По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ:

Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы.

А. Н. Коркина.

Подъ этимъ заглавіемъ появилась въ Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества [1]) статья В. П. Ермакова, содержащая новое изложеніе рѣшенія той задачи, которая трактуется въ моемъ мемуарѣ подъ заглавіемъ: „Изысканія о множителяхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка“ [2]).

Если бы упомянутую статью написалъ кто либо другой, я не счелъ бы нужнымъ отвѣчать на нее, но такъ какъ она принадлежитъ столь уважаемому ученому какъ В. П. Ермаковъ, то мнѣ кажется необходимымъ сдѣлать нѣкоторыя замѣчанія.

Въ предисловіи къ своей статьѣ (§ 1) В. П. Ермаковъ подвергаетъ критикѣ мое изложеніе предмета въ упомянутомъ мемуарѣ, въ другихъ же параграфахъ излагаетъ свои собственныя изслѣдованія, касающіяся факторіальныхъ множителей.

На критику моего изложенія я отвѣчать не буду, такъ какъ лучшимъ отвѣтомъ на нее служитъ оглавленіе содержанія параграфовъ, приложенное къ моему мемуару.

Относительно же изслѣдованій В. П. Ермакова и его новаго изложенія рѣшенія моей задачи я сдѣлаю нѣсколько замѣчаній.

Сначала посмотримъ, какъ онъ выражаетъ самую задачу. Въ § 2 онъ ее формулируетъ такъ:

---

[1]) Вторая серія томъ IX n⁰ 1.

[2]) Математическій Сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ. Томъ XXIV.

„Пусть M и N означаютъ цѣлыя алгебраическія функціи перемѣннаго y, коэффиціенты у этихъ многочленовъ суть функціи перемѣннаго x. Предметъ нашего изслѣдованія заключается въ рѣшеніи слѣдующей задачи:

Требуется найти самое общее выраженіе для M и N подъ условіемъ, чтобы дифференціальное уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{1}$$

имѣло интегральный множитель

$$R = (y - u_1)^{\alpha_1}(y - u_2)^{\alpha_2}\ldots(y - u_n)^{\alpha} .$$

Здѣсь $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ суть числа постоянныя, $u_1, u_2, \ldots u_n$ суть функціи перемѣннаго x".

Замѣчу, что здѣсь нужно добавить; между постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ нѣтъ ни одной равной нулю и величины $u_1, u_2, \ldots u_n$, неравныя между собою, могутъ быть въ частныхъ случаяхъ и постоянными.

Ничего не говорится о томъ, что задано и что считается неизвѣстнымъ.

Хотя въ заглавіи статьи и упоминается о *данномъ интегральномъ множителѣ*, но $u_1, u_2, \ldots u_n$ не могутъ быть заданы по произволу какъ функціи отъ x, потому что въ этомъ случаѣ не будетъ существовать цѣлыхъ функцій M и N отъ y, для которыхъ уравненіе (1) имѣли бы множителемъ R.

Показатели же $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и число ихъ n должны быть заданы, потому что въ противномъ случаѣ не будетъ опредѣленныхъ выраженій для M и N въ уравненіи (1).

Наконецъ и при этихъ данныхъ задача, которую себѣ предлагаетъ авторъ становится невозможною, если не задать степеней полиномовъ M и N, такъ какъ *самаго общаго выраженія для* M и N, которое хочетъ найти В. П. Ермаковъ, не существуетъ, какъ видно изъ моего мемуара, а для каждыхъ степеней M и N получаются свои особенныя выраженія.

Такъ какъ онъ говоритъ, что излагаетъ рѣшеніе *моей* задачи, то я считаю нужнымъ привести здѣсь ея постановку, которая мною сдѣлана въ предисловіи къ упомянутому мемуару.

Разумѣя подъ M и N цѣлыя функціи отъ y, подъ $u_1, u_2, \ldots u_l$ величины отъ y независящія, неравныя между собою, подъ P функцію отъ x, подъ $h_1, h_2, \ldots h_l$ постоянныя, изъ которыхъ ни одна не равна нулю и выбирая подходящимъ образомъ изъ величинъ $u_1, u_2, \ldots u_l$ и коэффиціентовъ многочленовъ M и N тѣ, которые считаются заданными, я ставлю слѣдующую задачу:

Найти необходимыя и достаточныя условія, выраженныя конечными уравненіями между данными и неизвѣстными количествами, для того чтобы уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0$$

могло имѣть множитель

$$\mu = P(y-u_1)^{h_1}(y-u)_2^{h_2}\dots(y-u_l)^{h_l}.$$

Здѣсь h_1, h_2,...h_l и число ихъ l считаются заданными.

