣненіе вышеприведенныхъ соображеній къ коннексамъ (x, p, u) дастъ вмѣсто соприкасающагося трилинейнаго коннекса такую конфигурацію

$$\sum \frac{\partial^3 f(xpu)}{\partial x_i \partial u_k \partial p_{jl}} X_i U_k C_{jl} = 0 \quad (C, p) = 0$$

гдѣ C_{jl} шесть величинъ, независимыхъ между собою и опредѣляющихъ не прямую, а линейный комплексъ.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ конфигураціямъ, въ которыхъ элементомъ является уже не комбинація (точка, прямая, плоскость), а соединеніе (точка, линейный комплексъ, плоскость).

Такія конфигураціи можно изучать систематически, какъ это дѣлается по отношенію къ коннексамъ различныхъ типовъ.

Изъ общаго числа ∞^{11} подобныхъ элементовъ одно уравненіе выдѣляетъ совокупность ∞^{10} ихъ, которые образуютъ, скажемъ, коннексъ (x, c, u), два уравненія выдѣляютъ ∞^9, образующихъ коинциденцію (x, c, u) и т. д.

Съ этой точки зрѣнія разсматриваемый въ настоящей статьѣ коннексъ является коинциденціей особеннаго типа,—онъ выдѣляется двумя уравненіями

$$f(x\,,\; c\,,\; u) = 0\,, \qquad (c\,,\; c) = 0\,,$$

изъ которыхъ второе выражаетъ, что беремъ не всевозможные линейные комплексы, а только специальные.

Можно замѣтить, употребляя терминологію аналогичную той, которую примѣняли выше, что эта коинциденція имѣетъ каждый спеціальный линейный комплексъ (каждую прямую) основнымъ, ибо второе уравненіе имъ выполняется независимо отъ значеній x и u.

Можно дать опредѣленіе особенныхъ элементовъ, какъ коннекса $f(x\,, c\,, u) = 0$, такъ этой коинциденціи, причемъ для послѣдней придемъ къ упомянутой выше соприкасающейся коинциденціи и т. д.

Не останавливаясь на дальнѣйшихъ подробностяхъ, замѣтимъ только, что коннексы съ элементомъ (точка, линейный комплексъ, плоскость) допускаютъ обращеніе, т. е. имѣютъ сопряженный коннексъ. Дѣйствительно каждому элементу $(x\,, c\,, u)$ такого коннекса принадлежитъ, вообще говоря, опредѣленная плоскость (касательная къ X_{cu}): $\sigma v_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,(i = 1,\,2,\,3,\,4)$, опредѣленная точка (точка прикосновенія плоскости u элемента съ поверхностью U_{xc}): $\varrho y_k = \dfrac{\partial f}{\partial u_k}\,(k = 1\,,\; 2\,,\; 3\,,\; 4)$.

Наконецъ, составляя поляру $f(x\,, c\,, u)$ относительно координатъ комплекса, получимъ:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial c_{jl}}\, C_{jl} = 0\,,$$

которое для данныхъ x и u изображаетъ плоское M_5 линейныхъ комплексовъ, содержащее комплексъ прикосновенія c и обладающее тѣмъ свойствомъ, что комплексъ $c + dc$, безконечно близкій къ c и ему принадлежащій, обращаетъ уравненіе коннекса (для данныхъ $x\,, u$) въ безконечно малую 2-го порядка отн. dc_{jl}. Это есть касательное плоское M_5 линейныхъ комплексовъ. Оно опредѣляетъ одинъ совершенно опредѣленный линейный комплексъ, съ которымъ всѣ его комплексы находятся въ инволюціи, именно комплексъ K, котораго координаты суть:

$$\tau\, \frac{\partial(k\,,\, k)}{\partial k_{jl}} = \frac{\partial f}{\partial c_{jl}}.$$

Такимъ образомъ элементу $(x\,, c\,, u)$ подчиняется элементъ того же типа $(y\,;\; k\,,\; v)$.

Совокупность всѣхъ элементовъ (y, k, v), соотвѣтствующихъ всѣмъ элементамъ коннекса $f(x, c, u) = 0$, опредѣляетъ, слѣдовательно, новый коннексъ $F(y, k, v) = 0$ того же типа, который и будетъ *сопряженнымъ* первому.

Связь ихъ взаимная,—можно показать, что если для коннекса $F(y, k, v) = 0$ будемъ искать сопряженный, то получимъ исходный коннексъ $f(x, c, u) = 0$: *коннексъ сопряженный сопряженному есть исходный коннексъ.*

Такимъ образомъ, что касается теоріи сопряженнаго коннекса и связанныхъ съ нимъ свойствъ, указанный въ этомъ §-ѣ обобщенный коннексъ является болѣе близкимъ аналогомъ тернарнаго коннекса и коннекса съ элементомъ (точка, плоскость), чѣмъ коннексъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость).

Напротивъ этотъ послѣдній коннексъ представляетъ бóльшую аналогію въ томъ, что касается главной коинциденціи и связанной съ нею интеграціонной задачи.