Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы.

В. П. Ермакова.

1. Предисловіе.

Въ XXIV томѣ Математическаго Сборника помѣщенъ мемуаръ А. Н. Коркина подъ заглавіемъ: *Изысканіе о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка* [1]). Въ этомъ мемуарѣ Коркинъ рѣшаетъ слѣдующую задачу:

Въ дифференціальномъ уравненіи:

$$Mdx + Ndy = 0$$

M и N суть цѣлыя однородныя функціи относительно y; требуется найти самое общее выраженіе этихъ функцій подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе имѣло данный интегральный множитель:

$$(y - u_1)^{\alpha_1}(y - u_2)^{\alpha_2} \ldots (y - u_n)^{\alpha_n}.$$

Многіе математики пробовали рѣшать эту задачу раньше, но изслѣдовали только частные случаи. Коркину удалось показать, что полное рѣшеніе задачи всегда можетъ быть найдено въ конечной формѣ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Сверхъ того Коркинъ указалъ тѣ случаи, когда рѣшеніе задачи не содержитъ ни опредѣленныхъ интеграловъ, ни квадратуръ. Всякій согласится съ тѣмъ, что этотъ результатъ огромной важности. Однако изслѣдованіе Коркина слишкомъ длинно (220 страницъ) и переполнено массою формулъ. Я увѣренъ, что

[1]) Этотъ мемуаръ въ 1902 году изданъ на французскомъ языкѣ отдѣльной брошюрой подъ заглавіемъ: „Etudes des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre“. St. Pétersbourg.

немногіе изъ математиковъ прочтутъ этотъ мемуаръ, и цѣнный результатъ Коркина можетъ исчезнуть безслѣдно. Но я знакомъ съ прежними изслѣдованіями Коркина и знаю, что всѣ его работы имѣютъ высокій интересъ. Вотъ почему я употребилъ всѣ усилія, чтобы познакомиться и съ настоящимъ мемуаромъ. Въ результатѣ оказалось, что все изслѣдованіе Коркина можно изложить въ очень краткой и ясной формѣ.

Коркинъ замѣчаетъ, что рѣшеніе задачи приводится къ интегрированію такой системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ функцій болѣе числа уравненій. Можно ли изъ этой системы при помощи алгебраическихъ операцій и дифференцированій выдѣлить опредѣленную систему дифференціальныхъ уравненій, въ которой число неизвѣстныхъ функцій равнялось бы числу уравненій? Первая глава мемуара Коркина содержитъ рѣшеніе этого вопроса. Особенно много хлопотъ доставилъ Коркину тотъ случай, когда сумма показателей интегральнаго множителя—цѣлое отрицательное число. Это изслѣдованіе можно сильно упростить, если предварительно доказать двѣ общія очень простыя теоремы. Первая изъ этихъ теоремъ (§ 3) показываетъ, что данную задачу можно замѣнить другою, въ которой нѣкоторые показатели интегральнаго множителя увеличены на цѣлые числа. Вторая теорема (§ 5) показываетъ, что самое общее рѣшеніе задачи содержитъ произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ. Послѣ этихъ теоремъ становятся ненужными всѣ сложныя формулы первой главы мемуара Коркина. Въ остальныхъ двухъ главахъ Коркинъ показываетъ, какимъ образомъ полное рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленнымъ интеграламъ. Массу преобразованій нужно выполнить, чтобы въ результатѣ получились интегралы, имѣющіе конечное значеніе. Между тѣмъ всѣ эти преобразованія очень просто вытекаютъ изъ вышеупомянутыхъ теоремъ.

Смѣю думать, что мнѣ удалось изложить цѣнные результаты А. Н. Коркина въ простой и ясной формѣ. Надѣюсь, что въ такой формѣ рѣшеніе задачи Коркина займетъ видное мѣсто въ курсахъ дифференціальныхъ уравненій.

2. Постановка задачи и основная теорема.

Пусть M и N означаютъ нѣкоторыя цѣлыя алгебраическія функціи перемѣннаго y; коэффиціенты у этихъ многочленовъ суть функціи перемѣннаго x. Предметъ нашего изслѣдованія заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи:

Требуется найти самое общее выраженіе для M и N подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

имѣло интегральный множитель

$$R = (y - u_1)^{\alpha_1}(y - u_2)^{\alpha_2} \ldots (y - u_n)^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Здѣсь показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть числа постоянныя, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ суть функціи перемѣннаго x.

Для этой цѣли, какъ извѣстно, должно удовлетворяться слѣдующее уравненіе:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \log R}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \log R}{\partial y}. \tag{3}$$

Подставивъ вмѣсто R его выраженіе (2), мы приведемъ это уравненіе къ слѣдующей формѣ:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \sum \frac{\alpha_i (M + N u_i')}{y - u_i}. \tag{4}$$

Это уравненіе должно удовлетворяться при произвольныхъ значеніяхъ y. Положимъ y равенъ u_i. Вторая часть уравненія (4) не должна обращаться въ безконечность; поэтому $M(y) + N(y)u_i'$ должно дѣлиться безъ остатка на $y - u_i$. Чтобы выполнялось это условіе, должно имѣть мѣсто равенство:

$$M(u_i) + N(u_i)u_i' = 0. \tag{5}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Если выраженіе (2) будетъ интегральнымъ множителемъ дифференціальнаго уравненія (1), то $u_2, u_2, \ldots, u_n$ будутъ частными интегралами того же дифференціальнаго уравненія (1).