Прибавлю, что степени полиномовъ M и N также предполагаются заданными.

Умножимъ предыдущее дифференціальное уравненіе на P и сдѣлаемъ

$$PM = M(y),\ \ PN = N(y);$$

тогда уравненіе

$$M(y)dx + N(y)dy = 0$$

будетъ имѣть множителемъ

$$\frac{\mu}{P} = \mu(y) = (y-u_1)^{h_1}(y-u_2)^{h_2}\dots(y-u_l)^{h_l}.$$

Пусть σ есть высшая изъ двухъ степеней полиномовъ $M(y), N(y)$; тогда они могутъ быть написаны такъ

$$M(y) = p_0 y^\sigma + p_1 y^{\sigma-1} + p_2 y^{\sigma-2} + \dots + p_{\sigma-1} y + p_\sigma,$$

$$N(y) = q_0 y^\sigma + q_1 y^{\sigma-1} + q_2 y^{\sigma-2} + \dots + q_{\sigma-1} y + q_\sigma,$$

гдѣ

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\dots p_\sigma,\ q_0,\ q_1,\ q_\sigma, \tag{2}$$

суть величины отъ y независящія и покрайней мѣрѣ одна изъ двухъ p_0, q_0 не равна нулю.

Прибавлю, что q_0 должна быть величиною постоянною.

Понятно, что отъ величинъ (2) и u_1, u_2,...u_l можно требовать только одного, а именно, чтобы ихъ выраженія были необходимыми и достаточными для того, чтобы уравненіе $M(y)dx + N(y)dy = 0$ имѣло множитель $\mu(y)$, причемъ кромѣ σ, обозначающаго степень одного изъ полиномовъ M и N, нужно задать и степень другаго.

Я показалъ, что величины (2) вмѣстѣ съ u_1, u_2,...u_l удовлетворяютъ $\sigma + l$ совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка.

Если бы мы задали нѣкоторыя изъ величинъ (2), напримѣръ изъ ряда

$$p_0, p_1, p_2, \ldots p_\sigma$$

въ видѣ функцій отъ

$$q_0, q_1, q_2, \ldots q_\sigma, u_1, u_2, \ldots u_l$$

и ихъ производныхъ, то, подставивъ ихъ въ уравненія (43) параграфа 16 моего мемуара, мы получили бы новыя дифференціальныя уравненія, которыя, если не окажутся слѣдствіями упомянутыхъ $\sigma + l$, нужно къ этимъ послѣднимъ присоединить и объ интегрированіи которыхъ сказать ничего нельзя. Они уже совсѣмъ не относятся къ моей задачѣ.

Посмотримъ же, какъ поступаетъ В. П. Ермаковъ, чтобы рѣшить задачу, и для этой цѣли разсмотримъ § 5 его статьи.

Онъ старается привести уравненіе

$$M(y)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{3}$$

къ другому, имѣющему тотъ же множитель R, какъ и это (3).

Затѣмъ предполагая, что найдены общія величины коэффиціентовъ при dx и dy въ этомъ другомъ, онъ хочетъ получить изъ нихъ общія же величины полиномовъ $M(y)$ и $N(y)$.

Онъ выводитъ сначала уравненіе (24), а именно,

$$\left(F\frac{\partial\Theta}{dx} - F_2\,\Theta\right)dx + \left(F\frac{\partial\Theta}{dy} + F_1\,\Theta\right)dy = 0, \tag{24}$$

имѣющее множителемъ произведеніе

$$(y-u_1)^{\alpha_1}(y-u_2)^{\alpha_2}\ldots(y-u_n)^{\alpha_n}$$

при произвольныхъ величинахъ $u_1, u_2, \ldots u_n$, независящихъ отъ y.

Въ уравненіи (24) F, F_1, F_2 имѣютъ такія величины:

$$F = (y-u_1)\,(y-u_2)\ldots(y-u_n),\ F_1 = F\sum_i \frac{\alpha_i + 1}{y - u_i}, F_2 = F\sum_i \frac{(\alpha_i + 1)u'_i}{y - u_i},$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots n,$$

а Θ есть произвольная цѣлая функція отъ y.

