

Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Н. Н. Салтыкова.

Г Л А В А I.

Образованіе производныхъ уравненій С. Ли и задача ихъ интегрированія.

1. Настоящее изслѣдованіе мы начнемъ съ изложенія начальныхъ понятій, которыя представляютъ основы классической теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія съ частными производными получаютъ при помощи исключенія произвольныхъ постоянныхъ величинъ или произвольныхъ функцій изъ функціональныхъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій.

Пусть зависимая переменная z обозначаетъ функцію двухъ независимыхъ переменныхъ x и y , которая опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ

$$z = f(x, y).$$

Назовемъ черезъ p и q частныя производныя перваго порядка функціи z , соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ x и y , т. е. положимъ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующая дифференціальная зависимость, равнозначная обоимъ предыдущимъ равенствамъ

$$dz = p dx + q dy.$$

Пусть имѣемъ зависимость между разсматриваемыми переменными z, x, y , которая опредѣляетъ семейство поверхностей, зависящее отъ двухъ различныхъ параметровъ a и b , и представляется уравненіемъ

$$z = f(x, y, a, b). \quad (1)$$

Предположимъ, что послѣднее равенство и его два производныя уравненія перваго порядка

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

образуютъ совмѣстно систему трехъ уравненій, которыя, по исключеніи параметровъ a и b , даютъ въ результатъ одну зависимость слѣдующаго вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \quad (3)$$

Послѣднее полученное равенство (3) представляетъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p и q одной неизвѣстной функціи z и характеризуетъ собою общія свойства всѣхъ поверхностей даннаго вида (1).

Рѣшеніе обратнаго вопроса, относительно разысканія функціональных уравненій поверхностей, удовлетворяющихъ условіямъ, выраженнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ (3), представляетъ такъ называемую задачу интегрированія послѣдняго дифференціального уравненія.

Всякое значеніе функціи z , въ переменныхъ x и y , опредѣляющее какую-либо поверхность искомаго вида, и, стало-быть, совмѣстно со значеніями своихъ производныхъ $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ утождествляющее данное дифференціальное уравненіе (3), называется его *рѣшеніемъ*, или *интеграломъ*.

Полнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), заключающее двѣ различныя произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ даннаго рѣшенія и его двухъ производныхъ уравненій перваго порядка, приводитъ къ одному только исходному дифференціальному уравненію (3).

Частнымъ интеграломъ называется рѣшеніе уравненія (3), получаемое изъ полнаго его интеграла сообщеніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ величинамъ, входящимъ въ этотъ полный интегралъ.

Наконецъ, *общимъ* и *особеннымъ* интегралами называются рѣшенія уравненія (3), опредѣляемые геометрически какъ обертки семейства поверхностей (1), образованныя соответственно въ предположеніяхъ, что параметры a и b связаны, въ первомъ случаѣ одной произвольной зависимостью, а во второмъ случаѣ a и b независимы между собой.

Если остановиться на рассматриваемомъ случаѣ двухъ независимыхъ переменныхъ, то, относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, координаты x , y , z отмѣчаютъ въ пространствѣ точку поверхности, представленной уравненіемъ (1), а частныя производныя p и q опредѣляютъ положеніе касательной плоскости въ рассматриваемой точкѣ поверхности. Всѣ приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ всякаго труда на случай произвольнаго числа независимыхъ переменныхъ величинъ и на системы совокупныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ переменнымъ.

Послѣднія геометрическія представленія тѣсно связаны съ классической теоріей уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, созданной трудами Лагранжа, Коши и Якоби. На изложенномъ выше способѣ происхожденія рассматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій и на указанныхъ геометрическихъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ основаны всѣ приложенія названной теоріи къ цѣлому ряду вопросовъ геометріи и анализа.

Со времени созданія исчисления безконечно-малыхъ величинъ до семидесятихъ годовъ прошлаго столѣтія, теорія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи развивалась, исходя изъ разсмотрѣнія изложенныхъ выше основныхъ понятій дифференціального исчисления, относительно частныхъ производныхъ зависимыхъ переменныхъ по независимымъ переменнымъ. Затѣмъ С. Ли поставилъ дальнѣйшее развитіе изучаемой теоріи въ зависимость отъ изслѣдованія новыхъ переменныхъ величинъ и новыхъ способовъ образованія особаго рода *производныхъ* уравненій, которыя замѣнили собой дифференціальныя уравненія съ частными производными, въ классическомъ смыслѣ этого слова.

Въ нашемъ сочиненіи мы имѣемъ въ виду критическое изслѣдованіе новыхъ ученій С. Ли, которое приведетъ насъ къ строгому различію между обоими типами указанныхъ уравненій,—съ частными производными классической теоріи и производныхъ уравненій С. Ли.

Поэтому мы начнемъ послѣдующее изложеніе съ разсмотрѣнія основныхъ понятій рассматриваемой теоріи.

2. Въ своихъ изслѣдованіяхъ по теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій С. Ли ввелъ новыя отличныя отъ предыдущихъ понятія, разсмотрѣнію которыхъ и посвящаются послѣдующія строки ¹⁾.

¹⁾ *S. Lie.*—Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine classification derselben (Nachrichten vor der K. Gesellschaft der Wissenschaften u D. G. A. Universität, Göttingen, 1873, S. 473).

S. Lie.—Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. IX, 1876. S. 250).

Пусть, согласно съ предыдущимъ, величины x, y, z обозначаютъ координаты нѣкоторой данной точки въ пространствѣ, а X, Y, Z представляютъ текущія координаты. Уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку (x, y, z) , выражается слѣдующимъ равенствомъ

$$Z - z = p (X - x) + q (Y - y),$$

гдѣ значенія коэффициентовъ p и q вполне опредѣляютъ положеніе опредѣленной плоскости, которую условимся символически обозначать черезъ (p, q) .

Такимъ образомъ координаты x, y, z и параметры p, q , отмѣчая опредѣленную точку въ пространствѣ и проходящую черезъ нее плоскость, вмѣстѣ съ тѣмъ вполне опредѣляютъ нѣкоторый бесконечно-малый криволинейный поверхностный элементъ, построенный въ разсматриваемой точкѣ (x, y, z) и совпадающій въ этой точкѣ съ построенной въ ней плоскостью (p, q) .

Поэтому совокупность разсматриваемыхъ пяти величинъ

$$x, y, z, p, q \tag{4}$$

С. Ли называетъ *поверхностнымъ элементомъ* (Flächenelement), или иногда, для краткости изложенія, *элементомъ* (Element).

Совокупность значеній поверхностныхъ элементовъ, связанныхъ между собой какими-либо условіями, или уравненіями, С. Ли называетъ *системой поверхностныхъ элементовъ* (Schar v. Flächenelementen). Такъ, напримѣръ, всякое уравненіе между переменными величинами (4)

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{5}$$

опредѣляетъ систему поверхностныхъ элементовъ, совершенно независимо отъ того, заключаетъ ли это уравненіе всѣ пять разсматриваемыхъ переменныхъ величинъ, или только нѣкоторыя изъ нихъ.

S. Lie u. F. Engel.—Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen (Mathematische Annalen, Bd. 59, S. 193).

S. Lie u. F. Engel.—Theorie der Transformationsgruppen, II Abschnitt, Leipzig, 1890. S. 77.

S. Lie u. G. Scheffers.—Geometrie der Berührungstransformationen. Erster Band, Leipzig, 1896. S. 481.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris 1891. p. 244.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem. Leipzig 1900. S. 230.

F. Klein.—Conferences sur les Mathématiques faites au congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago. Paris. 1898. p. 18.

F. Klein.—Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. 1891, p. 187).

Н. Цытовичъ.—Теорія Гамильтона—Якоби—Ли въ Механикѣ. С.-Петербургъ. 1899, стр. 54, 70.

Два смежных бесконечно близко расположенных поверхностных элемента называются *соединенными* (vereinigt), если точка одного элемента расположена в плоскости другого.

Легко вывести аналитическое условие, показывающее, что данный поверхностный элемент (4) находится в *соединении* с бесконечно близким с ним элементом

$$x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq.$$

Подставляя для этого координаты точки последнего элемента вместо текущих координат в уравнение плоскости (p, q), получаем следующее равенство

$$dz = p dx + q dy, \quad (6)$$

которое и представляет искомое условие *соединенности* обоих рассматриваемых поверхностных элементов.

Наконец, система поверхностных элементов, находящихся в *соединении* со всеми смежными с ними бесконечно-близко расположенными элементами, называется, согласно с С. Ли, *собранием* поверхностных элементов (*Element-Verein*, или *Element-Mannigfaltigkeit*).

Таким образом, при рассмотрении собраний поверхностных элементов, приходится рассматривать прежде всего условия, определяющие данную систему элементов и затем—условия их соединенности.

Легко видеть, например, что совокупность всех точек какой-либо поверхности и построенных в них касательных плоскостей к этой поверхности представляет собрание элементов, покрывающих сплошным образом данную поверхность.

Второй пример представляет система элементов, из всех точек какой-либо кривой линии в пространстве и плоскостей, проходящих через касательные прямые, проведенные в точках рассматриваемой кривой, которые образуют собрание элементов, расположенных сплошным образом вдоль нашей кривой линии.

Наконец, третьего вида собрание образуется системой элементов, плоскости которых проходят через одну общую точку пространства.

Легко вообразить еще и другие собрания поверхностных элементов, которые получаются из последних двух указанных типов собраний, введением некоторых дополнительных условий, относительно составляющих их элементов, расположенных вдоль кривой линии или пересекающихся в одной точке.

Все поверхностные элементы, которые составляют геометрические собрания, построены в бесконечно-близко расположенных между собой

точках пространства, образующихъ поверхности, кривыя линіи или сливающихся въ одной точкѣ. Эти геометрическія формы, заполненные сплошнымъ образомъ точками поверхностныхъ элементовъ геометрическихъ собраній, мы будемъ называть *геометрическимъ мѣстомъ* разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ. Такъ, по отношенію къ указаннымъ тремъ типамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ сплошнымъ образомъ поверхности, кривыя линіи или пересѣкающихся въ общей точкѣ, эти послѣднія: поверхность, кривая линія и точка, представляютъ геометрическія мѣста разсматриваемыхъ собраній.

3. Исходя изъ равенства (6), выражающаго условіе соединенности поверхностныхъ элементовъ, легко составить понятіе о всѣхъ возможныхъ собраніяхъ, которыя могутъ быть составлены изъ поверхностныхъ элементовъ и убѣдиться, что они исчерпываются перечисленными выше собраніями.

Условимся для этого прежде всего говорить, что дифференціальное равенство (6) *удовлетворяется*, на основаніи данныхъ функціональных уравненій между переменными x, y, z, p и q , если оно является алгебраическимъ слѣдствіемъ этихъ уравненій и ихъ производныхъ уравненій, т. е. когда дифференціальное соотношеніе (6) уничтожается тождественно, въ силу всѣхъ послѣднихъ зависимостей между переменными величинами (4). Условимся далѣе называть удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ функціональныя зависимости *рѣшеніемъ* уравненія (6). Изъ самаго понятія о рѣшеніи уравненія (6) непосредственно слѣдуетъ, что представляющія его функціональныя зависимости должны заключать явнымъ образомъ переменную величину z , такъ какъ въ противномъ случаѣ невозможно получить изъ нихъ дифференціальныхъ соотношеній, заключающихъ дифференціаль dz , слѣдствіемъ которыхъ являлось бы равенство (6). Поэтому необходимо предположить, на основаніи послѣдняго равенства, что существуетъ по меньшей мѣрѣ одна зависимость между переменными величинами x, y, z, p и q , разрѣшимая относительно переменной z .

Докажемъ кромѣ того, что, каково бы ни было число уравненій, представляющихъ рѣшеніе равенства (6), между ними всегда существуетъ одна зависимость, заключающая только три переменныхъ x, y и z . Последнее предложеніе становится очевиднымъ, если число разсматриваемыхъ уравненій больше двухъ, ибо въ такомъ случаѣ изъ нихъ всегда возможно исключить двѣ переменныя величины p и q и получить въ результатѣ, по меньшей мѣрѣ, одну искомую зависимость только между переменными x, y и z .

Поэтому достаточно разсмотрѣть предположенія, что рѣшенія уравненія (6) представляются одной или двумя зависимостями между разсматриваемыми переменными (4).

Начнем съ изслѣдованія перваго случая и предположимъ, что рѣшеніе равенства (6) представляется однимъ уравненіемъ, которое, на основаніи изложенныхъ соображеній, приводится къ слѣдующему виду

$$z = \varphi (x, y, p, q).$$

Стало-быть, равенство (6) должно быть тождественно слѣдующему дифференціальному уравненію

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq.$$

Изъ сравненія обоихъ равенствъ слѣдуютъ прежде всего тождества

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0,$$

которыя показываютъ, что функція φ зависитъ только отъ x, y и не заключаетъ переменныхъ p и q , т. е. представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi (x, y).$$

Кромѣ того мы заключаемъ еще о существованіи двухъ равенствъ

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ предположенія, что рѣшеніе уравненія (6) представляется однимъ только равенствомъ, мы приходимъ къ необходимости заключить о существованіи еще двухъ, при чемъ совокупность всѣхъ трехъ послѣднихъ равенствъ опредѣляетъ собой собраніе поверхностныхъ элементовъ, покрывающихъ собой поверхность, опредѣляемую первымъ изъ трехъ написанныхъ выше уравненій.

Аналогичное заключеніе получается также и во второмъ случаѣ, соотвѣствующемъ предположенію, что рѣшеніе равенства (6) дается двумя уравненіями. При этомъ слѣдуетъ разсмотрѣть два случая, соотвѣствующие предположеніямъ, что уравненія изслѣдуемаго рѣшенія разрѣшимы относительно двухъ переменныхъ z и p или относительно z и y , или, что то-же самое, относительно совокупностей переменныхъ z и q , или z и x .

Пусть, напримѣръ, система равенствъ

$$z = \varphi (x, y, q), \quad p = \psi (x, y, q)$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (6). Въ такомъ случаѣ послѣднее уравненіе должно быть слѣдствіемъ данныхъ уравненій и ихъ производныхъ равенствъ

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq,$$

$$dp = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq.$$

Поэтому, называя через λ и μ два неопределенные коэффициента мы должны имѣть тождество

$$\begin{aligned} dz - p dx - q dy = \\ \lambda (dz - \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq) + \\ + \mu (dp - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{\partial \psi}{\partial q} dq), \end{aligned}$$

которое приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\begin{aligned} \lambda = 1, \quad \mu dp = 0, \\ p = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad q = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0. \end{aligned}$$

Если предположить изъ второго равенства, что $dp = 0$, т. е. положить

$$p = C,$$

гдѣ C — произвольная постоянная величина, то къ первоначальнымъ уравненіямъ слѣдуетъ присоединить новое равенство

$$C = \psi (x, y, q),$$

такъ что въ результатѣ изслѣдуемое рѣшеніе уравненія (6) представляется тремя равенствами.

Если же предположить, что

$$\mu = 0,$$

то полученныя выше равенства становятся

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0, \end{aligned}$$

т. е., во-первыхъ, функція φ не зависитъ отъ переменнй q и, во-вторыхъ, также въ разсматриваемомъ случаѣ рѣшеніе уравненія (6) заключаетъ три уравненія и, съ геометрической точки зрѣнія, представляетъ то же самое собраніе элементовъ, что и въ первомъ изслѣдованномъ случаѣ.

Наконецъ, если разсматриваемое рѣшеніе выражается двумя равенствами вида

$$z = \varphi(x, p, q), \quad y = \psi(x, p, q),$$

то уравненіе (6) должно представлять слѣдствіе дифференціальнаго равенства

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp + \frac{\partial \varphi}{\partial q} dq,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \psi}{\partial q} dq.$$

Для этого должны имѣть мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p + \frac{\partial \psi}{\partial x} q,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = q \frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = q \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

Послѣднія два равенства приводятъ къ новому тождеству

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \frac{\partial \varphi}{\partial q} \\ \frac{\partial \psi}{\partial p} & \frac{\partial \psi}{\partial q} \end{vmatrix} = 0,$$

которое показываетъ, что обѣ переменныя p и q исключаются изъ обоихъ уравненій, представляющихъ разсматриваемое рѣшеніе, такъ что также и въ этомъ случаѣ должна существовать одна зависимость между переменными x, y, z , которая, согласно съ предыдущимъ, разрѣшима относительно z .

Такимъ образомъ изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что рѣшеніе уравненія (6) должно заключать по меньшей мѣрѣ три равенства.

Но, кромѣ двухъ разсмотрѣнныхъ при этомъ возможныхъ предположеній, слѣдуетъ принять во вниманіе еще третье очевидное рѣшеніе уравненія (6)

$$dx = 0, \quad dy = 0, \quad dz = 0.$$

Послѣднія равенства показываютъ, что переменныя x, y, z должны имѣть постоянныя значенія, т. е. всѣ три уравненія рѣшенія равенства (6) заключаютъ только три переменныя x, y и z . Соответствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ очевидно пучекъ плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку.

Разсмотрѣнными тремя типами исчерпываются очевидно всѣ тѣ собранія элементовъ, которыя опредѣляются совокупностью трехъ уравненій между переменными x, y, z, p, q и соотвѣтствуютъ различнымъ возможнымъ предположеніямъ относительно разрѣшимости этихъ уравненій относительно переменныхъ x, y, z .

Кромѣ того ясно, что возможно предположить существованіе еще другихъ собраній элементовъ, которыя соотвѣтствуютъ рѣшеніямъ уравненія (6), представленнымъ болѣе чѣмъ тремя различными равенствами.

Если рѣшеніе равенства (6) включаетъ пять различныхъ уравненій, то, на основаніи послѣднихъ, всѣ переменныя x, y, z, p, q получаютъ вполнѣ опредѣленные постоянныя значенія. Оставляя послѣдній случай безъ разсмотрѣнія, какъ не представляющій интереса, займемся изслѣдованіемъ рѣшеній равенства (6), образованныхъ системой четырехъ различныхъ уравненій. Результатъ исключенія изъ нихъ переменныхъ величинъ p и q даетъ, по меньшей мѣрѣ, двѣ зависимости между остальными переменными x, y, z ; однако въ различныхъ частныхъ случаяхъ, число послѣднихъ зависимостей можетъ равняться и тремъ. Поэтому опредѣляемые разсматриваемыми уравненіями собранія представляютъ соотвѣтственно системы поверхностныхъ элементовъ, расположенныхъ сплошнымъ образомъ по нѣкоторой кривой линіи или пересѣкающихся въ одной ихъ общей точкѣ. На послѣдующихъ строкахъ мы перейдемъ къ подробному разсмотрѣнію аналитическихъ выраженій всѣхъ указанныхъ собраній поверхностныхъ элементовъ.

4. Какъ слѣдуетъ изъ предыдущихъ разсужденій, собранія поверхностныхъ элементовъ опредѣляются аналитически системой уравненій слѣдующаго вида

$$\left. \begin{aligned} F_i(x, y, z, p, q) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

гдѣ r принимаетъ одно изъ трехъ значеній 3, 4 или 5; при чемъ въ расчетъ принимается равенство (6). Разсматривая подобныя уравненія, мы всегда будемъ разумѣть опредѣленную область измѣненія переменныхъ, внутри которой однѣ изъ разсматриваемыхъ переменныхъ величинъ опредѣляются однозначно черезъ остальные величины, входящія въ наши уравненія.

Если какая-либо переменная величина получаетъ всѣ возможные значенія, между предѣлами ея измѣненія, то С. Ли говоритъ, что разсматриваемая переменная имѣетъ ∞ , или ∞^1 различныхъ значеній. Если число разсматриваемыхъ переменныхъ величинъ равняется n и онѣ связаны между собой m зависимостями, такъ что всѣ n переменныя величины

являются, внутри нѣкоторой области ихъ измѣненія, функціями только $n - m$ различныхъ переменныхъ величинъ, то наша система переменныхъ величинъ, по обозначенію С. Ли, представляетъ ∞^{n-m} различныхъ значеній.

Въ силу послѣднихъ обозначеній, мы говоримъ, что уравненіе (5) опредѣляетъ систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ.

Аналогичнымъ образомъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, выражаемое уравненіями (7), представляетъ $\infty^{5-\nu}$ поверхностныхъ элементовъ, т. е. ∞^2 , или ∞^1 , или ∞^0 поверхностныхъ элементовъ въ зависимости отъ числа 3, 4 или 5 уравненій (7), при чемъ послѣдному символическому обозначенію ∞^0 соответствуетъ всего одинъ только опредѣленный поверхностный элементъ.

Начнемъ съ болѣе подробнаго разсмотрѣнія собраній ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемыхъ системой слѣдующихъ трехъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_i(x, y, z, p, q) = 0, \\ i = 1, 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и равенствомъ (6)-ымъ.

Согласно съ предыдущимъ, возможны три случая, соответствующіе предположеніямъ, что послѣдняя система уравненій даетъ одну, двѣ или три зависимости между переменными x , y и z , т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія являются соответственно, или поверхность, или кривая линія, или точка.

Если предположимъ, что уравненія (8), по исключеніи изъ нихъ переменныхъ p и q , даютъ одну только зависимость между переменными x , y , z , которая выражается равенствомъ

$$z = f(x, y),$$

т. е. геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія служитъ поверхность, представленная послѣднимъ уравненіемъ, то становится ясно, что наше собраніе поверхностныхъ элементовъ опредѣляется аналитически совокупностью написаннаго уравненія и его двухъ производныхъ уравненій

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемой области измѣненія нашихъ переменныхъ величинъ, уравненія (8) равнозначны послѣднимъ тремъ уравненіямъ, на основаніи которыхъ утождвляется очевидно уравненіе (6)-ое.

Если уравненіе (8), по исключеніи изъ нихъ p и q , представляютъ двѣ зависимости между переменными x , y , z , т. е. геометрическимъ

мѣстомъ изслѣдуемаго собранія служить кривая линія, которая опредѣляется двумя уравненіями

$$z = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

то третье равенство, къ которому должны приводить уравненія (8) разсматриваемаго собранія поверхностныхъ элементовъ, получается изъ уравненія (6)-го подстановкой въ него значеній

$$dz = \varphi'(x) dx, \quad dy = \psi'(x) dx.$$

Такъ какъ значеніе dx отличено отъ нуля, то искомое третье уравненіе разсматриваемаго собранія становится

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x) \cdot q.$$

Наконецъ, если всѣ три уравненія (8) не зависятъ отъ переменныхъ p и q , то соотвѣтствующее собраніе поверхностныхъ элементовъ представляетъ пучекъ поверхностей, пересѣкающихся въ данной точкѣ (x_0, y_0, z_0) , и уравненія его геометрическаго мѣста, а вмѣстѣ съ тѣмъ и всего собранія, приводятся къ слѣдующему виду

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Пусть имѣемъ собраніе ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемое системой (7), въ предположеніи $\nu = 4$, т. е. выражаемое четырьмя различными уравненіями слѣдующаго вида

$$\left. \begin{aligned} F_i(x, y, z, p, q) = 0, \\ i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

совмѣстно съ равенствомъ (6)-мъ.

Такъ какъ система четырехъ уравненій между пятью переменными величинами x, y, z, p и q даетъ, или двѣ, или три зависимости между первыми тремя изъ этихъ переменныхъ, то геометрическимъ мѣстомъ разсматриваемаго собранія можетъ быть кривая линія или точка. Кромѣ того легко убѣдиться, что въ обоихъ разсматриваемыхъ случаяхъ аналитическія выраженія разсматриваемыхъ собраній представляются совокупностью предыдущихъ трехъ уравненій, соотвѣтствующихъ собранію поверхностныхъ элементовъ (8), и одной новой зависимостью между переменными p и q .

Въ самомъ дѣлѣ, начнемъ съ разсмотрѣнія перваго случая, когда геометрическое мѣсто собранія представляетъ кривую линію. Очевидно, что въ этомъ случаѣ, въ разсматриваемой нами области измѣненія пере-

мѣнныхъ, уравненія (9) изслѣдуемаго собранія элементовъ должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x), \quad y = \psi(x), \\ p &= \theta(x), \quad q = \chi(x). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Въ силу условія соединенности (6), должно имѣть мѣсто слѣдующее равенство

$$\varphi'(x) = \theta(x) + \psi'(x)\chi(x), \quad (11)$$

которое очевидно должно удовлетворяться тождественно, такъ какъ въ противномъ случаѣ послѣднее равенство представляло бы новое уравненіе и изслѣдуемое собраніе элементовъ опредѣлялось бы пятью различными уравненіями, противно первоначальному предположенію. Если же равенство (11) является тождествомъ, то, при помощи его, оба послѣднія уравненія (10) могутъ быть замѣнены двумя новыми эквивалентными имъ уравненіями, которыя составляютъ слѣдующимъ образомъ. Замѣняя въ тождествѣ (11) функціи $\theta(x)$ и $\chi(x)$ ихъ значеніями p и q , получаемъ равенство

$$\varphi'(x) = p + \psi'(x)q,$$

которое мы и возьмемъ въ расчетъ взамѣнъ одного изъ послѣднихъ двухъ уравненій (10). Совокупность полученнаго уравненія съ двумя первыми уравненіями (10) опредѣляетъ собой, какъ выше было указано собраніе ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ котораго служитъ кривая линія.

Что касается четвертаго дополнительнаго уравненія, то здѣсь слѣдуетъ отмѣтить два случая, когда, во-первыхъ, результатъ исключенія x, y, z изъ четырехъ уравненій (10) выражается однимъ равенствомъ, представляющимъ искомое уравненіе

$$p = \varphi(q), \quad (12)$$

и, во-вторыхъ, когда рассматриваемый результатъ исключенія представляется двумя уравненіями, т. е. обѣ величины p и q представляютъ постоянныя значенія:

$$p = a, \quad q = b. \quad (13)$$

Въ первомъ предположеніи уравненію (12)-му соответствуетъ коническій пучекъ направленій $p, q, -1$ въ точкѣ (x, y, z) , который, совместно съ первыми тремя уравненіями нашего собранія, опредѣляетъ единственный вполнѣ опредѣленный поверхностный элементъ въ каждой

точкѣ кривой, представляющей геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія. Поэтому послѣднее представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на полосѣ, или лентѣ, вьющейся вдоль кривой линіи геометрическаго мѣста собранія.

Во второмъ предположеніи, въ силу равенствъ (13), тождество (11) принимаетъ видъ

$$\varphi'(x) = a + b\psi'(x)$$

и, благодаря интегрированію по x , даетъ слѣдующую зависимость между функціями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$\varphi(x) = ax + b\psi(x) + c,$$

гдѣ c — новая произвольная постоянная величина. Поэтому уравненія геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія приводятся къ виду

$$z = ax + by + c, \quad y = \psi(x),$$

и представляютъ плоскую кривую. Слѣдовательно, разсматриваемое собраніе въ настоящемъ случаѣ представляется геометрически въ видѣ собранія элементовъ, расположенныхъ на плоской полосѣ, или лентѣ, расположенной вдоль геометрическаго мѣста собранія и въ его плоскости.

Такимъ образомъ различіе обоихъ собраній ∞^1 и ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служитъ кривая линія, состоитъ въ томъ, что первое собраніе представляется геометрической полосой, вьющейся вдоль послѣдней кривой, тогда какъ второе собраніе представляется пучкомъ безконечнаго числа такихъ полосъ, вьющихся вдоль кривой геометрическаго мѣста и произвольно переплетающихся между собой.

Наконецъ, если уравненія (9) даютъ, по исключеніи величинъ p и q , три зависимости между переменными x , y , z , то изслѣдуемое собраніе представляетъ пучекъ поверхностныхъ элементовъ, пересѣкающихся въ одной общей точкѣ (x_0, y_0, z_0) . Само собою разумѣется, что въ такомъ случаѣ равенства (9) приводятся къ слѣдующимъ уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ p = \varphi(q). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Стало-быть и здѣсь разсматриваемое собраніе отличается также отъ соотвѣтствующаго собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ послѣдней зависимостью между переменными p и q . Какъ и выше легко видѣть, что, благодаря послѣдней зависимости, разсматриваемое собраніе выдѣляетъ изъ всѣхъ поверхностныхъ элементовъ, пересѣкающихся въ точкѣ

(x_0, y_0, z_0) , только тѣ элементы, которые касаются конуса, опредѣляемаго послѣднимъ уравненіемъ (14); въ предѣльномъ случаѣ разсматриваемое собраніе приводится къ системѣ элементовъ, которые пересѣкаются между собой вдоль одной и той же прямой линіи.

Предыдущія формулы указываютъ, что *уравненія каждою изъ собраній ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, т. е. и самаго собранія, опредѣляются вполне уравненіями своего геометрическаго мѣста.*

Что же касается уравненій собраній ∞^1 *поверхностныхъ элементовъ, то для ихъ опредѣленія необходимо прибавить къ уравненіямъ ихъ геометрическаго мѣста еще одно характеризующее данное собраніе равенство, устанавливающее зависимость между переменными p и q .*

Всѣ приведенныя разсужденія и вычисленія показываютъ, къ какому частному виду должны преобразовываться написанныя нами въ общемъ видѣ уравненія (7) для того, чтобы опредѣлять собой собранія поверхностныхъ элементовъ того или другого рода. Весьма частный видъ, къ которому приводятся послѣднія уравненія, показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что функціи F_i должны удовлетворять для этого особаго вида условіямъ.

Кромѣ приведенныхъ выше условныхъ обозначеній С. Ли ввелъ, для обозначенія собраній элементовъ, символы M_n^m съ двумя значками, указывающими соотвѣтственно: нижній—порядокъ собранія, т. е. порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ, а верхній—порядокъ геометрическаго мѣста разсматриваемаго собранія.

Поэтому условныя обозначенія

$$M_2^2, M_2^1, M_2^0$$

представляютъ собранія ∞^2 *поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ соотвѣтственно служатъ поверхность, кривая линія и точка.*

Такимъ же образомъ символы

$$M_1^1, M_1^0$$

обозначаютъ собранія ∞^1 *поверхностныхъ элементовъ съ геометрическими мѣстами, представляющими соотвѣтственно кривую линію и точку.*

Наконецъ, условимся подъ обозначеніемъ

$$M_0^0$$

разумѣть собраніе, представленное одной толькою точкой и построенной въ ней одной опредѣленной плоскостью, которое аналитически выражается совокупностью пяти уравненій между разсматриваемыми пятью переменными величинами (4):

5. Изложенное выше учение, относительно геометрии поверхностных элементов и их собраний в пространствах трех измерений, легко распространяется на обобщенные понятия о пространствах многих измерений, число которых больше трех.

Условимся называть совокупность значений $2n + 1$ переменных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n \quad (15)$$

поверхностным элементом в пространствах $n + 1$ измерений.

Совокупность значений поверхностных элементов, связанных между собой какими-либо условиями, или уравнениями называется *системой поверхностных элементов*.

Два поверхностных элемента, например, данный (15)-ый и бесконечно близко расположенный с ним элемент

$$x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots, x_n + dx_n, z + dz, p_1 + dp_1, \dots, p_n + dp_n$$

называются *соединенными*, если имѣет мѣсто слѣдующая зависимость

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n. \quad (16)$$

Наконец, система поверхностных элементов, находящихся в соединении со всеми бесконечно-близко расположенными с ними элементами, т. е. удовлетворяющих равенству (16)-му, называется *собранием поверхностных элементов*.

Мы называем *рѣшеніемъ* равенства (16) конечные функциональные зависимости между переменными (15), которые, совместно со своими производными уравнениями, отождествляют равенство (16).

Составляя рѣшенія послѣдняго равенства, легко вывести уравненія, представляющія аналитическое выраженіе всѣхъ возможныхъ собраний поверхностныхъ элементовъ въ разсматриваемомъ пространствѣ $n + 1$ измереній,

Замѣтимъ прежде всего, что существованіе равенства (16) приводитъ къ существованію, по меньшей мѣрѣ, одной функциональной зависимости, выражающей значеніе переменной z въ видѣ функціи переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n слѣдующаго вида ¹⁾

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (17)$$

¹⁾ Ср. Lie — Engel. — Theorie der Transformationsgruppen, zweiter Abschnitt, S.S. 42, 78. M. Elie Cartan. — Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1899).

Чтобы, на основаніи послѣдняго равенства, уравненіе (16) удовлетворялось тождественно, для этого должны имѣть мѣсто еще n слѣдующихъ уравненій

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18)$$

которыя совмѣстно съ предыдущимъ уравненіемъ представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Возможно сдѣлать еще другое предположеніе, что равенство (16) влечетъ существованіе между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n , нѣсколькихъ зависимостей, число которыхъ обозначимъ черезъ $q + 1$. Послѣднія всегда разрѣшима относительно переменной z и какихъ-либо q изъ остальныхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Не нарушая общности разсужденій, всегда можемъ представить разсматриваемыя равенства въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}), \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}), \\ & i = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Если существуетъ рѣшеніе равенства (16), которое заключаетъ эти уравненія, то подставляя послѣднія значенія $z, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n$ въ равенство (16), заключаемъ о непремѣнномъ существованіи еще $n - k$ слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ & k = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

которыя, совмѣстно съ предыдущими $q + 1$ уравненіями (19), представляютъ рѣшеніе равенства (16).

Такъ какъ формулы (17), (18) заключаются въ послѣднихъ формулахъ какъ частный случай, соответствующій предположенію $q = 0$, то уравненія (19)—(20) мы будемъ разсматривать какъ представляющія общій видъ рѣшеній равенства (16)-аго.

С. Ли представляетъ уравненія (19)—(20) въ слѣдующемъ изящномъ видѣ. Вводя обозначеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^q \varphi_i p_{n-q+i} - \varphi,$$

напишемъ равенства (19) — (20) слѣдующимъ образомъ

$$z = \sum_{i=1}^q \varphi_i p_{n-q+i} - H,$$

$$x_{n-q+i} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}, \quad p_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, n-q.$$

Кромѣ указанныхъ рѣшеній равенства (16)-аго, представленныхъ совокупностью $n+1$ уравненій, легко составить новыя рѣшенія, съ большимъ числомъ уравненій, присоединяя къ предыдущимъ еще новыя уравненія, алгебраически совмѣстныя съ ними.

На предыдущихъ формулахъ основывается аналитическое представленіе геометрическихъ собраній поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n+1$ измѣреній.

Начнемъ съ предположенія, что рассматриваемое собраніе выражается совокупностью $n+1$ различныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \\ i=1, 2, \dots, n+1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

которыя представляютъ рѣшеніе равенства (16). Каждое его рѣшеніе, на основаніи сказаннаго выше, заключаетъ по меньшей мѣрѣ одну зависимость между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть уравненія (21) рассматриваемаго собранія заключаютъ $q+1$ послѣднихъ зависимостей. Предположимъ далѣе, что, въ нѣкоторой области измѣненія переменныхъ, уравненія (21) приводятъ къ—(19)-ымъ; въ такомъ случаѣ очевидно, что остальные уравненія (21) должны приводиться къ виду (20)-ому, и для этого функціи F_i должны удовлетворять особымъ условіямъ.

Соотвѣтственно числу зависимостей между переменными x_1, x_2, \dots, x_n , которыя въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными считаются независимыми, мы будемъ подраздѣлять рассматриваемыя собранія поверхностныхъ элементовъ на *классы*, относя послѣднее собраніе (21) къ q -ому классу, по числу q уравненій, представленныхъ формулами (19).

Такъ, напримѣръ, въ пространствѣ трехъ измѣреній мы рассматривали собранія поверхностныхъ элементовъ трехъ различныхъ классовъ: *нулевого, перваго и втораго*. Къ *нулевому* классу, въ пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія поверхностныхъ элементовъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ является поверхность; наконецъ, къ *первому* и

второму классамъ, въ томъ же пространствѣ трехъ измѣреній, относятся собранія, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служатъ соотвѣтственно кривая линия или точка.

Уравненія (19)-ыя мы условимся называть *геометрическимъ мѣстомъ* даннаго собранія поверхностныхъ элементовъ.

Отсюда легко видѣть, что *собрание поверхностныхъ элементовъ, представленное въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній аналитически, при помощи такого же числа уравненій, вполне опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ, такъ что, при опредѣленіи такого собранія, совершенно достаточно задать его геометрическое мѣсто.*

Предположимъ далѣе, что мы имѣемъ дѣло съ собраніемъ поверхностныхъ элементовъ, представленнымъ системой $n + v + 1$ различныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n + v + 1, (v \leq n), \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

которыя должны опредѣлять рѣшеніе уравненія (16)-аго. При этомъ, если $v = n$, т. е. число уравненій (22) равно $2n + 1$, то очевидно, что рассматриваемое собраніе приводится всего къ одному опредѣленному поверхностному элементу, занимающему опредѣленное положеніе и направленіе въ рассматриваемомъ пространствѣ $n + 1$ измѣреній.

Само собою разумѣется, что уравненія (22), по исключеніи всѣхъ n переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , даютъ, по меньшей мѣрѣ, $v + 1$ зависимостей между остальными переменными. Предположимъ, для общности разсужденій, что система (22) приводитъ къ $\mu + 1$ ($\mu > v$) зависимостямъ между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n , которыя представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-\mu}), \\ x_{n-\mu+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-\mu}), \\ & i = 1, 2, \dots, \mu. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Какъ указано выше, при разсмотрѣннн рѣшеній уравненія (16)-аго, существованіе $\mu + 1$ послѣднихъ уравненій влечетъ за собой существованіе также слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-\mu+i}, \\ & k = 1, 2, \dots, n - \mu. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Поэтому система данных уравнений (22) рассматриваемого собрания должна состояться из $n + 1$ последних уравнений (23)—(24), определяющих собрание поверхностных элементов μ -ого класса, и кроме того из дополнительных v уравнений, определяющих частный характер рассматриваемого собрания и выделяющих его таким образом из общего вида собраний μ -ого класса.

Распространяя прежнія обозначенія на рассматриваемое пространство $n + 1$ измѣреній, можемъ сказать, что совокупность уравнений (19)—(20) опредѣляетъ собрание ∞^n поверхностныхъ элементовъ, которое выражается условнымъ символомъ

$$M_n^q,$$

гдѣ показатель n обозначаетъ порядокъ собрания, а q —классъ его геометрическаго мѣста. Такимъ же образомъ уравненія (22) опредѣляютъ собрание ∞^{n-v} поверхностныхъ элементовъ, обозначаемое условнымъ символомъ

$$M_{n-v}^p.$$

Послѣднія условныя обозначенія вполне достаточны, чтобы, при помощи ихъ, восстановить общій видъ уравнений, представляющихъ аналитически рассматриваемыя собрания поверхностныхъ элементовъ.

6. Приведенныя опредѣленія позволяютъ составить понятіе о производныхъ уравненіяхъ С. Ли, ученіе о которыхъ представляетъ развитіе классической теоріи уравнений съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Начнемъ съ разсмотрѣнія пространства трехъ измѣреній.

Пусть уравненія, представляющія аналитическое выраженіе какого-либо собрания поверхностныхъ элементовъ, заключаютъ нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, число которыхъ меньше числа уравнений рассматриваемого собрания. Исключивъ изъ послѣднихъ входящія въ нихъ постоянныя величины, получаемъ между переменными x, y, z, p, q новыя зависимости, которыя мы и будемъ въ послѣдующемъ изложеніи называть *производными уравненіями С. Ли*.

Если мы имѣемъ собрание поверхностныхъ элементовъ M_2^2 , геометрическое мѣсто котораго представляется уравненіемъ семейства поверхностей, зависящимъ отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, то соответствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ ничто иное какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое получается исключеніемъ обоихъ параметровъ изъ даннаго уравненія поверхности и его двухъ частныхъ производныхъ уравнений перваго порядка. Эти послѣднія дифференціальныя уравненія мы изучали

выше, въ началѣ настоящей главы, и поэтому нѣтъ надобности больше на нихъ останавливаться.

Переходимъ къ разсмотрѣнію собранія поверхностныхъ элементовъ M_2^1 . Пусть уравненія его геометрическаго мѣста заключаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины a, b и представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x, a, b), \\ y &= \psi(x, a, b). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Присоединяемъ къ послѣднимъ двумъ уравненіямъ третье равенство, которое вмѣстѣ съ предыдущими опредѣляетъ разсматриваемое собраніе

$$\varphi'(x, a, b) = p + \varphi'(x, a, b) q. \quad (26)$$

Предположимъ, что результатъ исключенія параметровъ a и b изъ послѣднихъ трехъ равенствъ выражается однимъ уравненіемъ, которое въ общемъ видѣ напишется слѣдующимъ образомъ

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

и представляетъ такимъ образомъ *производное уравненіе С. Ли*.