3. Повышеніе показателей въ интегральномъ множителѣ.

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$F(y) = (y - u_1)(y - u_2) \ldots (y - u_n), \tag{6}$$

$$F_1(y) = F(y) \sum \frac{(\alpha_i + 1)}{y - u_i}, \tag{7}$$

$$F_2(y) = F(y) \sum \frac{(\alpha_i + 1) u_i'}{y - u_i}. \tag{8}$$

Положимъ, что мы нашли самое общее рѣшеніе задачи, указанной въ § 2. Пусть уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Мы можемъ составить весьма простое уравненіе, которое имѣетъ тотъ же интегральный множитель (2). Пусть V обозначаетъ произвольную функцію перемѣннаго x. Разсмотримъ такое дифференціальное уравненіе:

$$d(VF(y)R(y)) = 0.$$

Это уравненіе, по сокращеніи на R, приметъ слѣдующую форму:

$$\left(F(y)\frac{\partial V}{\partial x} - VF_2(y)\right)\partial x + VF_1(y)\partial y = 0. \tag{9}$$

Это уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Вычтемъ уравненіе (9) изъ уравненія (1); получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(M(y) - F(y)\frac{\partial V}{\partial x} + VF_2(y)\right)\partial x + \left(N(y) - VF_1(y)\right)\partial y = 0. \tag{10}$$

Это послѣднее дифференціальное уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Можно подобрать V такъ, чтобы функція, стоящая при ∂y въ уравненіи (10), дѣлилась безъ остатка на $y - u_1$.

Для этой цѣли нужно положить

$$V = \frac{N(u_1)}{F_1(u_1)}. \tag{11}$$

Замѣтимъ теперь, что по теоремѣ § 2 $y = u_1$ должно быть частнымъ интеграломъ уравненія (10), а такъ какъ функція, стоящая при ∂y дѣлится на $y - u_1$, то и остальное выраженіе должно дѣлиться на $y - u_1$. Итакъ, если V опредѣлимъ формулой (11), то дифференціальное уравненіе (10) содержитъ множитель $y - u_1$. Положимъ

$$\overline{M}(y) = \frac{M(y) - F(y)\dfrac{\partial V}{\partial x} + F_2(y)\,V}{y - u_1}, \quad \overline{N}(y) = \frac{N(y) - VF_1(y)}{y - u_1}. \tag{12}$$

Такъ опредѣленныя функціи будутъ цѣлыми относительно y.

Отсюда слѣдуетъ, что дифференціальное уравненіе:

$$\overline{M}(y)\partial x + \overline{N}(y)\partial y = 0 \tag{13}$$

имѣетъ интегральнымъ множителемъ

$$(y - u_1)R(y) = (y - u_1)^{\alpha_1 + 1}(y - u_2)^{\alpha_2}\ldots(y - u_n)^{\alpha_n}. \tag{14}$$

Итакъ, если намъ извѣстно общее рѣшеніе первоначальной задачи, то мы можемъ найти общее рѣшеніе другой задачи: мы можемъ составить такое дифференціальное уравненіе (13), интегральнымъ множителемъ котораго должно быть выраженіе (14).

Наши формулы не годятся въ одномъ только случаѣ, когда α_1 равно -1. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ изъ формулы (7) слѣдуетъ, что $F_1(u_1)=0$; тогда, по формулѣ (11), V не имѣетъ конечнаго значенія.

Обратно, если мы знаемъ общее рѣшеніе второй задачи, то легко можемъ найти и общее рѣшеніе первой задачи. Для этой цѣли изъ уравненій (12) имѣемъ:

$$M(y)=(y-u_1)\overline{M}(y)+F(y)\frac{\partial V}{dx}-VF_2(y),$$
$$N(y)=(y-u_1)\overline{N}(y)+VF_1(y). \tag{15}$$

Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (1), получимъ общее рѣшеніе первой задачи. Въ формулахъ (15) V должно быть произвольною функціей перемѣннаго x.

Итакъ, рѣшеніе нашей задачи мы всегда можемъ свести къ рѣшенію другой задачи, въ которой одинъ изъ показателей интегральнаго множителя увеличенъ на 1. Всякій показатель можетъ быть увеличенъ на 1, за исключеніемъ показателя равнаго -1.

Повторяя указанный процессъ нѣсколько разъ, мы можемъ привести рѣшеніе нашей задачи къ рѣшенію новой задачи, въ которой показатели интегральнаго множителя увеличены на цѣлыя числа. Но при этомъ нужно соблюдать слѣдующую предосторожность: *чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель не превратился ни въ нуль, ни въ положительное число.*

Такимъ образомъ рѣшеніе данной задачи мы можемъ легко вывести изъ рѣшенія другой задачи:

Найти общую форму дифференціальнаго уравненія:

$$M_1(y)\,dx+N_1(y)\,dy=0 \tag{16}$$

такъ, чтобы интегральнымъ множителемъ этого уравненія было выраженіе:

$$R_1(y)=(y-u_1)^{\alpha_1+m_1}(y-u_2)^{\alpha_2+m_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n+m_n}, \tag{17}$$

гдѣ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

Покажемъ, какъ изъ общаго рѣшенія начальной задачи получается общее рѣшеніе послѣдней задачи, и обратно.