Потомъ, конечно предполагая, что $u_1, u_2, \ldots u_n$ имѣютъ тѣже величины, что и въ множителѣ R уравненія (3), онъ вычитаетъ уравненіе (24) изъ (3) и получаемъ новое уравненіе, которое мы напишемъ такъ:

$$M_1(x)\,dx + N_1(y)\,dy = 0 \tag{4}$$

гдѣ, слѣдовательно, будетъ

$$M_1(y) = M(y) - F\frac{\partial\Theta}{dx} + F_2\Theta, N_1(y) = N(y) - F\frac{\partial\Theta}{dy} - F_1\,\Theta \tag{5}$$

Назовемъ черезъ τ степень полинома $M(y)$ и черезъ ϱ степень $N(y)$ относительно перемѣнной y. Число σ есть наибольшее изъ двухъ τ и ϱ.

Уравненіе (4) дѣйствительно будетъ имѣть множитель R.

В. П. Ермаковъ хочетъ сдѣлать степень полинома $N_1(y)$ ниже чѣмъ $n-1$.

Для этой цѣли, предполагая, что $\varrho > n-2$, онъ дѣлаетъ $\varrho = n+m-1$, гдѣ m цѣлое и положительное число, или нуль. За Θ онъ беретъ цѣлую функцію степени m

$$\Theta = r_0 y^m + r_1 y^{m-1} + \ldots$$

Чтобы сдѣлать степень $N_1(y)$ ниже чѣмъ ϱ, онъ дѣлаетъ

$$q_0 = \frac{r_0}{\sum_i \alpha_i + m}, \tag{6}$$

гдѣ у него q_0 есть коэффиціентъ при y^ϱ въ полиномѣ $N(y)$, который онъ пишетъ такъ

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \ldots$$

Слѣдовательно это q_0 можетъ не совпадать съ моимъ q_0, введеннымъ выше.

Относительно уравненія (4) нужно замѣтить слѣдующее:

Во первыхъ формула (6) В. П. Ермакова не вѣрна. Нужно сдѣлать

$$r_0 = \frac{q_0}{\sum_i \alpha_i + m + n},$$

въ чемъ легко убѣдиться, когда уравняемъ нулю коэффиціентъ при y^ϱ въ полиномѣ $N_1(y)$.

Для дальнѣйшаго пониженія нужно пользоваться коэффиціентами

$$r_1,\ r_2 \ldots r_m,$$

чтобы довести степень $N_1(y)$ до $\varrho - m - 1 = n - 2$.

Но В. П. Ермаковъ замѣчаетъ, что величина r_0 невозможна, когда знаменатель въ ней есть нуль, то есть, когда

$$\sum_i \alpha_i + m + n = 0$$

и этимъ ограничивается.

Между тѣмъ при нахожденіи каждой изъ величинъ $r_0, r_1, r_2 \dots r_m$ окажется исключительный случай.

Такъ напримѣръ, уравнивая нулю коэффиціентъ при $y^{\rho-1}$ въ $N_1(y)$, мы получимъ для нахожденія r_1 уравненіе

$$q_1 - [\sum_i (\alpha_i + 1) u_i - (\sum_i \alpha_i + n + m) \sum_i u_i] r_0 - (\sum_i \alpha_i + m + n - 1) r_1 = 0$$

и исключительный случай будетъ, когда

$$\sum_i \alpha_i + m + n - 1 = 0;$$

значитъ тотъ, который упоминается В. П. Ермаковымъ, не единственный.

Во всѣхъ остальныхъ, неисключительныхъ случаяхъ, степень $N_1(y)$ можетъ быть доведена до $n-2$. Тогда окажется, что $r_0, r_1, r_2 \dots r_m$ и коэффиціенты этого приведеннаго полинома $N_1(y)$ будутъ функціями отъ

$$u_1, u_2, \dots u_n, q_0, q_1, q_2, \dots q_m, \tag{7}$$

гдѣ величины $q_0, q_1, q_2, \dots q_m$ суть тѣ, которыя находятся въ формулѣ

$$N(y) = q_0 y^{n+m-1} + q_1 y^{n+m-2} + \dots$$

Что касается коэффиціентовъ $M_1(y)$, то послѣ приведенія они будутъ функціями не только отъ величинъ (7), но еще и отъ ихъ производныхъ и кромѣ того отъ

$$p_0, p_1, p_2, \dots p_\sigma,$$

находящихся въ формулѣ

$$M(y) = p_0 y^\sigma + p_1 y^{\sigma-1} + \dots + p^{\sigma-1} y + p_\sigma,$$

гдѣ у насъ σ есть наибольшее изъ чиселъ τ и ϱ.