Остановимся подробнѣе на тѣхъ значеніяхъ, которыя имѣетъ функція F въ обоихъ случаяхъ, исчерпывающихъ всѣ возможныя предположенія, соотвѣтствующія условіямъ, когда уравненія геометрическаго мѣста (25) разрѣшаются относительно постоянныхъ a и b , или не разрѣшимы относительно послѣднихъ. Въ первомъ предположеніи, внося изъ равенствъ (25) полученныя значенія a, b въ уравненіе (26), мы приходимъ къ производному уравненію С. Ли, которое въ настоящемъ случаѣ является линейнымъ уравненіемъ относительно переменныхъ p и q слѣдующаго вида

$$Pp + Qq = R,$$

гдѣ P, Q и R представляютъ функціи переменныхъ x, y и z . Во второмъ предположеніи параметры a и b исключаются изъ уравненій (25). Такъ какъ, въ силу первоначально поставленнаго условія, результатъ исключенія a и b изъ уравненій (25)—(26) долженъ представляться однимъ уравненіемъ, то, исключивъ a и b изъ системы (25)-ой, получимъ результатъ послѣдняго исключенія въ видѣ одной зависимости между переменными x, y, z слѣдующаго вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

къ которой вмѣстѣ съ тѣмъ приводится въ данномъ случаѣ разсматриваемое производное уравненіе С. Ли. Такимъ образомъ семейства изслѣ-

двухъ собраній M_2^1 , зависящихъ отъ двухъ параметровъ, приводятъ къ производнымъ уравненіямъ С. Ли, которыя, или линейны относительно переменныхъ p и q , или не зависятъ отъ нихъ.

Такъ, на примѣръ, пусть имѣемъ систему двухъ уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = bx.$$

Дополнительное уравненіе собранія поверхностныхъ элементовъ, соответствующее написанному геометрическому мѣсту, въ настоящемъ частномъ случаѣ становится

$$a = p + bq.$$

Подставляя въ послѣднее равенство значенія a и b , опредѣляемыя первыми двумя уравненіями, получаемъ искомое производное уравненіе С. Ли въ слѣдующемъ видѣ

$$p + \frac{y}{x}q = \frac{xz - y}{x^2},$$

или

$$x(xp + yq) + y = xz.$$

Для второго примѣра, возьмемъ геометрическое мѣсто собранія M_2^1 , представленное системой уравненій

$$z = ax + b,$$

$$y = (ax + b)^2 + 2x.$$

Очевидно, что соответствующее производное уравненіе С. Ли представляетъ зависимость только между переменными x , y , z въ слѣдующемъ видѣ

$$y = 2x + z^2.$$

Разсмотримъ, наконецъ, собраніе поверхностныхъ элементовъ M_2^0 , уравненія геометрическаго мѣста котораго зависятъ также отъ двухъ параметровъ a и b

$$z = \varphi(a, b),$$

$$y = \psi(a, b),$$

$$x = \Theta(a, b),$$

при чемъ результатъ исключенія параметровъ изъ послѣднихъ уравненій приводитъ къ одной зависимости между разсматриваемыми переменными. Само собою разумѣется, что въ этомъ случаѣ, производное уравненіе С. Ли представляетъ также зависимость только между переменными x , y и z .

Если бы уравнения геометрических мѣстъ изслѣдуемыхъ собраній, во всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаяхъ, заключали всего одинъ произвольный постоянный параметръ, то результатъ исключенія послѣдняго изъ уравненій собранія представлялъ бы систему двухъ производныхъ уравненій С. Ли.

Переходя къ собраніямъ ∞^1 поверхностныхъ элементовъ, легко видѣть что представляющія его четыре уравненія могутъ зависѣть отъ трехъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ. Результатъ исключенія послѣднихъ приводитъ къ одному производному уравненію С. Ли. Если уравненія разсматриваемыхъ собраній заключаютъ два различныхъ или одинъ постоянный параметръ, то соотвѣтствующія производныя уравненія С. Ли представляютъ систему двухъ или трехъ совокупныхъ уравненій.

Наконецъ, если уравненія собранія M_0^0 заключаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины, то исключеніе ихъ приводитъ также къ одному производному уравненію С. Ли. Если число произвольныхъ постоянныхъ, въ уравненіяхъ разсматриваемаго собранія, меньше четырехъ, то результатъ ихъ исключенія изъ уравненій собранія приводитъ къ системѣ совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній. Пусть имѣемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ M_n^q , которое опредѣляется вполне своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ, что уравненія его заключаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ и представляются слѣдующимъ образомъ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}),$$

$$x_{n-q+i} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Составляемъ дополнительныя уравненія, которыя, совмѣстно съ послѣдними равенствами, выражаютъ аналитически разсматриваемое собраніе и имѣютъ, стало-быть, слѣдующій видъ

$$P_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} P_{n-q+i},$$

$$k = 1, 2, \dots, n - q.$$

Написанныя равенства вмѣстѣ съ $q + 1$ предыдущими образуютъ систему $n + 1$ уравненій. Предположимъ, что результатъ исключенія изъ нихъ

всѣхъ параметровъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ представляется совокупностью m уравненій слѣдующаго вида

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Полученныя такимъ образомъ уравненія, черезъ исключеніе произвольныхъ постоянныхъ параметровъ изъ функціональныхъ уравненій, опредѣляющихъ собраніе поверхностныхъ элементовъ, представляютъ *производныя* уравненія С. Ли.

Легко видѣть, что уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи классической теоріи представляютъ частный случай послѣднихъ производныхъ уравненій, соотвѣтствующій тому предположенію, что геометрическое мѣсто разсматриваемаго собранія, принадлежитъ къ *нулевому* классу, т. е. представляетъ уравненіе семейства поверхностей въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, зависящее отъ $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Мы разсматривали до сихъ поръ собранія поверхностныхъ элементовъ типа M_n^q , опредѣляемыхъ своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Предположимъ теперь, что мы имѣемъ дѣло съ собраніями вида M_{n-v}^v , гдѣ $v \leq n$, при чемъ уравненія, опредѣляющія аналитически послѣднее собраніе, зависятъ отъ нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, число которыхъ должно удовлетворять единственному условію, быть меньше числа данныхъ уравненій разсматриваемаго собранія. Результатъ исключенія послѣднихъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ, изъ уравненій разсматриваемаго собранія, представляетъ также *производныя* уравненія С. Ли.

Пусть имѣемъ, на примѣръ, слѣдующее геометрическое мѣсто собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3 ,

$$z = (C_1 x_1 + C_2) x_2 + C_3,$$

$$x_3 = C_1 x_1 x_2 + C_2.$$

Составляемъ слѣдующія два дополнительныя уравненія разсматриваемаго собранія

$$p_1 = C_1 x_2 - C_1 x_2 p_3,$$

$$p_2 = C_1 x_1 + C_2 - C_1 x_1 p_3.$$

Результатъ исключенія всѣхъ трехъ постоянныхъ величинъ C_1, C_2, C_3 изъ написанныхъ четырехъ уравненій приводитъ къ слѣдующему производному уравненію С. Ли

$$(1 - p_3) (x_2 x_3 + x_1 p_1 - x_2 p_2) = x_1 x_2 p_1.$$

Для второго примѣра, возьмемъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ четырехъ измѣреній, зависящее отъ четырехъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ C_1, C_2, C_3, C_4 , опредѣляемое геометрическимъ мѣстомъ

$$z = (C_1 x_1 + C_2) x_2 + C_4,$$

$$x_3 = C_2 x_1 + C_3$$

и слѣдующимъ дополнительнымъ равенствомъ

$$C_1 C_2 (x_2 + x_1 p_3)^2 = C_4 x_3.$$

Составляя оба дополнительные уравненія собранія

$$p_1 = C_1 x_2 - C_2 p_3,$$

$$p_2 = C_1 x_1 + C_2,$$

получаемъ въ результатѣ совокупность пяти уравненій. Исключая изъ нихъ всѣ четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра, приходимъ къ искомому производному уравненію С. Ли

$$x_3 (z - x_2 p_2) + (x_1 p_1 - x_2 p_2) (p_1 + p_2 p_3) = 0.$$

7. Мы занимались до сихъ поръ изученіемъ понятій о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, разсматривали ихъ аналитическія выраженія и составляли производныя уравненія С. Ли, соотвѣтствующія семействамъ собраній поверхностныхъ элементовъ, уравненія которыхъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Подобно тому какъ относительно дифференціальныхъ уравненій рѣшается задача объ ихъ интегрированіи, такъ совершенно аналогично въ теоріи С. Ли, изслѣдуемой на этихъ страницахъ, рѣшается слѣдующій вопросъ:

Даны производныя уравненія С. Ли; задача состоитъ въ составленіи соотвѣтствующихъ имъ функциональныхъ уравненій собраній поверхностныхъ элементовъ.

Пользуясь терминологіей теоріи дифференціальныхъ уравненій, мы называемъ рѣшеніе послѣдняго вопроса *задачей интегрированія производныхъ уравненій С. Ли.*

Начнемъ съ разсмотрѣнія производнаго уравненія С. Ли.

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad (27)$$

опредѣляющаго систему ∞^4 поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ трехъ измѣреній.

Если послѣднее уравненіе утождествляется, въ силу уравненій какаго либо собранія элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* (Integralgebilde) даннаго производнаго уравненія С. Ли (27)-го.

Если послѣднее рѣшеніе заключаетъ произвольныя постоянныя величины, результатъ исключенія которыхъ изъ этихъ уравненій представляетъ одно данное уравненіе (27), то мы будемъ называть такое рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ* уравненія (27)-го.

Изъ предыдущихъ соображеній, относительно способа образования производныхъ уравненій С. Ли, становится очевиднымъ, что полныя интегральныя собранія ∞^2 поверхностныхъ элементовъ уравненія (27) должны зависѣть отъ двухъ произвольныхъ постоянныхъ параметровъ; полныя интегральныя собранія ∞^1 элементовъ уравненій (27) заключаютъ три произвольныхъ постоянныхъ параметра; наконецъ, для того же уравненія (27) полное интегральное собраніе типа M_0^0 должно заключать четыре произвольныхъ постоянныхъ параметра. Изъ послѣднихъ полныхъ интегральныхъ собраній всѣ собранія типа M_2 , т. е. составленныя изъ ∞^2 поверхностныхъ элементовъ, мы условимся называть *полными интегральными собраніями С. Ли*, а ихъ геометрическія мѣста—*полными интегралами С. Ли* производнаго уравненія (27). Остальныя полныя интегральныя собранія типовъ M_1 и M_0 , т. е. составленныя соответственно изъ ∞^1 и ∞^0 поверхностныхъ элементовъ, будемъ называть *полными интегральными собраніями Беклунда*, который первый сталъ заниматься ихъ изслѣдованіемъ ¹⁾.

Порядокъ безконечности поверхностныхъ элементовъ трехъ разсматриваемыхъ типовъ полныхъ интегральныхъ собраній выражается соотвѣтственно числами

$$2, 1, 0;$$

вмѣстѣ съ тѣмъ произвольныя постоянныя входятъ въ нихъ соотвѣтственно въ числѣ

$$2, 3, 4.$$

Слѣдовательно, уравненія разсматриваемыхъ собраній зависятъ соотвѣтственно отъ

$$7, 8, 9$$

¹⁾ Bäcklund, A. V.—Ueber systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (Mathematische Annalen, Bd. 11, S. 412—433).

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig. 1900. S. 598.

различныхъ величинъ, изъ которыхъ первыя пять являются переменными x, y, z, p, q , а остальные представляютъ произвольные постоянные параметры.

Поэтому, по отношенію къ данному производному уравненію (27), каждое изъ указанныхъ его полныхъ интегральныхъ собраній всѣхъ типовъ M_2, M_1, M_0 опредѣляетъ ∞^4 значеній всѣхъ входящихъ въ нихъ величинъ какъ переменныхъ такъ и произвольныхъ постоянныхъ, рассматриваемыхъ совмѣстно. Такимъ образомъ задача розысканія указанныхъ полныхъ интегральныхъ собраній даннаго производнаго уравненія (27) приводится, по терминологіи С. Ли, къ *составленію изъ системы ∞^4 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемой равенствомъ (27)-ымъ, собраній элементовъ, представляющихъ ∞^4 значеній переменныхъ и произвольныхъ постоянныхъ величинъ.*

Кромѣ понятій о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ легко составить также понятія объ *общихъ и особенныхъ рѣшеніяхъ, или интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли*, аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ самомъ дѣлѣ, мы получаемъ послѣднія рѣшенія, измѣняя произвольныя постоянныя въ полныхъ интегральныхъ собраніяхъ, совершенно подобно классической теоріи уравненій съ частными производными ¹⁾.

Пусть имѣемъ, на примѣръ, полное интегральное собраніе изслѣдуемаго уравненія (27) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x, a, b), \\ y &= \psi(x, a, b), \\ p &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} q. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Предполагаемъ, что параметры a и b измѣняются одновременно съ переменными x, y, z . Дифференцируя въ этомъ предположеніи первыя два уравненія (28), получимъ

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db,$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial a} da + \frac{\partial \psi}{\partial b} db.$$

¹⁾ См. *Lie—Scheffers*.—Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig. 1896. S.S. 529—535.

Goursat, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891, p. 234.

На основаніи послѣднихъ равенствъ, принимая во вниманіе третье уравненіе (28), составляемъ равенство

$$dz - p dx - q dy = A da + B db, \quad (29)$$

гдѣ коэффициенты A и B имѣютъ слѣдующія значенія

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a} q,$$

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b} q.$$

Чтобы система (28) не переставала представлять рѣшеніе изслѣдуемаго уравненія (27)-ого также и въ настоящемъ предположеніи, т. е. имѣло мѣсто равенство (6)-ое, для этого очевидно должна уничтожаться тождественно вторая часть равенства (29) и должно имѣть мѣсто равенство

$$A da + B db = 0. \quad (30)$$

Послѣднее имѣетъ три слѣдующихъ различныхъ рѣшенія, которымъ соответствуютъ также различныя *рѣшенія* изслѣдуемаго уравненія (27)-ого:

1) Полагая

$$da = 0, \quad db = 0,$$

т. е. давая a и b постоянныя значенія, мы получаемъ исходное *полное интегральное собраніе*, представленное системой уравненій (28).

2) Предполагая, что имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$A = 0, \quad B = 0,$$

мы представляемъ рѣшеніе уравненія (27)-ого совокупностью равенствъ (28) и двухъ слѣдующихъ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{\partial \psi}{\partial a} q = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial \psi}{\partial b} q = 0.$$

Результатъ исключенія изъ нихъ параметровъ a и b представляетъ *особенное интегральное собраніе* производнаго уравненія (27).

3) Наконецъ, если a и b связаны произвольной зависимостью

$$a = \omega(b), \quad (31)$$

гдѣ ω представляетъ произвольную функцію, то уравненіе (30) удовлетворяется, на основаніи слѣдующаго равенства

$$A + B \omega' (b) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega' - \left(\frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \omega' \right) q = 0, \quad (32)$$

гдѣ ω' обозначаетъ производную функцію ω , взятую по переменнѣй b . Результатъ исключенія параметровъ a и b изъ совокупности уравненій (28), (31), (32) представляетъ, относительно производного уравненія (27), *общее интегральное собраніе*, зависящее отъ одной произвольной функціи ω .

Интегральныя собранія трехъ указанныхъ родовъ получаются изъ каждаго полного интегральнаго собранія всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами типовъ.

Наконецъ, давая какія-либо частныя значенія произвольнымъ постояннымъ или произвольнымъ функціямъ, входящимъ въ полныя или общія интегральныя собранія, мы получаемъ еще такъ называемыя *частныя интегральныя собранія* даннаго производнаго уравненія (27).

Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію производныхъ уравненій въ пространствахъ $n + 1$ измѣреній. Пусть имѣемъ одно производное уравненіе С. Ли

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (33)$$

опредѣляющее систему ∞^{2n} поверхностныхъ элементовъ въ пространствахъ $n + 1$ измѣреній.

Если уравненіе (33) утождествляется, на основаніи уравненій какого-либо собранія поверхностныхъ элементовъ, то послѣднее называется *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ* даннаго производнаго уравненія С. Ли.

Рѣшеніе уравненія (33), зависящее отъ нѣсколькихъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ къ одному только данному производному уравненію С. Ли (33), называется его *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Такъ какъ наименьшее число различныхъ уравненій, представляющихъ собраніе элементовъ въ пространствахъ $n + 1$ измѣреній, равно $n + 1$, то становится очевиднымъ, что число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ полного интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія (33) не можетъ быть меньше числа n . При этомъ мы будемъ различать два случая, когда послѣднее число равно n и больше него.

Если число произвольныхъ постоянныхъ величинъ полного рѣшенія уравненія (33) равняется n , то мы условимся называть послѣднее рѣшеніе *полнымъ интегральнымъ собраніемъ С. Ли* даннаго производнаго

уравнения (33); если же число произвольных постоянных величинъ больше n , то рассматриваемое рѣшеніе будемъ называть *полнымъ интегральнымъ собраніемъ Беклунда*.

Наконецъ, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго, полное интегральное собраніе С. Ли вполне опредѣляется своимъ геометрическимъ мѣстомъ. Мы условимся называть послѣднее *полнымъ интеграломъ С. Ли* данного производнаго уравненія (33) и различать эти полные интегралы по классамъ, соотвѣтственно классу представляемаго ими геометрическаго мѣста интегральнаго собранія даннаго производнаго уравненія.

Само собою разумѣется, что полный интегралъ С. Ли нулевого класса представляетъ ничто иное какъ полный интегралъ Лагранжа, по отношенію къ данному уравненію (33), рассматриваемому какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка p_1, p_2, \dots, p_n неизвѣстной функціи z соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n . Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется очевидно даннымъ полнымъ интеграломъ Лагранжа и его n производными дифференціальными уравненіями перваго порядка, составленными по правиламъ дифференціального исчисленія.

Наконецъ, приведенныя понятія и опредѣленія распространяются безъ труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ систему m послѣднихъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Уравненія собранія поверхностныхъ элементовъ, утождествляющія данныя производныя уравненія (34), называются ихъ *рѣшеніемъ*, или *интегральнымъ собраніемъ*.

Рѣшеніе системы данныхъ уравненій (34), заключающее нѣсколько различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, результатъ исключенія которыхъ изъ уравненій рѣшенія приводитъ только къ данной системѣ (34), называется ея *полнымъ рѣшеніемъ*, или *полнымъ интегральнымъ собраніемъ*.

Наименьшее число различныхъ уравненій собранія поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній равно послѣднему числу $n + 1$. Поэтому, если уравненія (34) сами по себѣ образуютъ систему совокупныхъ уравненій, то наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ ихъ полнаго интегральнаго собранія должно равняться $n - m + 1$. Если же уравненія (34) не представляютъ системы совокупныхъ уравненій, т. е. не совмѣстимы и не имѣютъ рѣшенія, но однако приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій при-

бавленіемъ нѣкотораго числа k новыхъ производныхъ уравненій С. Ли. то въ такомъ случаѣ наименьшее число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ полного интегральнаго собранія равно $n - m - k + 1$.

Въ обоихъ рассмотрѣнныхъ случаяхъ указанная полныя интегральныя собранія принадлежатъ одному и тому же типу собраній элементовъ

$$M_n,$$

которыя мы будемъ называть *полными интегральными собраніями С. Ли*. Каждое изъ нихъ вполне опредѣляется уравненіями своего геометрическаго мѣста; послѣднее мы условимся называть *полнымъ интеграломъ С. Ли* данныхъ производныхъ уравненій.

Что касается всѣхъ остальныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, въ которыхъ число произвольныхъ постоянныхъ больше указанного выше минимальнаго, то мы будемъ называть ихъ *полными интегральными собраніями Беклунда*. Если изслѣдуемая уравненія (34) совмѣстны, то послѣднія полныя рѣшенія зависятъ отъ $n - m + v + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ и представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ вида

$$M_{n-v}, \quad (35)$$

гдѣ число v получаетъ любое изъ значеній въ слѣдующихъ предѣлахъ

$$0 < v \leq n,$$

т. е. полныя рѣшенія Беклунда системы (34) выражаются системой $n + v + 1$ различныхъ уравненій.

Если же уравненія (34) приводятся къ системѣ совмѣстныхъ совокупныхъ уравненій прибавленіемъ k различныхъ новыхъ производныхъ уравненій, то и въ этомъ случаѣ *полныя интегральныя собранія Беклунда* представляются собраніями поверхностныхъ элементовъ прежняго вида (35), уравненія которыхъ однако, въ настоящемъ случаѣ, зависятъ отъ $n - m - k + v + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Наконецъ, понятія объ особенныхъ, общихъ и частныхъ интегральныхъ собраніяхъ производныхъ уравненій С. Ли легко распространяются на пространство $n + 1$ измѣреній ¹⁾.

Пусть имѣемъ, на примѣръ, полное интегральное собраніе С. Ли q -аго класса для уравненій (34), рассматриваемыхъ какъ система совокупныхъ, совмѣстныхъ производныхъ уравненій.

¹⁾ См. Goursat, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891, p. 234.

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}), \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}), \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ & \quad i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, n-q. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Дифференцируя первыя $q+1$ уравнений послѣдней системы въ предположеніи, что вмѣстѣ съ переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n измѣняются также величины $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, получаемъ

$$\begin{aligned} dz &= \sum_{\kappa=1}^{n-q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\kappa}} dx_{\kappa} + \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial C_r} dC_r, \\ dx_{n-q+i} &= \sum_{\kappa=1}^{n-q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{\kappa}} dx_{\kappa} + \sum_{r=1}^{n-m+1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial C_r} dC_r, \\ & \quad i=1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

На основаніи этихъ равенствъ и въ силу $n-q$ послѣднихъ уравнений системы (36), составляемъ новое равенство

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sum_{r=1}^{n-m+1} A_r dC_r, \quad (37)$$

гдѣ коэффициенты A_r имѣютъ слѣдующія значенія

$$A_r = \frac{\partial \varphi}{\partial C_r} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial C_r} p_{n-q+i}.$$

Чтобы, при сдѣланномъ предположеніи относительно измѣняемости произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, уравненія (36) не представляли представлять рѣшеніе уравненій (34), для этого должно удовлетворяться условіе (16)-ое. Поэтому равенство (37) приводится къ слѣдующему

$$\sum_{r=1}^{n-m+1} A_r dC_r = 0, \quad (38)$$

которому должны удовлетворять величины всѣхъ C .

Последнее уравнение может быть удовлетворено следующими различными способами:

1) Равенство (38) удовлетворяется тождественно, если предположить, что все величины C имѣют постоянныя значенія. Въ этомъ случаѣ мы возвращаемся къ исходному полному интегральному собранію.

2) Полагая равными нулю все коэффициенты A_r при dC_r въ равенствѣ (38), мы получаемъ систему $n - m + 1$ уравненій

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_r} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial C_r} p_{n-q+i} = 0, \\ r = 1, 2, \dots, n - m + 1.$$

Результатъ исключенія всехъ C_r изъ уравненій (36), при помощи послѣднихъ равенствъ, представляетъ *особенное интегральное собраніе* системы производныхъ уравненій (34).

3) Предположимъ далѣе, что между $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ существуютъ l произвольныхъ зависимостей слѣдующаго вида

$$C_i = \omega_i (C_{l+1}, C_{l+2}, \dots, C_{n-m+1}), \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, l, \end{array} \right\} \quad (39)$$

гдѣ все ω_i представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ. Внося значенія всехъ C_i въ равенство (38), получаемъ новое равенство

$$\sum_{j=1}^{n-m-l+1} \left(A_{l+j} + \sum_{i=1}^l A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial C_{l+j}} \right) dC_{l+j} = 0,$$

которое уничтожается на основаніи слѣдующихъ зависимостей

$$A_{l+j} + \sum_{i=1}^l A_i \frac{\partial \omega_i}{\partial C_{l+j}} = 0, \quad \left. \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots, n - m - l + 1. \end{array} \right\} \quad (40)$$

Результатъ исключенія, изъ уравненій (36), значеній всехъ $n - m + 1$ величинъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, при помощи $n - m + 1$ уравненій (39)—(40), представляетъ *общее интегральное собраніе* системы (34), заключающее l произвольныхъ функцій.

Наконецъ, мы называемъ *частными рѣшеніями*, или *частными интегральными собраніями* данной системы (34) рѣшенія ея, которыя получаются изъ полныхъ или общихъ интегральныхъ собраній, сообще-

ніемъ частныхъ значеній произвольнымъ постояннымъ параметрамъ и произвольнымъ функціямъ, которые входятъ въ эти собранія.

8. Изъ предыдущихъ разсужденій непосредственно вытекаетъ, что каждое уравненіе или систему уравненій, съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по нѣсколькимъ независимымъ переменнымъ, возможно разсматривать также и съ другой точки зрѣнія, какъ производныя уравненія С. Ли, происхожденіе которыхъ основано на разсмотрѣніи собраній поверхностныхъ элементовъ.

Обобщенныя представленія С. Ли о производныхъ уравненіяхъ и ихъ рѣшеніяхъ, какъ это представляется съ перваго взгляда, расширяютъ, съ формальной точки зрѣнія, предѣлы классической теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Дѣйствительно, въ изложенной выше теоріи собраній поверхностныхъ элементовъ, представленія объ уравненіяхъ съ частными производными и объ ихъ интегралахъ являются только въ видѣ одного частнаго случая. Въ самомъ дѣлѣ, останавливаясь на собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ нулевого класса, происходящихъ изъ нихъ производныхъ уравненіяхъ С. Ли и ихъ интегральныхъ собраніяхъ, мы получаемъ классическую теорію дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которая представляетъ такимъ образомъ частный случай теоріи С. Ли.

Однако разсматривая одни и тѣ же уравненія, то съ точки зрѣнія дифференціальныхъ уравненій, то съ точки зрѣнія производныхъ уравненій С. Ли, мы вмѣстѣ съ тѣмъ должны видоизмѣнять соотвѣтственно каждый разъ и самый характеръ изслѣдуемыхъ уравненій, которыя сохраняютъ одинъ только внѣшній видъ, благодаря сохраненію обозначеній входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ. Въ самомъ дѣлѣ, смыслъ разсматриваемыхъ уравненій становится совершенно различнымъ. С. Ли вводитъ цѣлый рядъ новыхъ рѣшеній изслѣдуемыхъ уравненій, которыя до него не разсматривались, при чемъ каждому классу новыхъ рѣшеній соотвѣтствуютъ также и новыя дополнительныя предположенія относительно входящихъ въ нихъ переменныхъ. Такъ, въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, переменныя x_1, x_2, \dots, x_n считаются независимыми; что же касается рѣшеній С. Ли q -аго класса, то они вводятъ q различныхъ зависимостей между тѣми же переменными x_1, x_2, \dots, x_n . Такимъ образомъ переменныя, которыя считались независимыми въ классической теоріи, перестаютъ быть таковыми въ теоріи С. Ли. Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, и переменные параметры p_1, p_2, \dots, p_n измѣняютъ свое первоначальное значеніе частныхъ производныхъ, въ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Всѣ послѣднія обстоятельства пріобрѣтають особенное значеніе, съ точки зрѣнія приложеній къ различнымъ вопросамъ анализа и геометріи. Само собою разумѣется, что рѣшенія С. Ли не могутъ давать искомага отвѣта для тѣхъ задачъ, которыя приводятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными. Съ другой стороны могутъ существовать также такіе прикладные вопросы, которые требуютъ, для своего рѣшенія, разсмотрѣнія производныхъ уравненій С. Ли или разрѣшаются, какъ при помощи интеграловъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, такъ и на основаніи интегральныхъ собраній производныхъ уравненій С. Ли. Въ виду изложенныхъ соображеній, мы считаемъ необходимымъ дѣлать существенное различіе между дифференціальными уравненіями классической теоріи, производными уравненіями С. Ли и между ихъ рѣшеніями различныхъ классовъ. Поэтому намъ кажется необходимымъ возражать и быть противъ изложенія нѣкоторыхъ трактатовъ по теоріи дифференціальныхъ уравненій, которыя смѣшиваютъ рѣшенія различныхъ классовъ. Такъ, напримѣръ, при изложеніи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, по такъ называемому способу характеристикъ Коши, многіе авторы ¹⁾ удовлетворяются указаніями на полные интегралы С. Ли въ тѣхъ случаяхъ исключенія, когда излагаемый способъ Коши не приводитъ къ искомымъ полнымъ интеграламъ Лагранжа. Читатель не можетъ быть удовлетворенъ такимъ изложеніемъ, такъ какъ упомянутые авторы не даютъ отвѣта на поставленный вопросъ во всей полнотѣ и предлагаютъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ удовлетворяться совершенно случайно полученными новыми рѣшеніями, которыя, какъ ясно видно, представляютъ существенное различіе съ первоначально поставленной задачей интегрированія. Совершенно аналогичнымъ образомъ насъ не удовлетворяетъ также интегрированіе производныхъ уравненій С. Ли, по такъ называемому обобщенному имъ способу характеристикъ Коши, который не даетъ возможности вычислять полные интегралы С. Ли заданнаго напередъ опредѣленнаго класса, но приводитъ совершенно непредвидѣннымъ образомъ, или къ нѣкоторому полному интегралу С. Ли какого-либо случайнаго класса, или даже къ полному интегралу Лагранжа. Такимъ образомъ разсматриваемый способъ С. Ли оставляетъ полную неопредѣленность въ рѣшеніи изслѣдуемой задачи, совершенно аналогично указанному выше способу Коши.

Всѣ отмѣченные вопросы теоріи характеристикъ находятся въ связи съ дальнѣйшимъ развитіемъ нашего изслѣдованія, и мы будемъ имѣть

¹⁾ *Jordan, C.*—Cours d'Analyse, t. III, Paris, 1887, p. 325.

Goursat, E.—Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. 1891, p. 119, p. 228.

случай къ нимъ далѣе возвратиться. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли различныхъ классовъ, то задача ихъ разысканія зависитъ главнымъ образомъ отъ условій ихъ существованія для производныхъ уравненій С. Ли.

Если возьмемъ одно производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ трехъ измѣреній, то, какъ видно изъ предыдущаго изложенія (см. стр. 21—22), рассматриваемое уравненіе допускаетъ полныя интегральныя собранія M^1_2 , M^0_2 только при условіи, что оно является линейнымъ относительно переменныхъ p , q или не зависитъ отъ послѣднихъ, т. е. представляетъ функциональную зависимость между переменными x , y , z . Изъ дальнѣйшаго изложенія будетъ слѣдовать, что и другія производныя уравненія С. Ли должны также представлять весьма частный видъ, для того чтобы допускать существованіе полныхъ интеграловъ С. Ли того или другаго опредѣленнаго даннаго класса. Однако доказательство послѣдняго предложенія находится въ зависимости отъ общихъ свойствъ интегральныхъ собраній, къ изученію которыхъ мы и имѣемъ въ виду немедленно приступить. Наконецъ, въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи мы ограничимся рассмотрѣніемъ только полныхъ интеграловъ С. Ли его производныхъ уравненій, въ виду того что теорія ихъ находится въ тѣсной связи съ задачей интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

Г Л А В А П.

Свойства полных интегральных собраний С. Ли.

1. Пусть имеем в пространстве $n + 1$ измерений производное уравнение С. Ли следующего вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (1)$$

Предположим, что данное уравнение разрешимо относительно переменной p_1 , так что имеет место условие

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \neq 0. \quad (2)$$

Пусть рассматриваемое уравнение (1) допускает полный интеграл С. Ли q -ого класса, который представляется совокупностью следующих равенств

$$\left. \begin{aligned} z - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ & i = 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Составляем дополнительные уравнения, определяющие, совместно с последними, полное интегральное собрание поверхностных элементов в пространстве $n + 1$ измерений и представляющиеся в следующем виде

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$k = 1, 2, \dots, n - q.$

Введем следующее условное обозначение

$$\psi_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$k = 1, 2, \dots, n - q,$

такъ что послѣднія $n - q$ уравненій разсматриваемаго полного интегральнаго собранія становятся

$$\left. \begin{aligned} p_k - \psi_k = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n - q, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

гдѣ функціи ψ_k линейны относительно переменныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$ и зависятъ кромѣ того только отъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-q} .

Изученіе свойствъ полныхъ интеграловъ S . Ли мы начнемъ съ разсмотрѣнія собраній нулевого класса, т. е. приведемъ основныя свойства полныхъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій. Въ этомъ случаѣ уравненіе (1) разсматривается какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка, и совокупность соответствующихъ уравненій (3) — (4) становится

$$\left. \begin{aligned} z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чтобы, въ этомъ случаѣ, первое изъ уравненій (5) представляло дѣйствительно полный интегралъ даннаго уравненія (1), т. е. результатъ исключенія всѣхъ C изъ уравненій (5) представлялъ бы уравненіе (1), для этого, какъ хорошо извѣстно, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D \left(\begin{array}{c} \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \end{array} \right) \neq 0.$$

Легко видѣть, что, на основаніи послѣдняго неравенства, въ опредѣленной разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ величинъ, система уравненій (5) приводится къ слѣдующему виду

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = C_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, n.$$

Такъ какъ опредѣляемые послѣдними уравненіями значенія переменнаго z, p_1, p_2, \dots, p_n выражаются равенствами (5), т. е. p_1, p_2, \dots, p_n являются частными производными перваго порядка функціи z соответ-

ственно по независимымъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n , то послѣднія $n + 1$ уравненій образуютъ замкнутую систему, т. е., на основаніи перваго изъ этихъ уравненій, имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$[F_i, F_k] = 0,$$

гдѣ части которыхъ обозначаютъ скобки Вейлера ¹⁾, составленныя для всѣхъ значеній показателей i, k , отъ 0 до n , при чемъ подъ F_0 разумѣется функція F .

Какъ извѣстно изъ курсовъ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій, имѣетъ мѣсто также слѣдующее обратное предложеніе:

Пусть имѣемъ совокупность n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_n ,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n,$$

разрѣшимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совместно съ даннымъ уравненіемъ (1)-ымъ, замкнутую систему $n + 1$ дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , а также опредѣляетъ значеніе переменной z , функціей переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n и всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , то послѣднее значеніе z представляетъ полный интегралъ даннаго уравненія (1)-аго.

Наконецъ, пусть полный интегралъ Лагранжа (5) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) + C_n, \quad (6)$$

гдѣ одна изъ произвольныхъ постоянныхъ, именно C_n , является такъ называемой придаточной. Если слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \end{pmatrix}$$

отличенъ отъ нуля, то послѣднія $n - 1$ производныхъ уравненій слѣдующей системы

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad \left. \vphantom{p_k} \right\} \quad (7) \\ k = 1, 2, \dots, n,$$

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, стр. 39.

разрѣшима относительно постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Въ такомъ случаѣ результатъ ихъ исключенія изъ перваго производнаго уравненія послѣдней системы представляетъ наше дифференціальное уравненіе съ частными производными, которое очевидно не зависитъ отъ переменн- ной z и представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \quad (8)$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, совокупность уравненій (6) и (7) приводится, внутри разсматриваемой области измѣненія переменныхъ, къ системѣ, представляющей совокупность уравненія (8) и слѣдующихъ

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z - F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_n.$$

Предыдущее обратное предложеніе замѣняется, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующимъ:

Пусть имѣемъ $n - 1$ уравненій, съ $n - 1$ различными произволь- ными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

разрѣшимыхъ относительно всехъ C и образующихъ, совместно съ урав- неніемъ (8), замкнутую систему n дифференціальныхъ уравненій. Если послѣдняя разрѣшима относительно всехъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , то полный интегралъ даннаго уравненія (8) опредѣляется при помощи квадратуры.

2. Всѣ приведенныя предложенія, характеризующія полныя инте- гральные собранія S . Ли нулевого класса распространяются также на всѣ полныя интегральные собранія S . Ли, общій видъ которыхъ пред- ставляется совокупностью равенствъ (3) и (4).

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы послѣднія уравненія дѣйствительно пред- ставляли полное интегральное собраніе производнаго уравненія S . Ли (1), результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , изъ уравне- ній (3) и (4), долженъ приводиться къ одному только уравненію (1). Для этого очевидно достаточно существованія слѣдующаго условія

$$D \left(\frac{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_n} \right) \geq 0.$$

Дѣйствительно, если послѣднее неравенство имѣетъ мѣсто, то уравненія (3) и послѣднія $n - q - 1$ уравненій (4) разрѣшимы относительно всѣхъ величинъ C_1, C_2, \dots, C_n , и результатъ ихъ исключенія, изъ перваго уравненія (4), приводится къ равенству, равносильному исходному уравненію (1). Поэтому, въ опредѣленной разсматриваемой области измѣненія нашихъ переменныхъ, система уравненій (3)—(4) приводится къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= C_s, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$s = 1, 2, \dots, n,$

гдѣ послѣднія n уравненій представляютъ результатъ рѣшенія указанныхъ выше уравненій относительно всѣхъ постоянныхъ C .

Чтобы приступить къ изученію свойствъ послѣднихъ уравненій, начнемъ съ распространенія понятій объ *инволюціи* и *замкнутости* производныхъ уравненій С. Ли. Аналогично теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, мы условимся называть, также въ теоріи производныхъ уравненій С. Ли, величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$$

каноническими переменными, относя n первыя изъ нихъ къ *первому классу*, а остальные n величинъ ко *второму классу каноническихъ переменныхъ*. Составляя скобки Пуассона для двухъ функций, зависящихъ отъ послѣднихъ переменныхъ, или скобки Вейлера, если разсматриваемыя функции заключаютъ еще новую $2n + 1$ -ую переменную z , мы говоримъ, что эти функции находятся въ *инволюціи*, если указанные скобки уничтожаются тождественно. Наконецъ, мы говоримъ, что данныя уравненія образуютъ *систему въ инволюціи* или *замкнутую систему* въ зависимости отъ того, уничтожаются-ли тождественно скобки Пуассона и Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей данныхъ уравненій, или эти скобки уничтожаются, на основаніи послѣднихъ уравненій.

Наконецъ, само собою разумѣется, если какая-либо данная система производныхъ уравненій С. Ли-*замкнутая*, то и преобразованныя ея уравненія образуютъ также *замкнутую* систему.

Условившись въ предыдущихъ опредѣленіяхъ, докажемъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ замкнутую систему.

Разсматривая всѣ величины ψ_n , какъ функции независимыхъ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$, замѣтимъ прежде всего, что существуютъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей k и j , отъ 1 до $n - q$, и показателей i , отъ 1 до q .

Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (3) и (4), имѣютъ слѣдующія значенія

$$[z - \varphi, x_{n-q+i} - \varphi_i] \equiv 0,$$

$$\left[z - \varphi, p_k - \psi_k \right] \equiv -p_k + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^q \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} p_{n-q+i} = 0,$$

$$\left[x_{n-q+i} - \varphi_i, p - \psi_k \right] \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} \equiv 0,$$

$$\left[p_j - \psi_j, p_k - \psi_k \right] \equiv -\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній, которыя должны принимать показатели i , k и j ; при этомъ разсматриваемыя равенства первой, третьей и четвертой строкъ удовлетворяются тождественно, тогда какъ равенство второй строки удовлетворяется на основаніи уравненій (4).

Полученныя равенства доказываютъ, что уравненія (3) и (4) образуютъ замкнутую систему. Слѣдовательно, уравненія (9), представляющія преобразование послѣднихъ, также образуютъ замкнутую систему.

Кромѣ того очевидно, что уравненія (9) заключаютъ $q + 1$ зависимостей только между переменными z, x_1, x_2, \dots, x_n , такъ какъ разсматриваемое интегральное собраніе принадлежитъ къ q -ому классу.

Легко показать, что оба послѣднія свойства вполне опредѣляютъ аналитически уравненія, представляющія полное интегральное собраніе S . Ли q -аго класса даннаго уравненія (1).

Дѣйствительно, пусть имѣемъ n уравненій, съ n различными произвольными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_n ,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшмы относительно всѣхъ постоянныхъ C и, съ другой стороны, совместно съ даннымъ уравненіемъ (1), опредѣляютъ z и q переменныхъ, изъ числа x_1, x_2, \dots, x_n , функциями остальныхъ $n - q$ изъ этихъ переменныхъ и произвольныхъ постоянныхъ.