Положимъ, что начальная задача рѣшена, что мы умѣемъ составить общее выраженіе дифференціальнаго уравненія (1) такъ, чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (2).

Составимъ такое дифференціальное уравненіе:

$$d\big(F(y)\,R(y)\,\Phi(y)\big)=0\,,$$

здѣсь $\Phi(y)$ есть нѣкоторая цѣлая функція перемѣннаго y съ неопредѣленными коэффиціентами: степень этой функціи будетъ опредѣлена далѣе. По раздѣленіи на $R(y)$ послѣднее уравненіе принимаетъ слѣдующую форму:

$$\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial x}-F_2\Phi\right)dx+\left(F\frac{\partial\Phi}{\partial y}+F_1\Phi\right)dy=0\,. \tag{18}$$

Это уравненіе имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Вычтемъ уравненіе (18) изъ уравненія (1); получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(M-F\frac{\partial\Phi}{\partial x}+F_2\Phi\right)dx+\left(N-F\frac{\partial\Phi}{\partial y}-F_1\Phi\right)dy=0\,. \tag{19}$$

Это уравненіе также имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2). Попробуемъ опредѣлить коэффиціенты цѣлой функціи $\Phi(y)$ такъ, чтобы выраженіе:

$$N(y)-F(y)\frac{\partial\Phi(y)}{\partial y}-F_1(y)\,\Phi(y) \tag{20}$$

дѣлилось безъ остатка на

$$(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\ldots(y-u_n)^{m_n}\,. \tag{21}$$

Выполняя это условіе, мы придемъ къ $m_1+m_2+\ldots+m_n$ линейнымъ алгебраическимъ уравненіямъ относительно коэффиціентовъ функціи $\Phi(y)$; поэтому мы можемъ предположить, что степень $\Phi(y)$ равна $m_1+m_2+\ldots+m_n-1$. Линейныя алгебраическія уравненія, о которыхъ только что была рѣчь, легко могутъ быть составлены. Далѣе является вопросъ: имѣютъ ли эти уравненія конечное рѣшеніе. Если бы мы стали изслѣдовать этотъ вопросъ въ общемъ видѣ, то пришли бы къ сложнымъ формуламъ. Между тѣмъ изложенный выше послѣдовательный процессъ повышенія одного показателя на единицу показываетъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ конечности рѣшенія является сказанное выше ограниченіе: чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель не превратился ни въ нуль, ни въ число положительное.

Если мы подберемъ коэффиціенты функціи $\Phi(y)$ такъ, чтобы функція (20) имѣла множителемъ выраженіе (21), то легко докажемъ, что уравненіе (19) также будетъ имѣть множителемъ выраженіе (21). Послѣ этого положимъ:

$$M_1 = \frac{M - F\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + F_2\Phi}{(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\ldots(y-u_n)^{m_n}},$$

$$N_1 = \frac{N - F\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - F_1\Phi}{(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\ldots(y-u_n)^{m_n}}. \tag{22}$$

Такъ опредѣленныя функціи M_1 и N_1 будутъ цѣлыми относительно y. Подставивъ найденныя выраженія (22) въ уравненіе (16), получимъ самую общую форму такого дифференціальнаго уравненія, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ выраженіе (17).

Положимъ теперь, обратно, что мы имѣемъ общее рѣшеніе послѣдней задачи; покажемъ, какъ тогда находится общее рѣшеніе начальной задачи.

Предположимъ, что мы умѣемъ составить самую общую форму дифференціальнаго уравненія (16) такъ, чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (17). Въ такомъ случаѣ изъ уравненій (22) находимъ:

$$M = F\frac{\partial\Phi}{\partial x} - F_2\Phi + M_1(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\ldots(y-u_n)^{m_n},$$

$$N = F\frac{\partial\Phi}{\partial y} + F_1\Phi + N_1(y-u_1)^{m_1}(y-u_2)^{m_2}\ldots(y-u_n)^{m_n}. \tag{23}$$

Подставивъ найденныя выраженія въ уравненіе (1), получимъ самое общее рѣшеніе начальной задачи. Въ формулахъ (23) коэффиціенты функціи $\Phi(y)$ будутъ уже произвольными функціями перемѣннаго x.

4. Рѣшеніе задачи въ томъ случаѣ, когда всѣ показатели интегральнаго множителя суть числа цѣлыя отрицательныя.

Предположимъ, что дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), въ которомъ показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть цѣлыя отрицательныя числа.