Назовемъ по аналогіи σ' наибольшую изъ степеней двухъ полиномовъ $M_1(y)$ и $N_1(y)$ послѣ сдѣланнаго ихъ приведенія. Тогда можно ихъ написать такъ

$$M_1(y) = P_0 y^{\sigma'} + P_1 y^{\sigma'-1} + P_2 y^{\sigma'-2} + \dots + P_{\sigma'-1} y + P_\sigma.$$

$$N_1(y) = Q_0 y^{\sigma'} + Q_1 y^{\sigma'-1} + Q_2 y^{\sigma'-2} + \dots + Q_{\sigma'-1} y + Q_{\sigma'},$$

гдѣ изъ двухъ величинъ P_0, Q_0 покрайней мѣрѣ одна не равна нулю.

Во вторыхъ степень $N_1(y)$ дѣйствительно будетъ $n-2$ послѣ приведенія, но откуда взялъ В. П. Ермаковъ, что степень $M_1(y)$ будетъ $n-1$?

Онъ указываетъ на уравненіе (4) его статьи, но изъ него ничуть не слѣдуетъ, что она есть $n-1$.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что число τ, или степень $M(y)$ есть произвольное. Возмемъ, напримѣръ, $\tau > m+n$; тогда степень $M_1(y)$ какъ до приведенія, такъ и послѣ него, будетъ $\tau > n-1$.

Если взять $\tau \leqq m+n$, то почему думаетъ В. П. Ермаковъ, что всѣ коэффиціенты въ $M_1(y)$ при

$$y^{m+n},\ y^{m+n-1}, \ldots y^n$$

должны непремѣнно уничтожиться?

Такимъ образомъ утвержденіе его о степени $M_1(y)$ прямо невѣрно.

Въ третьихъ, нигдѣ не упоминается о важномъ случаѣ, когда $\tau > \varrho+1$[1]). Тогда задача можетъ не имѣть рѣшенія. Дѣйствительно, тогда величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ не совершенно произвольны, а должны удовлетворить уравненію

$$\alpha_1, + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\tau. \tag{8}$$

Если это условіе выполнено, то степень $M_1(y)$ послѣ приведенія останется тоже τ, если возмемъ $\tau > m+n$, или иначе, $\tau > \varrho+1$, что и до приведенія.

Если оно несоблюдено, то будетъ $\tau \leqq \varrho+1$, или иначе, $\tau \leqq m+n$.

Возьмемъ въ общемъ случаѣ $\tau = \varrho+1 = m+n$ и въ функціи Θ сдѣлаемъ

$$r_0 = \frac{q_0}{\sum\limits_i \alpha_i + m + n}, \tag{9}$$

оставляя $r_1, r_2, \ldots, r_m$ произвольными.

Тогда степень $N_1(y)$ будетъ $\varrho-1 = m+n-2$, а степень $M_1(y)$ не можетъ остаться $\varrho+1$, ибо тогда она превышала бы степень $N_1(y)$ на двѣ единицы, а это требуетъ по § 5 моей статьи, чтобы условіе (8) было соблюдено. Такъ какъ послѣдняго нѣтъ, а уравненіе

$$M_1(y)\,dx + N_1(y)\,dy = 0$$

все таки имѣетъ множитель R, то въ $M_1(y)$, при выбранной величинѣ (9) количества r_0, коэффиціентъ при $y^{\varrho+1}$ долженъ уничтожиться. Это даетъ

$$p_0 + r_0' = 0, \text{ или } p_0 = -\frac{q_0'}{\sum\limits_i \alpha_i + m + n}.$$

[1]) См. § 5 моей цитированной статьи.