Если кромѣ того наши $n + 1$ уравненій (1) и (10) образуютъ замкнутую систему, то, въ такомъ случаѣ, легко доказать, что они представляютъ полное интегральное собраніе S . Ли q -аго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно убѣдиться прежде всего, что разсматриваемыя уравненія должны приводиться къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} z - \varphi' (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi'_i (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ p_\kappa - \psi'_\kappa (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_n) &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, q, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} (11)$$

т. е. разрѣшаются относительно переменныхъ x и p съ различными значками ¹⁾. Для доказательства послѣдняго предложенія сдѣлаемъ противоположное допущеніе, а именно, что k -ое изъ $n - q$ послѣднихъ уравненій разрѣшается относительно переменной p_{n-q+i} и приводится къ слѣдующему виду

$$p_{n-q+i} - \psi' (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_{n-q+i-1}, p_{n-q+i+1}, \dots, p_n) = 0,$$

т. е. не должно зависеть ни отъ одной изъ переменныхъ p_κ , такъ какъ онѣ исключаются, согласно съ послѣднимъ сдѣланнымъ предположеніемъ. Вычисляя слѣдующія скобки Вейлера

$$[x_{n-q+i} - \varphi'_i, p_{n-q+i} - \psi'],$$

видимъ, что онѣ обращаются тождественно въ единицу. Но по первоначально поставленному условію, относительно замкнутости системы данныхъ уравненій (1) и (10), необходимо, чтобы послѣднія скобки, или уничтожались, на основаніи послѣднихъ уравненій, или обращались тождественно въ нуль. Такимъ образомъ сдѣланное предположеніе, относительно разрѣшимости системы уравненій (1) и (10), приводитъ къ заключенію, противорѣчающему дѣйствительности, что и убѣждаетъ насъ въ справедливости первоначально сдѣланнаго допущенія относительно того, что разсматриваемая нами совокупность уравненій (1) и (10) приводится къ виду (11).

¹⁾ *S. Lie*. *Mathematische Annalen*. Bd. XI, S. 277.

S. Lie u. Engel. — *Theorie der Transformationsgruppen*. Zweiter Abschnitt S. 94.

Само собою разумѣется, что, на основаніи послѣднихъ равенствъ, утождествляется данное уравненіе (1) и вмѣстѣ съ тѣмъ оно получается какъ единственный результатъ исключенія всѣхъ S изъ предыдущихъ равенствъ (11).

Кромѣ того послѣднія уравненія (11) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ и исходныя уравненія представляютъ замкнутую систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій (11) должны уничтожаться, въ силу послѣднихъ. Эти скобки имѣютъ слѣдующія значенія

$$\left[z - \varphi', p_k - \psi_k' \right] = -p_k + \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^q \frac{\partial \psi_k'}{\partial p_{n-q+i}} p_{n-q+i},$$

$$\left[x_{n-q+i} - \varphi_i', p_k - \psi_k' \right] = \frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_k'}{\partial p_{n-q+i}},$$

для всѣхъ значеній k , отъ 1 до $n - q$, и значеній i , отъ 1 до q . Такъ какъ правая часть послѣднихъ скобокъ не зависитъ отъ переменныхъ

$$z, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-q},$$

то она не можетъ уничтожаться, на основаніи уравненій (11), но должна быть равна нулю тождественно. Такимъ образомъ мы получаемъ тождества

$$\frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial \psi_k'}{\partial p_{n-q+i}} \equiv 0, \text{ или } \frac{\partial \psi_k'}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_k},$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до q , и значеній k , отъ 1 до $n - q$. Что касается первыхъ скобокъ, то онѣ должны уничтожаться, на основаніи послѣднихъ $n - q$ уравненій (11). Поэтому, въ силу только что сейчасъ написанныхъ тождествъ, получаемъ новыя тождества

$$\psi_k' \equiv \frac{\partial \varphi'}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i'}{\partial x_k} p_{n-q+i},$$

$$k = 1, 2, \dots, n - q,$$

которыя и доказываютъ, что система (11) опредѣляетъ полное интегральное собраніе S . Ли q -аго класса.

Изъ доказаннаго предложенія вытекаетъ, что совокупность уравненій (9) должна представлять замкнутую систему и кромѣ того разрѣ-

шатся только относительно $n - q$ изъ ряда переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , для того чтобы определять полное интегральное собраніе С. Ли q -аго класса производнаго уравненія (1).

Другими словами это второе условіе показываетъ, что функции

$$F, F_1, F_2, \dots, F_n$$

не должны быть различными относительно переменныхъ z, p_1, p_2, \dots, p_n , т. е. должны тождественно уничтожаться не только функциональный определитель

$$D \left(\frac{F, F_1, F_2, \dots, F_n}{z, p_1, p_2, \dots, p_n} \right),$$

но также и все его миноры, отъ перваго до q -аго порядка включительно.

Выведенное заключеніе является существеннымъ, характернымъ свойствомъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, которое, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго изложенія, находится въ числѣ необходимыхъ и достаточныхъ условій, опредѣляющихъ вполне послѣднія собранія.

Остановимся далѣе на разсмотрѣніи того частнаго случая, когда полное интегральное собраніе какого-либо производнаго уравненія С. Ли представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) + C_n \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ & \quad i=1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \psi_n, \\ & \quad n=1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

при чемъ произвольная постоянная C_n является придаточной, которая не входитъ въ выраженія всѣхъ функций φ, φ_i и ψ_n .

Если слѣдующій функциональный определитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_q, C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_{n-1}} \right) \neq 0,$$

то очевидно, что система уравненій, составленная изъ q послѣднихъ (12) и $n - q - 1$ послѣднихъ (13), разрѣшима относительно всѣхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Результатъ исключенія послѣднихъ изъ перваго уравненія (13) приводитъ къ производному уравненію С. Ли, независящему отъ переменной z , слѣдующаго вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (14)$$

которое, въ разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ, разрешимо относительно переменной p_1 , такъ какъ первое уравненіе (13) представлено въ видѣ, разрешенномъ относительно послѣдней переменной.

Поэтому, въ этой же области измѣненія нашихъ переменныхъ величинъ, система уравненій (12) и (13), аналогично дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными, представляется совокупностью уравненій (14)-аго и n слѣдующихъ

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_s,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z - F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_n.$$

Обратное предложеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

Пусть имѣемъ $n-1$ уравненій, съ $n-1$ различными произвольными постоянными величинами C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ,

$$\Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-1,$$

разрешимыхъ относительно всѣхъ C и образующихъ, совместно съ уравненіемъ (14), замкнутую систему n производныхъ уравненій. Если послѣдняя не разрешима относительно всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , то полный интегралъ C . Ли получается при помощи квадратуръ.

Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что наша замкнутая система n уравненій выдѣляетъ q зависимостей, не заключающихъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , и приводится къ виду

$$\left. \begin{aligned} x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \\ p_\kappa &= \Psi_\kappa(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \end{aligned} \right\} (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, q, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n-q.$$

Чтобы доказать наше предложеніе, поступаемъ аналогично предыдущему. Такъ какъ послѣдняя система должна быть замкнутой, то составляя скобки Пуассона

$$(x_{n-q+i} - \varphi_i, p_\kappa - \Psi_\kappa),$$

которыя должны уничтожаться тождественно, получаемъ отсюда тождества

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\kappa} + \frac{\partial \Psi_\kappa}{\partial p_{n-q+i}} = 0,$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до q , и значеній k , отъ 1 до $n-q$, которыя показываютъ, что функции Ψ_κ линейны относительно переменныхъ p_{n-q+i} и имѣютъ, стало—быть, слѣдующій видъ

$$\Psi_\kappa = A_\kappa (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\kappa} p_{n-q+i},$$

$\kappa = 1, 2, \dots, n-q.$

Далѣе, приравнивая нулю значенія скобокъ

$$(p_i - \Psi_i, p_\kappa - \Psi_\kappa),$$

получаемъ, совершивъ сокращенія, новыя тождества

$$\frac{\partial A_\kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_\kappa},$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k , отъ 1 до $n-q$. Последнія тождества показываютъ, что выраженіе

$$\sum_{\kappa=1}^{n-q} A_\kappa dx_\kappa$$

представляетъ точный дифференціалъ ¹⁾. Поэтому, выполнивъ квадратуру послѣдняго, легко видѣть, что уравненіе

$$z = \int \sum_{\kappa=1}^{n-q} A_\kappa dx_\kappa + C_n,$$

совмѣстно съ системой (15)-ой, опредѣляетъ полное интегральное собраніе С. Ли даннаго производнаго уравненія (14).

3. Всѣ приведенныя соображенія, относительно одного производнаго уравненія (1) или (14), распространяются также на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли, происхожденіе которыхъ мы разсматривали въ предыдущей главѣ.

Пусть имѣемъ систему m производныхъ уравненій С. Ли

¹⁾ См. моя статья: Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville (comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences, 17 août 1903).

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (16)$$

которая имѣетъ полный интеграль С. Ли q -аго класса

$$\left. \begin{array}{l} z - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}) = 0, \\ x_{n-q+i} - \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}) = 0, \\ i=1, 2, \dots, q. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Вводя аналогичное предыдущему обозначение функций ψ_k , которыя въ настоящемъ случаѣ заключаютъ только $n - m + 1$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, составляемъ дополнительныя уравненія, опредѣляющія, совмѣстно съ уравненіемъ геометрическаго мѣста (17), полное интегральное собраніе С. Ли данной системы (16)-ой

$$p_k - \psi_k = 0, \quad \left. \begin{array}{l} k=1, 2, \dots, n-q. \end{array} \right\} \quad (18)$$

Чтобы система уравненій (17)—(18) представляла дѣйствительно полный интеграль С. Ли данной системы уравненій (16), для этого результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, изъ уравненій разсматриваемаго интегральнаго собранія, долженъ приводиться къ однимъ только исходнымъ уравненіямъ (16)-ымъ.

Предположимъ, что послѣднія разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_m , т. е. что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m}\right) \geq 0. \quad (19)$$

Въ такомъ случаѣ равенства, которыя представляютъ непосредственный результатъ исключенія всѣхъ значений $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$ изъ уравненій нашего интегральнаго собранія (17)—(18), должны также быть разрѣшимы относительно величинъ p_1, p_2, \dots, p_m . Послѣднее условіе удовлетворяется, на примѣръ, когда уравненія (17) и послѣднія $n - q - m$ уравненій (18) разрѣшимы относительно всѣхъ C . Въ такомъ случаѣ, чтобы разсматриваемое интегральное собраніе опредѣляло полный интеграль С. Ли данной системы (16), для этого достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D\left(\frac{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_{q+1}, C_{q+2}, \dots, C_{n-m+1}}\right) \geq 0. \quad (20)$$

Если геометрическое мѣсто разсматриваемаго интегральнаго собранія представлено уравненіями

$$z = \varphi (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}) + C_{n-m+1},$$

$$x_{n-q+i} = \varphi_i (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}),$$

$$i=1, 2, \dots, q,$$

гдѣ произвольная постоянная C_{n-m+1} является придаточной, то система соответствующихъ производныхъ уравненій С. Ли не зависитъ явно отъ переменнй величины z . Поэтому, чтобы написанныя уравненія представляли полный интеграль С. Ли для производныхъ уравненій, которыя получаются, исключеніемъ произвольныхъ постоянныхъ изъ предыдущихъ уравненій, для этого, на примѣръ, достаточно неравенства нулю слѣдующаго функціональнаго опредѣлителя

$$D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots, \psi_{n-q}}{C_1, C_2, \dots, C_q, C_{q+1}, \dots, C_{n-m}} \right) \geq 0.$$

Какъ легко видѣть, если $q=0$, то мы имѣемъ дѣло съ полнымъ интеграломъ Лагранжа системы уравненій (16), разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Въ этомъ случаѣ уравненія (17) и (18) опредѣляютъ полный интеграль Лагранжа и его производныя уравненія, а предыдущее неравенство (20) представляетъ извѣстное условіе, которому удовлетворяютъ полныя интегралы Лагранжа изслѣдуемыхъ уравненій.

Составляя непосредственно скобки Вейлера для лѣвыхъ частей уравненій (17) и (18), мы очевидно приходимъ къ заключенію, что послѣднія уравненія образуютъ замкнутую систему и, въ разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ, приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} F_i (x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ F_{m+s} (x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= C_s, \\ i=1, 2, \dots, m, \quad s=1, 2, \dots, n-m+1, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m, F_{m+1}, \dots, F_{n+1}}{z, p_1, \dots, p_{m-1}, p_m, \dots, p_n} \right) \quad (22)$$

уничтожается тождественно со всѣми своими минорами, отъ перваго до q -аго порядка включительно.

Отсюда вытекает прежде всего слѣдующее весьма существенное заключеніе относительно условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли, чтобы составлять систему совокупныхъ уравненій, допускающихъ полныя интегральныя собранія С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (21), представляя преобразованія равенствъ (17) и (18), образуютъ также замкнутую систему. Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ функцій

$$F_1, F_2, \dots, F_m,$$

не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, то эти скобки могутъ уничтожаться только въ силу первыхъ m уравненій системы (21), которыя представляютъ систему данныхъ уравненій (16). Потому мы получаемъ слѣдующее предложеніе:

Чтобы имѣть полныя интегральныя собранія, совокупныя производныя уравненія С. Ли необходимо должны представлять замкнутую систему, совершенно аналогично совокупнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными перваго порядка, т. е. скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей разсматриваемыхъ уравненій, должны уничтожаться на основаніи этихъ уравненій.

Само собою разумѣется, если данныя уравненія (16) не удовлетворяютъ условію замкнутости, то для разысканія ихъ рѣшеній должно поступать совершенно такъ, какъ поступаютъ въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій. Такъ, если скобки Вейлера, составленныя для двухъ какихъ либо функцій, напримѣръ, F_i и F_k не уничтожаются, на основаніи данныхъ уравненій (16), то, приравнивая составленныя скобки нулю, присоединяемъ вновь полученное уравненіе къ предыдущимъ исходнымъ уравненіямъ. Продолжая поступать такимъ образомъ и далѣе, относительно каждой пары разсматриваемыхъ уравненій, мы, или придемъ, въ концѣ концовъ, къ замкнутой системѣ производныхъ уравненій, или получаемъ такую систему, число уравненій которой больше $2n + 1$; въ послѣднемъ случаѣ, или всѣ переменныя величины получаютъ постоянныя значенія, или разсматриваемыя уравненія несовмѣстимы.

Совершенно аналогично тому какъ мы доказывали по отношенію къ одному уравненію, такъ и здѣсь, для системы производныхъ уравненій С. Ли, также легко убѣдиться, что отмѣченныя выше свойства, характеризующія полныя интегральныя собранія С. Ли, являются не только необходимыми, но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточными условіями, чтобы система уравненій, вида (21), опредѣляла полный интегралъ С. Ли, а именно послѣднія уравненія должны образовать замкнутую систему и соответствующій имъ функціональный опредѣлитель, вида (22), долженъ уничтожаться тождественно со всеми своими минорами, отъ пер-

ваго порядка до q -аго включительно, если соответствующій полный интеграл принадлежит q -ому классу.

Здѣсь слѣдуетъ отмѣтить значеніе, которое представляетъ опредѣлитель (22), для опредѣленія класса полного интеграла, представляемого системой (21). Для полного интеграла нулевого класса, т. е. интеграла Лагранжа уравненій (16), рассматриваемыхъ какъ дифференціальные уравненія съ частными производными, функціональный опредѣлитель (22) долженъ быть отличенъ отъ нуля. Что же касается полныхъ интеграловъ С. Ли, то соответствующій имъ функціональный опредѣлитель (22) долженъ уничтожаться тождественно со всѣми своими минорами до порядка, равнаго классу рассматриваемаго интеграла.

4. Последнія доказанныя предложенія устанавливають однообразную точку зрѣнія на задачи о разысканіи полныхъ интеграловъ Лагранжа и С. Ли. Эта точка зрѣнія вытекаетъ изъ идеи, лежащей въ основаніи извѣстнаго второго способа Якоби интегрированія уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, изложеннаго въ знаменитомъ мемуарѣ: *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quaecunque propositas integrandi*¹⁾.

Развитіе идей, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, позволить намъ представить въ новомъ видѣ указанная выше свойства полныхъ интегральныхъ собраній. Начнемъ съ рассмотрѣнія случая одного уравненія (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (1)$$

Сущность рассматриваемаго способа Якоби состоитъ въ разысканіи обладающихъ опредѣленными свойствами $n + 1$ интеграловъ линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной функціи f переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$, рассматриваемыхъ какъ независимыя переменныя, слѣдующаго вида

$$[F, f] = 0. \quad (23)$$

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя попарно изъ $n + 1$ функцій

$$F, F_1, F_2, \dots, F_n, \quad (24)$$

опредѣляющихъ полное интегральное собраніе (9) даннаго уравненія (1), не зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n , то эти скобки

¹⁾ *Jacobi*. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 60, p. 1—181. Gesammelte Werke, Bd. V, S. 1—189.

должны уничтожаться вообще въ силу даннаго уравненія (1). Въ частности, чтобы уравненія (9) составляли замкнутую систему, достаточно, чтобы функции (24) находились въ инволюціи между собой.

Поэтому выведенное выше условіе, характеризующее полныя интегральныя собранія С. Ли одного производнаго уравненія, формулируется также слѣдующимъ образомъ:

Чтобы уравненія (9) опредѣляли полное интегральное собраніе даннаго уравненія (1), для этого достаточно, чтобы функции

$$F_1, F_2, \dots, F_n$$

представляли систему n интеграловъ въ инволюціи линейнаго уравненія (23). Классъ послѣдняго собранія, само собою разумѣется, опредѣляется, на основаніи свойствъ функціональнаго опредѣлителя

$$D \left(\frac{F, F_1, \dots, F_n}{z, p_1, p_2, \dots, p_n} \right).$$

Послѣднее предложеніе легко представить еще другимъ образомъ.

Предположимъ, что данное производное уравненіе не зависитъ явнымъ образомъ отъ переменнй величины z , т. е. мы имѣемъ дѣло съ производнымъ уравненіемъ (14), которое, будучи разрѣшимымъ относительно переменнй p_1 , приводится къ виду

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (25)$$

Легко видѣть, что уравненія разсмотрѣннаго въ n^0 2-омъ полного интегральнаго собранія уравненія (14)-аго преобразовываются въ систему уравненій (25)-аго и слѣдующихъ

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= C_s, \\ & s=1, 2, \dots, n-1, \\ z - F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= C_n. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Эти уравненія имѣютъ мѣсто для какого угодно класса изслѣдуемаго собранія, въ виду предложенія, которое мы доказали въ концѣ n^0 2-ого, при чемъ здѣсь функции F_s и F_n не зависятъ отъ переменнй p_1 .

Очевидно, что уравненіе (25) и первыя $n-1$ уравненій (26) находятся въ инволюціи, такъ какъ соотвѣтствующія имъ скобки Пуассона не зависятъ, ни отъ переменнй p_1 , ни отъ величинъ C_1, C_2, \dots, C_{n-1} .

Слѣдовательно, *первыя* $n-1$ *уравненій* (26) *представляютъ* *интегралы* *въ* *инволюціи* *канонической* *системы* *обыкновенныхъ* *дифференціальныхъ* *уравненій*, *соотвѣствующихъ* *производному* *уравненію* (25),

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$k=1, 2, \dots, n.$$

Наконецъ, *последнее* *уравненіе* (26) *получается* *при* *помощи* *квадратуры*, *составленной* *известнымъ* *образомъ*, *на* *основаніи* *предыдущихъ* *интеграловъ*.

Возвращаясь къ первоначальному уравненію (1), разрешаемъ его также относительно переменнѣй p_1 и получаемъ

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (27)$$

Само собою разумѣется, что преобразованная система (9) опредѣляетъ полное интегральное собраніе послѣдняго уравненія (27)-ого, представленное послѣднимъ уравненіемъ и слѣдующими

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) = C_s, \quad \left. \begin{array}{l} \\ s=1, 2, \dots, n, \end{array} \right\} \quad (28)$$

при чемъ функции F_s не заключаютъ болѣе переменнѣй p_1 , и классъ послѣдняго собранія остается тотъ же, что и собранія (9)-ого.

Такъ какъ уравненія (27) и (28) образуютъ замкнутую систему, то очевидно, что скобки Вейлера

$$[p_1 + H, F_s],$$

какъ зависящія отъ переменнѣй p_1 и не заключающія величинъ C_s , должны уничтожаться, на основаніи уравненія (27), и мы получаемъ слѣдующія тождества

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - \frac{\partial F_s}{\partial z} H + [H, F_s] = 0,$$

гдѣ послѣднія скобки Вейлера распространяются только на переменныя величины

$$x_2, x_3, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n.$$

Стало-быть, уравненія (28) представляютъ систему интеграловъ въ инволюции слѣдующей обобщенной канонической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій ¹⁾

$$\frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$$\frac{dz}{dx_1} = \sum_{i=1}^{n-1} p_{i+1} \frac{\partial H}{\partial p_{i+1}} - H,$$

$k=2, 3, \dots, n.$

Изложенныя предложенія распространяются безъ всякаго труда на системы совокупныхъ производныхъ уравненій С. Ли.

Пусть имѣемъ систему слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ i=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (29)$$

которая имѣетъ полное интегральное собраніе, представленное уравненіями (21).

Предположимъ, что данныя уравненія (29) представляютъ систему въ инволюции.

Такъ какъ скобки Вейлера, составленныя изъ всѣхъ $n+1$ функцій F попарно, не зависятъ отъ величинъ $C_1, C_2, \dots, C_{n-m+1}$, то эти скобки уничтожаются вообще, на основаніи данныхъ уравненій (29), или уничтожаются иногда тождественно, т. е., въ этомъ послѣднемъ случаѣ, всѣ функціи F находятся въ инволюции между собой. Чтобы система (21) представляла полное интегральное собраніе для этого *достаточно* одного послѣдняго условія, т. е. чтобы имѣли мѣсто тождества

$$[F_i, F_{m+s}] = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ i=1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (30)$$

для всѣхъ значеній указателя s , отъ 1 до $n-m+1$.

Составляемъ слѣдующія линейныя уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f по переменнымъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

разсматриваемымъ какъ независимыя;

¹⁾ Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, стр. 69.

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Извѣстное тождество Майера ¹⁾, которому удовлетворяють скобки Вейлера, составленные для трехъ функций F_i , F_k и f представляется равенствомъ

$$\begin{aligned} & \left[F_i, [F_k, f] \right] + \left[F_k, [f, F_i] \right] + \left[f, [F_i, F_k] \right] = \\ & = \frac{\partial F_i}{\partial z} [F_k, f] + \frac{\partial F_k}{\partial z} [f, F_i] + \frac{\partial f}{\partial z} [F_i, F_k]. \end{aligned}$$

Такъ какъ данныя уравненія (29) находятся въ инволюціи, то скобки $[F_i, F_k]$ уничтожаются тождественно, и предыдущее равенство даетъ новое равенство

$$\begin{aligned} & \left[F_i, [F_k, f] \right] - \left[F_k, [F_i, f] \right] = \\ & = \frac{\partial F_i}{\partial z} [F_k, f] - \frac{\partial F_k}{\partial z} [F_i, f], \end{aligned}$$

которое показываетъ, что линейныя уравненія (31) образуютъ замкнутую систему и, стало-быть, въ опредѣленной области измѣненія переменныхъ, допускають существованіе $2n - m + 1$ различныхъ интеграловъ. На основаніи тождествъ (30), мы заключаемъ, что функции

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n+1} \quad (32)$$

представляютъ различные интегралы системы (31), которые, согласно съ предыдущимъ, находятся между собой въ инволюціи.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Чтобы уравненія (21) представляли полное интегральное собраніе С. Ли системы производныхъ уравненій (29) въ инволюціи для этого достаточно, чтобы функции (32) служили интегралами въ инволюціи замкнутой системы линейныхъ уравненій съ частными производными (31).

Наконецъ, предположимъ, что уравненія (29) представляютъ замкнутую систему и функциональный опредѣлитель

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функции*, стр. 39.

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right)$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ уравненія (29) приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} p_k + H_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и ихъ полное интегральное собраніе C . Ли представляется совокупностью послѣднихъ уравненій (33) и $n - m + 1$ слѣдующихъ

$$\left. \begin{aligned} F_{m+s}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = C_s, \\ s = 1, 2, \dots, n - m + 1, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

которыя получаются изъ $n - m + 1$ послѣднихъ уравненій (21), исключеніемъ изъ нихъ значеній p_1, p_2, \dots, p_m , опредѣляемыхъ совокупностью уравненій (33).

Легко видѣть, что послѣднія значенія функций F_{m+1} представляютъ интегралы слѣдующей яacobievской системы линейныхъ уравненій ¹⁾

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + [H_k, f] = 0, \\ k = 1, 2, \dots, m,$$

гдѣ скобки Вейлера распространяются только на переменныя величины

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n.$$

Другими словами уравненія (34) представляютъ интегралы обобщенной канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dx_{m+r} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+r}} dx_k,$$

$$dp_{m+r} = - \sum_{k=1}^m \frac{dH_k}{dx_{m+r}} dx_k,$$

¹⁾ См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 69.

$$dz = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k,$$

$r = 1, 2, \dots, n - m.$

Итакъ, изъ изложенныхъ соображеній вытекаетъ, что для опредѣленія полнаго интегральнаго собранія *C. Ли* его производныхъ уравненій, достаточно составить удовлетворяющіе указаннымъ условіямъ замкнутости интегралы соответствующихъ линейныхъ уравненій съ частными производными.

Если данныя производныя уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ p , то уравненія, опредѣляющія, совместно съ данными производными уравненіями, ихъ полное интегральное собраніе, представляютъ интегралы въ инволюціи каноническихъ уравненій, соответствующихъ разрѣшеннымъ производнымъ уравненіямъ.

Такимъ образомъ устанавливается полная аналогія между классической теоріей дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и теоріей производныхъ уравненій *C. Ли*. Въ обоихъ случаяхъ изслѣдуемая полныя рѣшенія, какъ тѣхъ такъ и другихъ уравненій, въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, представляются замкнутыми системами $n + 1$ уравненій. При этомъ все различіе заключается въ разрѣшимости послѣднихъ уравненій относительно переменной z и каноническихъ переменныхъ второго класса. Относительно послѣднихъ переменныхъ изслѣдуемая замкнутая система разрѣшима, для дифференціальныхъ уравненій; что же касается производныхъ уравненій *C. Ли*, то соответствующая замкнутая система не разрѣшается относительно каноническихъ переменныхъ одного и того же класса. Эти условія разрѣшимости характеризуются значеніями извѣстнаго функціональнаго опредѣлителя и его миноровъ.

Остановиваясь на подробномъ разсмотрѣніи послѣднихъ опредѣлителей, легко составить болѣе ясное представленіе относительно изслѣдуемыхъ собраній.

Если система (28), совместно съ даннымъ уравненіемъ (27), представляетъ его полный интегралъ q -аго класса, то мы должны имѣть тождество

$$D \begin{pmatrix} F_1, F_2, \dots, F_n \\ z, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} = 0,$$

при чемъ уничтожаются тождественно также и всѣ миноры опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, отъ перваго до q -аго порядка включительно. Предположимъ, что первымъ отличнымъ отъ нуля является слѣдующій функціональный опредѣлитель—миноръ $q + 1$ -аго порядка

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots, p_{n-q}} \right) \geq 0. \quad (35)$$

Въ такомъ случаѣ становится очевиднымъ, что всѣ функціи

$$F_{n-q}, F_{n-q+1}, \dots, F_n$$

не зависятъ непосредственно отъ каноническихъ переменныхъ второго класса, но являются функціями послѣднихъ только черезъ посредство остальныхъ функцій

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}.$$

Слѣдовательно, между рассматриваемыми функціями должны существовать слѣдующія зависимости

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1} (x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \quad \left. \vphantom{F_{n-q+i}} \right\} \quad (36)$$

$$i=0, 1, 2, \dots, q.$$

Аналогичное заключеніе распространяется также на уравненія (34), представляющія, совместно съ замкнутой системой производныхъ уравненій (33), ея полное интегральное собраніе С. Ли. Если послѣднее принадлежит q -ому классу, то

$$D \left(\frac{F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n+1}}{z, p_{m+1}, \dots, p_n} \right) = 0$$

и всѣ миноры функціональнаго опредѣлителя, первой части послѣдняго равенства, также уничтожаются тождественно, отъ перваго до q -аго порядка включительно. Предполагая отличнымъ отъ нуля опредѣлитель—миноръ

$$D \left(\frac{F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n-q}}{p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{n-q}} \right) \geq 0, \quad (37)$$

получаемъ зависимости между функціями F_{m+s} слѣдующаго вида

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_i (x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n-q}), \quad \left. \vphantom{F_{n-q+i}} \right\} \quad (38)$$

$$i=1, 2, \dots, q+1.$$

Что касается полныхъ интегральныхъ собраній нулевого класса, то опредѣляющія ихъ функціи независимы между собой относительно переменной z и каноническихъ переменныхъ второго класса.

Такимъ образомъ только что отмѣченное существенное различіе между дифференціальными уравненіями съ частными производными и производными уравненіями С. Ли формулируется слѣдующими словами:

Интегралы обыкновенных канонических уравнений, определяющие полные интегралы соответствующих дифференциальных уравнений с частными производными, независимы между собой относительно переменной z и канонических переменных второго класса; что же касается аналогичных интегралов канонических уравнений, соответствующих производным уравнениям С. Ли, то они связаны между собой зависимостями, число которых равно классу рассматриваемого интегрального собрания, увеличенному на единицу.

Какъ хорошо извѣстно, изъ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, эти уравненія всегда имѣютъ, въ опредѣленной области измѣненія переменныхъ, послѣдніе указанные интегралы ¹⁾. Что касается производныхъ уравненій С. Ли, то вопросъ о существованіи рассматриваемыхъ интеграловъ соответствующихъ каноническихъ уравненій долженъ послужить для насъ предметомъ дальнѣйшихъ изслѣдованій.

5. Мы рассматривали выше происхожденіе производныхъ уравненій С. Ли, въ пространствѣ трехъ измѣреній, изъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ типовъ M_2^1, M_2^0 , (см. стр. 20—23).

Получаемыя производныя уравненія вида

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (39)$$

представляютъ результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ уравненій соответствующаго полного интегральнаго собрания. Какъ было доказано, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ изъ полныхъ интегральныхъ собраній вида M_2^1, M_2^0 , внутри опредѣленной области измѣненія переменныхъ, можетъ представляться только, или въ видѣ линейнаго уравненія относительно переменныхъ p и q , или въ видѣ функциональной зависимости между переменными x, y и z . Поэтому въ *пространствѣ трехъ измѣреній полные интегралы С. Ли первого и второго классовъ существуютъ только для двухъ родовъ производныхъ уравненій, вида (39), которыя, или линейны относительно переменныхъ p и q , или отъ нихъ не зависятъ*. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ противное, мы пришли бы къ невозможному заключенію, что, въ рассматриваемой нами области измѣненія переменныхъ, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ, изъ уравненій упомянутыхъ собраній, представляется также уравненіями, отличными отъ указанныхъ выше линейныхъ и функциональныхъ.

Точно такъ же легко убѣдиться, что производное уравненіе (1) допускаетъ полныя интегральныя собранія С. Ли $n-1$ или n класса, представляемыя символами M_n^1 и M_n^0 , только при условіи, что изслѣдуемое уравненіе (1) является, или линейнымъ относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , или

¹⁾ См. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73.

представляет функциональную зависимость только между переменными x_1, x_2, \dots, x_n, z .

Действительно, пусть имеем полное интегральное собрание $n-1$ -ого класса, представленное следующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x_{i+1} &= \varphi_i(x_1, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ & \quad i=1, 2, \dots, n-1, \\ p_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} p_{i+1}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Согласно съ понятіемъ о полныхъ интегральныхъ собраніяхъ даннаго уравненія (1), послѣднее должно получаться какъ результатъ исключенія всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, \dots, C_n изъ послѣднихъ $n+1$ написанныхъ уравненій. При этомъ возможны два слѣдующихъ различныхъ случая, которые находятся въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли, внутри нашей области измѣненія переменныхъ, n первыхъ уравненій нашей системы (40) относительно всѣхъ C , или нѣтъ. Если эти уравненія даютъ тамъ значенія C_1, C_2, \dots, C_n функциями переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n, z , то представляя полученныя значенія C въ послѣднее уравненіе (40), находимъ искомый результатъ исключенія, въ видѣ линейнаго уравненія относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n . Если же первыя n уравненій (40) неразрѣшимы относительно всѣхъ C , то очевидно они даютъ одну зависимость, между переменными x_1, x_2, \dots, x_n, z , которая и представляетъ искомый результатъ исключенія. Стало-быть, въ этомъ случаѣ производное уравненіе C . Ли не зависитъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса.

Наконецъ, пусть уравненіе (1) имѣетъ полный интегралъ C . Ли n -ого класса, который представляется совокупностью слѣдующихъ уравненій

$$\begin{aligned} z &= \varphi(C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x_i &= \varphi_i(C_1, C_2, \dots, C_n), \\ & \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Очевидно результатъ исключенія всѣхъ C , изъ послѣднихъ уравненій, представляется зависимостью только между переменными x_1, x_2, \dots, x_n, z .

Слѣдовательно, полные интегралы $n-1$ класса существуютъ только для производнаго уравненія C . Ли, или линейнаго относительно

переменных p_1, p_2, \dots, p_n , или независимо от последних. Полные интегралы n -ого класса существуют только для уравнений, не заключающих канонических переменных второго класса.

Предположим, что исследуемое производное уравнение (1) имеет полное интегральное собрание S . Ли q -ого класса; преобразовываем данное уравнение (1) к виду (27), и пусть рассматриваемое его решение представляется совокупностью уравнений (27)—(28). Так как последнее принадлежит q -ому классу, то существуют $q + 1$ равенств (36). Поэтому система уравнений (28), в рассматриваемой области изменения наших переменных, замѣняется слѣдующими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) &= C_r, \\ r &= 1, 2, \dots, n-q-1, \\ \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}) &= C_{n-q+i}, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

В силу неравенства (35), первые $n-q-1$ уравнений послѣдней системы, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (27), разрѣшаются относительно переменныхъ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-q}$ и даютъ ихъ значенія въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k = \psi'_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-q-1}), \\ k = 1, 2, 3, \dots, n-q.$$

Остальные $q + 1$ уравнений предыдущей системы (41) должны въ такомъ случаѣ, на основаніи послѣднихъ уравнений, приводиться къ слѣдующему виду, какъ это слѣдуетъ изъ условія замкнутости уравнений интегральнаго собранія,

$$\begin{aligned} z &= \varphi'(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ x_{n-q+i} &= \Phi'_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned}$$

Прилагая въ настоящемъ случаѣ разсужденія, которыми мы уже имѣли случай раньше пользоваться (см. стр. 44, 47), приходимъ къ заключенію, что функціи

$$\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3, \dots, \psi'_{n-q}$$

линейны относительно переменныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$.

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующій выводъ:

Чтобы производное уравненіе (27) имѣло полный интегралъ С. Ли q -аго класса, для этого соответствующая ему обобщенная система каноническихъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій должна имѣть $n - q - 1$ интеграловъ, которые, совместно съ даннымъ уравненіемъ, въ определенной области измѣненія нашихъ переменныхъ, приводятся къ системѣ $n - q$ линейныхъ уравненій, относительно каноническихъ переменныхъ второго класса.

Наконецъ, пусть имѣемъ замкнутую систему производныхъ уравненій (29). Нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующихъ заключеній:

Если переменныя p_1, p_2, \dots, p_n не исключаются изъ послѣдней системы, то для нея не существуетъ полныхъ интеграловъ С. Ли, классъ которыхъ былъ бы больше числа $n - m$; если для данной системы (29) существуютъ полные интегралы С. Ли класса $n - m + t$, то въ такомъ случаѣ уравненія (29) должны заключать t уравненій, не зависящихъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса. Наконецъ, если система уравненій (29) допускаетъ полный интегралъ С. Ли $n - m$ -аго класса, то рассматриваемая система должна, или состоять изъ линейныхъ уравненій, или заключать, по меньшей мѣрѣ, одно уравненіе, не зависящее отъ каноническихъ переменныхъ второго класса, при чемъ остальные уравненія, въ такомъ случаѣ, могутъ быть какими угодно. Всѣ эти заключенія непосредственно вытекаютъ изъ разсмотрѣнія общаго вида полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, изъ которыхъ производныя уравненія получаютъ путемъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ параметровъ.

Разсмотримъ въ заключеніе общій случай, когда данная замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли выражается въ видѣ (33)-емъ и имѣетъ полный интегралъ С. Ли q -аго класса, представленный совокупностью уравненій (33) и (34). Принимая во вниманіе условія (37) и (38), которыя при этомъ должны имѣть мѣсто, мы приходимъ путемъ разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, къ слѣдующему заключенію:

Чтобы замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли (33) имѣла полный интегралъ q -аго класса, для этого соответствующая обобщенная система каноническихъ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ должна имѣть $n - m - q$ интеграловъ, которые, совместно съ уравненіями данной системы, въ определенной области измѣненія нашихъ переменныхъ, приводятся къ системѣ $n - q$ линейныхъ уравненій относительно каноническихъ переменныхъ второго класса.

Всѣ разсмотрѣнные случаи отмѣчаютъ частный видъ, который должны представлять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы допускать полные интегралы С. Ли того или другого класса. Послѣднее

обстоятельство является весьма характернымъ для производныхъ уравненій С. Ли, значительно отличающимъ послѣднія уравненія отъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, которыя всѣ безъ исключенія, внутри опредѣленной области измѣненія переменныхъ, имѣютъ полные интегралы Лагранжа.

6. Выведенное заключеніе, относительно частнаго характера производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы, отличные отъ нулевого класса, является весьма существеннымъ для установленія правильной точки зрѣнія на разсматриваемую теорію С. Ли. Въ самомъ дѣлѣ, въ теоріи частныхъ дифференціальныхъ уравненій установилось воззрѣніе, считающее полные интегралы С. Ли обобщеніемъ интеграловъ классической теоріи. Выше мы указывали уже (см. стр. 34—36) на существенную разницу между уравненіями дифференціальными и производными С. Ли. Теперь, при болѣе близкомъ разсмотрѣніи вопроса, когда, отъ общихъ геометрическихъ соображеній о собраніяхъ поверхностныхъ элементовъ, мы переходимъ къ постановкѣ аналитической задачи о разысканіи интеграловъ С. Ли, тогда оказывается, что видъ производныхъ уравненій, допускающихъ существованіе послѣднихъ интеграловъ, ограниченъ болѣе узкими условіями, чѣмъ видъ дифференціальныхъ уравненій классической теоріи. Послѣднее обстоятельство заслуживаетъ того, чтобы на немъ остановиться подробнѣе тѣмъ болѣе, что связанныя съ нимъ вопросы очень мало затронуты въ литературѣ изслѣдуемой теоріи.

Свои новыя понятія о производныхъ уравненіяхъ и ихъ полныхъ рѣшеніяхъ, основанныя на геометрической теоріи поверхностныхъ элементовъ, С. Ли далъ впервые въ 1872 году ¹⁾. Послѣ этого тѣ же самыя понятія были приведены Ф. Клейномъ въ его извѣстной *Ерлангенской Программѣ* ²⁾ и легли затѣмъ въ основаніе мемуара С. Ли: *Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, въ IX томѣ *Mathematische Annalen*, откуда и перешли въ большую часть трактатовъ, относительно разсматриваемыхъ уравненій. Слѣдуетъ однако замѣтить, что, ни С. Ли, ни другіе авторы не занимались подробнымъ изученіемъ идеи новыхъ введенныхъ понятій ³⁾. Лишь только отчасти связанныя съ ними вопросы были затронуты Беклундомъ ⁴⁾, относительно про-

¹⁾ Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität Göttingen. S. 473.

²⁾ F. Klein. — Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure 1891, p. 187).

³⁾ F. Engel. — Zur Erinnerung an Sophus Lie (Berichte über die Verhandlungen d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Allgemeiner Theil 1899, S. XXXI).

⁴⁾ Mathematische Annalen, Bd. 17, S. 285.

изводныхъ уравненій С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, и С. Ли ¹⁾ въ одномъ изъ послѣднихъ своихъ мемуаровъ. Въ своемъ сообщеніи ²⁾ Парижской Академіи Наукъ: *Sur les intégrales de S. Lie*, мы указали рядъ критическихъ соображеній относительно теоріи С. Ли.

Факты, которые вызываютъ необходимость критическаго разсмотрѣнія выведенныхъ С. Ли понятій, достаточно выяснены выше, и наша задача приводится къ тому, чтобы установить соотвѣтствие между точкой зрѣнія относительно общности рѣшеній С. Ли, высказываемой нѣкоторыми авторами, и частнымъ характеромъ тѣхъ условій, которымъ должны удовлетворять рассматриваемыя уравненія, чтобы допускать полные интегралы С. Ли.

Легко убѣдиться, что если интегральныя собранія С. Ли и являются обобщеніемъ интеграловъ Лагранжа дифференціальныхъ уравненій, то только съ чисто формальной стороны.