Полный интегралъ дифференціальнаго уравненія (1) выражается въ слѣдующей формѣ:

$$\int R(y)\,N(y)\,\partial y + \psi(x) = C.$$

Здѣсь мы имѣемъ интегралъ отъ алгебраической функціи. Такой интегралъ, какъ извѣстно, выражается въ алгебраической формѣ съ присоединеніемъ нѣсколькихъ логариѳмовъ:

$$F(y)\,R(y)\,\Theta(y) + \sum A_i \log(y - u_i) = C.$$

Здѣсь $\Theta(y)$ есть произвольная цѣлая алгебраическая функція перемѣннаго y, коэффиціенты этой функціи суть произвольныя функціи перемѣннаго x. Функція $F(y)$ дана формулой (6). Такъ какъ производная отъ первой части по перемѣнному x не должна содержать логариѳмовъ, то A_1, $A_2, \ldots, A_n$ должны быть постоянными числами. Дифференцируемъ это уравненіе и дѣлимъ на $R(y)$; получаемъ:

$$\left(F\frac{\partial\Theta}{\partial x} - F_2\,\Theta - R^{-1}\sum\frac{A_i\,U_i'}{y - u_i}\right)\partial x + \left(F\frac{\partial\Theta}{\partial y} + F_1\,\Theta + R^{-1}\sum\frac{A_i}{y - u_i}\right)\partial y = 0.$$

Входящія сюда функціи $F_1(y)$ и $F_2(y)$ даются формулами (7) и (8).

Въ такой формѣ выражается общее рѣшеніе нашей задачи; оно содержитъ произвольную функцію $\Theta(y)$ и произвольныя постоянныя A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

5. Приведеніе общей задачи къ простѣйшей формѣ.

Напомнимъ, что наша задача заключается въ нахожденіи общей формы дифференціальнаго уравненія (1), такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было выраженіе (2).

Не давая самаго общаго рѣшенія задачи, мы можемъ, однако, составить дифференціальное уравненіе, заключающее произвольную функцію, такъ чтобы интегральнымъ множителемъ этого уравненія было выраженіе (2).

Пусть $\Theta(y)$ выражаетъ произвольную цѣлую функцію относительно y; коэффиціенты этого многочлена суть произвольныя функціи перемѣннаго x. Разсмотримъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$d(F(y)\,R(y)\,\Theta(y)) = 0.$$

Сокративъ на $R(y)$, мы приведемъ это уравненіе къ слѣдующей формѣ:

$$\left(F\frac{\partial\Theta}{dx}-F_2\,\Theta\right)dx+\left(F\frac{\partial\Theta}{dy}+F_1\,\Theta\right)dy=0. \qquad (24)$$

Входящія сюда функціи $F(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$ даны формулами (6), (7) и (8).

Интегральнымъ множителемъ уравненія (24) будетъ выраженіе (2). Само собою разумѣется, что дифференціальное уравненіе (24) не заключаетъ въ себѣ всѣхъ рѣшеній нашей задачи. Но пользуясь этимъ уравненіемъ, мы можемъ упростить нашу задачу. Вычтемъ уравненіе (24) изъ уравненія (1); въ результатѣ получимъ дифференціальное уравненіе, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ выраженіе (2). Произвольную функцію $\Theta(y)$ можно подобрать такъ, чтобы въ окончательномъ результатѣ понизилась степень функціи при dy. Это пониженіе можно довести до $n-2$. Предположимъ, что степень $N(y)$ превосходитъ $n-2$; пусть эта степень равна $n-1+m$, причемъ m есть число положительное или нуль. Пусть

$$N(y)=q_0y^{n+m-1}+q_1y^{n+m-2}+\ldots$$

Чтобы достигнуть пониженія, положимъ степень функціи $\Theta(y)$ равною m; напишемъ эту функцію съ произвольными коэффиціентами:

$$\Theta(y)=r_0y^m+r_1y^{m-1}+\ldots$$

Вычитая уравненіе (24) изъ уравненія (1), мы понизимъ степень $N(y)$, если положимъ:

$$q_0=\frac{r_0}{\sum\alpha+m}.$$

Пониженіе невозможно, если $\sum\alpha+m=0$. Такимъ образомъ у насъ появился исключительный случай, когда сумма показателей интегральнаго множителя равна цѣлому отрицательному числу или нулю. Этотъ исключительный случай можетъ быть разрѣшенъ слѣдующимъ пріемомъ.

Въ § 4 мы разсмотрѣли тотъ случай, когда всѣ показатели интегральнаго множителя суть цѣлыя отрицательныя числа. Теперь мы разсматриваемъ тотъ случай, когда не всѣ показатели суть цѣлыя отрицательныя числа. Въ такомъ случаѣ, по доказанному въ § 3, мы можемъ рѣшеніе нашей задачи привести къ рѣшенію другой задачи, въ которой тѣ показатели, которые не суть цѣлыя отрицательныя числа, могутъ быть увеличены на произвольныя цѣлыя числа. Такимъ пріемомъ можно всегда устранить указанный выше исключительный случай.

Итакъ, мы можемъ ограничиться такимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, въ которомъ степень $N(y)$ равна $n-2$. Тогда изъ уравненія (4) слѣдуетъ, что степень $M(y)$ равна $n-1$. Задачу въ такой формѣ мы назовемъ *простѣйшею задачею Коркина*.