Если, удержавъ величину (9) для r_0, мы сдѣлаемъ

$$r_1 = \frac{q_1 - [\sum_i (\alpha_i + 1) u_i - (\sum_i \alpha_i + m + n) \sum_i u_i]}{\sum_i \alpha_i + m + n - 1},$$

предполагая, что $\sum_i \alpha + m + n - 1$ не нуль, то коэффиціентъ при $y^{\varrho - 1}$ въ $N_1(y)$ уничтожится, а степень $M_1(y)$ не можетъ остаться равною ϱ, ибо условіе

$$\sum_i \alpha_i + \varrho = \sum_i \alpha_i + m + n - 1 = 0$$

не выполнено.

Значитъ въ $M_1(y)$ коэффиціентъ при y^ϱ долженъ быть нулемъ, а это даетъ

$$p_1 - r_1' + r_0' \sum_i u_i + r_0 \sum_i (\alpha_i + 1) u_i' = 0,$$

откуда выводимъ

$$p_1 = r_1' - r_0' \sum_i u_i - r_0 \sum_i (\alpha_i + 1) u_i'.$$

Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ далѣе, мы увидимъ, что, если не встрѣтится ни одного изъ исключительныхъ случаевъ, упомянутыхъ въ замѣчаніи первомъ, мы можемъ довести степень $M_1(y)$ до $n - 1$, а степень $N_1(y)$ до $n - 2$.

Въ приведенномъ уравненіи (4) будетъ тогда $\sigma' = n - 1$.

Въ третьихъ утвержденіе В. П. Ермакова, что по исключеніи

$$P_0, P_1, P_2, \ldots P_0',$$

изъ $\sigma' + n = 2n - 1$ уравненій, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты приведеннаго уравненія (4), останется $n - 1$ самостоятельныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегралы которыхъ будутъ содержать $n - 1$ независимыхъ постоянныхъ произвольныхъ, опять невѣрно.

Дѣйствительно, у него ничего не говорится о важномъ случаѣ, когда мое число a, или въ настоящемъ случаѣ $\sum_i \alpha_i + \sigma' = \sum_i \alpha_i + n - 1$ равно одному изъ чиселъ

$$0, 1, 2, 3, \ldots n - 3,$$

то есть, когда $\sum_i \alpha_i$ имѣетъ одну изъ величинъ

$$-2, -3, -4, \ldots -(n-1).$$

Эти величины не даютъ ни одного изъ упомянутыхъ исключительныхъ случаевъ и, слѣдовательно, при нихъ приведенiе уравненiя (4) возможно.

Между тѣмъ число дифференцiальныхъ уравненiй и постоянныхъ произвольныхъ въ ихъ интегралахъ можетъ быть и n (см. §§ 17 и 19 моей статьи).

Въ четвертыхъ, кромѣ упомянутыхъ важныхъ случаевъ, о которыхъ ничего не говорится, не упоминается также о слѣдующихъ:

Когда степень полинома $M(y)$ меньше степени $N(y)$. Въ этомъ случаѣ нѣсколько интеграловъ дифференцiальныхъ уравненiй задачи получается непосредственно. (См. §§ 9, 10 и 12 моей статьи).

Когда $\sum_i \alpha_i$ есть цѣлое число. Тогда существуетъ одинъ интегралъ, получающiйся непосредственно. (См. § 15 моей статьи).

Не устанавливается съ точностью ни число дифференцiальныхъ уравненiй задачи, ни число ихъ независимыхъ интеграловъ въ различныхъ случаяхъ.

Наконецъ, въ пятыхъ, замѣчу, что приведенiе заданнаго уравненiя къ другимъ по §§ 3 и 5 статьи автора настолько усложняетъ задачу о разысканiи конечныхъ уравненiй между величинами

$$q_0,\ q_1,\ q_2, \ldots q_z,\ u_1,\ u_2, \ldots u_l,$$

что самъ авторъ ихъ написать не можетъ.

Пока же этого не сдѣлано, можно сказать, что рѣшенiе задачи отсутствуетъ.

Не дѣлая другихъ возраженiй, я въ заключенiе скажу, что хотя я и нахожу замѣчанiя В. П. Ермакова, относящiяся къ моей задачѣ, весьма интересными и важными, но не могу съ нимъ согласиться, что мои результаты изложены имъ въ простой и ясной формѣ, какъ это онъ говоритъ въ концѣ своего предисловiя, ни въ томъ, что задача изслѣдована имъ во всѣхъ подробностяхъ, какъ онъ полагаетъ въ концѣ своей статьи.