Возьмемъ, на примѣръ, формулы (3) и (4), опредѣляющія полный интегралъ С. Ли q -аго класса производнаго уравненія (1)-аго. Полагая въ этихъ формулахъ q равнымъ нулю, мы получаемъ формулы (5), которые представляютъ полный интегралъ Лагранжа уравненія (1), рассматриваемаго какъ дифференціальное, и заключаются такимъ образомъ какъ частный случай въ общихъ формулахъ (3) и (4). Но, удовлетворяясь послѣднимъ толкованіемъ, мы становимся на формальную точку зрѣнія и только ограничиваемся разсмотрѣніемъ внѣшняго вида формулъ, не останавливаясь на значеніи разрѣшаемыхъ ими задачъ.

Между тѣмъ способы образованія *производныхъ* уравненій С. Ли и свойства ихъ интегральныхъ собраній показываютъ, что необходимо разсматривать эти уравненія какъ совершенно различныя, въ зависимости отъ класса геометрическаго мѣста собранія поверхностныхъ элементовъ, изъ которыхъ происходятъ рассматриваемыя производныя уравненія. Это различіе между производными уравненіями различныхъ классовъ особенно наглядно обнаруживается при сравненіи собраній нулевого класса съ собраніями другихъ классовъ, порядокъ которыхъ отличенъ отъ нуля, т. е. при сравненіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными классической теоріи съ производными уравненіями С. Ли. Какъ раньше мы уже отмѣчали (см. стр. 34), каноническія переменныя перваго класса рассматриваются, въ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій, какъ независимыя переменныя. Наоборотъ теорія С. Ли исходитъ изъ предположеній, что послѣднія переменныя связаны между собой нѣкоторымъ числомъ q уравненій. Предполагая послѣднее число q равнымъ ну-

¹⁾ *S. Lie*.—Ueber Berührungstransformationen und Differentialgleichungen (Leipzig. Berichte. Jahrg. 1898, S. 113—180).

²⁾ Comptes rendus des Seances de l'Academie des Sciences, 3 août 1903.

лю, мы получаемъ формулы классической теоріи и можемъ считать по-этому, съ формальной точки зрѣнія, что дифференціальныя уравненія и ихъ интегралы Лагранжа представляютъ частный случай производныхъ уравненій и полныхъ интеграловъ С. Ли.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ разсмотрѣнія однихъ только опредѣленій и понятій. Поэтому было бы слишкомъ поспѣшно, прежде чѣмъ сравнить вопросы и задачи, которые разсматриваются въ обоихъ теоріяхъ, заключать предварительно, что и вся теорія С. Ли представляетъ обобщеніе классической. Достаточно для этого возвратиться къ отмѣчен-нымъ выше случаямъ существованія полныхъ интеграловъ различныхъ классовъ.

Остановимся, на примѣръ, на пространствѣ трехъ измѣреній, гдѣ существуетъ шесть различныхъ семействъ собраній поверхностныхъ элементовъ, представляемыхъ слѣдующими символами

$$M_2^2, M_2^1, M_2^0,$$

$$M_1^1, M_1^0,$$

$$M_0^0.$$

Всѣ эти собранія представляютъ настолько различные геометрическіе образы, что трудно ожидать *a priori*, чтобы каждая система ∞^4 поверхностныхъ элементовъ, опредѣляемая уравненіемъ

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

могла быть собрана въ любое изъ этихъ шести собраній. И дѣйстви-тельно, какъ мы видѣли выше, для существованія каждаго изъ указан-ныхъ полныхъ интегральныхъ собраній, написанное производное урав-неніе должно удовлетворять своимъ особеннымъ частнымъ условіямъ.

Послѣднее обстоятельство, съ научной, философской точки зрѣнія, находится въ полномъ соответствіи съ мыслями, которыя высказалъ С. Ли, относительно представленія геометрическихъ формъ пространства, въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ: *Ueber Complexe insbesondere Linien-und Kugel-Complexe, mit Anwendungen auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen* 1). Указывая, что возможно принимать за основные элементы различные геометрическіе образы, какъ точка, согласно съ Декартомъ, или прямая, вмѣстѣ съ Пюккеромъ, С. Ли прибавляетъ: *Da aber hierdurch ein Geraden-System—ein Plücker'scher Linien-Complex—ausgezeichnet*

1) *Mathematische Annalen*, Bd. 5, S. 145.

wird, so ist es einleuchtend, dass eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linien—Complexes beschäftigt, so kann es sehr vortheilhaft sein, die Linien dieses Complexes als Raumelemente zu benutzen ¹⁾.

Совершенно аналогичныя соображенія примѣняются къ области переменныхъ величинъ, представляемой системой поверхностныхъ элементовъ, которая опредѣляется однимъ даннымъ или системой данныхъ производныхъ уравненій С. Ли. Какъ вытекаетъ изъ предыдущаго изложенія, въ зависимости отъ характера данной системы поверхностныхъ элементовъ, послѣдніе могутъ быть собраны въ полныя интегральныя собранія С. Ли одного или другого опредѣленнаго класса.

Такимъ образомъ, указанныя выше условія существованія интегральныхъ собраній С. Ли представляютъ достаточное основаніе, чтобы утверждать, что *разсматриваемые интегралы, внутри известной, определенной области измѣненія переменныхъ, существуютъ въ исключительныхъ случаяхъ только для производныхъ уравненій С. Ли, особаю частнаго вида.*

Здѣсь однако необходимо сдѣлать нѣсколько замѣчаній относительно изслѣдованій С. Ли, къ которымъ мы возвратимся подробнѣе въ дальнѣйшемъ изложеніи. Какъ въ своемъ доказательствѣ существованія полныхъ интегральныхъ собраній ²⁾, такъ и во всѣхъ своихъ изслѣдованіяхъ, по интегрированію производныхъ уравненій, С. Ли все время остается на чисто формальной точкѣ зрѣнія, ограничиваясь разсмотрѣніемъ общихъ формулъ. При этомъ С. Ли не дѣлаетъ различія между интегралами различныхъ классовъ и не даетъ способовъ разысканія полныхъ интеграловъ одного даннаго опредѣленнаго класса. Такая постановка изслѣдованія не можетъ удовлетворять читателя, оставляя не выясненнымъ вопросъ о взаимномъ отношеніи теорій дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли.

Мы указали уже въ первой главѣ настоящаго изслѣдованія (см. н^o 8) существенное различіе въ опредѣленіи дифференціальныхъ уравненій и производныхъ уравненій С. Ли; кромѣ того, на предыдущихъ страницахъ, отмѣчено также различіе между тѣми и другими уравненіями, относительно существованія ихъ рѣшеній, и указано, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для уравненій исключительнаго вида.

Въ виду послѣднихъ изложенныхъ соображеній, являются вопросы, относительно условій, при которыхъ существуютъ интегралы С. Ли, отно-

¹⁾ Loc. cit. S. 150.

²⁾ Mathematische Annalen, Bd. 9, S. 261.

сительно разысканія производныхъ уравненій, допускающихъ интегралы С. Ли опредѣленнаго класса, и, наконецъ, относительно того значенія, которое представляютъ производныя уравненія С. Ли и ихъ интегральныя собранія.

Кромѣ общаго научнаго интереса, который представляетъ всякая математическая теорія, значеніе интеграловъ С. Ли, для теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, выясняется въ достаточной мѣрѣ изъ ихъ разсмотрѣннаго свойства, представлять систему интеграловъ въ инволюціи каноническихъ уравненій, соотвѣтствующихъ даннымъ производнымъ уравненіямъ. Этимъ послѣднимъ свойствомъ интеграловъ С. Ли намъ придется воспользоваться въ дальнѣйшемъ изложеніи, при интегрированіи изслѣдуемыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Что же касается условій существованія интеграловъ С. Ли и вычисленія производныхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы различныхъ классовъ, то, для рѣшенія возникающихъ при этомъ вопросовъ, намъ придется интегрировать нѣкоторыя системы уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ функций. Съ изученія этихъ послѣднихъ уравненій мы и имѣемъ въ виду начать наши дальнѣйшія изслѣдованія.

Г Л А В А III.

Объ интегрированіи нѣкоторыхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функцій.

1. Уравненія, которыя служатъ предметомъ изслѣдованія настоящей главы, представляютъ обобщеніе уравненій, проинтегрированныхъ Якоби въ его мемуарѣ: *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* ¹⁾ и къ которымъ приводятся многіе вопросы анализа. Теорія интегрированія изслѣдуемыхъ уравненій была опубликована мною на страницахъ *Journal de Mathématiques pures et appliquées* за 1897 годъ въ мемуарѣ: *Etude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* ²⁾.

Интегрируя на послѣдующихъ страницахъ наши обобщенныя уравненія, мнѣ придется вмѣстѣ съ тѣмъ подвергнуть и интегралы упомянутыхъ уравненій Якоби болѣе подробному изученію, чѣмъ это дѣлалъ знаменитый геометръ въ своихъ изслѣдованіяхъ.

Обозначимъ черезъ z_1, z_2, \dots, z_n неизвѣстныя функціи $m + p$ независимыхъ переменныхъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_{m+p} .

Уравненія, которыя мы имѣемъ въ виду интегрировать, представляются слѣдующимъ образомъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при чемъ коэффициенты X_k^h, X^{hr} представляютъ функціи всѣхъ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n$, и значекъ p имѣеть нѣкоторое цѣлое численное значеніе.

Въ частномъ случаѣ, когда значекъ p тождественно равенъ нулю, то всѣ коэффициенты X_k^h исчезаютъ, и изслѣдуемая система приводится къ извѣстной системѣ уравненій

¹⁾ Jacobi.—Gesammelte Werke, Band IV, S. 7.

²⁾ Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. III, 5-e série, p. 423.

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} = X^{hr},$$

$$h=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n,$$

соответствующих уравненіямъ въ полныхъ дифференціалахъ, при чемъ функціи X^{hr} должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ точности дифференціаловъ.

Если значекъ n равенъ 1, то рассматриваемыя уравненія представляютъ систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Наконецъ, если показатель m равенъ 1, то наши уравненія принимаютъ видъ упомянутой выше системы уравненій Якоби ¹⁾, обобщеніе которой представляетъ предметъ настоящей главы нашего изслѣдованія. Въ этомъ случаѣ число уравненій n равно числу неизвѣстныхъ функцій и, стало-быть, соответствующія уравненія Якоби допускаютъ всегда, въ извѣстной области измѣненія переменныхъ, существованіе интеграловъ, какъ это слѣдуетъ, на основаніи изслѣдованій Коши и Ковалевской.

Если показатель m больше 1, т. е. число уравненій превышаетъ число заключающихся въ нихъ неизвѣстныхъ функцій, то, какъ извѣстно, существованіе интеграловъ послѣднихъ уравненій требуетъ выполненія нѣкоторыхъ дополнительныхъ условій, формальнаго характера. Объ этихъ послѣднихъ легко судить по частнымъ случаямъ, отмѣченнымъ выше, когда $p=0$ или когда $n=1$. Въ первомъ случаѣ, для существованія интеграловъ рассматриваемыхъ уравненій, должны удовлетворяться условія точности дифференціаловъ; во-второмъ же случаѣ изслѣдуемая система уравненій должна быть якобіевской, т. е. должны уничтожаться тождественно составленныя извѣстнымъ образомъ скобки Пуассона изъ лѣвыхъ частей рассматриваемыхъ уравненій.

Ниже мы составимъ, въ самомъ общемъ видѣ, условія, которымъ должны удовлетворять изслѣдуемыя уравненія (1), для того чтобы допустить существованіе интеграловъ. Эти условія явятся слѣдствіемъ зависимости между уравненіями (1) и нѣкоторой якобіевской системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи по всѣмъ переменнымъ величинамъ $x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n$, рассматриваемымъ какъ независимыя переменныя.

2. Предположимъ, что слѣдующая система n различныхъ уравненій

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$i=1, 2, \dots, n,$$

¹⁾ Въ Journal Crelle (Bd. 100, S. 404, Bd. 110, S. 171) Гамбургеръ два раза возвращался, въ своихъ изслѣдованіяхъ, къ этимъ уравненіямъ.

разрѣшимыхъ относительно переменныхъ величинъ z_1, z_2, \dots, z_n , представляетъ рѣшеніе изслѣдуемой системы дифференціальныхъ уравненій (1). Дифференцируя уравненія (2) по всѣмъ независимымъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_n , получаемъ рядъ слѣдующихъ производныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_r} \frac{\partial z_r}{\partial x_h} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_r} \frac{\partial z_r}{\partial x_k} = 0, \\ k=m+1, m+2, \dots, m+p, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

при чемъ значекъ i принимаетъ всѣ различныя значенія, отъ 1 до n .

Умножаемъ равенства (4) соотвѣтственно на X_k^h и сумму ихъ складываемъ съ уравненіемъ (3), соотвѣтствующимъ значку h . Такимъ образомъ мы получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Такъ какъ уравненія (2) даютъ рѣшенія данной системы (1), то для опредѣляемыхъ равенствами (2) значеній функцій z_1, z_2, \dots, z_n имѣютъ мѣсто тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} = X^{hr}, \\ h=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Подставляя, въ предыдущія равенства (5), правыя части послѣднихъ написанныхъ равенствъ, вмѣсто ихъ лѣвыхъ частей, получаемъ слѣдующія новыя равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію: *чтобы опредѣляемыя уравненіями (2) функции z_1, z_2, \dots, z_n удовлетворяли данной системѣ (1), для этого равенства (6) необходимо должны быть слѣдствіемъ уравненій (2)*. Такъ какъ лѣвыя части полученныхъ равенствъ (6) представляютъ функции всѣхъ переменныхъ x и z , то мы говоримъ, что, въ общемъ случаѣ, равенства (6) должны уничтожаться на основаніи уравненій (2). Въ частности равенства (6) могутъ также уничтожаться тождественно, были бы только для этого подобраны соответствующимъ образомъ функции

$$f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Наконецъ, равенства (6) должны представлять тождества еще и въ томъ случаѣ, когда въ правыхъ частяхъ уравненій (2), вмѣсто нулей, поставитъ соответственно произвольныя постоянныя величины C_1, C_2, \dots, C_n .

3. Благодаря выведеннымъ равенствамъ (6), устанавливается зависимость между изслѣдуемой системой дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка многихъ неизвѣстныхъ функций z_1, z_2, \dots, z_n (1) и системой линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функции f по всѣмъ переменнымъ $x_1, x_2, \dots, x_{m+p}, z_1, z_2, \dots, z_n$, разсматриваемымъ какъ независимыя переменныя,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X^h_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f}{\partial z_r} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что послѣдняя система уравненій (7) интегрируема и имѣетъ n интеграловъ f_1, f_2, \dots, f_n , различныхъ относительно переменныхъ z_1, z_2, \dots, z_n , такъ что слѣдующій функциональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\begin{array}{c} f_1, f_2, \dots, f_n \\ z_1, z_2, \dots, z_n \end{array} \right) \neq 0. \quad (8)$$

Легко доказать въ такомъ случаѣ, что слѣдующія уравненія

$$f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

опредѣляютъ рѣшеніе системы данныхъ уравненій (1).

Дѣйствительно, поступая съ уравненіями (9) совершенно аналогично тому, какъ мы дѣлали это въ началѣ предыдущаго n° 2-го съ уравненіями (2), мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

для всѣхъ различныхъ значеній показателя h , отъ 1 до m .

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, функции f_i представляютъ интегралы системы уравненій (7), то, стало-быть, имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f_i}{\partial z_r} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

для всѣхъ значеній h , отъ 1 до m .

Поэтому, на основаніи послѣднихъ равенствъ, предыдущія становятся

$$\sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_r} \left(\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} \right) = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

для всѣхъ значеній h , отъ 1 до m . Въ виду неравенства (8), система n послѣднихъ тождествъ приводитъ къ n слѣдующимъ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial z_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial z_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0,$$

$r = 1, 2, \dots, n,$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній показателя h , отъ 1 до n , и доказываютъ такимъ образомъ справедливость нашего предложенія.

4. Итакъ, чтобы изслѣдуемая система уравненій (1) имѣла рѣшенія, для этого достаточно, чтобы уравненія (7) имѣли n различныхъ интеграловъ. Поэтому условія, которымъ для этого должна удовлетворять послѣдняя система (7), представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ условія интегрируемости данныхъ уравненій (1).

Предположимъ, что коэффициенты послѣднихъ уравненій X_k^h, X^{hr} таковы, что m уравненій (7) образуютъ *якобьевскую* систему, обладающую $p + n$ различными рѣшеніями.

Соотвѣтствующая система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ имѣетъ слѣдующій видъ

$$dx_k = \sum_{h=1}^m X_k^h dx_h,$$

$$k = m+1, m+2, \dots, m+p,$$

$$dz_r = \sum_{h=1}^m X^{hr} dx_h,$$

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

Въ частномъ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ системой уравненій (1) Якоби, т. е. при $m=1$, тогда послѣдняя система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ обращается въ систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, которая можетъ быть представлена также въ слѣдующемъ видѣ, какъ изображаетъ ее Якоби,

$$dx_k = \frac{dx_k}{X_k} = \frac{dz_r}{X^r},$$

$$k = 2, 3, \dots, p+1, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

при чемъ второй значекъ коэффициентовъ X^r мы опускаемъ, какъ излишній.

Пусть функціи

$$f_1, f_2, \dots, f_{p+n}$$

представляютъ систему $p+n$ различныхъ интеграловъ уравненій (7). Такъ какъ произвольная функція послѣднихъ интеграловъ представляетъ также рѣшеніе системы (7), то, на основаніи теоремы, доказанной въ предыдущемъ n^0 3-емъ, слѣдующія формулы

$$\left. \begin{aligned} \Pi_r (f_1, f_2, \dots, f_{p+n}) = 0, \\ r = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

представляютъ рѣшеніе данныхъ уравненій (1), при чемъ $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Легко доказать, что уравненія (10) представляютъ *общій интегралъ* системы (1), т. е. всякое рѣшеніе послѣднихъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} z_r = \psi_r (x_1, x_2, \dots, x_{m+p}), \\ r = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

заключается въ формулахъ (10), при условіи, что всѣ значенія переменныхъ x и z , удовлетворяющія зависимостямъ (11), находятся внутри

области измененія переменныхъ величинъ, для которой якобевская система (7) интегрируема ¹⁾).

Въ самомъ дѣлѣ, для каждаго значенія показателя h , мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial \psi_r}{\partial x_k} - X^{hr} = 0,$$

$r = 1, 2, \dots, n,$

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^n X^{hr} \frac{\partial f_s}{\partial z_r} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, p+n.$

Подставляя въ нихъ значенія функций z_1, z_2, \dots, z_n , опредѣляемыя уравненіями (11)-ыми и исключая изъ полученныхъ такимъ образомъ тождествъ значенія n величинъ X^{hr} , соответствующихъ показателямъ $r = 1, 2, \dots, n$, находимъ новыя тождества

$$\left. \begin{aligned} Dx_h f_s + \sum_{k=m+1}^{m+p} X_k^h Dx_k f_s = 0, \\ s = 1, 2, \dots, p+n, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

гдѣ введены слѣдующія условныя обозначенія

$$Dx_i f_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_s}{\partial z_r} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_i}.$$

Изъ полученныхъ равенствъ (12) исключаемъ p величинъ X_k^h , соответствующихъ различнымъ значеніямъ $k = m+1, m+2, \dots, m+p$. Такъ какъ число всѣхъ уравненій равно $p+n$, то въ результатѣ исключенія мы получаемъ n новыхъ тождествъ, независящихъ отъ величинъ X_k^h , которыя мы представляемъ въ слѣдующемъ видѣ

$$A_{h\sigma} = 0,$$

$$\sigma = p+1, p+2, \dots, p+n.$$

Введенное здѣсь выраженіе

$$A_{h\sigma}$$

¹⁾ Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...* Стр. 26.

обозначаетъ функциональный опредѣлитель, составленный изъ функцій

$$f_1, f_2, \dots, f_p, f_\sigma,$$

относительно переменныхъ величинъ

$$x_h, x_{m+1}, \dots, x_{m+p},$$

при чемъ переменныя величины z_1, z_2, \dots, z_n рассматриваются какъ функціи (11) всѣхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{m+p} , такъ что мы имѣемъ

$$\Delta_{h\sigma} \equiv \begin{vmatrix} Dx_h f_1 & Dx_{m+1} f_1 & \dots & Dx_{m+p} f_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Dx_h f_p & Dx_{m+1} f_p & \dots & Dx_{m+p} f_p \\ Dx_h f_\sigma & Dx_{m+1} f_\sigma & \dots & Dx_{m+p} f_\sigma \end{vmatrix}.$$

Тождества

$$\Delta_{h\sigma} = 0,$$

$$h=1, 2, \dots, m,$$

показываютъ, что рассматриваемыя значенія функцій

$$f_1, f_2, \dots, f_p, f_\sigma$$

связаны между собой одной зависимостью.

Давая значку σ всѣ n значеній отъ $p+1$ до $p+n$, мы заключаемъ, на основаніи послѣднихъ тождествъ, что, подставляя рѣшеніе (11) данныхъ уравненій (1) въ функціи

$$f_1, f_2, \dots, f_p, f_{p+1}, \dots, f_{p+n},$$

получаемъ ихъ значенія, которыя оказываются связанными n различными зависимостями.

Отсюда и слѣдуетъ искомое заключеніе, что *уравненія (10) представляютъ общій интегралъ данной системы дифференціальныхъ уравненій (1)*.

Приведенное доказательство представляетъ обобщеніе извѣстныхъ доказательствъ, данныхъ для случаевъ одного линейнаго уравненія съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи и для якобиевскихъ системъ послѣднихъ уравненій ¹⁾.

¹⁾ Ср. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій*.... гл. II, стр. 11 и слѣд. и статью: *Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction*. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3 série, t. XVIII).

Само собою разумѣется, что рассматриваемое доказательство ограничивается только указанной областью интегрируемости рассматриваемыхъ уравненій. Если послѣднюю область мы ограничимъ, напримѣръ, условіями однозначности коэффициентовъ X^h , X^{hr} и существованія ихъ конечныхъ и непрерывныхъ первыхъ частныхъ производныхъ по входящимъ въ нихъ переменнымъ величинамъ, то рѣшенія уравненій (1), не удовлетворяющія послѣднимъ условіямъ, не могутъ заключаться въ указанномъ общемъ интегралѣ изслѣдуемыхъ уравненій, который принадлежитъ рассматриваемой области интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если имѣеть мѣсто послѣдній случай, то нѣкоторые изъ рассматриваемыхъ функциональныхъ опредѣлителей

$$A_{hs}$$

могутъ принимать неопредѣленные или бесконечно большія значенія, и наше доказательство не приводитъ болѣе къ желаемому результату.

Возьмемъ, напримѣръ, слѣдующую систему уравненій съ частными производными двухъ функцій z_1 и z_2 по независимымъ переменнымъ x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} &= 1 + \sqrt{z_1 - x}, & \frac{\partial z_1}{\partial y} &= (z_2 - xy) \sqrt{z_1 - x}, \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} &= y, & \frac{\partial z_2}{\partial y} &= x + (z_2 - xy) (x - 2\sqrt{z_1 - x}). \end{aligned}$$

Внутри области однозначности коэффициентовъ данныхъ уравненій, ихъ общій интегралъ, согласно съ изложенной теоріей, имѣеть слѣдующее значеніе

$$\begin{aligned} z_1 &= x + \left[\frac{1}{2} x - C_1 \operatorname{tang} (C_1 y + C_2) \right]^2, \\ z_2 &= xy - 2 C_1^2 \operatorname{sec}^2 (C_1 y + C_2), \end{aligned}$$

гдѣ C_1 и C_2 обозначаютъ двѣ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Рассматриваемыя уравненія имѣють очевидно также слѣдующее рѣшеніе

$$z_1 = x, \quad z_2 = xy,$$

которое однако, какъ легко видѣть, не заключается въ предыдущихъ формулахъ и не можетъ быть изъ нихъ получено, такъ какъ для опредѣляемыхъ послѣднимъ рѣшеніемъ значеній переменныхъ z_1 , z_2 , x , y коэффициенты данныхъ уравненій перестаютъ быть однозначными.

Г Л А В А IV.

Разысканіе производныхъ уравненій С. Ли, допускающихъ полные интегралы С. Ли данного класса.

1. Исходя изъ разсмотрѣнія свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, мы имѣли уже случай отмѣтить, во второй главѣ нашего изслѣдованія, нѣсколько общихъ условій, которымъ должны удовлетворять производныя уравненія С. Ли для того, чтобы существовали для нихъ разсматриваемые интегралы данного опредѣленнаго класса. Наши дальнѣйшія вычисленія будутъ основываться на доказанномъ выше, въ $n^{\circ}4$ -омъ второй главы, свойствѣ разсматриваемыхъ интегральныхъ собраній, представлять интегралы въ инволюціи канонической системы, которые связаны между собой указанными выше зависимостями.

Начнемъ съ изслѣдованія простѣйшаго случая, представляемаго однимъ производнымъ уравненіемъ, не заключающимъ переменннй z ,

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (1)$$

Какъ было доказано, въ $n^{\circ}2$ -мъ второй главы, полный интеграль С. Ли послѣдняго уравненія опредѣляется при помощи квадратуры, послѣ того какъ извѣстны $n-1$ уравненій нашего интегральнаго собранія, независящихъ отъ переменннй z . Поэтому, возвращаясь къ первымъ $n-1$ уравненіямъ (26) второй главы, легко видѣть, совершенно аналогично разсмотрѣнному общему случаю, когда исходное производное уравненіе заключаетъ переменннй z , что функціи

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$$

должны удовлетворять слѣдующимъ q зависимостямъ

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$i=0, 1, 2, \dots, q-1,$$

для того, чтобы упомянутыя уравненія (26) опредѣляли полный интеграль С. Ли q -аго класса данного уравненія (1).

Для выясненія сущности дальнѣйшихъ вычисленій, займемся прежде всего простѣйшимъ случаемъ существованія полныхъ интеграловъ С. Ли $n-1$ класса, который былъ изслѣдованъ выше, въ $n^{\circ}5$ -омъ второй главы, исходя изъ основныхъ понятій о происхожденіи производныхъ уравненій С. Ли.

Если данное уравненіе (1) имѣетъ полный интеграль С. Ли $n-1$ -ого класса, то очевидно, что всѣ функции F_s зависятъ только отъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , и равенства (2) должны выражаться слѣдующимъ образомъ

$$F_s \equiv \Phi_s(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ s=1, 2, \dots, n-1.$$

Такъ какъ послѣднія функции не заключаютъ каноническихъ переменныхъ второго класса, то всѣ функции Φ_s находятся въ инволюціи. Наконецъ, соответствующее разсматриваемому уравненію (1) линейное уравненіе съ частными производными, которому удовлетворяютъ функции Φ_s , становится

$$\left(p_1 + H, \Phi\right) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0. \quad (3)$$

Искомые интегралы послѣдняго уравненія

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1} \quad (4)$$

не должны зависетьъ отъ переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n . Поэтому имѣютъ мѣсто тождества

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_s \partial p_k} = 0,$$

для всѣхъ значеній указателей s и k , отъ 1 до n . Слѣдовательно, производныя, взятые по переменнымъ p_k отъ предыдущихъ уравненій (3), должны также уничтожаться тождественно.

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующія новыя уравненія, которымъ должны удовлетворять искомыя функции (4),

$$\sum_{s=2}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \\ k=2, 3, \dots, n.$$

Такъ какъ число всѣхъ различныхъ требуемыхъ интеграловъ уравненія (3) равно $n-1$, то полученныя послѣднія $n-1$ уравненій должны уни-

чтожаться тождественно, каждое въ отдѣльности, т. е. имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} = 0, \quad (5)$$

для всѣхъ значений s и k , отъ 2 до n . Интегрируя эти послѣднія равенства, мы получаемъ слѣдующія зависимости

$$\frac{\partial H}{\partial p_{i+1}} = X_i, \\ i = 1, 2, \dots, n-1,$$

гдѣ всѣ X_i представляютъ произвольныя функціи переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n . Интегрируя вновь полученные равенства еще одинъ разъ, получаемъ искомое значение функціи H

$$H = \sum_{i=1}^n X_i p_{i+1} + X,$$

при чемъ X обозначаетъ новую произвольную функцію. Такимъ образомъ, мы получаемъ прежній результатъ: чтобы данное уравненіе (1) допускало полное рѣшеніе C . Ли $n-1$ -аго класса, оно должно приводиться къ линейному уравненію относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n слѣдующаго вида

$$p_1 + X_1 p_2 + X_2 p_3 + \dots + X_{n-1} p_n + X = 0,$$

гдѣ коэффициенты $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X$ являются функціями переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n .

То же самое предложеніе имѣетъ мѣсто и для производныхъ уравненій C . Ли, заключающихъ переменную величину z . Въ этомъ послѣднемъ случаѣ однако всѣ искомыя функціи, число которыхъ теперь становится равнымъ n ,

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \quad (6)$$

зависятъ также отъ переменной z и опредѣляются слѣдующимъ уравненіемъ (см. n^04 , глава II)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \left(\sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Такъ какъ функціи Φ_s не должны зависѣть отъ каноническихъ переменныхъ второго класса, то искомыя интегралы (6) послѣдняго уравне-

нія удовлетворяютъ также уравненіямъ, которыя получаютъ дифференцированиемъ послѣдняго по всѣмъ переменнымъ p_2, p_3, \dots, p_n . Получаемыя такимъ образомъ уравненія, послѣ приведенія, принимаютъ слѣдующій видъ

$$\sum_{s=2}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \sum_{s=2}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} p_s \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$k = 2, 3, \dots, n.$

Отсюда, при помощи разсужденій аналогичныхъ предыдущимъ, получаютъ тѣ же уравненія (5). Поэтому мы приходимъ къ прежнему заключенію, что *производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, допускающее полныя интегралы С. Ли $n-1$ -аго класса, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ переменныхъ второго класса, при чемъ коэффициенты этого уравненія зависятъ отъ каноническихъ переменныхъ перваго класса и переменной z .*

2. Наши дальнѣйшія изслѣдованія начнемъ съ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ простѣйшихъ частныхъ случаевъ. Пусть имѣемъ производное уравненіе С. Ли въ пространствѣ четырехъ измѣреній, независящее отъ переменной z ,

$$p_1 + H(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = 0. \quad (7)$$

Такъ какъ данное уравненіе представлено въ видѣ, разрѣшенномъ относительно переменной p_1 , т. е. заключаетъ каноническія переменныя второго класса, то, согласно съ предыдущимъ (см. $n^{\circ}5$, глава II), разсматриваемое уравненіе (7) не имѣетъ полнаго интеграла С. Ли третьяго класса. Чтобы имѣть полныя интегралы С. Ли второго класса, разсматриваемое уравненіе, на основаніи только что доказаннаго предложенія, должно быть линейнымъ относительно переменныхъ величинъ p_1, p_2, p_3 .

Остается, наконецъ, изслѣдовать третій возможный случай, когда существуетъ полный интегралъ С. Ли перваго класса даннаго уравненія (7).

Составляемъ соотвѣтствующее ему линейное уравненіе

$$(p_1 + H, F) = 0.$$

Чтобы существовалъ искомый интегралъ уравненія (7), послѣднее линейное уравненіе должно имѣть два интеграла F_1 и F_2 такихъ, чтобы совокупность уравненій (7)-ого и двухъ слѣдующихъ

$$F_1(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_1,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, p_2, p_3) = C_2,$$

опредѣляла полный интеграль С. Ли перваго класса даннаго производнаго уравненія (7), гдѣ C_1 и C_2 —двѣ произвольныя постоянныя. Для этого должны существовать слѣдующія равенства

$$(p_1 + H, F_1) = 0, \quad (8)$$

$$(p_1 + H, F_2) = 0, \quad (F_1, F_2) = 0, \quad (9)$$

и кромѣ того функція F_2 должна быть связана съ функціей F_1 зависимостью

$$F_2 = \Phi(x_1, x_2, x_3, F_1).$$

Оба уравненія (9) преобразовываемъ слѣдующимъ образомъ. Предполагая

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \geq 0,$$

принимая F_1 за новую переменную вмѣсто p_2 . Такъ какъ, въ силу предыдущей зависимости между F_2 и F_1 , функція F_2 выражается въ новыхъ переменныхъ только черезъ величины x_1, x_2, x_3 и F_1 , то формулы преобразованія уравненій (9) къ новымъ переменнымъ становятся

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_i},$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

$$s = 2, 3.$$

Поэтому преобразованныя уравненія (9), въ силу уравненія (8), принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^3 X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^3 Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

при чемъ коэффициенты X_s, Y_s представляютъ функціи переменныхъ x_1, x_2, x_3, F_1 и p_3 , которыя получаются соответственно изъ выражений производныхъ

$$\frac{\partial H}{\partial p_s}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_s},$$

замѣной въ нихъ значенія прежней переменнй p_2 черезъ новую переменнй F_1 .

Такъ какъ искомое значеніе функціи Φ не зависитъ отъ переменнй p_3 , то очевидно функція Φ должна удовлетворять также слѣдующимъ уравненіямъ, которыя получаются изъ уравненій (10) дифференцированіемъ ихъ по переменнй p_3 ,

$$\sum_{s=2}^3 \frac{\partial X_s}{\partial p_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^3 \frac{\partial Y_s}{\partial p_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Въ виду того, что система (10) допускаетъ всего одинъ только интеграль, отличный отъ F_1 , то послѣднія два уравненія должны представлять слѣдствія уравненій (10). Поэтому имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial p_3} &= \frac{\partial X_3}{\partial p_3}, & \frac{\partial Y_2}{\partial p_3} &= \frac{\partial Y_3}{\partial p_3}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Послѣднее изъ этихъ двухъ равенствъ (11) даетъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial p_3} \lg \frac{Y_2}{Y_3} = 0,$$

интегрированіе котораго показываетъ, что отношеніе $\frac{Y_2}{Y_3}$ представляетъ произвольную функцію переменныхъ величинъ x_1, x_2, x_3 и F_1 , независящую отъ переменнй p_3 . Такимъ образомъ получается зависимость

$$Y_2 = \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) Y_3, \quad (12)$$

гдѣ φ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ. Поэтому, на основаніи послѣдняго равенства (12), первое уравненіе (11) приводится къ слѣдующему виду

$$Y_3 \left(\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} \right) = 0.$$

Если предположить, что первый множитель послѣдняго равенства обращается въ нуль, тогда, въ силу уравненія (12), получаемъ

$$Y_2 = 0, Y_3 = 0.$$

Послѣднія равенства приводятъ къ заключенію, что функція F_1 , внутри нашей области измѣненія переменныхъ, не зависитъ отъ переменныхъ p_2 и p_3 , что противно введенному выше условію $\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \not\equiv 0$.

Отбрасывая поэтому сдѣланное предположеніе, приравниваемъ нулю второй множитель рассматриваемаго равенства и получаемъ слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial X_2}{\partial p_3} - \varphi \frac{\partial X_3}{\partial p_3} = 0,$$

которое приводится къ виду

$$\frac{\partial}{\partial p_3} (X_2 - \varphi X_3) = 0.$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, заключаемъ, что выраженіе въ скобкахъ представляетъ произвольную функцію переменныхъ x_1, x_2, x_3 и F_1 , т. е.

$$X_2 - \varphi X_3 = \psi (x_1, x_2, x_3, F_1), \quad (13)$$

при чемъ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ.

Въ силу неравенства $Y_3 \not\equiv 0$, разрешая уравненія (10) относительно производныхъ $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ и принимая во вниманіе равенства (12)—(13), приводимъ уравненія (10) къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi (x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi (x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Такъ какъ послѣдняя система уравненій должна быть нормальной, то отсюда слѣдуетъ, что функція ψ и φ удовлетворяютъ условію

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (15)$$

Возвращаясь въ уравненіяхъ (12) и (13) къ прежнимъ переменнымъ, т. е. совершая обратную замѣну переменной F_1 черезъ p_2 , мы должны разсматривать въ послѣднихъ уравненіяхъ величину F_1 какъ функцію переменныхъ x_1, x_2, x_3, p_2, p_3 ; подставляя, наконецъ, значенія выраженій X_s, Y_s , мы получаемъ систему слѣдующихъ двухъ уравненій, опредѣляющихъ функціи H и F_1 :

$$\frac{\partial H}{\partial p_2} - \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial H}{\partial p_3} = \psi(x_1, x_2, x_3, F_1),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} - \varphi(x_1, x_2, x_3, F_1) \frac{\partial F_1}{\partial p_3} = 0.$$

Послѣднія уравненія принадлежатъ къ якобіевскому виду, представляющему частный случай дифференціальныхъ уравненій, теорія которыхъ изложена въ третьей главѣ настоящаго изслѣдованія. Соответствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, къ интегрированію которой приводятся предыдущія уравненія, становится

$$dp_2 = \frac{dp_3}{-\varphi} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0}.$$

Система трехъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_1 = C_1, \quad H - \psi p_2 = C_2,$$

$$p_3 + \varphi p_2 = C_3$$

гдѣ C_1, C_2 и C_3 обозначаютъ три произвольныя постоянныя величины. Поэтому искомыя значенія функцій H и F_1 опредѣляются уравненіями

$$H = \psi p_2 + \Pi(x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2),$$

$$F_1 = \Pi_1(x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2), \quad (16)$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ, при чемъ выраженіе H зависитъ отъ значенія функцій F_1 , черезъ посредство функцій ψ и φ .

Кромѣ того обѣ функціи H и F_1 удовлетворяютъ уравненію (8). Послѣднее мы можемъ разсматривать какъ уравненіе, служащее для опредѣленія произвольной функціи Π_1 .

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему выводу:

Производное уравнение (7), для которого существует полный интеграл С. Ли первого класса, имеет слѣдующій видъ

$$p_1 + \psi p_2 + \Pi (x_1, x_2, x_3, p_3 + \varphi p_2) = 0,$$

при чемъ функции ψ , φ связаны уравненіемъ (15), а функция F_1 определяется уравненіями (8)-ымъ и (16)-ымъ. Искомый полный интегралъ определяется функцией F_1 и интеграломъ системы (14).

Возьмемъ слѣдующій примѣръ. Предположимъ, что функции ψ и φ не зависятъ отъ функций F_1 и имѣютъ слѣдующія значенія, удовлетворяющія условію (15)-ому,

$$\psi = 0, \quad \varphi = 1.$$

Если дать функции Π значеніе $x_2 (p_2 + p_3)^2$, то соответствующее производное уравненіе С. Ли становится

$$p_1 + x_2 (p_2 + p_3)^2 = 0. \quad (17)$$

Соответствующее равенство (8) даетъ, для опредѣленія функции Π_1 , представляющей значеніе функции F_1 , слѣдующее уравненіе

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} + 2x_2 u \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} + 2x_2 u \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} - u^2 \frac{\partial \Pi_1}{\partial u} = 0,$$

гдѣ переменная величина u имѣетъ значеніе

$$u = p_2 + p_3.$$

Поэтому общій видъ функции F_1 выражается слѣдующей формулой

$$F_1 = \Pi_1 \left[x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3}, x_2 (p_2 + p_3)^2, x_3 - x_2 \right],$$

при чемъ Π_1 представляетъ произвольную функцию входящихъ въ нее аргументовъ. Наконецъ, уравненія (14) опредѣляютъ слѣдующимъ образомъ функцию Φ

$$\Phi = \Pi_2 (x_3 - x_2, F_1),$$

гдѣ Π_2 —также произвольная функция входящихъ въ нее аргументовъ.

Приравнявъ двумъ различнымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ функции F_1 и Φ , мы получаемъ, совместно съ даннымъ уравненіемъ (17), систему, опредѣляющую искомый полный интегралъ С. Ли. Однако для этого достаточно ограничиться разсмотрѣніемъ какихъ-либо

двухъ различныхъ частныхъ значеній произвольныхъ функций Π_1 и Π_2 . Такъ, на примѣръ, послѣднiя два уравненiя замѣнимъ слѣдующими двумя равенствами

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2,$$

гдѣ C_1 и C_2 двѣ различныя произвольныя постоянныя величины. Послѣднiя два уравненiя, совмѣстно съ даннымъ (17)-ымъ, приводятся къ виду

$$x_3 = x_2 + C_2,$$

$$p_1 = -\frac{x_2}{(x_1 - C_1)^2}, \quad p_2 = \frac{1}{x_1 - C_1} - p_3.$$

Поэтому послѣднее четвертое уравненiе искомага интегральнаго собранiя опредѣляется интегрированiемъ точнаго дифференциала

$$dz = -\frac{x_2 dx_1}{(x_1 - C_1)^2} + \frac{dx_2}{x_1 - C_1},$$

которое приводитъ къ искомому уравненiю

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3,$$

гдѣ C_3 обозначаетъ новую произвольную постоянную величину. Такимъ образомъ совокупность послѣдняго уравненiя, совмѣстно съ тремя предыдущими, представляетъ искомое полное интегральное собранiе S . Ли перваго класса даннаго производнаго уравненiя (17).