Покажемъ, къ чему приводится рѣшеніе простѣйшей задачи Коркина. Пусть

$$M(y) = p_0 y^{n-1} + p_1 y^{n-2} + \ldots + p_{n-1}, \tag{25}$$

$$N(y) = q_0 y^{n-2} + q_1 y^{n-3} + \ldots + q^{n-2}. \tag{26}$$

Задача приводится къ опредѣленію p_0, $p_1, \ldots, p_{n-1}$, q_0; $q_1, \ldots, q_{n-2}$, какъ функцій отъ x, такъ чтобы дифференціальное уравненіе (1) имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе (2).

Прежде всего изъ уравненія (5) мы опредѣлимъ $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ линейно черезъ q_0, $q_1, \ldots, q_{n-2}$. Подставивъ эти выраженія въ уравненіе (4) и сравнивъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ y [1]), мы получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ функцій q_0, $q_1, \ldots, q_{n-2}$ систему $n-1$ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Назовемъ эту систему *дифференціальными уравненіями Коркина*. Цѣль нашихъ дальнѣйшихъ изслѣдованій состоитъ въ томъ, чтобы показать, что дифференціальныя уравненія Коркина могутъ быть проинтегрированы въ конечномъ видѣ при помощи опредѣленныхъ интеграловъ. Здѣсь же обратимъ наше вниманіе на то, что интегралы будутъ содержать $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ.

Положимъ, что мы рѣшили простѣйшую задачу Коркина. Чтобы рѣшить самую общую задачу, нужно къ найденному дифференціальному уравненію прибавить дифференціальное уравненіе (24), въ которомъ $\Theta(y)$ есть цѣлая алгебраическая функція относительно y произвольной степени; коэффиціенты этой функціи будутъ произвольными функціями перемѣннаго x. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Самое общее рѣшеніе задачи содержитъ произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ.

---

[1]) Не слѣдуетъ забывать, что $\dfrac{M + Nu'_i}{y - u_i}$ есть цѣлая функція перемѣннаго y.

6. Интегралъ дифференціальныхъ уравненій Коркина, когда одинъ изъ показателей интегральнаго множителя есть цѣлое отрицательное число.

Если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), то полный интегралъ дифференціальнаго уравненія можетъ быть выраженъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int R(y)\,N(y\,dy + \psi(x) = C.$$

Положимъ, что одинъ изъ показателей интегральнаго множителя (2) есть цѣлое отрицательное число, $\alpha_i = -m$. Въ такомъ случаѣ подъинтегральная функція (27) можетъ быть приведена къ слѣдующей формѣ:

$$R(y)\,N(y) = \frac{L_m}{(y-u_i)^m} + \frac{L_m}{(y-u_i)^{m-1}} + \ldots + \frac{L_m}{y-u_i} + \psi(y),$$

гдѣ $\psi(y)$ не обращается въ безконечность, если положимъ $y - u_i$. Взявъ интегралы, получимъ:

$$\int R(y)\,N(y)\,dy = \int \psi(y)\,dy - \frac{L_m}{(m-1)(y-u_i)^{m-1}} -$$

$$- \frac{L_{m-1}}{(m-2)(y-u_i)^{m-2}} - \ldots + L_1 \log(y-u_i).$$

Производная отъ этой функціи по перемѣнному x не должна содержать логариѳма, потому что эта производная должна быть равна $R(y)M(y) - f'(x)$. Но въ такомъ случаѣ коэффиціентъ L_1 долженъ быть постояннымъ. Чтобы найти L_1, нужно отъ выраженія $(y-u_i)^m R(y)\,N(y)$ взять производную порядка $m-1$ по перемѣнному y, подставить $y = u_i$ и раздѣлить на $1.2.3\ldots(m-1)$.

Такимъ образомъ должно имѣть мѣсто слѣдующее уравненіе:

$$\left| \frac{\partial^{m-1}}{\partial y_{m-1}} (y-u_i)^m R(y)\,N(y) \right|_{y=u_i} = A_i; \qquad (28)$$

во второй части стоитъ произвольное постоянное.

Если въ уравненіе (28) вмѣсто $N(y)$ подставимъ его выраженіе (26), то получимъ не что иное, какъ интегралъ дифференціальныхъ уравненій Коркина [1]). Такихъ интеграловъ можно найти столько, сколько есть цѣлыхъ отрицательныхъ показателей въ интегральномъ множителѣ (2).

7. Нахожденіе полной системы интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина.

Положимъ, что въ интегральномъ множителѣ, кромѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, остальные показатели суть цѣлыя отрицательныя числа.

Прежде всего по пріему, указанному въ § 3, мы можемъ рѣшеніе нашей задачи привести къ рѣшенію другой задачи, въ которой показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ увеличены на нѣкоторыя положительныя числа.

Такимъ пріемомъ можно достигнуть того, чтобы показатели α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ были положительны. Если же въ самомъ общемъ случаѣ эти показатели мнимые, то мы можемъ достигнуть того, чтобы ихъ дѣйствительныя части были положительны.

Если дифференціальное уравненіе (1) имѣетъ интегральнымъ множителемъ выраженіе (2), то полный интегралъ дифференціальнаго уравненія (1) выражается въ слѣдующей формѣ:

$$\int_{u_1}^{y} R(y)\,N(y)\,\partial y = C. \tag{29}$$

Чтобы убѣдиться въ этомъ, стоитъ только продифференцировать это уравненіе; тогда, если примемъ во вниманіе уравненіе (3), по сокращеніи на $R(y)$, получимъ дифференціальное уравненіе (1).

Въ § 2 было показано, что $u_2, u_3, \ldots u_\mu$ суть частные интегралы дифференціальнаго уравненія (1), поэтому должны имѣть мѣсто такія уравненія:

$$\int_{u_1}^{u_i} R(y)\,N(y)\,\partial y = A_i. \tag{30}$$
$$(j = 2, 3, \ldots \mu)$$

Величины, стоящія во второй части, суть произвольныя постоянныя. Если, какъ сказано выше, дѣйствительныя части показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ положительны, то опредѣленные интегралы (30) имѣютъ конечное значеніе.

Если въ уравненія (30) вмѣсто $N(y)$ подставимъ выраженіе (26), то получимъ не что иное, какъ интегралы дифференціальныхъ уравненій Коркина.

---

[1]) Можетъ случиться, что выраженіе (28) въ первой части тождественно обратится въ нуль при произвольныхъ $q_0, q_1, \ldots, q_{n-2}$. Такой случай невозможенъ, если $m < n$; поэтому этого случая можно избѣжать повышеніемъ показателя α_i.

Такимъ пріемомъ нельзя получить всѣхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина. Въ уравненіи (29) нельзя положить $y = u_{\mu+1}$, $u_{\mu+2} \ldots$, потому что тогда опредѣленные интегралы не будутъ имѣть конечнаго значенія. Но такъ какъ показатели $\alpha_{\mu+1}$, $\alpha_{\mu+2}, \ldots \alpha_n$ суть цѣлыя отрицательныя числа, то остальные интегралы находятся пріемомъ, указаннымъ въ § 6:

$$\left| \frac{\partial^{-\alpha_j-1}}{\partial y^{-\alpha_j-1}} (y - u_j)^{-\alpha_j} R(y) N(y) \right|_{y=u_j} = A_j. \qquad (31)$$

$$(j = \mu+1, \mu+2, \ldots, n).$$

Если въ уравненія (30) и (31) вмѣсто $N(y)$ подставимъ выраженіе (26), то получимъ полную систему интеграловъ дифференціальныхъ уравненій Коркина.

Въ уравненія (5), (30) и (31) вмѣсто $M(y)$ и $N(y)$ подставимъ ихъ выраженія (25) и (26); рѣшимъ полученныя уравненія относительно $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, q_0; q_1, \ldots, q_{n-2}$; подставимъ найденныя функціи въ формулы (25) и (26); въ результатѣ найдемъ полное рѣшеніе простѣйшей задачи Коркина. Изъ полнаго рѣшенія простѣйшей задачи можно найти рѣшеніе общей задачи пріемомъ, указаннымъ въ § 5.

Этимъ наше изслѣдованіе закончено. Остается указать тѣ случаи, когда рѣшеніе задачи не содержитъ опредѣленныхъ интеграловъ.

Положимъ, что всѣ показатели суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя. Тогда интегралы (30), какъ интегралы отъ раціональной функціи, могутъ быть выражены черезъ алгебраическія функціи и черезъ логариѳмы. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Задача Коркина рѣшается въ конечномъ видѣ безъ опредѣленныхъ интеграловъ, если всѣ показатели интегральнаго множителя суть числа цѣлыя, положительныя или отрицательныя.

Положимъ теперь, что всѣ показатели, кромѣ одного, напримѣръ α_1, суть положительныя цѣлыя числа. Тогда подъ знаками интеграловъ (30) имѣемъ произведеніе изъ цѣлой алгебраической функціи на $(y - u_1)^{\alpha_1}$. Такой интегралъ можетъ быть также выраженъ произведеніемъ цѣлой алгебраической функціи на $(y - u_i)^{\alpha_i}$. Отсюда приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Задача Коркина рѣшается въ конечной формѣ безъ опредѣленныхъ интеграловъ, если всѣ показатели интегральнаго множителя, за исключеніемъ одного, суть положительныя цѣлыя числа.

Можно указать еще другіе случаи, когда опредѣленные интегралы могутъ быть найдены.

Положимъ, что одинъ показатель есть число дробное, $\alpha_1 = \frac{\mu}{\nu}$, всѣ же остальные показатели суть положительныя или отрицательныя цѣлыя числа. Тогда преобразованіемъ $y - u_1 = z^\nu$ мы приходимъ къ интеграламъ отъ раціональной функціи.

Положимъ, что два показателя α_1 и α_2 суть дробныя числа со знаменателемъ 2, всѣ же остальные показатели суть положительныя или отрицательныя цѣлыя числа. Тогда преобразованіемъ $y - u_1 = z^2(y - u_2)$ мы приходимъ къ интеграламъ отъ раціональной функціи.

8. Дополненіе къ § 3.