3. Пусть имѣемъ производное уравненiе S . Ли въ пространствѣ пяти измѣренiй

$$p_1 + H(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2, p_3, p_4) = 0. \quad (18)$$

Такъ какъ послѣднее уравненiе заключаетъ каноническiя переменныя втораго класса, то, слѣдовательно, не допускаетъ полнаго интеграла S . Ли четвертаго класса.

Для того, чтобы имѣть полные интегралы третьяго класса, разсматриваемое уравненiе (18), какъ хорошо извѣстно, должно быть линейнымъ относительно каноническихъ переменныхъ втораго класса.

Такимъ образомъ остается изслѣдовать только два случая, когда для даннаго уравненiя (18) существуютъ полные интегралы S . Ли втораго и перваго классовъ.

Искомый интеграль второго класса опредляется очевидно тремя функциями

$$F_1, F_2, F_3,$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$\left. \begin{aligned} (p_1 + H, F_i) &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \\ (F_j, F_r) &= 0, \\ r &= 2, 3, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

при чемъ функции F_2 и F_3 находятся въ инволюціи и связаны слѣдующимъ образомъ съ F_1

$$F_{k+1} \equiv \Phi_k(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \\ k = 1, 2.$$

Изъ послѣднихъ значеній функций Φ_1 и Φ_2 становится очевиднымъ, что условіе инволюціи обоихъ функций F_2 и F_3 удовлетворяется тождественно.

Пусть имѣемъ неравенство

$$\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \geq 0. \quad (20)$$

Принимая въ такомъ случаѣ F_1 за новую переменную величину вмѣсто p_2 , выводимъ изъ равенства (19) слѣдующую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной неизвѣстной функции Φ , для опредѣленія обѣихъ функций Φ_1 и Φ_2 ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^4 X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^4 Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Коэффициенты послѣднихъ уравненій X_s, Y_s имѣютъ слѣдующія значенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s} \right), \quad Y_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s} \right),$$

при чемъ скобками обозначается результатъ указанной замѣны переменн-
ной p_2 черезъ F_1 .

Искомые интегралы Φ_1 и Φ_2 системы (21) не должны зависѣть
отъ переменныхъ p_3 и p_4 . Поэтому должны существовать слѣдующія
равенства, которыя получаются дифференцированиемъ уравненій (21) по
переменнымъ p_3 и p_4 ,

$$\sum_{s=2}^4 \frac{\partial X_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^4 \frac{\partial Y_s}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$k=3, 4.$

Легко видѣть, что послѣднія равенства не могутъ представлять новыхъ
уравненій, которыя служили-бы, совмѣстно съ системой (21), для опре-
дѣленія искомымъ функций. Поэтому только-что полученные четыре ра-
венства должны представлять слѣдствія уравненій (21), и, слѣдовательно,
должны имѣть мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = \frac{\partial X_3}{\partial p_k} = \frac{\partial X_4}{\partial p_k}, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_3}{\partial p_k} = \frac{\partial Y_4}{\partial p_k}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$k=3, 4.$

Равенства послѣдней строки даютъ слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \lg \frac{Y_3}{Y_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_k} \lg \frac{Y_4}{Y_2} = 0,$$

$k=3, 4.$

Интегрируя систему послѣднихъ четырехъ уравненій, находимъ

$$\left. \begin{aligned} Y_3 &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1) Y_2, \\ Y_4 &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1) Y_2, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ произвольныя функции входящихъ въ нихъ
переменныхъ величинъ.

Принимая во вниманіе, что, внутри разсматриваемой области из-
мѣненія нашихъ переменныхъ, существуетъ неравенство $Y_2 \geq 0$, полу-

чаемъ изъ первой строки равенствъ (22), на основаніи (23), слѣдующія уравненія

$$\frac{\partial X_3}{\partial p_k} - \varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = 0, \quad \frac{\partial X_4}{\partial p_k} - \varphi_2 \frac{\partial X_2}{\partial p_k} = 0,$$

$k=3, 4,$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_k} (X_3 - \varphi_1 X_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k} (X_4 - \varphi_2 X_2) = 0,$$

$k=3, 4.$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій приводитъ къ слѣдующимъ зависимостямъ

$$\left. \begin{aligned} X_3 - \varphi_1 X_2 &= \psi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \\ X_4 - \varphi_2 X_2 &= \psi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

при чемъ ψ_1 и ψ_2 представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ.

На основаніи полученныхъ равенствъ (23) и (24), система уравненій (21) приводится къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Такъ какъ написанныя уравненія должны представлять нормальную систему, то мы получаемъ слѣдующія уравненія, для опредѣленія функцій $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2,$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_4}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \varphi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} + \varphi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_4}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Если возвратиться къ первоначальной системѣ переменныхъ, т. е. замѣнить переменную F_1 ея значеніемъ въ прежней переменной p_2 , то уравненія (23) и (24) даютъ слѣдующую систему, служащую для опредѣленія функцій H и $F_1,$

$$\frac{\partial H}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi_1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_3} - \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_2} = \psi_2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_4} - \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} = 0.$$

Полученныя уравненія представляютъ систему, принадлежащую къ типу рассмотрѣнныхъ нами въ предыдущей главѣ. Соответствующія имъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ имѣютъ слѣдующій видъ

$$dp_2 = -\varphi_1 dp_3 - \varphi_2 dp_4,$$

$$dH = \psi_1 dp_3 + \psi_2 dp_4,$$

$$dF_1 = 0.$$

Общій интегралъ послѣдней системы представляется равенствами

$$F_1 = C_1,$$

$$H - \psi_1 p_3 - \psi_2 p_4 = C_2,$$

$$p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4 = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 обозначаютъ три различныя произвольныя постоянныя величины. Поэтому, внутри разсматриваемой области измѣненія переменныхъ, функція H и F_1 опредѣляются слѣдующими уравненіями

$$H = \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4), \quad (27)$$

гдѣ Π и Π_1 обозначаютъ произвольныя функція входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Для того, чтобы выполнить всѣ требованія нашей задачи, функція Π_1 должна удовлетворять первому уравненію (19), а функція $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ системѣ уравненій (26).

Поэтому мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ C . Ли второго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \psi_1 p_3 + \psi_2 p_4 + \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 + \varphi_1 p_3 + \varphi_2 p_4) = 0,$$

идь Π —произвольная функция, а остальные функции $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ и F_1 определяются указанным выше образом, при помощи первого уравнения (19) и уравнений (26)—(27). Искомый полный интеграл определяется функцией F_1 и двумя различными интегралами системы уравнений (25).

Разсмотрим, наконец, условия существования полного интеграла С. Ли первого класса данного уравнения (18). Этот интеграл определяется тремя функциями

$$F_1, F_2, F_3,$$

удовлетворяющими следующим условиям

$$\left. \begin{aligned} (p_1 + H, F_i) &= 0, \\ i &= 1, 2, 3, \\ (F_1, F_2) &= 0, \\ (F_k, F_3) &= 0, \\ k &= 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

при чем функция F_3 связана следующим образом с F_1 и F_2

$$F_3 \equiv \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2).$$

Пусть имеем неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2}{p_2, p_3}\right) \geq 0. \quad (29)$$

Принимая F_1 и F_2 за новые независимые переменные вместо p_2 и p_3 , выводим из равенств (28) следующую систему линейных дифференциальных уравнений, для определения функции Φ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^4 X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^4 Y_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^4 Z_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

гдѣ введены обозначенія

$$X_s = \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \quad Y_s = \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_s}\right), \quad Z_s = \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ произведенной замѣны переменныхъ.

Такъ какъ функція Φ не зависитъ отъ переменной p_4 , то существуютъ еще слѣдующія равенства

$$\sum_{s=2}^4 \frac{\partial X_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0, \quad \sum_{s=2}^4 \frac{\partial Y_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0,$$

$$\sum_{s=2}^4 \frac{\partial Z_s}{\partial p_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = 0.$$

Послѣднія равенства не должны давать новыхъ уравненій, отличныхъ отъ (30)-ыхъ, и представляютъ, стало-быть, слѣдствіе послѣднихъ уравненій. Поэтому получаютъ слѣдующія равенства, опредѣляющія функціи X_s , Y_s , Z_s ,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial p_4} & \frac{\partial X_3}{\partial p_4} & \frac{\partial X_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Y_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z_2}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_3}{\partial p_4} & \frac{\partial Z_4}{\partial p_4} \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Всѣ опредѣлители первыхъ частей написанныхъ равенствъ отличаются другъ отъ друга только элементами первой строки. Поэтому соответствующіе послѣднимъ опредѣлители-миноры имѣютъ одни и тѣ же значенія, которыя назовемъ соответственно черезъ

$A, B, C,$

вводя слѣдующія обозначенія

$$A = Y_3 Z_4 - Y_4 Z_3,$$

$$B = Y_4 Z_2 - Y_2 Z_4,$$

$$C = Y_2 Z_3 - Y_3 Z_2.$$

Въ силу послѣднихъ обозначеній, предыдущія три равенства представляются соотвѣтственно въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} A \frac{\partial X_2}{\partial p_4} + B \frac{\partial X_3}{\partial p_4} + C \frac{\partial X_4}{\partial p_4} &= 0, \\ A \frac{\partial Y_2}{\partial p_4} + B \frac{\partial Y_3}{\partial p_4} + C \frac{\partial Y_4}{\partial p_4} &= 0, \\ A \frac{\partial Z_2}{\partial p_4} + B \frac{\partial Z_3}{\partial p_4} + C \frac{\partial Z_4}{\partial p_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

На основаніи свойствъ определителей, мы имѣемъ два тождества

$$\left. \begin{aligned} AY_2 + BY_3 + CY_4 &= 0, \\ AZ_2 + BZ_3 + CZ_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Дифференцируя послѣднія по переменнѣй p_4 , получаемъ новыя тождества, на основаніи которыхъ послѣднія два уравненія (31) преобразовываются въ слѣдующія

$$\begin{aligned} Y_2 \frac{\partial A}{\partial p_4} + Y_3 \frac{\partial B}{\partial p_4} + Y_4 \frac{\partial C}{\partial p_4} &= 0, \\ Z_2 \frac{\partial A}{\partial p_4} + Z_3 \frac{\partial B}{\partial p_4} + Z_4 \frac{\partial C}{\partial p_4} &= 0. \end{aligned}$$

Въ силу введенныхъ выше обозначеній A, B, C , черезъ величины всѣхъ Y_s и Z_s , легко вывести слѣдующія два уравненія изъ двухъ предыдущихъ

$$\frac{\frac{\partial A}{\partial p_4}}{A} = \frac{\frac{\partial B}{\partial p_4}}{B} = \frac{\frac{\partial C}{\partial p_4}}{C}.$$

Эти два уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial}{\partial p_4} \lg \frac{A}{C} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_4} \lg \frac{B}{C} = 0.$$

Интегрируя написанныя уравненія, находимъ

$$\left. \begin{aligned} A &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2) \cdot C, \\ B &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2) \cdot C, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

гдѣ φ_1 и φ_2 обозначаютъ двѣ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ.

Такъ какъ, въ силу неравенства (29), определитель C отличенъ отъ нуля, то, на основаніи полученныхъ равенствъ (33), первое уравненіе (31) становится

$$\varphi_1 \frac{\partial X_2}{\partial p_4} + \varphi_2 \frac{\partial X_3}{\partial p_4} + \frac{\partial X_4}{\partial p_4} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_4} (\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4) = 0.$$

Интеграль послѣдняго уравненія представляетъ новое равенство

$$\varphi_1 X_2 + \varphi_2 X_3 + X_4 = \psi (x_1, x_2, x_3, x_4, F_1, F_2), \quad (34)$$

гдѣ ψ обозначаетъ произвольную функцію входящихъ въ нее переменныхъ величинъ.

Наконецъ, на основаніи уравненій (33) и условія $C \geq 0$, равенства (32) даютъ слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} Y_4 + \varphi_1 Y_2 + \varphi_2 Y_3 &= 0, \\ Z_4 + \varphi_1 Z_2 + \varphi_2 Z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Исключая выраженія X_4 , Y_4 , Z_4 , опредѣляемые уравненіями (34) и (35), изъ системы (30), преобразовываемъ ее къ новому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) X_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) X_3 = 0,$$

$$Y_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + Y_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0,$$

$$Z_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) + Z_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \right) = 0.$$

Въ силу неравенства нулю определителя C , выраженія, въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ, коэффициентами при которыхъ служатъ Y_2 и Z_2 , Y_3 и Z_3 , тождественно равны нулю, и мы получаемъ такимъ образомъ систему уравненій, для опредѣленія искомой функціи Φ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Такъ какъ послѣднія уравненія должны представлять нормальную систему, то функціи ψ , φ_1 и φ_2 должны удовлетворять тремъ условіямъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_4} + \frac{\partial \psi}{\partial x_{k+1}} + \varphi_k \frac{\partial \psi}{\partial x_4} &= 0, \\ &k=1, 2, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Наконецъ, для опредѣленія значеній функцій H , F_1 и F_2 , обращаемся къ уравненіямъ (34) и (35). Возвращаясь къ первоначальной системѣ переменныхъ p_2 и p_3 и внося значенія всѣхъ X_s , Y_s и Z_s , получаемъ изъ послѣднихъ уравненій слѣдующую систему яacobиевскаго вида, разсмотрѣннаго въ предыдущей главѣ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial H}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial H}{\partial p_3} &= \psi, \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_1}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_1}{\partial p_3} &= 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_4} + \varphi_1 \frac{\partial F_2}{\partial p_2} + \varphi_2 \frac{\partial F_2}{\partial p_3} &= 0. \end{aligned}$$

Соотвѣтствующая система обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій становится

$$dp_4 = \frac{dp_2}{\varphi_1} = \frac{dp_3}{\varphi_2} = \frac{dH}{\psi} = \frac{dF_1}{0} = \frac{dF_2}{0}.$$

Интегралы послѣдней системы представляются въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{aligned} F_1 &= C_1, \quad F_2 = C_2, \quad H - \psi p_4 = C_3, \\ p_2 - \varphi_1 p_4 &= C_4, \quad p_3 - \varphi_2 p_4 = C_5, \end{aligned}$$

гдѣ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 обозначаютъ пять произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Поэтому искомыя функціи H, F_1 и F_2 выражаются слѣдующимъ образомъ

$$H = \psi p_4 + \Pi (x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_1 = \Pi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4),$$

$$F_2 = \Pi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4),$$

гдѣ Π, Π_1 и Π_2 обозначаютъ три произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Кромѣ того, чтобы выполнять всѣ требованія разсматриваемой задачи, функціи Π_1 и Π_2 должны удовлетворять первому, второму и четвертому уравненіямъ системы (28), а функціи $\psi, \varphi_1, \varphi_2$ уравненіямъ (37)

Итакъ, производное уравненіе (18), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли первого класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \psi p_4 + \Pi (x_1, x_2, x_3, x_4, p_2 - \varphi_1 p_4, p_3 - \varphi_2 p_4) = 0,$$

гдѣ Π —произвольная функція, а остальные функціи определяются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ определяется обѣими функціями F_1, F_2 и интеграломъ системы линейныхъ уравненій (36).

4. Приведенныя выше вычисленія легко распространяются на производныя уравненія С. Ли въ пространствѣ сколькихъ угодно измѣреній и позволяютъ составить общій видъ уравненій, допускающихъ полные интегралы того или другого класса.

Пусть имѣемъ, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, производное уравненіе С. Ли

$$p_1 + H (x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (38)$$

Полный интегралъ С. Ли q -аго класса послѣдняго уравненія определяется $n-1$ функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-1},$$

удовлетворяющими слѣдующимъ условіямъ

$$(p_1 + H_1, F_k) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

и связанными между собой зависимостями слѣдующаго вида

$$F_{n-q+i-1} \equiv \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, q.$$

Предположимъ, что существуетъ неравенство

$$D\left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots, p_{n-q}}\right) \geq 0. \quad (39)$$

Принимая величины $F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}$ за новыя независимыя переменныя вмѣсто p_2, p_3, \dots, p_{n-q} , составляемъ слѣдующую систему линейныхъ уравненій, для опредѣленія всѣхъ функций Φ_i ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^n Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sigma &= 1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_s \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s}\right),$$

при чемъ скобки показываютъ результатъ выполненной замѣны переменныхъ.

Такъ какъ функции Φ_i не зависятъ отъ переменныхъ величинъ

$$p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n,$$

то дифференцируя предыдущія равенства по послѣднимъ переменнымъ, находимъ

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=2}^n \frac{\partial X_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=2}^n \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sigma &= 1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до q .

Последнія равенства не должны давать новых уравнений, для определения функции Φ . Поэтому каждое из этих равенств должно являться следствием последних $n - q - 1$ уравнений (40).

Начнем съ преобразования послѣднихъ уравнений. Назовемъ черезъ Δ слѣдующій определитель

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{13} & \dots & Y_{1, n-q} \\ Y_{22} & Y_{23} & \dots & Y_{2, n-q} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ Y_{n-q-1, 2} & Y_{n-q-1, 3} & \dots & Y_{n-q-1, n-q} \end{vmatrix}$$

и черезъ Δ_{rk} обозначимъ определитель, который получается изъ послѣдняго замѣной его элементовъ r -аго столбца соответственно слѣдующими величинами

$$Y_{1, n-q+k}, Y_{2, n-q+k}, \dots, Y_{n-q-1, n-q+k}.$$

Благодаря введеннымъ обозначеніямъ, послѣднія $n - q - 1$ уравненій (40), принимая во вниманіе неравенство (39), или $\Delta \geq 0$, преобразовываются къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} = - \sum_{k=1}^q \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}},$$

$r = 1, 2, \dots, n - q - 1.$

Такъ какъ равенства (41) должны представлять слѣдствія послѣднихъ уравнений, то мы получаемъ слѣдующія равенства, которымъ удовлетворяютъ функции X_s и $Y_{\sigma s}$,

$$\left. \begin{aligned} \Delta \frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} &= 0, \\ \Delta \frac{\partial Y_{\sigma, n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} \frac{\partial Y_{\sigma, r+1}}{\partial p_{n-q+i}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$k = 1, 2, \dots, q, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n - q - 1,$
 $i = 1, 2, \dots, q.$

Въ силу свойствъ определителей, существуютъ тождества

$$\Delta Y_{\sigma, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \Delta_{rk} Y_{\sigma, r+1} = 0, \quad (43)$$

для всѣхъ значеній σ , отъ 1 до $n-q-1$, и значеній k , отъ 1 до q .

Дифференцируя послѣднія тождества по переменнымъ

$$p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n,$$

получаемъ рядъ новыхъ тождествъ, на основаніи которыхъ уравненія второй строки системы (42) преобразовываются въ слѣдующія

$$\left. \begin{aligned} Y_{\sigma, n-q+k} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} Y_{\sigma, r+1} \frac{\partial \Delta_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = 0, \\ \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

при чемъ k принимаетъ значенія, отъ 1 до q , и i , отъ 1 до $n-q-1$.

Система $n-q-1$ уравненій (44) линейна относительно $n-q-1$ величинъ

$$\frac{\partial \Delta_{1k}}{\partial p_{n-q+i}}, \frac{\partial \Delta_{2k}}{\partial p_{n-q+i}}, \dots, \frac{\partial \Delta_{n-q-i, k}}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Опредѣлитель, составленный изъ коэффициентовъ при послѣднихъ величинахъ въ разсматриваемыхъ уравненіяхъ равенъ Δ и, стало-быть, отличенъ отъ нуля. Поэтому уравненія (44) даютъ

$$\frac{\partial \Delta_{rk}}{\partial p_{n-q+i}} = \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{n-q+i}}, \quad r = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

при чемъ k принимаетъ всѣ значенія, отъ 1 до q , и i , отъ 1 до $n-q-1$. Изъ послѣднихъ уравненій выводятся слѣдующія

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+i}} \lg \frac{\Delta_{rk}}{\Delta} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

для всѣхъ значеній r , отъ 1 до $n-q-1$, и k , отъ 1 до q .

Интегрируя послѣднія уравненія, находимъ

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{rk} = \varphi_{rk} (x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q+1}) \Delta, \\ r = 1, 2, \dots, n-q, \quad k = 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

гдѣ φ_{rk} представляютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Поэтому уравненія первой строки системы (42) становятся

$$\frac{\partial X_{n-q+k}}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial X_{r+1}}{\partial p_{n-q+i}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial p_{n-q+k}} \left(X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1} \right) = 0,$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, q.$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ

$$X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1} = \psi_k (x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \quad (46)$$

$k=1, 2, \dots, q,$

при чемъ ψ_k обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ переменныхъ величинъ.

Наконецъ, равенства (43), на основаніи полученныхъ выше уравненій (45), даютъ новыя зависимости

$$Y_{\sigma, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma, r+1} = 0, \quad (47)$$

$\sigma=1, 2, \dots, n-q-1, \quad k=1, 2, \dots, q.$

На основаніи полученныхъ уравненій (46) и (47), система уравненій (40) приводится къ такому виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^q \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{r=1}^{n-q-1} X_{r+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} \right) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{n-q-1} Y_{\sigma, r+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} \right) = 0,$$

$\sigma=1, 2, \dots, n-q-1.$

Такъ какъ определитель Δ отличенъ отъ нуля, то очевидно, что эта система $n-q$ уравненій преобразовывается въ слѣдующую

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^q \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^b \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$r=1, 2, \dots, n-q-1.$

Вслѣдствіе нормальности послѣдней системы, функции ψ_k, φ_{rk} удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \left(\psi_k \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}} - \varphi_{rk} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-q+k}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{\sigma i}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{\sigma+1}} + \sum_{k=1}^q \left(\varphi_{rk} \frac{\partial \varphi_{\sigma i}}{\partial x_{n-q+k}} - \varphi_{\sigma k} \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_{n-q+k}} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$i=1, 2, \dots, q,$

при чемъ r и σ принимаютъ всѣ возможныя, одновременно различныя значенія, отъ 1 до $n-q-1$.

Подставляя далѣе значенія всѣхъ функций X_s и $Y_{\sigma,s}$ въ уравненія (46) и (47) и возвращаясь къ первоначальной системѣ переменныхъ, мы получаемъ, для опредѣленія функций $H, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}$, слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій, принадлежащихъ къ типу уравненій, изслѣдованныхъ въ предыдущей третьей главѣ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} &= \psi_k, \\ \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_{r+1}} &= 0, \end{aligned}$$

$k=1, 2, \dots, q, \quad \sigma=1, 2, \dots, n-q-1.$

Соотвѣтствующія линейныя уравненія съ частными производными одной функции f имѣютъ видъ

$$\frac{\partial f}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial f}{\partial p_{r+1}} + \psi_k \frac{\partial f}{\partial H} = 0,$$

$k=1, 2, \dots, q,$

и образуютъ очевидно якобіевскую систему, такъ какъ эти уравненія не зависятъ отъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial F_\sigma}$, а коэффициенты уравненій не заключаютъ переменныхъ, по которымъ взяты частныя производныя функціи f . Поэтому изслѣдуемая задача интегрированія приводится къ системѣ уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$dp_{r+1} = - \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} dp_{n-q+k},$$

$$dH = \sum_{k=1}^q \psi_k dp_{n-q+k},$$

$$r=1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$dF_\sigma = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1.$$

Полная система интеграловъ послѣднихъ уравненій выражается слѣдующимъ образомъ

$$F_\sigma = C_\sigma, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$H - \sum_{k=1}^q \psi_k p_{n-q+k} = C_{n-q},$$

$$p_{r+1} + \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} p_{n-q+k} = C_{n-q+r},$$

$$r=1, 2, \dots, n-q-1.$$

Слѣдовательно, искомыя функціи имѣютъ значенія

$$H = \sum_{k=1}^q \psi_k p_{n-q+k} + \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}),$$

$$F_\sigma = \Pi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k}, p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots,$$

$$\dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

гдѣ $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-q-1}$ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Чтобы удовлетворить требованіямъ задачи функціи Π_σ должны выполнять всѣ указанныя выше условія инволюціи, а всѣ функціи φ и ψ должны опредѣляться системой (49)-ой.

Такимъ образомъ получается слѣдующій результатъ:

Производное уравненіе (38), для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q -аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{k=1}^q \psi_k p_{n-q+k} + \Pi(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}) = 0,$$

гдѣ Π представляетъ произвольную функцію входящихъ въ нее аргументовъ, а остальные функціи опредѣляются указанными выше уравненіями. Искомый полный интегралъ выражается при помощи функцій $F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}$ и q различныхъ интеграловъ системы уравненій (48).

5. Пусть имѣемъ, наконецъ, систему производныхъ уравненій въ инволюціи

$$\left. \begin{aligned} p_k + H_k(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \\ k=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Полный интегралъ С. Ли q -аго класса, при условіи, что $q < n - m$ (см. стр. 62), опредѣляется $n - m$ функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots, F_{n-m},$$

удовлетворяющими уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} (p_k + H_k, F_s) = 0, \\ k=1, 2, \dots, m, \quad s=1, \dots, n-m, \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-m-q+i} \equiv \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}),$$

$$i=1, 2, \dots, q.$$

Предполагая слѣдующій функциональный определитель отличнымъ отъ нуля

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}}{p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{n-q}} \right),$$

принимая величины $F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}$ за новыя независимыя переменныя вмѣсто $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{n-q}$. Въ такомъ случаѣ система уравненій, для опредѣленія функций Φ_i , становится

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{s=m+1}^n X_{ks} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ k=1, 2, \dots, m, \\ \sum_{s=m+1}^n Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sigma=1, 2, \dots, n-m-q, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$X_{ks} \equiv \left(\frac{\partial H_k}{\partial p_s} \right), \quad Y_{\sigma s} \equiv \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \right),$$

при чемъ скобки имѣютъ прежнее значеніе. При помощи разсужденій, аналогичныхъ предыдущимъ, составляются равенства

$$\begin{aligned} \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial X_{ks}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ \sum_{s=m+1}^n \frac{\partial Y_{\sigma s}}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} &= 0, \\ i=1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

которые должны быть слѣдствіями послѣднихъ $n-m-q$ уравненій системы (52).

Не вдаваясь въ подробности вычисленій, которые весьма немногимъ отличаются отъ вычисленій предыдущаго n^0-a , мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Система производных уравнений въ инволюции (50), для которой существует полный интеграл S . Ли q -го класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_k + \sum_{i=1}^q \psi_{ki} p_{n-q+i} + \Pi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1} + \sum_{i=1}^q \varphi_{1i} p_{n-q+i},$$

$$p_{m+2} + \sum_{i=1}^q \varphi_{2i} p_{n-q+i}, \dots, p_{n-q} + \sum_{i=1}^q \varphi_{n-m-q, i} p_{n-q+i}) = 0,$$

$$k=1, 2, \dots, m,$$

гдѣ $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ обозначаютъ произвольныя функции входящихъ въ нихъ аргументовъ, а все $\psi_{ki}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i}, \dots, \varphi_{n-m-q, i}$ представляютъ функции переменныхъ величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}$$

и удовлетворяютъ уравненіямъ, которыя вытекаютъ изъ условій нормальности слѣдующей яковіевской системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \psi_{ki} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+i}} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{m+r}} + \sum_{i=1}^q \varphi_{ri} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+i}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$k=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n-m-q.$$

Функции $F_1, F_2, \dots, F_{n-m-q}$ представляются въ видѣ

$$F_\sigma = \Pi'_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1} + \sum_{i=1}^q \varphi_{1i} p_{n-q+i},$$

$$p_{m+2} + \sum_{i=1}^q \varphi_{2i} p_{n-q+i}, \dots, p_{n-q} + \sum_{i=1}^q \varphi_{n-m-q, i} p_{n-q+i}),$$

$$\sigma=1, 2, \dots, n-m-q,$$

гдѣ Π'_σ обозначаютъ произвольныя функции входящихъ въ нихъ аргументовъ и кромѣ того должны удовлетворять уравненіямъ (51) и условію инволюціи всѣхъ функций F_σ . Искомый полный интегралъ опредѣляется совокупностью послѣднихъ $n-m-q$ функций и q различными интегралами системы уравненій (53).

6. До сихъ поръ мы разсматривали только уравненія, которыя не заключаютъ переменнѣй z . Пусть имѣемъ, наконецъ, уравненіе, зависящее отъ z ,

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (54)$$

Полный интеграль С. Ли q -аго класса послѣдняго уравненія опредѣляется n функціями въ инволюціи

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

удовлетворяющими условіямъ (см. $n^0 4$, второй главы)

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} - H \frac{\partial F_s}{\partial z} + [H, F_s] = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n,$$

и связанными между собой слѣдующими зависимостями

$$F_{n-q+i} \equiv \Phi_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}), \\ i = 0, 1, 2, \dots, q.$$

Предполагая существованіе неравенства

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}}{p_2, p_3, \dots, p_{n-q}} \right) \geq 0, \quad (55)$$

составляемъ, какъ и въ прежнихъ случаяхъ, слѣдующую систему уравненій, которымъ удовлетворяютъ всѣ функціи Φ_{i+1} ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^n X_s \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + X \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ \sum_{s=2}^n Y_{\sigma s} \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + Y_{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \\ \sigma = 1, 2, \dots, n-q-1,$$

гдѣ коэффициенты $X_s, Y_{\sigma s}$ имѣютъ прежнія значенія и

$$X = \left(\sum_{s=2}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} p_s - H \right), \\ Y_{\sigma} = \left(\sum_{s=2}^n \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} p_s \right).$$

Легко вывести, при помощи вычисленій, аналогичныхъ предыдущимъ, слѣдующія зависимости

$$\left. \begin{aligned} X_{n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} X_{r+1} &= \psi_k, \\ X - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_r X_{r+1} &= \psi, \\ Y_{\sigma, n-q+k} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} Y_{\sigma, r+1} &= 0, \\ Y_{\sigma} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_r Y_{\sigma, r+1} &= 0, \\ k=1, 2, \dots, q, \quad \sigma=1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

гдѣ обозначенія φ_{rk} , φ_r , ψ_k , ψ представляютъ произвольныя функции величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, F_1, F_2, \dots, F_{n-q-1}.$$

Наконецъ, уравненія, опредѣляющія искомыя интегралы Φ_{i+1} , становятся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^q \psi_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_{r+1}} + \sum_{k=1}^q \varphi_{rk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-q+k}} + \varphi_r \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0, \\ r=1, 2, \dots, n-q-1, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

и должны представлять якобьевскую систему.

Возвращаясь къ первоначальной системѣ переменныхъ, получаемъ изъ равенствъ (56), послѣ нѣкоторыхъ приведеній, слѣдующую систему уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} &= \psi_k, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} (p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^q \varphi_{ri} p_{n-q+i}) \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} + \\ &+ \sum_{i=1}^q \psi_i p_{n-q+i} = H + \psi, \\ \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-q+k}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \varphi_{rk} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{r+1}} &= 0, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} (p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^q \varphi_{ri} p_{n-q+i}) \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{r+1}} &= 0, \\ k=1, 2, \dots, q, \quad \sigma=1, 2, \dots, n-q-1. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Равенства послѣдней строки, а затѣмъ и второй преобразовываются, въ силу условія (55), въ слѣдующія уравненія

$$p_{r+1} - \varphi_r + \sum_{i=1}^q \varphi_{ri} p_{n-q+i} = 0,$$

$$r=1, 2, \dots, n-q-1,$$

$$H = \sum_{i=1}^q \psi_i p_{n-q+i} - \psi.$$

Какъ легко видѣть, уравненія первой строки системы (58) удовлетворяются на основаніи послѣдняго значенія функціи H . Наконецъ, уравненія третьей строки системы (58) даютъ, при помощи интегрированія,

$$F_\sigma = \Pi_\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2 + \sum_{k=1}^q \varphi_{1k} p_{n-q+k},$$

$$p_3 + \sum_{k=1}^q \varphi_{2k} p_{n-q+k}, \dots, p_{n-q} + \sum_{k=1}^q \varphi_{n-q-1, k} p_{n-q+k}),$$

$$\sigma=1, 2, \dots, n-q-1,$$

при чемъ Π_σ обозначаютъ произвольныя функціи входящихъ въ нихъ аргументовъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію:

Производное уравненіе С. Ли (54), заключающее переменную z , для котораго существуетъ полный интегралъ С. Ли q -аго класса, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$p_1 + \sum_{i=1}^q \psi_i p_{n-q+i} = \psi,$$

при чемъ всѣ входящія функціи опредѣляются указанными выше условіями и формулами. Искомый полный интегралъ выражается при помощи $n-q-1$ послѣднихъ написанныхъ функцій F_σ и $q+1$ различныхъ интеграловъ яковіевской системы уравненій (57).

Полученное уравненіе отличается отъ прежнихъ результатовъ своей правой частью ψ , которая представляетъ произвольную функцію, зависящую отъ каноническихъ переменныхъ второго класса только черезъ посредство функцій F_σ . Это послѣднее обстоятельство находится въ тѣсной зависимости отъ того, что, во-первыхъ, рассматриваемое нами уравненіе включаетъ переменную величину z и, во-вторыхъ, рассматриваемое интегральное собраніе представляется, въ послѣднемъ случаѣ, совокупностью $n+1$ уравненій, зависящихъ также отъ переменной z .

Мы не станем останавливаться на дальнѣйшемъ изслѣдованіи уравненій, допускающихъ полные интегралы С. Ли того или другого класса. Хотя полученные результаты представляютъ искомыя уравненія, при помощи опредѣленій, выраженныхъ въ весьма общей формѣ, тѣмъ не менѣе найденныя формулы достаточно разясняютъ нашу основную идею, что полные интегралы С. Ли существуютъ только для производныхъ уравненій весьма частнаго вида. Дѣйствительно, какъ легко видѣть, всѣ полученныя нами уравненія принадлежатъ къ типу такъ называемыхъ *уравненій раздѣляющихъ переменныя* ¹⁾. Такимъ образомъ теорія С. Ли не представляетъ, для насъ, обобщенія классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, но рассматриваетъ только нѣсколько новыхъ задачъ, представляющихъ аналогію съ задачами интегрированія частныхъ дифференціальныхъ уравненій. Поэтому мы будемъ въ нашемъ дальнѣйшемъ изложеніи лишь по столько касаться изслѣдованій С. Ли, по сколько рассматриваемые имъ вопросы послужили къ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

¹⁾ Ср. *Imschenetsky*. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p. 75.

Goursat. E. — Leçons sur l'intégration des équations.... p. 152.

Г Л А В А V.

Касательныя преобразованія.

1. Поверхностный элемент называется еще иначе *касательнымъ элементомъ*. Какъ говорятъ *касательный элементъ* принадлежитъ поверхности, кривой или точкѣ, если онъ опредѣляется точкой послѣдняго геометрическаго мѣста и касательной къ нему плоскостью, проведенной въ послѣдней точкѣ.

Мы говоримъ, что два *геометрическія мѣста* имѣютъ общій касательный элементъ, если, проходя черезъ одну и ту же точку, оба геометрическія мѣста имѣютъ въ ней общую касательную плоскость.

Аналогичнымъ образомъ два геометрическія собранія поверхностныхъ элементовъ называются *касательными*, если они имѣютъ общій поверхностный элементъ.

Всякое преобразование, при помощи котораго какія-либо два касательныхъ собранія преобразовываются также въ касательныя собранія, называется *касательнымъ* (или *тангенціальнымъ*) преобразованиемъ.

Послѣднія понятія распространяются на преобразованія въ пространствахъ сколькихъ угодно измѣреній.

Пусть въ пространствѣ n измѣреній переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

обозначаютъ координаты поверхностнаго элемента какого-либо геометрическаго собранія. Обозначимъ новыя переменныя, въ которыхъ представляется послѣднее преобразованное собраніе, черезъ

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n.$$

Въ виду того, что разсматриваемые нами поверхностные элементы образуютъ собраніе, то опредѣляющія ихъ, аналитически, переменныя удовлетворяютъ равенству

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = 0. \quad (1)$$

Такъ какъ преобразованная къ новымъ переменнымъ система поверхностныхъ элементовъ также должна представлять геометрическое собраніе, то новыя переменныя должны необходимо удовлетворять условію

$$dz' - \sum_{s=1}^n p'_s dx'_s = 0. \quad (2)$$

Чтобы перейти отъ выраженія разсмотрѣннаго геометрическаго собранія въ прежнихъ переменныхъ къ его представленію въ новыхъ переменныхъ, т. е. чтобы совершить аналитическое преобразование, необходимо имѣть выраженія переменныхъ одной системы черезъ другую. Предположимъ, на примѣръ, что новыя переменныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ первоначальныя переменныя

$$\left. \begin{aligned} x'_s &= X_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ z' &= Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ p'_s &= P_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$s = 1, 2, \dots, n.$

Такъ какъ прежнія переменныя должны въ свою очередь выражаться черезъ новыя переменныя, то послѣднія уравненія (3) разрѣшимъ относительно всѣхъ переменныхъ x, z, p и дадутъ ихъ значенія въ переменныхъ x'_s, z, p'_s .

Если обѣ системы разсматриваемыхъ переменныхъ удовлетворяютъ зависимостямъ (1) и (2), то уравненія (3) должны для этого обладать опредѣленными свойствами, которыя легко вывести.

Равенства (3) условимся называть *формулами* или *уравненіями преобразованія* и подраздѣлять ихъ на различныя классы, въ зависимости отъ числа уравненій, которыя даетъ система (3) между одними переменными

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z'. \quad (4)$$

Такъ, если результатъ исключенія переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n изъ $n+1$ первыхъ уравненій (3) приводитъ къ $m+1$ зависимостямъ между предыдущими переменными, то опредѣляемое формулами (3) касательное преобразованіе мы будемъ называть *m-аго класса*.

Наименьшимъ возможнымъ классомъ касательныхъ преобразованій является очевидно нулевой, такъ какъ изъ системы $n+1$ уравненій всегда возможно исключить n переменныхъ и получить всегда одну зависимость между переменными величинами (4).

Наконецъ, касательное преобразование n -аго класса заключаетъ $n + 1$ различныхъ зависимостей между переменными (4), которыя выражаютъ прежнія переменныя черезъ новыя, и такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ такъ называемымъ точечнымъ преобразованиемъ переменныхъ.

Введеніе въ анализъ понятій о касательныхъ преобразованіяхъ принадлежитъ Эйлеру. Затѣмъ Лежандръ и Якоби пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ нѣкоторыми касательными преобразованіями частнаго вида, когда за новыя независимыя переменныя принимаются прежнія частныя производныя. Наконецъ, общая теорія разсматриваемыхъ преобразованій была создана трудами С. Ли ¹⁾.

Существуетъ нѣсколько способовъ изложенія основныхъ предложеній ученія о касательныхъ преобразованіяхъ ²⁾. До сихъ поръ обыкновенно считалось наиболѣе простымъ изложеніе разсматриваемой теоріи С. Ли, которое было дано А. Майеромъ. Намъ представляется однако, что соображенія, лежащія въ основаніи изложенія С. Ли, позволяютъ гораздо проще представить изслѣдуемую теорію, чѣмъ это было сдѣлано А. Майеромъ. Легко убѣдиться въ этомъ изъ послѣдующихъ строкъ, гдѣ мы будемъ исходить изъ изученныхъ выше свойствъ уравненій, представляющихъ собранія поверхностныхъ элементовъ.

Пусть формулы (3) представляютъ касательное преобразование, на основаніи котораго лѣвыя части уравненій (1) и (2) взаимно преобразовываются другъ въ друга, такъ что существуетъ слѣдующая зависимость

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sigma \left(dz' - \sum_{s=1}^n p'_s dx'_s \right), \quad (5)$$

гдѣ σ представляетъ функцію переменныхъ величинъ $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z, p'_1, p'_2, \dots, p'_n$.

Написанное равенство является основнымъ въ разсматриваемой теоріи и послужитъ для изученія свойствъ формулъ преобразования (3).

Исходя изъ послѣдняго равенства (5), легко представить формулы (3) въ слѣдующемъ видѣ. Для симметричности вычисленій обозначимъ черезъ

¹⁾ *S. Lie*.—Begründung einer Invarianten—Theorie der Berührungs—Transformationen (Mathematische Annalen, Bd. 8, S. 215).

S. Lie u. *F. Engel*.—Theorie der Transformationsgruppen. Abschnitt II, S. 114.

²⁾ *A. Mayer*.—Directe Begründung der Theorie der Berührungs--Transformationen (Mathematische Annalen. Bd. 8, S. 304).