Въ § 3 было показано, что рѣшеніе одной задачи можетъ быть найдено изъ рѣшенія второй задачи, въ которой показатели интегральнаго множителя увеличены нѣкоторыми положительными числами, но окончательный результатъ не приведенъ къ простѣйшей формѣ. Результатъ выраженъ въ слѣдующей формѣ: если дифференціальное уравненіе (16) умножимъ на нѣкоторый множитель и прибавимъ къ уравненію (18), то получимъ общее рѣшеніе начальной задачи. Но и дифференціальное уравненіе (16), въ самомъ общемъ выраженіи, содержитъ цѣлую функцію произвольной степени съ произвольными коэффиціентами; уравненіе (18) также содержитъ цѣлую функцію $\Phi(y)$ данной степени съ произвольными коэффиціентами. Отсюда вытекаетъ такое заключеніе, что какъ будто общее рѣшеніе начальной задачи содержитъ двѣ функціи съ произвольными коэффиціентами. Покажемъ, что эти двѣ функціи всегда такъ комбинуются, что онѣ могутъ быть замѣнены одною произвольною функціей.

Начальная задача такова:

Найти самое общее выраженіе дифференціальнаго уравненія:

$$M(y)\,\partial x + N(y)\,\partial y = 0\,, \tag{1}$$

такъ чтобы оно имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе:

$$R(y) = (y - u_1)^{\alpha_1}(y - u_2)^{\alpha_2} \ldots (y - u_n)^{\alpha_n}. \tag{2}$$

Было показано, что рѣшеніе этой задачи можетъ быть получено изъ общаго рѣшенія слѣдующей задачи:

Найти самое общее выраженіе дифференціальнаго уравненія:

$$M_1(y)\,\partial x + N_1(y)\,\partial y = 0\,, \tag{16}$$

такъ чтобы оно имѣло интегральнымъ множителемъ выраженіе:

$$R_1(y) = (y - u_1)^{\alpha_1 + m_1}(y - u_2)^{\alpha_2 + m_2} \ldots (y - u_n)^{\alpha_n + m_n}, \tag{17}$$

въ которомъ m_1, $m_2, \ldots, m_n$ суть нѣкоторыя цѣлыя положительныя числа.

Положимъ, что простѣйшее рѣшеніе второй задачи выражается уравненіемъ (16). Чтобы найти самое общее рѣшеніе второй задачи, нужно, какъ показано въ § 5, къ уравненію (16) прибавить уравненіе:

$$\left(F\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \overline{F}_2 \Theta\right)dx + \left(F\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \overline{F}_1 \Theta\right)dy = 0, \tag{32}$$

въ которомъ $\Theta(y)$ есть цѣлая функція произвольной степени съ произвольными коэффиціентами. Входящія сюда функціи $\overline{F}_1(y)$ и $\overline{F}_2(y)$ должны быть опредѣлены по слѣдующимъ формуламъ:

$$\overline{F}_1(y) = F(y)\sum\frac{(\alpha_i + m_i + 1)}{y - u_i}, \quad \overline{F}_2(y) = F(y)\sum\frac{(\alpha_i + m_i + 1)u_i'}{y - u_i}.$$

Если мы сумму уравненій (16) и (32) умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію:

$$\left(F\frac{\partial \Phi}{\partial x} - F_2 \Phi\right)dx + \left(F\frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_1 \Phi\right)dy = 0, \tag{18}$$

то получимъ, какъ было показано въ § 3, самое общее рѣшеніе начальной задачи.

Если уравненіе (32) умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ и прибавимъ къ уравненію (18), то легко показать, что въ результатѣ получимъ слѣдующее уравненіе:

$$\left(F\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} - F_2 \Theta_1\right)dx + \left(F\frac{\partial \Theta_1}{\partial y} + F_1 \Theta_1\right)dy = 0, \tag{33}$$

въ которомъ

$$\Theta_1(y) = \Phi(y) + \frac{R_1(y)}{R(y)}\Theta(y).$$

Отсюда вытекаетъ слѣдующій результатъ:

Если мы дифференціальное уравненіе, соотвѣтствующее простѣйшему рѣшенію второй задачи, умножимъ на $\frac{R_1(y)}{R(y)}$ *и прибавимъ къ уравненію* (33), *въ которомъ* $\Theta_1(y)$ *есть цѣлая функція произвольной сте-*

пени съ произвольными коэффиціентами, то въ результатѣ получимъ самое общее рѣшеніе первой задачи.

Такимъ образомъ снова подтверждается, что рѣшеніе задачи въ самомъ общемъ случаѣ содержитъ только одну произвольную функцію и конечное число произвольныхъ постоянныхъ.

Напомнимъ здѣсь, что найденное такимъ пріемомъ рѣшеніе первой задачи только въ томъ случаѣ будетъ самымъ общимъ, а не частнымъ рѣшеніемъ, когда выполняется требованіе, найденное въ § 3: *чтобы ни одинъ цѣлый отрицательный показатель интегральнаго множителя* (2) *не превращался ни въ нуль, ни въ положительное число въ интегральномъ множителѣ* (17).

9. Интегральный множитель $(y-u)^\alpha$.

Разсмотримъ простѣйшій случай задачи.

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^\alpha$.

Изъ сказаннаго въ § 5 слѣдуетъ, что нужно составить такое дифференціальное уравненіе:

$$d((y-u)^{\alpha+1}\Theta(y))=0.$$

Раздѣливъ на $(y-u)^\alpha$, получимъ искомое дифференціальное уравненіе:

$$\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial x}-(\alpha+1)u'\Theta\right)dx-\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+(\alpha+1)\Theta\right)dy=0. \quad (35)$$

Здѣсь $\Theta(y)$ есть цѣлая функція произвольной степени съ произвольными коэффиціентами.

Въ томъ случаѣ, когда α есть цѣлое отрицательное число найденное рѣшеніе не будетъ общимъ рѣшеніемъ. Тогда, какъ показано въ § 4, уравненіе (34) должно быть замѣнено слѣдующимъ:

$$d\{(y-u)^{\alpha+1}\Theta(y)+A\log(y-u)\}=0.$$

Раздѣливъ на $(y-u)^\alpha$, получимъ искомое дифференціальное уравненіе въ слѣдующей формѣ:

$$\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial x}-(\alpha+1)u'\Theta-Au'(y-u)^{-\alpha-1}\right)dx+$$
$$+\left((y-u)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+(\alpha+1)\Theta+A(y-u)^{-\alpha-1}\right)dy=0.$$

Здѣсь A есть произвольное постоянное.

10. Интегральный множитель $(y-u)^\alpha (y-v)^\beta$.

Рѣшимъ здѣсь слѣдующую задачу:

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^\alpha (y-v)^\beta$.

Разсмотримъ тотъ случай, когда дѣйствительныя части показателей α и β положительны. Простѣйшая задача Коркина, какъ показано въ § 5, приводится къ дифференціальному уравненію:

$$(py+p_1)\,dx+q\,dy=0.$$

Задача приводится къ нахожденію трехъ функцій p, p_1 и q. На основаніи уравненій (5) имѣемъ:

$$\begin{aligned} pu+p_1+q\,u'&=0, \\ pv+p_1+qv'&=0. \end{aligned} \tag{37}$$

Изъ § 7 слѣдуетъ, что q опредѣляется изъ уравненія:

$$q\int_u^v (y-u)^\alpha (y-u)^\beta\,dy=A. \tag{38}$$

Сдѣлаемъ въ этомъ интегралѣ замѣну перемѣннаго:

$$y=u+z(v-u);$$

имѣемъ:

$$\int_u^v (y-u)^\alpha (y-v)^\beta\,dy=(v-u)^{\alpha+\beta+1}\int_0^1 z^\alpha (z-1)^\beta\,dz.$$

Опредѣленный интегралъ второй части имѣетъ постоянную величину, на которую мы можемъ раздѣлить произвольное постоянное A. Итакъ, мы можемъ положить

$$q=-A(v-u)^{-\alpha-\beta-1}.$$

Подставивъ найденное выраженіе въ уравненія (37), изъ рѣшенія этихъ уравненій найдемъ:

$$p=A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}(v'-u'),$$

$$p_1=A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}(vu'-uv').$$

Подставивъ найденныя значенія p, p_1 и q въ уравненіе (36), получимъ:

$$A(v-u)^{-\alpha-\beta-2}\{v'(y-u)dx-u'(y-v)dx+(u-v)dy\}=0. \quad (39)$$

Въ такой формѣ рѣшается простѣйшая задача. Чтобы найти самое общее рѣшеніе задачи, нужно къ уравненію (39) прибавить уравненіе (24), въ которомъ нужно положить:

$$F=(y-u)(y-v),$$

$$F_1=(\alpha+1)(y-v)+(\beta+1)(y-u), \quad (40)$$

$$F_2=(\alpha+1)u'(y-v)+(\beta+1)v'(y-u).$$

Замѣчательно то обстоятельство, что найденное рѣшеніе годится во всѣхъ случаяхъ, за исключеніемъ двухъ: 1) когда показатели α и β суть цѣлыя отрицательныя числа, 2) когда $\alpha+\beta$ равно цѣлому отрицательному числу. Первый случай рѣшенъ въ § 4. Покажемъ здѣсь рѣшеніе второго случая.

Требуется найти самую общую форму дифференціальнаго уравненія перваго порядка, такъ чтобы его интегральнымъ множителемъ было $(y-u)^\alpha(y-v)^{-m-\alpha}$, *гдѣ m есть цѣлое положительное число.*

Для рѣшенія этой задачи прежде всего разыщемъ такое дифференціальное уравненіе, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ $(y-u)^\alpha(y-v)^{\alpha-1}$. Простѣйшая форма такого дифференціальнаго уравненія будетъ:

$$A(v-u)^{-3}\{v'(y-u)dx-u'(y-v)dx+(u-v)dy\}=0.$$

По доказанному въ § 8 нужно это уравненіе умножить на $(y-v)^{m+1}$ и прибавить къ уравненію (33), въ которомъ вмѣсто F, F_1 и F_2 нужно подставить ихъ выраженія (40), въ которыхъ вмѣсто β нужно подставить $-m-\alpha$. Въ результатѣ получимъ самую общую форму дифференціальнаго уравненія, интегральнымъ множителемъ котораго будетъ $(y-u)^\alpha(y-v)^{-m-\alpha}$.

Этимъ я заканчиваю изслѣдованіе задачи Коркина и думаю, что эта задача изслѣдована во всѣхъ подробностяхъ.