G. Darboux.—Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre, p.p. 80, 250.

G. Darboux. Sur le problème de Pfaff (Bulletin des Sciences Mathématiques. t. VI, 2-e série).

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_{2n}, \xi_{2n+1}$$

соотвѣтственно наши переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n,$$

и затѣмъ введемъ обозначенія

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots, \eta_{2n}, \eta_{2n+1},$$

соотвѣтственно вмѣсто слѣдующихъ величинъ

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \sigma, -\sigma p'_1, \dots, -\sigma p'_{n-1}, -\sigma p'_n.$$

Благодаря послѣднимъ обозначеніямъ, равенство (5) становится

$$dz - \sum_{s=1}^{2n+1} \eta_s d\xi_s = 0 \quad (6)$$

и опредѣляетъ собраніе поверхностныхъ элементовъ въ пространствѣ $2n + 2$ измѣреній.

Общій видъ собраній поверхностныхъ элементовъ m -аго класса выражается здѣсь слѣдующими уравненіями (ср. стр. 17—18)

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^m \varphi_i \eta_{2n-m+i+1} - H, \\ \xi_{2n-m+i+1} &= \frac{\partial H}{\partial \eta_{2n-m+i+1}}, \quad \eta_k = -\frac{\partial H}{\partial \xi_k}, \\ & i=1, 2, \dots, m, \quad k=1, \dots, 2n-m+1, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H \equiv \sum_{i=1}^m \varphi_i \eta_{2n-m+i+1} - \varphi,$$

причемъ φ_i и φ обозначаютъ функціи всѣхъ переменныхъ

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n+1}.$$

Въ частномъ случаѣ рѣшеніе нулевого класса разсматриваемаго уравненія (6), или (5)-аго, при сохраненіи первоначальнаго обозначенія переменныхъ, представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

$$p_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \quad \sigma p'_s = - \frac{\partial \varphi}{\partial x'_s},$$

$s = 1, 2, \dots, n,$

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial z'}.$$

Въ силу послѣдняго значенія σ , n предыдущія равенства становятся

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} p'_s = 0.$$

Если первое изъ написанныхъ нами уравненій разсматриваемаго рѣшенія представить въ слѣдующемъ общемъ видѣ, неразрѣшенномъ относительно переменнй z ,

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, z, x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z') = 0,$$

то разсматриваемое рѣшеніе нулевого класса представляется совокупностью послѣдняго написаннаго уравненія и слѣдующихъ равенствъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_s = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x'_s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} p'_s = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n,$

$$\sigma = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z'}}{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Такимъ образомъ формулы касательнаго преобразованія нулевого класса вполне опредѣляются при помощи одной только функции Φ , опредѣляемой уравненіемъ, которое называется *основной формулой* преобразованія.

2. Такъ какъ равенства (3) представляютъ формулы преобразованія, при помощи которыхъ уравненіе (1) преобразовывается во (2)-е, то формулы (3), совмѣстно съ однимъ новымъ уравненіемъ, опредѣляющимъ соответствующее значеніе множителя σ , утождествляютъ равенство (5), представляя его рѣшенія и, стало-быть, должны заключаться въ формулахъ вида (7). Какъ и раньше въ предыдущемъ n^0 , относимъ къ первому классу каноническихъ переменныхъ всѣ величины

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, x'_2, \dots, x'_n,$$

и ко второму классу соотвѣтственно переменныя

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \sigma, q_1, q_2, \dots, q_n,$$

вводя слѣдующія обозначенія

$$q_s = -\sigma p'_s, \quad \left. \begin{array}{l} s=1, 2, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Поэтому равенство (5) принимаетъ видъ

$$dz = \sum_{s=1}^n p_s dx_s + \sigma dz' + \sum_{s=1}^n q_s dx'_s. \quad (9)$$

Присоединяя къ уравненіямъ (3) еще одно новое уравненіе опредѣляющее значеніе множителя σ въ прежнихъ переменныхъ x_s, z, p_s , получаемъ, на основаніи равенствъ (8), слѣдующую систему уравненій, представляющую рѣшеніе уравненія (9),

$$\left. \begin{array}{l} X_s - x'_s = 0, \quad Z - z' = 0, \\ P_s + \frac{q_s}{\sigma} = 0, \\ s=1, 2, \dots, n, \\ R - \sigma = 0, \end{array} \right\} \quad (10)$$

гдѣ прежнія выраженія X_s, Z, P_s и функція R представлены всѣ въ прежнихъ переменныхъ.

Какъ доказано выше, въ $n^0 2$ второй главы, уравненія, опредѣляющія собраніе поверхностныхъ элементовъ, образуютъ замкнутую систему. Поэтому скобки Вейлера, составленныя изъ первыхъ частей уравненій (10), должны уничтожаться. Составляя послѣднія скобки, мы будемъ обозначать прямыми скобками [...] только скобки Вейлера, распространяемыя на прежнія переменныя; что же касается остальныхъ членовъ разсматриваемыхъ скобокъ, которые распространяются на новыя переменныя, то мы будемъ вычислять ихъ непосредственно.

Такъ какъ уравненія первой строки системы (10) зависятъ отъ z' и новыхъ переменныхъ только одного класса, то легко видѣть, что должны существовать слѣдующія тождества

$$[X_i, X_k] \equiv 0, [X_i, Z] \equiv 0, \quad (11)$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k , отъ 1 до n .

Для составленія остальныхъ скобокъ, замѣчаемъ, что существуютъ слѣдующія символическія равенства

$$\frac{d}{dx'_s} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_s} + \frac{\partial}{\partial z} q_s, \quad \frac{d}{dz'} \equiv \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma.$$

Поэтому, приравнивая нулю скобки Вейлера, составленныя изъ лѣвыхъ частей уравненій системы (10), получаемъ равенства

$$[X_i, P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (X_i - x'_i) + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z, P_k] - \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} (Z - z') + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i, P_k] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} P_k - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_k -$$

$$- \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_k} P_i + \frac{q_k}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} P_i = 0,$$

$$[X_i, R] + \frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) = 0,$$

$$[Z, R] + \frac{d}{dz'} (Z - z') = 0,$$

$$[P_i, R] + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dx'_i} (R - \sigma) - \frac{q_i}{\sigma^2} \frac{d}{dz'} (R - \sigma) +$$

$$+ \frac{d}{dz'} P_i = 0.$$

Какъ легко видѣть имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{d}{dx'_s} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} q_s - \begin{cases} 1, & s = i, \\ 0, & s \neq i, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dz'} (X_i - x'_i) \equiv \frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx'_s}(Z - z') \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} q_s,$$

$$\frac{d}{dz'}(Z - z') \equiv \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma - 1,$$

$$\frac{d}{dx'_s} P_k \equiv \frac{\partial P_k}{\partial z} q_s, \quad \frac{d}{dz'} P_k \equiv \frac{\partial P_k}{\partial z} \sigma,$$

$$\frac{d}{dx'_s}(R - \sigma) \equiv \frac{\partial R}{\partial z} q_s,$$

$$\frac{d}{dz'}(R - \sigma) \equiv \frac{\partial R}{\partial z} \sigma.$$

На основаніи послѣднихъ тождествъ и въ силу зависимостей (8), предыдущія равенства приводятся къ слѣдующему виду

$$\left. \begin{aligned} [X_i, P_k] &\equiv \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ -\frac{1}{\sigma}, & i = k. \end{cases} \\ [Z, P_k] &\equiv -\frac{P_k}{\sigma}, \\ [P_i, P_k] &\equiv 0, \\ [X_i, R] &\equiv -\frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma, \\ [Z, R] &\equiv 1 - \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma, \\ [P_i, R] &\equiv \frac{\partial P_i}{\partial z} \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

для всѣхъ различныхъ значений указателей i и k , отъ 1 до n .

Полученныя равенства (11) и (12) представляютъ основныя тождества, характеризующія собой касательное преобразование (3).

Легко видѣть, что тождества (11) и (12) представляютъ не только необходимыя но вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточныя условія для того, чтобы формулы (3) опредѣляли касательное преобразование. Въ самомъ дѣлѣ,

данныя тождества (11) и (12) показываютъ, что уравненія (10) образуютъ замѣнутую систему. Стало-быть, на основаніи уравненій (10), удовлетворяется равенство (9), или (5) (см. стр. 42—44), которое и представляетъ аналитическое опредѣленіе касательныхъ преобразованій.

Отмѣтимъ особенно одинъ частный случай касательныхъ преобразованій, когда соотвѣтствующія формулы преобразования (3) таковы, что всѣ функции X_s и P_s не зависятъ отъ переменннй величины z , которая входитъ только въ выраженіе функции Z въ слѣдующей формѣ

$$Z \equiv Az + F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

такъ что $n + 1$ -ое уравненіе системы (3) становится

$$z' - Az = F.$$

Такимъ образомъ переменныя z' и z входятъ всего въ одно изъ уравненій формулъ преобразования и только въ одной совмѣстной комбинаціи

$$z' - Az.$$

Поэтому соотвѣтствующее настоящему случаю первое уравненіе системы (7), которое разрѣшено относительно переменннй z , становится

$$z - \frac{1}{A} z' = \varphi,$$

гдѣ функция φ не зависитъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса. Такъ какъ остальные уравненія разсматриваемаго собранія не заключаютъ переменныхъ z и z' , то, чтобы равенство (5) уничтожалось на основаніи послѣднихъ уравненій, необходимо должно существовать слѣдующее равенство

$$\sigma = \frac{1}{A},$$

т. е. при преобразованіи разсматриваемаго частного случая, множитель σ долженъ представлять постоянную величину. Не нарушая общности разсужденій, возможно положить A равнымъ единицѣ, такъ какъ для этого стоитъ только, вмѣсто z' , принять величину $\frac{1}{A} z'$ за новую переменную.

Въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ формулы (11) остаются безъ измѣненія.

Что касается равенствъ первыхъ трехъ строкъ системы (12), то они, въ разсматриваемомъ предположеніи, принимаютъ слѣдующій видъ

$$(X_i, P_k) \equiv \begin{cases} 0, & i \geq k, \\ -1, & i = k, \end{cases}$$

$$[Z, P_k] \equiv -P_k,$$

$$(P_i, P_k) \equiv 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній указателей i и k , отъ 1 до n .

Наконецъ, остальные равенства системы (12) въ настоящемъ случаѣ уничтожаются тождественно.

3. Приведенныя выше формулы (7) показываютъ, что уравненія касательнаго преобразованія m -аго класса опредѣляются вполнѣ, при помощи $m+1$ зависимостей между переменными z, z' и каноническими переменными первого класса какъ первоначальной такъ и новой системы переменныхъ величинъ.

На слѣдующихъ строкахъ мы разсмотримъ, слѣдуя С. Ли, задачу составленія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, исходя изъ нѣсколькихъ ихъ данныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ $n+1$ различныхъ функцій въ инволюціи

$$X_1, X_2, \dots, X_n, Z, \tag{13}$$

зависящихъ отъ переменныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$. Въ такомъ случаѣ имѣютъ мѣсто тождества

$$[X_i, X_k] = 0, \quad [X_i, Z] = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній показателей i и k , отъ 1 до n .

Легко показать, что, при помощи элементарныхъ операцій, всегда возможно найти n функцій прежнихъ переменныхъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$

$$P_1, P_2, \dots, P_n,$$

удовлетворяющихъ равенству (5), т. е. выполняющихъ всѣ условія (12).

Подставляя въ равенство (5) значенія, получаемыя изъ первыхъ $n+1$ данныхъ уравненій (3),

$$dz' = \sum_{r=1}^n \frac{\partial Z}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial Z}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^n \frac{\partial Z}{\partial p_r} dp_r,$$

$$dx'_s = \sum_{r=1}^n \frac{\partial X_s}{\partial x_r} dx_r + \frac{\partial X_s}{\partial z} dz + \sum_{r=1}^n \frac{\partial X_s}{\partial p_r} dp_r,$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

получаемъ слѣдующій результатъ

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} - \frac{1}{\sigma} \right) dz + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} + \frac{p_r}{\sigma} \right) dx_r + \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} \right) dp_r = 0.$$

Предполагая, что переменныя величины $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$ не связаны между собой никакими зависимостями, мы приходимъ къ заключенію, что коэффициенты при ихъ дифференціалахъ въ послѣднемъ тождествѣ должны уничтожаться. Такимъ образомъ получается слѣдующій рядъ новыхъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial z} &= \frac{1}{\sigma}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial x_r} &= -\frac{p_r}{\sigma}, \\ \frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

Исключивъ множитель σ изъ первыхъ $n+1$ равенствъ, получаемъ n слѣдующихъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{dX_s}{dx_r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$r = 1, 2, \dots, n.$$

Легко показать, что въ системѣ $2n$ уравненій, образованныхъ сейчасъ полученными n равенствами (15) и n послѣдними равенствами (14), существуютъ только n различныхъ между собой уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ n слѣдующихъ тождествъ

$$[Z, X_k] - \sum_{s=1}^n P_s [X_s, X_k] = 0, \\ k=1, 2, \dots, n.$$

Послѣ раскрытія скобокъ Вейлера и приведенія, написанныя тождества приводятся къ виду

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^n \left[\frac{dX_k}{dx_r} \left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{\partial X_s}{\partial p_r} \right) - \right. \\ \left. \frac{\partial X_k}{\partial p_r} \left(\frac{dZ}{dx_r} - \sum_{s=1}^n P_s \frac{dX_s}{dx_r} \right) \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16) \\ k=1, 2, \dots, n.$$

Легко видѣть, что, вслѣдствіе условій инволюціи функцій (13), по меньшей мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей n -аго порядка слѣдующей матрицы долженъ быть отличнымъ отъ нуля ¹⁾

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{dX_1}{dx_1} & \frac{dX_1}{dx_2} & \dots & \frac{dX_1}{dx_n} & \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} & \dots & \frac{dX_2}{dx_n} & \frac{\partial X_2}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} & \frac{\partial X_n}{\partial p_1} & \frac{\partial X_n}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{array} \right|$$

Поэтому равенства (16) представляютъ n различныхъ уравненій относительно выраженій, представляющихъ лѣвыя части уравненій системы, состоящей изъ послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15). Слѣдовательно, изъ послѣдней системы уравненій только n различны между собой, остальные же n уравненій уничтожаются, на основаніи предыдущихъ, въ силу зависимостей (16).

Кромѣ того, вслѣдствіе неравенства нулю по меньшей мѣрѣ одного изъ упомянутыхъ опредѣлителей матрицы, становится очевиднымъ, что

¹⁾ См. E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p.p. 274, 246.

соотвѣтствующія ему n различныхъ уравненій, разсматриваемой совокупности послѣднихъ n уравненій (14) и уравненій (15), разрѣшимы относительно величинъ

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

и даютъ ихъ значенія, которыя, совмѣстно съ данными функціями (13), опредѣляютъ касательное преобразование.

Такимъ образомъ, по даннымъ $n + 1$ функціямъ въ инволюціи, при помощи элементарныхъ операцій дифференцированія и алгебраическаго рѣшенія линейныхъ уравненій, опредѣляются новыя n функцій, которыя, совмѣстно съ данными функціями, удовлетворяютъ зависимостямъ, выраженнымъ равенствами (11) и (12).

Какъ эти послѣднія зависимости такъ и только что разрѣшенная задача разысканія упомянутыхъ функцій представляютъ полную аналогию со свойствами канонической системы интеграловъ каноническихъ дифференціальныхъ уравненій и съ задачей разысканія общаго интеграла послѣдней системы по половинному числу ея интеграловъ въ инволюціи. Къ этимъ послѣднимъ вопросамъ намъ придется возвратиться на послѣдующихъ страницахъ нашего изслѣдованія.

Возьмемъ, на примѣръ, слѣдующія уравненія

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = p_2, \quad x_3' = x_3,$$

$$z' = z - (x_1 + x_2)p_2.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ

$$X_1 \equiv x_1, \quad X_2 \equiv p_2, \quad X_3 \equiv x_3,$$

$$Z \equiv z - (x_1 + x_2)p_2,$$

при чемъ соотвѣтствующія условія (11) удовлетворяются тождественно. Въ настоящемъ случаѣ n послѣднихъ уравненій (14) и уравненія (15) образуютъ систему шести уравненій, изъ которыхъ три уничтожаются тождественно, а остальные три даютъ слѣдующія равенства

$$x_1 + x_2 + P_2 = 0,$$

$$p_2 - p_1 + P_1 = 0,$$

$$p_3 - P_3 = 0.$$

Поэтому три остальные искомыя уравненія разсматриваемаго касательнаго преобразованія становятся

$$p'_1 = p_1 - p_2, \quad p'_2 = x_1 - x_2, \quad p'_3 = p_3.$$

4. Пусть имѣемъ m различныхъ функцій, выраженныхъ въ прежней системѣ переменныхъ,

$$F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (17)$$

$r = 1, 2, \dots, m.$

Назовемъ соотвѣтственно черезъ

$$F'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n),$$

$r = 1, 2, \dots, m,$

значенія, которыя принимаютъ функціи (17) въ новыхъ переменныхъ. Такимъ образомъ, на основаніи формулъ касательнаго преобразованія (3), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\begin{aligned} & F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = \\ & = F'_r(X_1, X_2, \dots, X_n, Z, P_1, P_2, \dots, P_n). \end{aligned}$$

Поэтому, составляя скобки Вейлера для какой-либо пары функцій F'_s и F'_σ , получаемъ, на основаніи извѣстныхъ формулъ ¹⁾, слѣдующее равенство

$$\begin{aligned} [F'_s, F'_\sigma] &= \sum_i \sum_k D\left(\frac{F'_s, F'_\sigma}{x'_i, x'_k}\right)[X_i, X_k] + \sum_i D\left(\frac{F'_s, F'_\sigma}{x'_i, z'}\right)[X_i, Z] \\ &+ \sum_i \sum_k D\left(\frac{F'_s, F'_\sigma}{x'_i, p'_k}\right)[X_i, P_k] + \sum_k D\left(\frac{F'_s, F'_\sigma}{z', p'_k}\right)[Z, P_k] + \\ &+ \sum_i \sum_k D\left(\frac{F'_s, F'_\sigma}{p'_i, p'_k}\right)[P_i, P_k], \end{aligned}$$

гдѣ суммирование распространяется на всѣ различныя значенія s и σ , отъ 1 до n .

Въ силу свойствъ касательныхъ преобразованій, выраженныхъ условіями (11) и (12), послѣднее равенство становится

¹⁾ См. мое сочиненіе „Объ интегрированіи уравненій съ частными производными“ ..., стр. 40.

E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 276.

$$[F_s, F_\sigma] = \frac{1}{\sigma} [F'_s, F'_\sigma] \quad (18)$$

и показываетъ, что скобки Вейлера, составленныя для каждой пары данныхъ функцій (17), обладаютъ свойствами *инвариантности* по отношенію къ касательнымъ преобразованіямъ.

Полученное равенство приводитъ къ весьма важному заключенію, что *замкнутая система производныхъ уравненій С. Ли преобразовывается, при помощи касательныхъ преобразованій, тоже въ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли; такимъ же образомъ нормальная система преобразовывается тоже въ нормальную систему.*

Возьмемъ слѣдующую замкнутую систему линейныхъ уравненій съ частными производными одной функціи f по независимымъ переменнымъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$

$$\left. \begin{aligned} [F_r, f] = 0, \\ r = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

гдѣ всѣ функціи F_r находятся между собой въ инволюціи. Преобразовываемъ послѣднюю систему къ новымъ переменнымъ $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n$, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3). Назовемъ соответственно черезъ F'_r и f' значенія функцій F_r и f въ новыхъ переменныхъ. На основаніи предыдущаго, легко видѣть, что система уравненій (19) преобразовывается въ слѣдующую систему уравненій, видъ которой аналогиченъ предыдущему,

$$\left. \begin{aligned} [F'_r, f'] = 0, \\ r = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Наконецъ, въ силу равенства (18)-аго, становится очевиднымъ, что *каждый интегралъ системы линейныхъ уравненій (19), будучи преобразованъ, при помощи формулъ касательнаго преобразованія (3), становится, въ новыхъ переменныхъ x'_s, z', p'_s , интеграломъ системы уравненій (20).* Поэтому, *система нѣсколькихъ интеграловъ въ инволюціи уравненій (19) представляетъ, въ указанныхъ новыхъ переменныхъ, тоже систему интеграловъ въ инволюціи преобразованныхъ уравненій (20).*

Предыдущія разсужденія приводятъ, наконецъ, къ слѣдующему заключенію:

Пусть имѣемъ замкнутую систему производныхъ уравненій С. Ли

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

которую преобразовываемъ къ новымъ переменнымъ, по формуламъ касательныхъ преобразований (3). Въ такомъ случаѣ очевидно, что каждое полное интегральное собраніе данныхъ уравненій (21) преобразовывается, при помощи тѣхъ же формулъ касательнаго преобразованія, въ полное интегральное собраніе преобразованной системы производныхъ уравненій.

При этомъ однако слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что классъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли вообще измѣняется, при замѣнѣ переменныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразований. Въ самомъ дѣлѣ, классъ преобразованнаго интегральнаго собранія зависитъ не только отъ класса первоначальнаго собранія, но также и отъ класса рассматриваемаго касательнаго преобразованія.

Пусть имѣемъ, на примѣръ, уравненіе

$$p_1 + x_2(p_2 + p_3)^2 = 0. \quad (22)$$

Преобразовываемъ его по слѣдующимъ формуламъ касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = p_3, \quad z' = z - x_3 p_3,$$

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = x_3.$$

Рассматриваемое уравненіе становится

$$p'_1 + x'_2(p'_2 - x'_3)^2 = 0 \quad (23)$$

и имѣетъ слѣдующій полный интегралъ Лагранжа

$$z' = \frac{x'_2}{x'_1 - C_1} + x'_3(x'_2 + C_3) + C_3,$$

или полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса, составленное изъ уравненія (23) и трехъ слѣдующихъ

$$x'_1 - \frac{1}{p'_2 - x'_3} = C_1, \quad p'_3 - x'_2 = C_2, \quad z' - x'_2(p'_2 - x'_3) - x'_3 p'_3 = C_3.$$

Возвращаясь къ прежнимъ переменнымъ, приводимъ послѣднюю систему къ совокупности уравненій (22) и слѣдующихъ

$$x_1 - \frac{1}{p_2 + p_3} = C_1, \quad x_3 - x_2 = C_2, \quad z - x_2(p_2 + p_3) = C_3.$$

Послѣднія равенства опредѣляютъ слѣдующій полный интеграль С. Ли первого класса

$$z = \frac{x_2}{x_1 - C_1} + C_3, \quad x_3 = x_2 + C_2.$$

Для второго примѣра возьмемъ слѣдующее уравненіе

$$p_1 + \frac{(z - 2x_2 p_2) p_2}{x_1 p_3} + \frac{z - (x_2 + x_3) p_2}{x_1} = 0. \quad (24)$$

Послѣднее уравненіе, при помощи формулъ касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = p_2, \quad x'_3 = x_3, \quad z' = z - x_2 p_2, \quad p'_1 = p_1, \quad p'_2 = -x_2, \quad p'_3 = p_3,$$

приводится къ слѣдующему виду

$$p' + \frac{(z' + x'_2 p'_2) x'_2}{x'_1 p'_3} + \frac{z' - x'_2 x'_3}{x'_1} = 0. \quad (25)$$

Полное интегральное собраніе нулевого класса послѣдняго уравненія представляется совокупностью уравненія (25) и трехъ слѣдующихъ

$$-x'_1 p'_3 = C_1, \quad x'_1 \left(1 + \frac{p'_3}{p_2}\right) = C_2, \quad (x'_2 p'_2 + x'_3 p'_3 - z') \frac{p'_2}{p_3} = C_3, \quad (26)$$

которыя опредѣляютъ слѣдующій полный интеграль Лагранжа уравненія (24)

$$z' = \frac{C_1 x'_2}{x'_1 - C_2} - \frac{C_1 x_3 + C_2 C_3}{x_1} + C_3.$$

Обратная замѣна переменныхъ преобразовываетъ уравненіе (25) въ (24) и найденное полное интегральное собраніе нулевого класса въ собраніе первого класса уравненія (24), представляемое совокупностью этого послѣдняго уравненія и трехъ слѣдующихъ,

$$-x_1 p_3 = C_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_3}{x_2}\right) = C_2, \quad (z - x_3 p_3) \frac{x_2}{p_3} = C_3,$$

которыя опредѣляютъ полный интеграль С. Ли первого класса даннаго уравненія (24)

$$z = -\frac{C_1 x_3 + C_2 C_3}{x_1} + C_3, \quad x_2 = \frac{C_1}{C_2 - x_1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, слѣдующую систему уравненій

$$p_1 + \frac{(z - x_4 p_4)^6}{p_3^2} = 0, \quad p_2 + \frac{x_4 p_4}{2x_2} = 0. \quad (27)$$

Формулы касательнаго преобразованія

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = -p_4, \quad z' = z - x_4 p_4,$$

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = p_3, \quad p'_4 = x_4,$$

приводятъ уравненія (27) къ слѣдующему виду

$$p'_1 + \frac{z'^6}{p_3'^2} = 0, \quad p'_2 - \frac{x'_4}{2x'_2} p'_4 = 0. \quad (28)$$

Эти послѣднія уравненія имѣютъ полный интегралъ С. Ли перваго класса

$$z' = \frac{1}{C_3 - C_2 x'_3 - \frac{1}{C_2^2} x'_1}, \quad x'_4 = \frac{C_1}{\sqrt{x'_2}}.$$

Соотвѣтствующее полное интегральное собраніе представляется совокупностью уравненій (28) и слѣдующихъ

$$x'_4 \sqrt{x'_2} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{p'_1}} = C_2, \quad \frac{1}{z'} + \frac{x'_1 p'_1}{z'^2} + \frac{z' x'_3}{\sqrt{p'_1}} = C_3.$$

Совершая обратную замѣну переменныхъ получаемъ данныя уравненія (27) и слѣдующія

$$-p_4 \sqrt{x_2} = C_1, \quad \frac{z - x_4 p_4}{\sqrt{p_1}} = C_2, \quad \frac{1}{z - x_4 p_4} + \frac{x_1 p_1}{(z - x_4 p_4)^2} + \frac{(z - x_4 p_4) x_3}{\sqrt{p_1}} = C_3,$$

представляющія полное интегральное собраніе С. Ли нулевого класса данныхъ уравненій (27). Результатъ исключенія, изъ послѣднихъ трехъ уравненій, величинъ p_1 и p_4 приводитъ къ полному интегралу Лагранжа системы (27)

$$z = -\frac{C_1 x_4}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{C_3 - \frac{x_1}{C_2^2} - C_2 x_3}.$$

Въ приведенныхъ примѣрахъ мы совершали касательныя преобразования, чтобы указать, какъ видоизмѣняется классъ полныхъ интегральныхъ собраній, при преобразованіи переменныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій.

Само собою разумѣется, что приходится возвращаться къ разсмотрѣнному случаю преобразованія интегрального собранія всякій разъ, когда мы преобразовываемъ полный интеграль Лагранжа какого-либо уравненія съ частными производными перваго порядка. Дѣйствительно, пусть имѣемъ дифференціальное уравненіе съ частными производными

$$F'(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n) = 0$$

и его полный интеграль Лагранжа

$$z' = V(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Чтобы получить отсюда полный интеграль уравненія, въ которое преобразовывается данное уравненіе замѣной входящихъ въ него переменныхъ черезъ $x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$, при помощи формулъ (3), мы преобразовываемъ къ новымъ переменнымъ не только данный интеграль изслѣдуемаго уравненія, нои его первыя производныя уравненія по переменнымъ x'_1, x'_2, \dots, x'_n . Такимъ образомъ задача приводится къ преобразованію полного интегрального собранія С. Ли нулевого класса. Поэтому классъ того собранія, которое получается въ результатѣ преобразованія переменныхъ, зависитъ отъ класса разсматриваемаго касательнаго преобразованія и вообще отличенъ отъ нулевого. Слѣдовательно, исходя изъ полного интеграла Лагранжа даннаго уравненія, мы не имѣемъ вообще возможности, при помощи касательныхъ преобразованій, найти полный интеграль Лагранжа преобразованнаго уравненія.

Съ другой стороны, какъ мы видимъ, въ послѣднемъ изъ приведенныхъ примѣровъ, касательныя преобразования даютъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ способъ получать интегралы классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи, исходя изъ интегральныхъ собраній С. Ли. Въ этомъ отношеніи наилучшій примѣръ представляетъ извѣстное обобщенное уравненіе Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q) \quad (29)$$

гдѣ f нѣкоторая, какая угодно функція переменныхъ p и q . Вводя новыя переменныя, по формуламъ касательнаго преобразованія

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = z - xp - yq, \quad p' = -x, \quad q' = -y,$$

преобразовываемъ данное уравненіе къ слѣдующему виду, въ формѣ функціональной зависимости,

$$z' = f(x', y'). \quad (30)$$

Легко разрѣшить слѣдующимъ образомъ послѣднее равенство, рассматриваемое, съ точки зрѣнія С. Ли, также какъ производное уравненіе. Исключая значеніе дифференціала dz' ,

$$dz' = \frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial y'} dy',$$

изъ условія соединенности поверхностныхъ элементовъ

$$dz' = p' dx' + q' dy',$$

получаемъ равенство

$$\left(p' - \frac{\partial f}{\partial x'}\right) dx' + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right) dy' = 0.$$

Послѣднее равенство имѣетъ три различныхъ рѣшенія. Первое изъ нихъ слѣдующее

$$x' = C_1, \quad y' = C_2,$$

гдѣ C_1, C_2 —двѣ произвольныя постоянныя величины. Второе рѣшеніе имѣетъ видъ

$$y' = \varphi(x'),$$

$$p' - \frac{\partial f}{\partial x'} + \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'}\right) \varphi'(x') = 0,$$

гдѣ $\varphi(x')$ представляетъ произвольную функцію. Наконецъ, третье рѣшеніе представляется слѣдующимъ образомъ

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Соотвѣтственно послѣднимъ рѣшеніямъ, мы получаемъ три различныхъ рѣшенія преобразованнаго уравненія (30). Первое изъ выше найденныхъ

рѣшеній приводитъ къ полному рѣшенію второго класса уравненія (30)

$$z' = f(C_1, C_2), \quad x' = C_1, \quad y' = C_2.$$

Второе рѣшеніе представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z' = f(x', \varphi(x')), \quad y' = \varphi(x'),$$

$$p' = \frac{\partial f}{\partial x} - \left(q' - \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \varphi'(x').$$

Если, напримѣръ, положить въ послѣднемъ рѣшеніи $\varphi(x') = C'x' + C''$, гдѣ C' , C'' —двѣ произвольныя постоянныя, то мы получаемъ полное рѣшеніе S . Ли перваго класса уравненія (30). Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) представляется въ видѣ

$$z' = f(x', y'), \quad p' = \frac{\partial f}{\partial x'}, \quad q' = \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Совершая обратную замѣну переменныхъ, мы находимъ, соотвѣтственно изъ приведеннаго выше перваго рѣшенія преобразованнаго уравненія, полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (29)

$$z = C_1x + C_2y + f(C_1, C_2).$$

Второе рѣшеніе уравненія (30) приводитъ къ общему интегралу уравненія (29)

$$z = xp + yq + f(p, q),$$

$$q = \varphi(p),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} + \left(y + \frac{\partial f}{\partial q} \right) \varphi'(p) = 0,$$

гдѣ p и q представляютъ переменныя параметры. Наконецъ, послѣднее рѣшеніе уравненія (30) даетъ особенный интегралъ обобщеннаго уравненія Клеро

$$z = xp + yq + f(p, q),$$

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

гдѣ p и q —переменныя параметры. Такимъ образомъ, какъ слѣдуетъ также изъ нашихъ предыдущихъ изслѣдованій, относительно существо-

ванія полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, обобщенное уравненіе Клеро не имѣетъ полныхъ интеграловъ, отличныхъ отъ нулевого класса, и всѣ интегральныя собранія различныхъ классовъ преобразованнаго уравненія (30) переходятъ, при помощи касательныхъ преобразованій, въ рѣшенія нулевого класса обобщеннаго уравненія Клеро.

Въ своихъ изслѣдованіяхъ С. Ли не останавливается на сравненіи между собой преобразованныхъ интегральныхъ собраній, не различая ихъ по классамъ. Съ точки зрѣнія С. Ли, полныя интегральныя собранія различныхъ классовъ являются совершенно эквивалентными аналитическими элементами. Устанавливая однако въ нашемъ изслѣдованіи существенное различіе между интегралами Лагранжа и С. Ли, намъ приходится также принимать во вниманіе классы рассматриваемыхъ интегральныхъ собраній въ обѣихъ системахъ перемѣнныхъ, связанныхъ между собой формулами касательныхъ преобразованій. На это послѣднее обстоятельство я имѣлъ случай указывать въ своемъ сочиненіи „Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи“ и въ двухъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ ¹⁾ „*Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer*“, по поводу такъ называемаго усовершенствованія С. Ли способа интегрированія Якоби—Майера уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи. Въ послѣдующемъ изложеніи намъ придется возвратиться къ этому послѣднему вопросу съ болѣе общей точки зрѣнія.

5. Гурса ²⁾ рассматриваетъ, какъ приложение теоріи касательныхъ преобразованій, извѣстный способъ А. Н. Коркина интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи ³⁾. На послѣдующихъ строкахъ мы изложимъ эти соображенія въ нѣсколько обобщенномъ видѣ.

Пусть имѣемъ *нормальную* систему рассматриваемыхъ уравненій

$$F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \left. \begin{array}{l} r=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (31)$$

Возьмемъ полный интегралъ первыхъ k уравненій послѣдней системы, гдѣ $k < m$. Соответствующее ему полное интегральное собраніе, представленное уравненіями въ инволюціи, составляется при помощи операцій

¹⁾ Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 26 juin et 3 juillet 1899.

²⁾ E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 302.

³⁾ А. Н. Коркинъ.—*О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными перваго порядка*. С.П.Б. 1867.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. LXVIII, p. 14 60.

дифференцирования и алгебраических исключений (см. стр. 54—57). Предположим, что это последнее собрание представляется слѣдующей системой уравнений въ инволюціи

$$F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \dots, k, \\ \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n) = C_i, \\ i = 1, 2, \dots, n - k + 1,$$

гдѣ всѣ C_i — произвольныя постоянныя, при чемъ классъ этого собранія можетъ быть нулевымъ или какимъ угодно, такъ какъ всѣ слѣдующія разсужденія прилагаются къ собраніямъ любого класса.

Принимая выраженія F_r и Φ_i соотвѣтственно за функціи X_1, X_2, \dots, X_n, Z , составляемъ формулы касательнаго преобразования (см. ^{н⁰3} настоящей главы)

$$x'_r = X_s, \quad z' = Z, \quad p'_s = P_s, \\ s = 1, 2, \dots, n.$$

Преобразованныя къ новымъ переменнымъ x'_s, z', p'_s уравненія (31) очевидно становятся

$$x'_r = 0, \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots, x'_n, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m - k.$$

Такъ какъ система данныхъ уравнений (31) *нормальная*, то полученные преобразованныя уравненія представляютъ также *нормальную* систему. Поэтому скобки Вейлера

$$[x'_r, F'_{k+i}] \equiv - \frac{\partial F'_{k+i}}{\partial p'_r} \equiv 0,$$

должны уничтожаться тождественно для всѣхъ различныхъ значений r , отъ 1 до k , и значений i , отъ 1 до $m - k$.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ функціи F'_{k+i} не зависятъ отъ переменныхъ p'_1, p'_2, \dots, p'_k , и преобразованная нормальная система уравнений представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$F'_{k+i}(x'_{k+1}, x'_{k+2}, \dots, x'_n, z', p'_{k+1}, p'_{k+2}, \dots, p'_n) = 0, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (32) \\ i = 1, 2, \dots, m - k.$$

Такимъ образомъ система (31), составленная изъ m уравнений съ n частными производными, преобразовывается въ аналогичную систему (32),

число уравнений которой и частных производных—каждое меньше на k единиц, сравнительно съ первоначальной системой. Продолжая повторять тѣ же самыя дѣйствія съ полученными уравненіями (32), приходимъ, наконецъ, къ одному дифференціальному уравненію. Такъ какъ интегрированіе одного уравненія проводится, на основаніи Якоби-Майеровскаго способа, къ интегрированію системы уравненій, то изложенный способъ приводитъ въ результатѣ интегрированіе данныхъ уравненій къ одному обыкновенному дифференціальному уравненію.

Приведенный способъ изложенія обобщенной теоріи А. Н. Коркина даетъ мѣсто двумъ существеннымъ возраженіямъ:

Во-первыхъ, вслѣдствіе введенія общихъ формулъ касательныхъ преобразованій, становится неизвѣстнымъ классъ полного интегральнаго собранія, которое должно получаться въ результатѣ выполненнаго интегрированія, т. е. вводится таже неопредѣленность, относительно искомага рѣшенія, которая характеризуетъ всѣ способы интегрированія С. Ли.

Во-вторыхъ, приведенное изложеніе упускаетъ изъ виду одну особенность, которая является весьма существенной при нѣкоторыхъ приложеніяхъ способа интегрированія А. Н. Коркина. Дѣйствительно, этотъ послѣдній требуетъ, сравнительно съ другими приемами интегрированія частныхъ уравненій, наибольшаго числа операций интегрированія. Тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ вопросахъ, которые находятся въ связи съ разысканіемъ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ функцій многихъ независимыхъ переменныхъ, какъ показалъ А. Н. Коркинъ¹⁾, его способъ интегрированія даетъ простое рѣшеніе разсматриваемой задачи.

Новое изложеніе разсматриваемой теоріи, которое мы дадимъ ниже, основывается также на касательныхъ преобразованіяхъ, при чемъ числа новыхъ и прежнихъ переменныхъ различны между собой. Поэтому необходимо предварительно остановиться на нѣсколькихъ теоретическихъ соображеніяхъ.

6. Пусть прежнія переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

и новыя переменныя

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z, p'_1, p'_2, \dots, p'_m$$

¹⁾ Коркинъ.—О совокупныхъ уравненіяхъ...

Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel (Mathematische Annalen, Bd. II, 1869, S. 13).

Н. Н. Салтыковъ.—Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой, нерастяжимой нити (Сообщенія Харьк. Математическаго Общ., т. VI).

связаны между собой зависимостями

$$\left. \begin{aligned} x'_s &= X_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ z' &= Z(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \\ p'_s &= P_s(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$s=1, 2, \dots, m.$

Если между рассматриваемыми переменными существует равенство

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sigma (dz' - \sum_{s=1}^m p'_s dx'_s), \quad (34)$$

то обѣ системы переменныхъ опредѣляютъ собой касательное преобразование 1).

Предположимъ, что $m < n$. Такъ какъ наименьшее число уравненій рѣшенія уравненія (34) равняется $n + m + 2$, то, чтобы послѣднее равенство имѣло мѣсто, очевидно необходимо должны существовать, кромѣ $2m + 1$ уравненій (33), еще $n - m + 1$ зависимостей. Изъ нихъ $n - m$ связываютъ прежнія переменныя между собой, а послѣдняя зависимость опредѣляетъ черезъ нихъ значеніе переменной σ . Предположимъ, что эти зависимости выражаются слѣдующими уравненіями

$$\left. \begin{aligned} f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ r &= 1, 2, \dots, n - m, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\sigma = R(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

На основаніи свойствъ рѣшеній равенства (34), разсуждая аналогично тому, какъ мы это дѣлали въ $n^{\circ}2$ настоящей главы, мы заключаемъ:

Во-первыхъ, что *уравненія (35) образуютъ замкнутую систему, и во-вторыхъ, что существуютъ слѣдующія равенства*

$$\left. \begin{aligned} [X_i, X_k] &= 0, \quad [X_i, Z] = 0, \\ [X_i, P_k] &= \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ -\frac{1}{\sigma}, & i = k, \end{cases} \\ [Z, P_k] &= -\frac{P_k}{\sigma}, \quad [P_i, P_k] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

1) Ср. E. Goursat.—Leçons sur l'intégration... p. 325.

$$\left. \begin{aligned} [X_i, R] &= -\frac{\partial X_i}{\partial z} \sigma, \\ [Z, R] &= 1 - \frac{\partial Z}{\partial z} \sigma, \\ [P_i, R] &= \frac{\partial P_i}{\partial z} \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

для всех различных значений i и k , отъ 1 до n . При этомъ написанныя равенства выполняются, вообще, на основаніи уравненій (35).

Однако въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ равенства (36) имѣютъ мѣсто тождественно, аналогично тому случаю, когда числа новыхъ и прежнихъ переменныхъ равны между собой. Предположимъ, напримѣръ, что уравненія (35) зависятъ явно отъ величинъ

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-m}$$

и разрѣшимы относительно послѣднихъ, такъ что слѣдующій функциональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-m}}{P_1, P_2, \dots, P_{n-m}} \right) \geq 0.$$

Если функции X_s, Z, P_s не зависятъ отъ переменныхъ

$$P_1, P_2, \dots, P_{n-m},$$

то становится очевиднымъ, что равенства первыхъ трехъ строкъ формуль (36) должны удовлетворяться *тождественно*. Наконецъ, если функция R не зависитъ отъ тѣхъ же переменныхъ, то тогда и остальные равенства (36) тоже удовлетворяются тождественно.

Предположимъ, что, разрѣшивъ уравненія (33) и (35) относительно прежнихъ переменныхъ, получаемъ слѣдующія ихъ $n + m + 1$ значений въ новыхъ переменныхъ и остальныхъ $n - m$ прежнихъ

$$\left. \begin{aligned} x_r &= X'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \\ z &= Z'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \\ p_s &= P'_s(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_m, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}), \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$r = n - m + 1, n - m + 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, m.$

На основаніи разсужденій $n^{\text{o}4}$ -аго настоящей главы, легко вывести слѣдующее заключеніе:

Если уравненія замкнутой или нормальной системы, будучи преобразованы къ новымъ переменнымъ, при помощи формулъ (37), не зависятъ отъ прежнихъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_{n-m} , то преобразованная къ новымъ переменнымъ система является также соответственно замкнутой или нормальной.

7. Пользуясь приведенными соображеніями, легко изложить теорію А. Н. Коркина. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ r = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Предположимъ, что первыя k изъ послѣднихъ уравненій образуютъ нормальную систему и разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_k , такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_k}{p_1, p_2, \dots, p_k} \right) \geq 0. \quad (39)$$

Напишемъ полный интегралъ разсматриваемыхъ k уравненій

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, z', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}), \quad (40)$$

гдѣ величины $z', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}$ обозначаютъ $n - k + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ выполняется условіе

$$D \left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial x_{k+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{k+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{z', x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}} \right) \geq 0. \quad (41)$$

Составляемъ уравненія, представляющія, совмѣстно съ (40)-ымъ, общее интегральное собраніе проинтегрированныхъ уравненій,

$$\left. \begin{aligned} p_s &= \frac{\partial V}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial V}{\partial x'_i} + \frac{\partial V}{\partial z'} p'_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-k, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

при чемъ z' разсматривается какъ функція остальныхъ произвольныхъ постоянныхъ $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}$, и выраженія p'_i обозначаютъ частныя про-

изводныя перваго порядка функции z' соответственно по независимой переменной x'_i , такъ что имѣетъ мѣсто равенство

$$dz' = \sum_{i=1}^{n-k} p'_i dx'_i.$$

Дифференцируя уравненіе (40), получаемъ слѣдующее равенство

$$dz = \sum_{s=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_s} dx_s + \frac{\partial V}{\partial z'} dz' + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\partial V}{\partial x'_i} dx'_i.$$

Поэтому, если ввести обозначеніе

$$\sigma = - \frac{\partial V}{\partial z'}, \quad (43)$$

то становится очевиднымъ, что равенство

$$dz - \sum_{s=1}^n p_s dx_s = \sigma (dz' - \sum_{i=1}^{n-k} p'_i dx'_i)$$

удовлетворяется тождественно, на основаніи уравненій (40), (42) и (43), т. е. послѣднія опредѣляютъ касательное преобразование между прежними переменными

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$$

и новыми переменными величинами

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-k}.$$

На основаніи неравенства (41), уравненія (40) и (42) опредѣляютъ выраженія слѣдующихъ прежнихъ переменныхъ

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n \quad (44)$$

въ новыхъ переменныхъ и k прежнихъ

$$x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Преобразовывая къ новымъ переменнымъ данныя уравненія (38), т. е. подставляя въ нихъ указанныя значенія переменныхъ (44), замѣчаемъ, что первыя k уравненій (38) уничтожаются тождественно, такъ какъ значеніе (40)-ой функции z представляетъ ихъ интеграль. вмѣстѣ съ тѣмъ слѣдуетъ замѣтить, что эти k первыя уравненій (38) представляютъ,

въ силу условій (39) и (41), результатъ исключенія новыхъ переменныхъ изъ уравненія (40) и n первыхъ уравненій (42). Такимъ образомъ разсматриваемыя k уравненій являются въ настоящемъ случаѣ тѣми зависимостями между прежними переменными, которыя имѣютъ мѣсто въ формулахъ касательныхъ преобразованій, когда число новыхъ переменныхъ меньше числа прежнихъ. Наконецъ, предположимъ, что остальные $m - k$ уравненій (38) принимаютъ видъ

$$\left. \begin{aligned} F'_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-k}, z', p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-k}, x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \\ r = k+1, k+2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

т. е. зависятъ вообще отъ k прежнихъ переменныхъ.

До сихъ поръ мы не дѣлали никакихъ предположеній относительно интегрируемости изслѣдуемыхъ уравненій (38). Но если предположить, что послѣднія имѣютъ интеграль, то въ такомъ случаѣ легко доказать, что уравненія (45) приводятся къ новой системѣ, уравненія которой не зависятъ отъ прежнихъ переменныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть рѣшеніе данныхъ уравненій (38) представляется равенствомъ

$$z = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (46)$$

Въ такомъ случаѣ рѣшеніе преобразованной системы (45) получается какъ результатъ исключенія $n+1$ величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, z$$

изъ системы $n+2$ уравненій (40), (46) и n слѣдующихъ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе преобразованныхъ уравненій, какого-бы класса оно ни было, во всякомъ случаѣ не зависитъ отъ значеній величинъ x_1, x_2, \dots, x_k . Поэтому рѣшеніе системы (45) утождествляетъ ея уравненія при какихъ-угодно значеніяхъ x_1, x_2, \dots, x_k . Слѣдовательно, то же рѣшеніе утождествляетъ также уравненія

$$\frac{\partial F'_r}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial^2 F'_r}{\partial x_n \partial x_1} = 0, \dots$$

которыя получаются дифференцированіемъ уравненій (45) по всѣмъ переменнымъ x_1, x_2, \dots, x_k . Увеличивая такимъ образомъ число уравненій

системы (45)-ой прибавленіемъ ея указанныхъ производныхъ уравненій, мы получимъ въ результатъ систему уравненій, не зависящихъ отъ прежнихъ переменныхъ. Если бы получилось число уравненій, которое больше $n - k + 1$, то въ такомъ случаѣ разсматриваемыя уравненія не имѣютъ интеграла. Если же число уравненій вновь полученной системы меньше $n - k + 1$, то, поступая съ ней какъ съ первоначальной системой, мы продолжимъ наши вычисленія до тѣхъ поръ, пока не сведемъ задачу къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, или пока не убѣдимся, что данныя уравненія несовмѣстны.

Изложенный способъ разсужденія А. Н. Коркина представляетъ то преимущество, что не основывается на приведеніи данныхъ уравненій къ замкнутымъ системамъ и позволяетъ такимъ образомъ приступить къ интегрированію безъ предварительнаго вычисленія всѣхъ дополнительныхъ уравненій или неизвѣстныхъ коэффициентовъ и функцій, которые, при извѣстныхъ задачахъ, входятъ въ данныя уравненія. Это послѣднее обстоятельство обуславливаетъ успѣхъ, съ которымъ примѣняется разсматриваемый способъ интегрированія въ указанныхъ выше вопросахъ (см. стр. 133).

Въ частномъ случаѣ, если данныя уравненія (38) образуютъ замкнутую систему, то въ такомъ случаѣ очевидно, что преобразованныя уравненія (45) приводятся къ $m - k$ различнымъ уравненіямъ, независимымъ отъ прежнихъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_k . Въ самомъ дѣлѣ, во-первыхъ, извѣстно, что уравненія (45) имѣютъ интегралъ, независимый отъ послѣднихъ переменныхъ, и, во-вторыхъ, число уравненій (45) не должно превосходить числа $m - k$, такъ какъ ихъ полный интегралъ долженъ заключать $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Поэтому единственное возможное заключеніе, которое остается сдѣлать, состоитъ въ томъ, что всѣ переменныя x_1, x_2, \dots, x_k исключаются изъ уравненій (45) и результатъ послѣдняго исключенія представляется совокупностью $m - k$ различныхъ уравненій въ новыхъ переменныхъ. Само собою разумѣется, что эти уравненія образуютъ *замкнутую систему*, такъ какъ по условію имѣютъ полный интегралъ съ $n - m + 1$ различными произвольными постоянными.

Наконецъ, если данныя уравненія (38) образуютъ *нормальную* систему и преобразованныя уравненія (45) не зависятъ отъ x_1, x_2, \dots, x_k , то очевидно, что эта система (45) также *нормальная*. Въ частномъ случаѣ, если $k = 1$, то въ своемъ изслѣдованіи А. Н. Коркинъ доказываетъ, что данныя уравненія, преобразованныя къ новымъ переменнымъ, не зависятъ отъ прежнихъ переменныхъ.

Итакъ, выполнивъ преобразование А. Н. Коркина, мы получаемъ систему уравненій, заключающую меньшее число переменныхъ, сравнительно съ данными уравненіями. Продолжая прежнія преобразования, мы приходимъ, наконецъ, къ интегрированію обыкновенныхъ уравненій, и

тогда, для получения искомого интеграла, остается выполнить обратную замѣну переменныхъ. При этомъ необходимо отмѣтить то существенное обстоятельство, что обратная замѣна переменныхъ всегда приводитъ къ полному интегралу Лагранжа или къ полному интегральному собранію нулевого класса данныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, въ основу каждого преобразованія кладется общій интегралъ Лагранжа. Хотя послѣдній и представляется совокупностью уравненій, заключающихъ вспомогательные параметры, которые принимаются за новыя независимыя переменныя, тѣмъ не менѣе результатъ исключенія послѣднихъ изъ рассматриваемой системы уравненій всегда приводитъ къ интегралу, представляемому однимъ уравненіемъ. Послѣднее обстоятельство находитъ теоретическое подтвержденіе въ извѣстной *теоремѣ Коши*, доказывающей существованіе общаго интеграла уравненій съ частными производными ¹⁾.

Въ своемъ изложеніи А. Н. Коркинъ совершаетъ каждое послѣдовательное преобразованіе, исходя изъ интеграла одного только уравненія, а затѣмъ преобразовываетъ къ новымъ переменнымъ всѣ остальные изслѣдуемыя уравненія. Что касается изложенныхъ выше соображеній, то они позволяютъ сократить число всѣхъ преобразованій, необходимыхъ для интегрированія, и приводятъ такимъ образомъ быстрѣе къ окончательному результату. Кромѣ того, приведенное изложеніе позволяетъ уменьшать число преобразовываемыхъ уравненій даже въ томъ случаѣ, когда каждое новое преобразованіе совершается какъ у А. Н. Коркина, при помощи интеграла одного только изъ рассматриваемыхъ уравненій. Дѣйствительно, при каждомъ послѣдовательномъ преобразованіи переменныхъ, нѣтъ необходимости преобразовывать къ новымъ переменнымъ всѣ рассматриваемыя уравненія, но достаточно преобразовать только одно изъ нихъ или нѣсколько, съ тѣмъ чтобы принять ихъ полный интегралъ за основаніе новаго преобразованія переменныхъ и т. д.

Проинтегрируемъ, на примѣръ, нормальную систему уравненій

$$\left. \begin{aligned} p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4} = 0, \quad p_2 - \frac{x_4}{x_2} p_4 = 0, \\ p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Полный интегралъ первыхъ двухъ уравненій представляется въ слѣдующемъ видѣ

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: „Объ интегрированіи уравненій...“ стр. 45 и статью: „Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue“ (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. XXXI).

$$z = x'_1 x_1 + \frac{x_2 x_3 x_4}{x'_1} + z',$$

гдѣ x'_1 и z' обозначаютъ двѣ произвольныя постоянныя величины.

Полагая $x_3 = x'_2$ и принимая x'_1 и x'_2 за новыя независимыя переменныя, а z' за новую неизвѣстную функцію, составляемъ формулы преобразованія къ новымъ переменнымъ, обозначая черезъ p'_1 , p'_2 новыя частныя производныя $\frac{\partial z'}{\partial x'_1}$ и $\frac{\partial z'}{\partial x'_2}$,

$$z = x'_1 x_1 + \frac{x_2 x_4 x'_2}{x'_1} + z',$$

$$p_1 = x'_1, \quad p_2 = \frac{x_4 x'_2}{x'_1},$$

$$p_3 = \frac{x_2 x_4}{x'_1} + p'_2, \quad p_4 = \frac{x_2 x'_2}{x'_1},$$

$$x_1 - \frac{x_2 x'_2 x_4}{x'^2_1} + p'_1 = 0.$$

Преобразованное къ новымъ переменнымъ послѣднее уравненіе (47) становится

$$p'_2 + \frac{x'_1}{x'_2} p'_1 = 0,$$

т. е. не зависитъ отъ прежнихъ переменныхъ. Полный интегралъ послѣдняго уравненія имѣетъ значеніе

$$z' = C_1 \frac{x'_1}{x'_2} + C_2,$$

гдѣ C_1 , C_2 — двѣ произвольныя постоянныя.

Обратная замѣна переменныхъ приводитъ къ слѣдующему полному интегралу данныхъ уравненій (47)

$$z = 2\sqrt{x_2 x_4 (x_1 x_3 + C_1)} + C_2.$$

ГЛАВА VI.

Теорія характеристикъ.

1. До сихъ поръ мы занимались изслѣдованіемъ общихъ положеній теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и производныхъ уравненій С. Ли. Что касается полныхъ интегральныхъ собраний С. Ли различныхъ классовъ, отличныхъ отъ нулевого, то мы видѣли, что они существуютъ только для уравненій опредѣленныхъ типовъ. Наше дальнѣйшее изслѣдованіе посвящается способамъ разысканія полныхъ интегральныхъ собраний. Какъ было выше показано, во II-ой главѣ, каждое полное интегральное собраніе С. Ли, въ пространствѣ $n+1$ измѣреній, представляется замкнутой системой $n+1$ уравненій, которая въ свою очередь вполне опредѣляется уравненіями геометрическаго мѣста, соответствующаго интегральнаго собранія. Послѣднее геометрическое мѣсто выражается въ классической теоріи однимъ уравненіемъ, а въ теоріи С. Ли—нѣсколькими равенствами. Поэтому способы интегрированія разсматриваемыхъ уравненій приводятся къ разысканію, или послѣднихъ геометрическихъ мѣстъ, или опредѣляемыхъ ими интегральныхъ собраний непосредственно.

Изъ нашихъ изслѣдованій (см. стр. 66) вытекаетъ, что не всякое производное уравненіе С. Ли имѣетъ полные интегралы любого класса. Поэтому становится вполне понятнымъ, почему общіе способы интегрированія С. Ли отличаются неопредѣленностью въ томъ смыслѣ, что не даютъ возможности заранѣе установить классъ того интеграла, который долженъ получиться въ результатѣ производимыхъ вычисленій. Дѣйствительно, каждое рѣшеніе даннаго класса допускается только производными уравненіями опредѣленнаго типа. Такъ какъ, въ своихъ изслѣдованіяхъ, С. Ли не принималъ въ расчетъ всѣ эти соображенія, то естественно, что классъ получаемыхъ имъ рѣшеній является совершенно случайнымъ.

Намъ не представляется цѣлесообразнымъ сохранять послѣднюю точку зрѣнія С. Ли, которая однако проводится въ современныхъ трактатахъ теоріи уравненій съ частными производными, тѣмъ болѣе, что мы уже получили въ предыдущихъ главахъ рядъ результатовъ относи-

тельно существованія полныхъ рѣшеній С. Ли различныхъ классовъ. Намъ представляется также недостаточнымъ въ теоретическомъ, научномъ отношеніи удовлетвориться результатами С. Ли, послѣ того какъ мы установили простое аналитическое различіе между разсматриваемыми рѣшеніями различныхъ классовъ, выражаемое при помощи функциональныхъ опредѣлителей и ихъ уничтожающихся миноровъ (см. стр. 44 и 50—51). Болѣе того, мы считаемъ невозможнымъ, послѣ всего сказаннаго, смѣшивать полные интегралы различныхъ классовъ, какъ это дѣлаютъ другіе авторы, на что было уже указано на предыдущихъ страницахъ (см. стр. 35). Удовлетвориться рѣшеніемъ С. Ли, излагая теорію интегрированія дифференціальныхъ уравненій, равносильно признанію въ несостоятельности излагаемой теоріи давать искомые интегралы во всѣхъ различныхъ случаяхъ, которые могутъ представиться, при приложеніи теоріи на практикѣ.

При разысканіи разсматриваемыхъ интеграловъ, представляются нѣсколько различныхъ случаевъ опредѣленія искомыхъ функцій, на основаніи различныхъ аналитическихъ элементовъ. Если извѣстно нѣсколько новыхъ уравненій, заключающихъ равное число различныхъ произвольныхъ постоянныхъ и образующихъ замкнутую систему, совместно съ данными уравненіями, или если извѣстно нѣсколько интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соответствующихъ даннымъ интегрируемымъ, то задача интегрированія послѣднихъ выполняется при помощи способа Якоби—Майера. Если извѣстные интегралы послѣднихъ линейныхъ уравненій не находятся въ инволюціи, то въ такомъ случаѣ задача интегрированія разсматриваемыхъ уравненій совершается при помощи рѣшенія такъ называемой задачи С. Ли. Наконецъ, если извѣстна полная система интеграловъ послѣднихъ упомянутыхъ линейныхъ уравненій, то задача разысканія интеграловъ данныхъ уравненій выполняется при помощи алгебраическихъ исключеній, на основаніи такъ называемой *теоріи характеристикъ*.

Эта теорія получила свое названіе, благодаря изслѣдованіямъ Монжа ¹⁾, который положилъ основаніе геометрическому способу изложенія задачи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Второе аналитическое рѣшеніе разсматриваемаго вопроса было дано Коши ²⁾, для разысканія общихъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Получаемый отсюда способъ составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа равно и такъ называемый первый способъ Якоби ³⁾ представляютъ однако случаи исключенія, когда не получаются искомые ин-

¹⁾ Monge.—*Application de l'Analyse à la Géométrie*.

²⁾ Cauchy.—*Exercices d'Analyse et de Physique mathématiques*, 1841, p. 238.

³⁾ *Journal Crelle*, t. XVII, S. 97, или *Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 59.

тегралы. Эти послѣдніе случаи были изслѣдованы Майеромъ, Бертра- номъ и Дарбу¹⁾. Почти одновременно С. Ли опубликовалъ также свои изслѣдованія, при чемъ избѣжалъ необходимости разсматривать упо- мянутые случаи исключенія, вводя понятія о своихъ интегральныхъ собраніяхъ.

Излагая теорію характеристикъ, на страницахъ *Mathematische Annalen*, Bd. IX²⁾, С. Ли приводитъ также доказательство существова- нія своихъ интеграловъ. Но такъ какъ С. Ли не различаетъ классовъ интегральныхъ собраній, то, съ развиваемой въ настоящемъ изслѣдова- ніи точки зрѣнія, указанное доказательство не представляетъ интереса, такъ какъ доказываетъ только существованіе системы интеграловъ въ инволюціи линейныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ разсматриваемымъ производнымъ. Наконецъ, для симметричности вычисленій, С. Ли всѣ разсматриваемыя уравненія представляетъ въ видѣ однородныхъ. Впро- чемъ вычисления, которыми мы будемъ пользоваться, являются настолько простыми, что намъ представляется излишнимъ придавать изслѣдуемымъ уравненіямъ какой либо специальный видъ, тѣмъ болѣе, что, благодаря подобнымъ искусственнымъ преобразованіямъ, усложняются вычисления, при переходѣ отъ общей теоріи къ приложеніямъ.

На предыдущихъ страницахъ мы въ достаточной мѣрѣ уже вы- яснили и установили нашу точку зрѣнія на сущность идей С. Ли. Послѣ того какъ извѣстенъ общій видъ всѣхъ уравненій, допускающихъ полные интегралы данного класса, задача разысканія послѣднихъ, для насъ, не представляетъ болѣе интереса, съ точки зрѣнія общей теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Поэтому въ дальнѣйшемъ изложеніи мы сосредоточимъ наше вниманіе на разысканіи полныхъ ин- теграловъ Лагранжа.

Не смотря на господство въ наукѣ, въ послѣднее время, идей С. Ли, тѣмъ не менѣ послѣдній вопросъ классической теоріи дифференціаль- ныхъ уравненій не переставалъ привлекать вниманіе ученыхъ. Въ этомъ направленіи слѣдуетъ отмѣтить изслѣдованія Майера³⁾, Морера⁴⁾ и лек-

1) *Mayer*.—*Mathematische Annalen*, Bd. III, S. 435.

Bertrand.—*Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 641.

Darboux.—*Comptes rendus*, t. LXXIX, p. 1488; t. LXXX, p. 160; *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1-re série, t. VIII, p. 249.

2) S.S. 261—264.

3) *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August Universität*. Göttingen 1873, p. 299.

Mathematische Annalen, Bd. VI, 1873, p. 192.

4) *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti*, 2-e serie, vol. XVI, 1883, p. p. 637, 691.

ціи Е. Вебера по теоріи дифференціальнихъ уравненій съ частными производными ¹⁾).

Съ болѣе общей точки зрѣнія теорія характеристикъ разсматривается въ моихъ сообщеніяхъ Парижской Академіи Наукъ ²⁾, въ сочиненіи: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи*, и въ мемуарѣ: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*³⁾. Въ этихъ послѣднихъ изслѣдованіяхъ разсматриваемый вопросъ рѣшается для дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка, представленныхъ въ слѣдующихъ двухъ частныхъ случаяхъ, или когда данныя уравненія разрѣшены относительно частныхъ производныхъ, или когда эти уравненія, не будучи разрѣшены относительно производныхъ, вмѣстѣ съ тѣмъ не зависятъ отъ неизвѣстной функціи z . На послѣдующихъ строкахъ распространяются предыдущія соображенія на системы уравненій общаго вида, какъ было мною указано въ запискѣ, 19 декабря 1900 г., *Société Mathématique de France*, въ Парижѣ, и затѣмъ опубликовано въ изданіяхъ того же Общества въ статьѣ: *Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction* ⁴⁾

2. Пусть имѣемъ систему m уравненій съ частными производными въ инволюціи

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_m , такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta \equiv D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0. \quad (2)$$

Составляемъ соотвѣтствующую даннымъ уравненіямъ (1) замкнутую ⁵⁾ систему линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной функціи f

$$[F_i, f] = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (3)$$

1) *Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, 1900, S. S. 438, 468.

2) *Comptes rendus*, 16 janvier et 24 juillet 1899.

3) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5-e série, t. V, 1899, p. 435.

4) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXIV, 1901, p. 86.

5) См. стр. 55 настоящаго изслѣдованія.

Послѣднія уравненія называются *дифференціальными уравненіями характеристикъ*. При геометрическомъ изложеніи, выводъ ихъ совершается на основаніи геометрическихъ свойствъ разсматриваемой задачи интегрированіе. Что касается аналитическаго изложенія теоріи характеристикъ, то въ этомъ случаѣ дифференціальныя уравненія (3) являются непосредственнымъ слѣдствіемъ основной идеи такъ называемаго второго способа Якоби интегрированія разсматриваемыхъ уравненій¹⁾. Тогда вся задача теоріи характеристикъ представляетъ ничто иное, какъ рѣшеніе послѣдняго изъ трехъ различныхъ, указанныхъ выше аналитическихъ вопросовъ, представляющихся при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка. Поэтому мы не станемъ останавливаться на вопросѣ о составленіи дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, а перейдемъ непосредственно къ вычисленію искомыхъ полныхъ интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій.

Предположимъ, что извѣстна полная система $2n - m + 1$ различныхъ интеграловъ уравненій (3), которая представляется слѣдующими функціями

$$F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_{2n-2m+1}. \quad (4)$$

Задача разсматриваемой нами теоріи характеристикъ приводится къ рѣшенію слѣдующаго вопроса:

Составить при помощи данныхъ функцій (4) значенія переменныхъ

$$z, p_1, p_2, \dots, p_n,$$

въ функціяхъ независимыхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , при томъ такъ, чтобы послѣднія функціи удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

и отождествляя данныя дифференціальныя уравненія (1).

Приравниваемъ m первыхъ функцій (4) нулямъ, а всѣ остальные функціи соответственно произвольнымъ постояннымъ величинамъ $C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}$, и получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_r,$$

$$r = 1, 2, \dots, 2n - 2m + 1.$$

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5-e série t. V p. 435).*

Вслѣдствіе условія, представленнаго неравенствомъ (2), послѣдняя система уравненій разрѣшима относительно переменныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Предположимъ, что опредѣляемые такимъ образомъ значенія ихъ представляются равенствами

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m, C_1, C_2, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ x_{m+k} &= \varphi_k(x_1, \dots, C_{2n-2m+1}), \\ p_s &= \theta_s(x_1, \dots, C_{2n-2m+1}), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, s=1, 2, \dots, n.$

Составимъ, наконецъ, систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующую линейнымъ уравненіямъ (3), для которой уравненія (5) являются интегральными. Съ этой цѣлью замѣтимъ, что нашъ опредѣлитель Δ выражается слѣдующимъ образомъ, въ явной формѣ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & \frac{\partial F_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_1} & \frac{\partial F_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial p_1} & \frac{\partial F_m}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial p_m} \end{vmatrix}.$$

Обозначимъ соответственно черезъ

$$\Delta_i, \Delta_{ik}, \Delta_i^s$$

тѣ значенія, которыя принимаетъ послѣдній опредѣлитель Δ , при замѣнѣ въ немъ элементовъ i -аго столбца соответствующими частными производными функций

$$F_1, F_2, \dots, F_m,$$

взятыми соответственно по переменнымъ

$$z, p_{m+k}, x_s.$$

Разрѣшая уравненія (3) относительно частныхъ производныхъ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m},$$

получаемъ слѣдующую яacobievскую систему

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n-m} X_{m+k}^i \frac{\partial f}{\partial x_{m+k}} + \sum_{s=1}^n P_s^i \frac{\partial f}{\partial x_s} + Z^i \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, m,$

коэффициенты которой имѣютъ слѣдующія значенія

$$X_{m+k}^i \equiv - \frac{\Delta_{ik}}{\Delta},$$

$$P_s^i \equiv \frac{\Delta_i^s + \Delta_i p_s}{\Delta},$$

$$Z^i \equiv - \left(p_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} p_{m+k} \right).$$

Соотвѣтствующія уравненія въ полныхъ дифференциалахъ представляютъ именно искомую систему

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m X_{m+k}^i dx_i, \\ dp_s &= \sum_{i=1}^m P_s^i dx_i, \\ dz &= \sum_{i=1}^m Z^i dx_i, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$k = 1, 2, \dots, n-m, \quad s = 1, 2, \dots, n.$

Очевидно, что значенія (5) утолждествляютъ уравненія (6). Потому, на основаніи равенствъ (5), система $n-m$ первыхъ уравненій (6) и послѣднее изъ нихъ приводятъ къ слѣдующему тождеству

$$dz = \sum_{i=1}^m p_i dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} dx_{m+k}.$$

Отсюда вытекаетъ весьма важное заключеніе: Если возможно вывести изъ уравненій (5) значенія $z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$, въ функціяхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+k}} = p_{m+k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-m, \quad (7)$$

то должны имѣть мѣсто также слѣдующія равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

такъ какъ въ уравненіяхъ (5) переменныя величины x_1, x_2, \dots, x_m являются независимыми. Такимъ образомъ разсматриваемая задача приводится къ разысканію указанныхъ значений z и p_{m+k} , удовлетворяющихъ условіямъ (7). Для этого *необходимо и достаточно*, какъ доказано въ моихъ упомянутыхъ выше изслѣдованіяхъ¹⁾, исключить изъ перваго уравненія (5) $n-m$ произвольныхъ постоянныхъ, при помощи $n-m$ уравненій $x_{m+k} = \varphi_k$, такимъ образомъ, чтобы уничтожались тождественно слѣдующія выраженія

$$U_c = \frac{\partial z}{\partial C} - \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C},$$

соотвѣтствующія всѣмъ исключаемымъ произвольнымъ постояннымъ величинамъ C . Если кромѣ того всѣ функціи U_c , соотвѣтствующія всѣмъ $n-m+1$ остальнымъ произвольнымъ постояннымъ C , отличны отъ нуля, то въ такомъ случаѣ полученный результатъ исключенія представляетъ *полный интегралъ* Лагранжа изслѣдуемой системы уравненій (1).

Само собою разумѣется, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ самый видъ уравненій (5) указываетъ непосредственно, какія произвольныя постоянныя слѣдуетъ исключить, чтобы получить искомый интегралъ. Что касается общаго случая то, для рѣшенія разсматриваемаго вопроса здѣсь слѣдуетъ изслѣдовать свойства функцій U_c , которыя доказываютъ существованіе цѣлага ряда произвольныхъ постоянныхъ, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ, необходимымъ для рѣшенія задачи, и представляютъ обобщеніе нашихъ предыдущихъ изслѣдованій.

3. Мы начнемъ съ вычисленія производныхъ по x_1, x_2, \dots, x_m функціи U_c , которая зависитъ только отъ послѣднихъ переменныхъ, въ силу уравненій (5). Легко видѣть, что искомыя производныя приводятся къ слѣдующему виду.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} \cdot \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i} - \frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right). \end{aligned}$$

¹⁾ *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 80—82,
Mémoire sur l'intégration des équations..., p.p. 441—443.

Обозначимъ черезъ M_i^h миноръ опредѣлителя Δ , соответствующій его элементу $\frac{\partial F_h}{\partial p_i}$, со включеніемъ своего знака. Въ такомъ случаѣ получаемъ слѣдующія равенства

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_i}, & \Delta_i &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial z}, \\ \Delta_{ik} &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}}, & \Delta_i^s &\equiv \sum_{h=1}^m M_i^h \frac{\partial F_h}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

Подставляя въ послѣднее выраженіе $\frac{\partial U_c}{\partial x_i}$, вмѣсто производныхъ

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_{m+k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial p_{m+k}}{\partial x_i},$$

соотвѣтственно ихъ значенія, изъ уравненій (6),

$$Z^i, X_{m+k}^i, P_{m+k}^i,$$

получаемъ, въ силу предыдущихъ выраженій опредѣлителей Δ , Δ_i , Δ_{ik} , Δ_i^s , слѣдующій результатъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c}{\partial x_i} &= \frac{\partial p_i}{\partial C} + \frac{1}{\Delta} \sum_{h=1}^m M_i^h \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} \right) + \\ &+ \frac{\Delta_i}{\Delta} \sum_{k=1}^{n-m} p_{m+k} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C}. \end{aligned}$$

Такъ какъ данныя уравненія (1) утождествляются на основаніи равенствъ (5), то имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-m} \left(\frac{\partial F_h}{\partial x_{m+k}} \frac{\partial x_{m+k}}{\partial C} + \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial p_{m+k}}{\partial C} \right) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial C} + \\ + \frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial C} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

для каждой из произвольных постоянных C . Поэтому предыдущее выражение производных становится

$$\frac{\partial U_c}{\partial x_i} = -U_c \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \lg U_c = -\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

для всѣхъ значений i , отъ 1 до m . Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

для всѣхъ различныхъ значений показателей j и i , отъ 1 до m , которыя показываютъ, что выражение

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i}{\Delta} dx_i$$

представляетъ точный дифференціалъ¹⁾, въ силу уравненій (5). Обозначимъ этотъ точный дифференціалъ черезъ dV . Вслѣдствіе предыдущихъ выраженій производныхъ $\lg U_c$, получаемъ, при помощи квадратуры, слѣдующее равенство

$$U_c = U_c^0 e^{-\int_{V_0}^V dV}, \quad (8)$$

гдѣ U_c^0 V_0 обозначаютъ начальныя значенія функцій U_c и V .

Предыдущая зависимость упрощается, когда разсматриваемыя уравненія не зависятъ отъ переменной z . Какъ извѣстно, къ послѣднему случаю преобразовываются также и данныя уравненія (1) увеличеніемъ числа переменныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, введемъ вмѣсто z новую функцію v , всѣхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n, z , связанную съ ними слѣдующей зависимостью

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0.$$

¹⁾ Последнее выражение представляетъ обобщеніе изслѣдованнаго мною раньше точнаго дифференціала (см. *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 83.)

Обозначимъ черезъ q_s и q соответственно частныя производныя $\frac{\partial v}{\partial x_s}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$.

Въ силу данной зависимости, опредѣляющей новую функцію, прежнія производныя выражаются слѣдующимъ образомъ черезъ новыя производныя

$$p_s = -\frac{q_s}{q}.$$

Преобразованныя уравненія (1) остаются также въ *инволюціи*, такъ какъ имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства между скобками Пуассона, для преобразованныхъ уравненій, и скобками Вейлера, для данныхъ уравненій (1),

$$(F'_k, F'_h) = -\frac{1}{q} [F_k, F_h]',$$

при чемъ значки обозначаютъ результатъ подстановки, выполненной надъ выраженіями, при которыхъ поставлены эти значки.

Такъ какъ производная q отлична отъ нуля, то ограничивая наши изслѣдованія областью измѣненія переменныхъ, внутри которой частная производная q сохраняетъ конечное значеніе, заключаемъ изъ предыдущаго равенства, что условія инволюціи данныхъ уравненій (1) влекутъ за собой условія инволюціи преобразованныхъ уравненій. Такимъ образомъ система уравненій въ инволюціи (1) преобразовывается въ новую систему уравненій въ инволюціи, которая не заключаетъ болѣе зависимой переменной величины.

Для послѣднихъ уравненій очевидно формула (8) принимаетъ слѣдующій видъ

$$U_c = U_c^0,$$

гдѣ U_c^0 обозначаетъ начальное значеніе изслѣдуемой функціи U_c .

Мы ограничимъ наши изслѣдованія областью измѣненія переменныхъ величинъ, внутри которой интегралъ дифференціала dV сохраняетъ конечную опредѣленную величину. Такъ какъ, при этомъ условіи, выраженіе $e^{-\int_{v_0}^v dV}$ никогда не можетъ обратиться въ нуль, то, въ рассматриваемой области измѣненія нашихъ переменныхъ, функціи U_c обращаются въ нуль или отличны отъ нуля одновременно со своими начальными значеніями U_c^0 . Такимъ образомъ задача составленія полныхъ интеграловъ данныхъ уравненій (1) находится въ непосредственной зависимости отъ значенія выраженій U_c^0 .

4. Чтобы удовлетворить всѣмъ указаннымъ условіямъ, примемъ въ рассматриваемомъ интегралѣ (5) за произвольныя постоянныя величины начальныя значенія a_i , b_i и b соответственно слѣдующихъ выраженій

$$x_{m+i}, \quad p_{m+i}, \quad z = \sum_{k=1}^{n-m} x_{m+k} p_{m+k}.$$

Пусть, въ этомъ предположеніи, уравненія (5) приводятся къ виду

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m, a_1, a_2, \dots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \dots, \dots, b_{n-m}), \\ p_s &= \Phi_s(x_1, \dots, \dots, b_{n-m}), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad s=1, 2, \dots, n.$

Очевидно, что $n - m$ уравненій, отъ второго до $n - m + 1$ включительно, разрѣшимы относительно величинъ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} . Кромѣ того имѣють мѣсто слѣдующія тождества

$$U_{a_k}^0 = 0, \quad U_{b_k}^0 = a_k, \quad U_b^0 = 1,$$

$k=1, 2, \dots, n-m.$

Слѣдовательно, результатъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} изъ перваго уравненія (9), на основаніи слѣдующихъ за нимъ $n - m$ уравненій, представляетъ искомый полный интегралъ ¹⁾ данной системы (1).

Предположимъ, во-вторыхъ, что въ уравненіяхъ (9) постоянная b обозначаетъ начальное значеніе переменнй z , т. е.

$$b = z^0,$$

и что $n - m$ уравненій (9), отъ второго до $n - m + 1$ включительно, разрѣшимы относительно всѣхъ постоянныхъ b_1, b_2, \dots, b_{n-m} . Въ такомъ случаѣ очевидно, что результатъ исключенія, изъ перваго уравненія (9), ихъ значеній, опредѣленныхъ послѣдними уравненіями, представляетъ также искомый полный интегралъ.

Пусть, наконецъ, въ уравненіяхъ (9) постоянная b имѣетъ слѣдующее значеніе

$$b = z^0 = \sum_k a_k b_k,$$

гдѣ суммирование распространяется на показатели всѣхъ тѣхъ постоянныхъ b_k , относительно которыхъ разрѣшимы $n - m$ уравненій системы (9), отъ второго до $n - m + 1$ включительно. Въ такомъ случаѣ оче-

¹⁾ Ср. мое сочиненіе: *Объ интегрированіи...* стр. 85—86.

видно, что результатъ исключенія изъ перваго уравненія (9) указанныхъ значеній b_k и всѣхъ a_i , для которыхъ $i \geq k$, представляетъ также искомый полный интеграль.

5. Аналогично разысканію полныхъ интеграловъ изслѣдуемой системы уравненій (1), легко вывести также законъ составленія ихъ общаго интеграла. Представимъ интегральныя уравненія (5) въ слѣдующемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0, z^0, p_{m+1}^0, \dots, p_n^0), \\ x_{m+k} &= \Psi_k(x_1, \dots, \dots, p_n^0), \\ p_s &= \Phi_s(x_1, \dots, \dots, p_n^0), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad s=1, 2, \dots, n.$

Предположимъ далѣе, что произвольныя постоянныя величины x_{m+k}^0, z, p_{m+k}^0 связаны между собой слѣдующими зависимостями

$$\left. \begin{aligned} z^0 &= \Theta_0, \quad p_{m+k}^0 = \frac{\partial \Theta_0}{\partial x_{m+k}^0}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$k=1, 2, \dots, n-m,$

гдѣ Θ_0 обозначаетъ начальное значеніе функцій $\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$, соответствующее начальнымъ значеніямъ ея переменныхъ $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Кромѣ того необходимо должно удовлетворяться также условіе, чтобы опредѣляемыя формулами (11) значенія $z^0, p_{m+1}^0, p_{m+2}^0, \dots, p_n^0$ лежали внутри разсматриваемой нами области измѣненія нашихъ переменныхъ величинъ.

Уравненія (10), въ силу значеній (11), становятся

$$\left. \begin{aligned} z &= \Phi'(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0), \\ x_{m+k} &= \Psi_k'(x_1, x_2, \dots, \dots, x_n^0), \\ p_s &= \Phi_s'(x_1, \dots, \dots, x_n^0), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad s=1, 2, \dots, n.$

Очевидно, что $n-m$ уравненій послѣдней системы, отъ второго до $n-m+1$ включительно, разрѣшимы относительно постоянныхъ величинъ $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0$, такъ какъ функціи Ψ_k' принимаютъ послѣднія значенія для значеній $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ независимыхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_m , и, слѣдовательно, функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{\Psi'_1, \Psi'_2, \dots, \Psi'_{n-m}}{x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0} \right),$$

для послѣднихъ начальныхъ значеній, становится равнымъ единицѣ. Наконецъ, всѣ функціи

$$U_{x_{m+i}}^0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m,$$

уничтожаются тождественно, въ силу уравненій (11). Поэтому исключая $x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0$ изъ перваго уравненія (12), при помощи $n - m$ послѣдующихъ за нимъ уравненій, мы получаемъ рѣшеніе данной системы (1).

Легко убѣдиться, что полученное рѣшеніе представляетъ *общій интегралъ Коши*. Обозначимъ, въ самомъ дѣлѣ, черезъ

$$\theta(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

значеніе функціи θ , для начальныхъ значеній $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_m . Въ такомъ случаѣ очевидно, что, для послѣднихъ начальныхъ значеній, функція z и ея частныя производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_{m+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

принимаютъ соотвѣтственно значенія функціи θ и ея частныхъ производныхъ по $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_{m+1}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_{m+2}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_n}.$$

Такимъ образомъ полученное рѣшеніе представляетъ дѣйствительно *общій интегралъ Коши*.

Г Л А В А VII.

Интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ и каноническихъ уравненій. Усовершенствованный С. Ли способъ Якоби-Майера интегрированія уравненій съ частными производными.

1. Каноническія дифференціальныя уравненія обыкновенныя и въ полныхъ дифференціалахъ представляютъ частный случай дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣтствующихъ частнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ перваго порядка, представленнымъ въ видѣ, разрѣшенномъ относительно частныхъ производныхъ. Поэтому теорія дифференціальныхъ уравненій характеристикъ представляетъ полную аналогію съ теоріей каноническихъ уравненій. Какъ хорошо извѣстно, существуетъ тѣсная взаимная зависимость между задачами интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка и соотвѣтствующими дифференціальными уравненіями характеристикъ¹⁾. Въ предыдущей главѣ мы занимались вопросомъ о составленіи полного интеграла дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, исходя изъ общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Въ настоящей главѣ мы имѣемъ въ виду привести нѣсколько соображеній по поводу обратной задачи составленія общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, послѣ того какъ проинтегрировано соотвѣтствующее уравненіе съ частными производными. Съ рѣшеніемъ этой послѣдней задачи также тѣсно связаны имена *Гамильтона*, *Якоби* и *Лиувилля*, которые подошли, независимо другъ отъ друга и съ различныхъ точекъ зрѣнія, къ рѣшенію разсматриваемой задачи, какъ объ этомъ можно судить, сопоставляя сочиненія этихъ знаменитыхъ геометровъ.

Всѣ первоначальные труды ихъ относятся къ дифференціальнымъ уравненіямъ динамики. Первыми, по времени своего опубликованія, являются изслѣдованіе Гамильтона: *On a general method in dynamics*²⁾ и письмо Якоби Парижской Академіи Наукъ: *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps*³⁾.

1) См. мои изслѣдованія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными...*, *Mémoire sur l'intégration des équations...* (*Journal Jordan*, 1899), *Sur les théorèmes de Jacobi et Liouville* (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1903).

2) *Philosophical Transactions*, 1834—1835.

3) *Comptes rendus*, t. III, p. 59—61.

Jacobi.—*Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 33.

Въ указанномъ изслѣдованіи Гамильтонъ выражаетъ общій интегралъ системы обыкновенныхъ каноническихъ уравненій при помощи полного интеграла соответствующаго уравненія съ частными производными, при чемъ произвольными постоянными служатъ начальныя значенія переменныхъ. Что касается упомянутаго письма Якоби, то онъ показываетъ въ немъ, какъ, при помощи дифференцированія, составляется общій интегралъ канонической системы дифференціальныхъ уравненій движенія точки на плоскости, для которой извѣстны интегралъ живой силы и второй интегралъ, независящій отъ времени. Въ своихъ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ ¹⁾ Якоби развилъ точку зрѣнія Гамильтона, принимая произвольныя величины, не представляющія начальныхъ значеній переменныхъ, за постоянныя интегрированія и распространяя разсматриваемую теорію на одно уравненіе съ частными производными общаго вида. Затѣмъ въ 1853 году Лиувиль опубликовалъ свою замѣтку ²⁾: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853*. Сущность послѣдней представляетъ распространеніе перваго вышеуказаннаго предложенія Якоби на каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій общаго вида. Въ этой статьѣ Лиувиль показываетъ, какъ составляется общій интегралъ обыкновенныхъ каноническихъ уравненій, когда извѣстна половина всѣхъ интеграловъ, при условіи, что послѣдніе находятся въ инволюціи. Кромѣ того Лиувиль дополняетъ свою замѣтку весьма цѣннымъ замѣчаніемъ относительно того случая, когда данныя интегралы разсматриваемой канонической системы неразрѣшимы относительно каноническихъ переменныхъ одного и того же класса. При этомъ Лиувиль указываетъ, что, въ своихъ лекціяхъ въ *Collège de France*, онъ изслѣдовалъ послѣдній случай во всей его общности. Болѣе подробное разсмотрѣніе этого послѣдняго случая находится въ диссертациіи Лафона ³⁾. Наконецъ, мы считаемъ необходимымъ поставить въ тѣсную связь съ послѣднимъ вопросомъ изслѣдованія Майера, Бертрана и Дарбу, упомянутыя нами выше, при изложеніи теоріи характеристикъ и къ которымъ намъ придется еще разъ возвратиться, устанавливая ихъ взаимное соотношеніе съ теоріей полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

¹⁾ *Jacobi*.—*Ueber die Reduction der integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer zahl Variabeln auf die integration eines einzigen systemes gewöhnlicher Differenzialgleichungen* (*Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 57).

Jacobi.—*Vorlesungen über Dynamik*. Zweite, revidirte Ausgabe. Berlin, 1884, Zwanzigste Vorlesung, S. 157.

²⁾ *Journal Liouville*, t. XX, 1855, p. 137.

³⁾ *Lafon, A.*—*Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique*. Thèse. Paris 1854.

Что касается двухъ различныхъ точекъ отправленія, которыя мы здѣсь отмѣтили, при составленіи общаго интеграла каноническихъ дифференціальныхъ уравненій, то оба разсматриваемыхъ предложенія Гамильтона-Якоби и Якоби-Лиувилля не представляютъ существеннаго различія. Въ самомъ дѣлѣ, первая теорія исходитъ изъ полнаго интеграла уравненія съ частными производными, тогда какъ Лиувиль принимаетъ за основаніе интегралы въ инволюціи соотвѣтствующей канонической системы, число которыхъ равно порядку послѣдней. Легко видѣть однако, что какъ послѣдніе интегралы такъ и полный интегралъ соотвѣтствующаго частнаго уравненія представляютъ эквивалентные элементы, въ смыслѣ интегрированія послѣдняго уравненія. Кромѣ того мы установимъ далѣе такое же аналогичное соотвѣтствіе между отмѣченнымъ выше частнымъ случаемъ Лиувилля и полными интегралами С. Ли.

2. Мы начнемъ съ изложенія новаго, весьма простаго доказательства разсматриваемыхъ предложеній о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ. Всѣ хорошо извѣстныя доказательства послѣднихъ предложеній представляютъ непосредственную повѣрку формулъ, видъ которыхъ дается предварительно. Легко однако иначе поставить вопросъ, задавшись цѣлью вычислить искомые интегралы, не предполагая напередъ извѣстнымъ ихъ видъ.

Пусть имѣемъ слѣдующее уравненіе

$$p + H(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad (1)$$

гдѣ переменныя p, p_1, p_2, \dots, p_n обозначаютъ частныя производныя перваго порядка функции z соотвѣтственно по независимымъ переменнымъ t, x_1, x_2, \dots, x_n .

Составляемъ соотвѣтствующую каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Предположимъ, что полный интегралъ уравненія (1) представляется уравненіемъ

$$z = V(t, x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_n) + b, \quad (3)$$

гдѣ b_1, b_2, \dots, b_n, b обозначаютъ $n + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \dots, b_n} \right) \quad (4)$$

отличенъ отъ нуля. Въ такомъ случаѣ, какъ извѣстно, уравненія

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, \dots, b_n и приводятъ къ n различнымъ интеграламъ въ инволюціи конической системы (2)

$$F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = b_i, \quad \left. \begin{array}{l} \\ i=1, 2, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Обратно эти послѣдніе интегралы разрѣшимы очевидно относительно всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n .

Такимъ образомъ, благодаря извѣстному полному интегралу частнаго уравненія (1), становятся извѣстными n интеграловъ канонической системы (2). Поэтому задача интегрированія послѣдней приводится къ составленію n различныхъ дифференціальныхъ зависимостей, интегрированіе которыхъ приводило бы къ n остальнымъ искомымъ интеграламъ. Съ этою цѣлью составляемъ тождество

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H \left(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0,$$

которое получается изъ даннаго уравненія (1), при помощи подстановки его рѣшенія (3).

Дифференцируя послѣднее тождество по b_1, b_2, \dots, b_n , получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial b_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial b_s} = 0, \quad s=1, 2, \dots, n.$$

Въ силу уравненій интегрируемой системы (2), послѣднія тождества преобразовываются въ систему n слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = 0, \\ s=1, 2, \dots, n.$$

Какъ легко видѣть, первыя части послѣднихъ уравненій представляють точныя производныя, и мы приводимъ разсматриваемыя уравненія къ слѣдующему виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial b_s} \right) = 0, \quad s=1, 2, \dots, n.$$

Интегрированіе послѣднихъ уравненій даетъ искомыя интегральныя уравненія изслѣдуемой канонической системы (2)

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s=1, 2, \dots, n,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_n обозначаютъ n произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Легко видѣть, что получаемые отсюда интегралы различны. Это слѣдуетъ изъ того, что послѣднія уравненія не зависятъ отъ каноническихъ переменныхъ второго класса и разрѣшмы относительно переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n , вслѣдствіе введеннаго предположенія о неравенствѣ нулю определителя (4).

Въ изложенномъ сейчасъ доказательствѣ мы исходили изъ полного интеграла уравненія (1). Мы дадимъ еще второй способъ разысканія общаго интеграла канонической системы (2), принимая за основаніе ея n интеграловъ въ инволюціи (5). Съ этою цѣлью начнемъ съ разсмотрѣнія свойствъ искомыхъ интеграловъ.

Замѣтимъ прежде всего, что функціи

$$p + H, F_1, F_2, \dots, F_n \tag{6}$$

находятся въ инволюціи. Поэтому слѣдующія $n + 1$ уравненій съ частными производными функціи f

$$(p + H, f) = 0, \\ (F_i, f) = \begin{cases} 0, & i=1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n, \\ 1, & i=s, \end{cases}$$

образуютъ нормальную систему, допускающую n различныхъ, отличныхъ отъ функцій (6) интеграловъ, которые обозначимъ соотвѣтственно черезъ

$$f_1, f_2, \dots, f_n.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ отсюда убѣждаемся также въ существованіи *n* слѣдующихъ интеграловъ канонической системы (2)

$$f_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = a_s, \\ s = 1, 2, \dots, n,$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Каждый изъ этихъ интеграловъ находится въ союзѣ (conjuguée) съ однимъ изъ интеграловъ (5) и въ инволюціи съ остальными изъ нихъ.

Убѣдившись въ существованіи послѣднихъ интеграловъ, легко ихъ вычислить, исходя изъ того, что каждая функція f_s опредѣляется уравненіями

$$\left. \begin{aligned} (p + H, f_s) &= 0, \\ (F_i, f_s) &= \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n, \\ 1, & i = s. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Такъ какъ, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ, интегралы (5) разрѣшимы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , то функциональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_n}{p_1, p_2, \dots, p_n} \right) \quad (8)$$

долженъ быть отличнымъ отъ нуля. Преобразовываемъ уравненія (7) къ новымъ переменнымъ, принимая b_1, b_2, \dots, b_n за новыя переменныя вмѣсто p_1, p_2, \dots, p_n , и обозначимъ черезъ θ_s значеніе преобразованной функціи f_s . Въ силу свойствъ функцій (6), преобразованная система уравненій (7) становится

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Съ другой стороны значенія переменныхъ p, p_1, p_2, \dots, p_n опредѣляемыя уравненіями (1) и (5) какъ функціи величинъ

$$t, x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_n,$$

утождествляютъ эти послѣднія уравненія. Дифференцируя полученныя такимъ образомъ тождества по величинамъ b_1, b_2, \dots, b_n , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Вычитая послѣднія тождества соответственно изъ предыдущихъ, получаемъ тождества

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

для всѣхъ значеній s ; отъ 1 до n . Отсюда, вследствие неравенства нулю определителя (8), вытекаютъ слѣдующія тождества

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до n . Такъ какъ опредѣляемые уравненіями (1) и (5) значенія переменныхъ p, p_1, p_2, \dots, p_n удовлетворяютъ попарно условіямъ

$$\frac{\partial p_r}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_r},$$

то, дифференцируя послѣднія по b_1, b_2, \dots, b_n , получаемъ новыя условія которыя показываютъ, что уравненія (9) интегрируемы. Поэтому функции θ_s опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dx_1 + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial b_s} dx_n \right),$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины.

Какъ легко видѣть, найденныя значенія функцій θ выражаются также слѣдующимъ образомъ, при помощи полного интеграла (3),

$$\theta_s = \frac{\partial V}{\partial b_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Чтобы получить отсюда значенія функцій f_s , остается совершить обратное преобразование переменныхъ, замѣнивъ величины b_1, b_2, \dots, b_n соответственно ихъ функциональными значеніями F_1, F_2, \dots, F_n . Наконецъ, только что изложенное доказательство становится болѣе простымъ, вслѣдствіе симметричности вычислений, если за исходное принять слѣдующее дифференціальное уравненіе общаго вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

Соотвѣтствующія дифференціальныя уравненія характеристикъ становятся

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}.$$

Пусть имѣемъ n слѣдующихъ различныхъ интеграловъ въ инволюціи послѣдней системы

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = b_i, \\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

гдѣ F_0, b_0 условно обозначаютъ значенія F, b и $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ представляютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ. Уравненія, служащія для опредѣленія остальныхъ искомымъ $n-1$ интеграловъ f_1, f_2, \dots, f_{n-1} , принимаютъ видъ

$$(F_i, f_s) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, 2, \dots, s-1, \quad s+1, \dots, n-1, \\ 1, & i = s, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Предполагая существованіе слѣдующаго неравенства

$$D \left(\frac{F, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}}{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n} \right) \geq 0,$$

принимаемъ величины $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ за новыя переменныя, вмѣсто p_1, p_2, \dots, p_n . Мы приходимъ такимъ образомъ къ двумъ различнымъ системамъ слѣдующихъ равенствъ

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Вычитая равенства второй строки соответственно из равенств первой строки, получаемъ слѣдующія уравненія

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$

для всѣхъ различныхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Въ силу неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, получаемъ новыя уравненія

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s},$$

$k = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, n-1,$

которыя и опредѣляютъ искомыя интегралы при помощи квадратуръ.

3. Последнее доказательство распространяется также на случай, отмѣченный Лиувилемъ, когда извѣстные интегралы (5) канонической системы (2) разрѣшимы относительно каноническихъ переменныхъ различныхъ классовъ, но при этомъ различныхъ значковъ. Такъ предположимъ, на примѣръ, что уравненія (5) разрѣшимы относительно переменныхъ величинъ

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n,$$

такъ что слѣдующій функціональный опредѣлитель

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_{n-m}, F_{n-m+1}, \dots, F_n}{p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n} \right)$$

отличенъ отъ нуля. Возвращаясь къ уравненіямъ (7), опредѣляющимъ искомыя функціи f_s , вводимъ b_1, b_2, \dots, b_n какъ новыя переменныя вмѣсто величинъ $p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n$. Преобразованныя уравненія (7) становятся

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{r=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Кромѣ того мы имѣемъ еще рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}} \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & i \neq s, \\ 1, & i = s. \end{cases}$$

Отсюда слѣдуютъ новыя равенства

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) -$$

$$- \sum_{r=1}^m \frac{\partial H}{\partial x_{n-m+r}} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial b_s} \right) - \sum_{r=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_{n-m+r}} \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} + \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s} \right) = 0,$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значений s , отъ 1 до n . Вслѣдствіе неравенства нулю предыдущаго опредѣлителя, послѣдняя система приводитъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-m+r}} = - \frac{\partial x_{n-m+r}}{\partial b_s},$$

$k = 1, 2, \dots, n-m, \quad r = 1, 2, \dots, m,$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до n .

Какъ извѣстно изъ теоріи касательныхъ преобразованій, система уравненій (1) и (5) остается также въ инволюціи, если каноническія переменныя подраздѣлить на два класса, изъ которыхъ каждый соответствуетъ одной изъ двухъ слѣдующихъ строкъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \quad -p_{n-m+1}, -p_{n-m+2}, \dots, -p_n,$$

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-m}, \quad x_{n-m+1}, \quad x_{n-m+2}, \dots, \quad x_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что послѣднія написанныя уравненія, служащія для опредѣленія функций θ_s , образуютъ интегрируемую систему. Это заключеніе, независимо отъ теории касательныхъ преобразованій, слѣдуетъ также непосредственно изъ самаго факта существованія функций θ_s , доказаннаго выше для соответствующихъ имъ значеній функций f_s . Такимъ образомъ искомыя функции опредѣляются при помощи слѣдующихъ квадратуръ

$$\theta_s = \int \left(\frac{\partial p}{\partial b_s} dt + \frac{\partial p_1}{\partial b_s} dx_1 + \dots + \frac{\partial p_{n-m}}{\partial b_s} dx_{n-m} - \right. \\ \left. - \frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial b_s} dp_{n-m+1} - \dots - \frac{\partial x_n}{\partial b_s} dp_n \right),$$

$s = 1, 2, \dots, n,$

гдѣ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины.

Легко представить послѣднія выраженія при помощи одной функции. Въ самомъ дѣлѣ, проинтегрируемъ точный дифференціалъ

$$dz = p dt + p_1 dx_1 + \dots + p_{n-m} dx_{n-m} - x_{n-m+1} dp_{n-m+1} - \dots - x_n dp_n,$$

гдѣ $p, p_1, \dots, p_{n-m}, x_{n-m+1}, \dots, x_n$ обозначаютъ значенія, опредѣляемыя уравненіями (1) и (5). Напишемъ интегралъ послѣдняго дифференціала въ слѣдующемъ видѣ

$$z = U(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, p_{n-m+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_n) + b,$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину. Въ такомъ случаѣ функции θ_s выражаются слѣдующимъ образомъ

$$\theta_s = \frac{\partial U}{\partial b_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому искомыя интегральныя уравненія канонической системы (2) становятся

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_n обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Возьмемъ, на примѣръ, слѣдующую каноническую систему третьяго порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$i=1, 2, 3,$

соответствующую частному дифференциальному уравнению

$$p + H = 0,$$

гдѣ функція H имѣетъ слѣдующее значеніе

$$H = \frac{x_2 x_3 - x_1}{t} p_1 + \frac{x_1 x_3}{t} \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{x_3^2}{t} \frac{p_1 p_3}{p_2}.$$

Разсматриваемая каноническая система имѣетъ три интеграла въ инволюціи

$$\frac{tp_2}{p_1} = b_1, \quad t\left(1 - \frac{p_2}{x_3 p_1}\right) = b_2, \quad \frac{tp_2^2}{x_3 p_1} = b_3.$$

Послѣдніе, совмѣстно съ нашимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, опредѣляютъ значенія переменныхъ p , p_1 , p_2 , x_3 слѣдующимъ образомъ

$$p = \frac{b_1^2 p_3 - b_3 (b_1 x_2 + b_2 x_1)}{b_1 (t - b_2)^2},$$

$$p_1 = \frac{b_3 t}{b_1 (t - b_2)}, \quad p_2 = \frac{b_3}{t - b_2}, \quad x_3 = \frac{b_1}{t - b_2}.$$

Стало-быть, въ настоящемъ случаѣ, функція U получаетъ значеніе

$$U = \frac{b_3 (b_1 x_2 + t x_1) - b_1^2 p_3}{b_1 (t - b_2)} + b.$$

Поэтому слѣдующія три уравненія

$$\frac{\partial U}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial U}{\partial b_2} = a_2, \quad \frac{\partial U}{\partial b_3} = a_3$$

опредѣляютъ искомые три интеграла интегрируемой канонической системы

$$-(x_1 p_1 + x_3 p_3) \frac{p_1}{tp_2} = a_1,$$

$$(x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3) \frac{x_3 p_1}{tp_2} = a_2,$$

$$(x_1 p_1 + x_2 p_2) \frac{x_3 p_1}{tp_2^2} = a_3.$$

Если принять за исходные интегралы нашей канонической системы первые два данных интеграла и послѣдній изъ трехъ только что полученныхъ, которые образуютъ совместно систему трехъ уравненій въ инволюціи, разрѣшимыхъ относительно переменныхъ p_1, x_2, x_3 , то соответствующее значеніе *характеристической функции* становится

$$U' = \left(\frac{1}{b_1} t x_1 - a_3 t + b_2 a_3 \right) p_2 - \frac{b_1 p_3}{t - b_2}.$$

Въ такомъ случаѣ три искомые интеграла опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial U'}{\partial b_1} = a_1, \quad \frac{\partial U'}{\partial b_2} = a_2, \quad \frac{\partial U'}{\partial a_3} = b_3,$$

которыя представляютъ остальные три приведенные уже выше интеграла изслѣдуемой канонической системы.

4. Всѣ приведенныя доказательства распространяются весьма легко на системы уравненій съ частными производными и на соответствующія дифференціальныя уравненія характеристикъ.

Начнемъ съ разсмотрѣнія слѣдующей нормальной системы m дифференціальныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} p_i + H_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m, \quad (m < n). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Составляемъ соответствующую послѣднимъ каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i, \\ dp_{m+k} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+k}} dx_i, \\ k &= 1, 2, \dots, n-m. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Пусть полный интегралъ системы (10) представляется равенствомъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}) + b,$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, b$ обозначаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \geq 0. \quad (12)$$

Какъ легко видѣть, производныя уравненія

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-m,$$

опредѣляютъ $n - m$ различныхъ интеграловъ канонической системы (11).
Ея остальные $n - m$ интеграловъ получаются слѣдующимъ образомъ.

Дифференцируя по всѣмъ величинамъ b_1, b_2, \dots, b_{n-m} тождества

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + H_i \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

получаемъ рядъ слѣдующихъ новыхъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n-m.$$

Умножая послѣднія уравненія соотвѣтственно на dx_i и складывая результаты, соотвѣтствующе всѣмъ различнымъ значкамъ i , отъ 1 до m , получаемъ $n - m$ тождествъ

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-m.$$

При помощи послѣднихъ тождествъ, первыя $n - m$ уравненій (11) преобразовываются въ слѣдующія дифференціальныя уравненія

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} dx_{m+k} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n-m,$$

лѣвыя части которыхъ представляютъ точные дифференциалы

$$d \left(\frac{\partial V}{\partial b_s} \right) = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n - m.$$

Интегрируя послѣднія, находимъ искомыя интегральныя уравненія

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n - m,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ $n - m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Полученныя уравненія разрѣшимъ относительно $n - m$ переменныхъ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$; вслѣдствіе неравенства (12), и опредѣляютъ такимъ образомъ систему $n - m$ новыхъ различныхъ интеграловъ канонической системы (11), отличныхъ отъ прежнихъ, указанныхъ выше интеграловъ.

Распространимъ послѣднее доказательство на замкнутую систему уравненій, зависящихъ явно отъ функциональной переменнѣй величины z ,

$$p_i + H_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m, \quad (m < n), \end{array} \right\} \quad (13)$$

которыя удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ ¹⁾

$$\frac{\partial H_h}{\partial x_i} - \frac{\partial H_h}{\partial z} H_i - \frac{\partial H_i}{\partial x_h} + \frac{\partial H_i}{\partial z} H_h + [H_k, H_h] = 0,$$

для всѣхъ различныхъ значеній h и i , отъ 1 до m .

Составляемъ соотвѣтствующую обобщенную каноническую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} dx_i, \\ dp_{m+k} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+k}} dx_i, \\ k &= 1, 2, \dots, n - m, \\ dz &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{r=1}^{n-m} p_{m+r} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} - H_i \right) dx_i. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...*, стр. 48.

Пусть полный интеграл системы (13) представляется уравнением

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \quad (15)$$

гдѣ $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ обозначаютъ $n - m + 1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, при чемъ

$$D \left(\begin{array}{c} V, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \\ b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m} \end{array} \right) \geq 0. \quad (16)$$

Очевидно, что совокупность уравнений (15)-ого и его первыхъ производныхъ уравнений по $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ опредѣляетъ $n - m + 1$ различныхъ интеграловъ системы (14). Для разысканія остальныхъ $n - m$ интеграловъ, дифференцируемъ по всѣмъ величинамъ $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ тождества, которыя получаются изъ данныхъ уравнений (13), вслѣдствіе подстановки въ нихъ рѣшенія (15). Такимъ образомъ получается рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} + \frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} = 0, \\ s = 1, 2, \dots, n-m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x_i} + \frac{\partial H_i}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x_{m+k}} = 0,$$

для всѣхъ значеній i , отъ 1 до n .

Предположимъ, что, внутри разсматриваемой нами области измѣненія переменныхъ величинъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе.

Исключая изъ предыдущихъ тождествъ первой строки производную $\frac{\partial H_i}{\partial z}$, въ силу послѣдняго тождества, и раздѣляя полученный результатъ на $\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2$, приходимъ къ новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2, \dots, n-m.$$

Умножая соответственно на dx_i тождества, соответствующія значку i , и складывая ихъ, получаемъ, въ силу $n - m$ первыхъ уравненій (14), систему слѣдующихъ дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) dx_{m+k} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n - m.$

Полученныя уравненія приводятся къ слѣдующему виду уравненій въ точныхъ дифференціалахъ

$$d \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n - m.$

Интегрируя послѣднія уравненія, получаемъ интегральныя уравненія, опредѣляющія искомыя интегралы обобщенной каноническѣй системы (14),

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} = a_s, \text{ или } \frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s \frac{\partial V}{\partial b},$$

$s = 1, 2, \dots, n - m.$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ различныя произвольныя постоянныя величины. Какъ хорошо извѣстно ¹⁾, полученныя уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, въ силу неравенства (16), и, слѣдовательно, опредѣляемые ими интегралы системы (14) различны, а также отличны отъ прежнихъ $n - m + 1$ интеграловъ, такъ какъ не зависятъ отъ переменныхъ p_{m+k} .

Возьмемъ, наконецъ, систему m дифференціальныхъ уравненій въ инволюціи, не зависящихъ отъ z и представленныхъ въ общемъ видѣ

$$\left. \begin{aligned} F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ h = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

¹⁾ См. мое сочинение: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899. p.p. 460—461).

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшмы относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , такъ что имѣеть мѣсто неравенство

$$\Delta \equiv D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0.$$

Составляемъ соответствующую систему уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (см. стр. 148)

$$\left. \begin{aligned} dx_{m+k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} dx_i, \\ dp_r &= - \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^r}{\Delta} dx_i, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$k=1, 2, \dots, n-m, \quad r=1, 2, \dots, n,$

гдѣ Δ_{ik}, Δ_i^r обозначаютъ прежнія значенія определителей (см. ст. 147), съ тою только разницею, что здѣсь функции F_h не зависятъ отъ z .

Предположимъ извѣстнымъ полный интегралъ данныхъ уравненій (17)-ыхъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}) + b,$$

гдѣ $b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, b$ обозначаютъ $n-m+1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ, при чемъ удовлетворяется условіе

$$D \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \dots, b_{n-m}} \right) \geq 0.$$

Само собою разумѣется, что уравненія

$$F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_h,$$

$$h=1, 2, \dots, m,$$

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$$k=1, 2, \dots, n-m,$$

опредѣляютъ n различныхъ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18), причемъ C_1, C_2, \dots, C_m обозначаютъ m различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Что касается остальныхъ $n-m$ интеграловъ послѣдней системы (18), то они вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Мы имѣемъ тождества

$$F_h \left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) = 0, \\ h=1, 2, \dots, m.$$

Дифференцируя ихъ послѣдовательно по b_1, b_2, \dots, b_{n-m} , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Вслѣдствіе неравенства нулю определителя Δ , разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i}, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

и пользуясь прежними значениями определителей Δ_{ik} , преобразовываемъ наши тождества въ слѣдующія новыя тождества

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} = 0, \\ i=1, 2, \dots, m,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Умножая послѣднія тождества соответственно на dx_i и складывая результаты, получаемъ, въ силу первыхъ $n-m$ уравненій (18), слѣдующую систему дифференціальныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_s \partial x_{m+k}} dx_{m+k} = 0,$$

или

$$d \left(\frac{\partial V}{\partial b_s} \right) = 0,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Поэтому становится очевиднымъ, что остальные искомыя $n-m$ интеграловъ системы (18) опредѣляются слѣдующими $n-m$ различными уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} = a_s, \quad s = 1, 2, \dots, n - m,$$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ $n - m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ ¹⁾.

Доказанныя предложенія легко распространяются также на системы частныхъ дифференціальныхъ уравненій въ инволюці общаго вида, заключающихъ явно неизвѣстную функцію z .

Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, систему m уравненій въ инволюці, зависящихъ отъ неизвѣстной функціи z ,

$$F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, m, \end{array} \right\} \quad (19)$$

для которыхъ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\Delta \equiv D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0.$$

Соотвѣтствующая система въ полныхъ дифференціалахъ представляется совокупностью прежнихъ уравненій (18) и слѣдующаго дополнительнаго

$$dz = - \sum_{i=1}^m \left(p_i + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} p_{m+k} \right), \quad (20)$$

при чемъ опредѣлители Δ , Δ_{ik} и Δ_i^r отличаются, въ настоящемъ случаѣ, отъ предыдущихъ ихъ значеній тѣмъ, что функціи F_h зависятъ здѣсь отъ переменнй z .

Пусть полный интегралъ системы (19) представляется уравненіемъ

$$z = V(x_1, x_2, \dots, x_n, b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}), \quad (21)$$

гдѣ $b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ обозначаютъ произвольныя постоянныя величины, и кромѣ того существуетъ условіе

$$D \left(\frac{V, \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}} \right) \geq 0.$$

¹⁾ Этотъ результатъ былъ опубликованъ мною въ замѣткѣ: *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles (Comptes rendus, 24 juillet 1899)*.

Совокупность уравнения (21) и n слѣдующихъ

$$F_h(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = C_h,$$

$$h = 1, 2, \dots, n - m,$$

$$p_{m+k} = \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n - m,$$

опредѣляютъ $n + 1$ интеграловъ системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ (18) и (20), гдѣ C_1, C_2, \dots, C_m обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Остальные $n - m$ интеграловъ послѣдней системы вычисляются на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Составляемъ тождества, которыя имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній h , отъ 1 до m ,

$$\frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b_s} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b_s} = 0,$$

$$s = 1, 2, \dots, n - m,$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial b} + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k} \partial b} = 0,$$

Предполагая, что, въ разсматриваемой нами области измененія переменныхъ, производная $\frac{\partial V}{\partial b}$ сохраняетъ конечное значеніе, получаемъ аналогично предыдущему (см. стр. 171) новыя тождества для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n - m$,

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial F_h}{\partial p_{m+k}} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

$$h = 1, 2, \dots, m.$$

Такъ какъ определитель Δ отличенъ отъ нуля, то, разрѣшая послѣднія равенства относительно производныхъ

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и пользуясь прежними значениями определителей Δ_{ik} , получаемъ тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \frac{\partial}{\partial x_{m+k}} \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n - m$. Совершенно аналогично предыдущему умножаемъ послѣднія тождества соотвѣтственно на dx_i и складываемъ полученные результаты. При помощи полученныхъ такимъ образомъ тождествъ, дифференціальныя уравненія, соотвѣтствующія первымъ $n - m$ уравненіямъ (18), преобразовываются въ слѣдующія

$$d \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial b_s}}{\frac{\partial V}{\partial b}} \right) = 0,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n - m$. Такимъ образомъ искомые интегралы опредѣляются уравненіями

$$\frac{\partial V}{\partial b_s} - a_s \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, n - m,$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-m} обозначаютъ $n - m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Подобно тому какъ мы только что распространили на системы уравненій съ частными производными первое изъ изложенныхъ доказательствъ теоремы Якоби, такъ совершенно аналогично возможно обобщить приведенное нами доказательство предложеній Ливилля. Это обобщеніе не представляетъ никакихъ затрудненій, когда рассматриваемыя уравненія явно не зависятъ отъ функциональной переменнѣй z . Что касается случая, когда переменная z входитъ въ данныя уравненія, тогда равенства, выражающія каноническія свойства интеграловъ, соотвѣтствующихъ дифференціальнымъ уравненіямъ характеристикъ, представляются въ болѣе сложномъ видѣ. Для выраженія этихъ свойствъ въ рассматриваемомъ случаѣ оказывается необходимымъ составить выраженіе полного интеграла соотвѣтствующихъ частныхъ дифференціальныхъ уравненій. То же самое замѣчаніе относится къ случаю Ливилля, когда данныя интегралы въ инволюціи разрѣшаются относительно каноническихъ переменныхъ съ различными значками и различныхъ классовъ. Этотъ случай

очевидно приводится къ первому, при помощи касательныхъ преобразований. Мы приходимъ такимъ образомъ въ обоихъ случаяхъ къ необходимости перейти къ тѣмъ же первоначальнымъ, исходнымъ условіямъ, на которыхъ основывались въ первомъ изъ данныхъ нами доказательствъ. Какъ намъ кажется, послѣднее, по простотѣ своей, повидимому не оставляетъ желать ничего лучшаго. Мы не станемъ входить въ виду этого въ дальнѣйшія подробности относительно доказательствъ изслѣдуемыхъ предложеній и перейдемъ къ разсмотрѣнію полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли.

5. Какъ видно изъ изложенныхъ выше соображеній, слѣдуетъ по справедливости приписать Лиувиллю честь первенства, воспользоваться идеей интегральныхъ собраній С. Ли ¹⁾. Дѣйствительно, въ своей упомянутой выше статьѣ: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique...*, Лиувилль предусмотрѣлъ случай полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, представляющихъ систему интеграловъ въ инволюціи канонической системы, которые неразрѣшимы относительно каноническихъ переменныхъ второго класса. При этомъ Лиувилль, и затѣмъ Лафонъ, разрѣшали представляющій здѣсь вопросъ въ самомъ общемъ видѣ, т. е. не ограничивались предположеніемъ, подобно С. Ли, что данные интегралы въ инволюціи не должны разрѣшаться относительно какихъ либо другихъ переменныхъ кромѣ тѣхъ, относительно которыхъ эти интегралы разрѣшимы, согласно съ сдѣланнымъ предположеніемъ. Такимъ образомъ Лиувилль предрѣшилъ вопросъ объ усовершенствованіи, внесенномъ С. Ли въ способъ интегрированія Якоби-Майера, еще за долго до его созданія и до развитія общей теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Только этимъ послѣднимъ обстоятельствомъ и возможно объяснить тотъ фактъ, что значеніе результатовъ Лиувилля не было оцѣнено раньше и что потребовался долгій промежутокъ времени, съ 50-ыхъ до 70-хъ годовъ прошлаго столѣтія, т. е. двадцатилѣтній періодъ въ развитіи теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, пока С. Ли не пришелъ къ аналогичнымъ результатамъ. Если я не ошибаюсь, то въ литературѣ разсматриваемой области математическаго анализа только здѣсь, на этихъ страницахъ моего изслѣдованія, приводятся впервые настоящія историко-критическія соображенія, устанавливающія сравнительную оцѣнку трудовъ Лиувилля и С. Ли. Этому послѣднему факту я также нахожу истолкованіе и объясняю его тѣмъ, что С. Ли облакалъ въ столь сложную форму изложеніе своихъ результатовъ, что ихъ практическое значеніе, сущность и взаимная связь съ трудами предыдущихъ изслѣдователей ускользаютъ отъ вниманія читателя.

¹⁾ См. мое сообщеніе: *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville* (Comptes rendus, 17 août 1903)

Чтобы восполнить отмѣченный пробѣлъ и установить преемственную зависимость между классической теоріей уравненій съ частными производными и изслѣдованіями С. Ли, мы продолжимъ на послѣдующихъ страницахъ изученіе полныхъ интеграловъ С. Ли.

Начнемъ съ разсмотрѣнія вопроса о составленіи общаго интеграла дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, на основаніи извѣстнаго полного интеграла С. Ли соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій и перейдемъ затѣмъ къ задачѣ о переходѣ отъ полного интеграла С. Ли къ полному интегралу Лагранжа.

Если производныя уравненія данной системы, въ пространствѣ $n + 1$ измѣреній, находятся въ инволюціи, то въ такомъ случаѣ поставленный нами вопросъ разрѣшается на основаніи изложенной выше теоріи касательныхъ преобразованій. Дѣйствительно, приводя полное интегральное собраніе С. Ли, соотвѣтствующее данному полному интегралу, къ совокупности $n + 1$ уравненій въ инволюціи, при помощи соображеній, аналогичныхъ изложеннымъ на страницахъ 54—57, легко затѣмъ получить искомый общій интеграль, какъ это показано у Goursat: *Leçons sur l'intégration...* (n° 108, p. p. 276—277). Составивъ общій интеграль дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, мы получаемъ затѣмъ извѣстнымъ образомъ полный интеграль Лагранжа соотвѣтствующихъ производныхъ уравненій, разсматриваемыхъ какъ дифференціальныя уравненія съ частными производными. Такимъ образомъ оба намѣченные вопроса разрѣшаются при помощи алгебраическихъ исключеній. Ходъ послѣднихъ вычисленій однако упрощается и распространяется также на замкнутыя системы уравненій, если принять во вниманіе свойства полныхъ интеграловъ С. Ли, аналогичныя свойствамъ полныхъ интеграловъ Лагранжа, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и приступаемъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$p_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = 0. \quad (22)$$

Составляемъ соотвѣтствующую ему каноническую систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, & \frac{dp_{r+1}}{dx_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{r+1}}, \\ & & & \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$r = 1, 2, \dots, n-1.$

Предположимъ, что данное уравненіе (22) имѣетъ полное рѣшеніе С. Ли q -аго класса, которое представляется слѣдующимъ образомъ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) + b, \\ x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ & i=1, 2, \dots, q, \quad k=1, 2, \dots, n-q, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

при чемъ b_1, b_2, \dots, b_n обозначаютъ n различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ, и пусть имѣть мѣсто слѣдующее неравенство

$$\Delta = D \left(\begin{array}{c} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_1, \dots, \psi_{n-q} \\ b_1, b_2, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_{n-1} \end{array} \right), \quad (25)$$

гдѣ обозначенія ψ имѣютъ прежнія указанная выше значенія

$$\psi_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}.$$

Легко показать, что общій интегралъ канонической системы (23) определяется совокупностью уравненій

$$\left. \begin{aligned} x_{n-q+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}), \\ & i=1, 2, \dots, q, \\ p_k &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \\ & k=2, 3, \dots, n-q, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} &= a_s, \\ & s=1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

иде a_1, a_2, \dots, a_{n-1} представляютъ $n-1$ новыхъ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Во-первыхъ, нетрудно убѣдиться, что послѣднія $n-1$ уравненій (26) разрѣшимы относительно переменныхъ

$$x_2, x_3, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n. \quad (27)$$

Въ самомъ дѣлѣ, вводимъ обозначенія

$$\theta_s \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i}$$

и составляемъ слѣдующій функциональный опредѣлитель

$$\Delta' \equiv D \left(\begin{array}{c} \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-q-1}, \theta_{n-q}, \dots, \theta_{n-1} \\ x_2, x_3, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n \end{array} \right).$$

Въ силу значений функций θ_s и ψ_k , становится очевиднымъ, что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}, \quad (28)$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-1$, значений k , отъ 1 до $n-q$ и значений i , отъ 1 до q . Поэтому опредѣлитель Δ' принимаетъ слѣдующее значеніе

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_1} & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \dots & - \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_2} & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & - \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} & - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-1}} & \dots & - \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Послѣ перестановки столбцовъ въ послѣднемъ опредѣлителѣ, легко видѣть, что онъ выражается слѣдующимъ образомъ черезъ опредѣлитель Δ

$$\Delta' = (-1)^{(n-q)q} \Delta.$$

Поэтому, въ силу неравенства (25), рассматриваемый опредѣлитель Δ' также отличенъ отъ нуля

$$\Delta' \not\equiv 0.$$

Слѣдовательно, послѣднія $n-1$ уравненія (26) разрѣшимы относительно переменныхъ (27), и, стало-быть, система уравненій (26) опредѣляетъ значенія всѣхъ переменныхъ величинъ

$$x_2, x_3, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n \quad (29)$$

въ функціяхъ независимой переменнѣной x_1 и $2(n-1)$ произвольныхъ постоянныхъ величинъ

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}.$$

Наша задача приводится такимъ образомъ къ доказательству, что послѣднія значенія представляютъ общій интеграль канонической системы (23). Убѣдиться въ этомъ легко различными способами. Мы начнемъ съ изложенія доказательства, аналогичнаго такъ называемому первому способу Якоби, въ классической теоріи частныхъ дифференціаль-ныхъ уравненій.

Функциональныя значенія переменныхъ (29), опредѣляемыя системой уравненій (26), будучи подставлены въ эти послѣднія уравненія, обращаютъ ихъ въ тождества. Полученныя такимъ образомъ тождества дифференцируемъ по x_1 и приходимъ къ новымъ тождествамъ, которыя, въ силу равенствъ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\sigma \partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\sigma \partial x_k} p_{n-q+i} \equiv \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\sigma \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\sigma \partial b_s} p_{n-q+i} \equiv \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial b_s},$$

принимаютъ слѣдующій видъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} \frac{dx_{r+1}}{dx_1}, \\ \frac{dp_k}{dx_1} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} \frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=2, 3, \dots, n-q, \quad s=1, 2, \dots, n-1.$

Съ другой стороны уравненія, соответствующія первымъ двумъ строкамъ системы (26), и уравненіе $p_1 = \psi_1$ утождествляютъ данное уравненіе (22), рассматриваемое какъ производное уравненіе С. Ли, и мы имѣемъ поэтому слѣдующее тождество

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}), \\ p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

справедливое для всѣхъ значений переменныхъ

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$$

и произвольныхъ постоянныхъ величинъ b_1, b_2, \dots, b_{n-1} . Поэтому дифференцируя написанное тождество по всѣмъ послѣднимъ величинамъ и принимая во вниманіе слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial p_{n-q+i}} \equiv -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, n-q,$$

получаемъ въ результатѣ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} = 0, \\ -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} = 0, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} = 0, \\ k=2, 3, \dots, n-q, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad s=i, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Сопоставляя тождества системъ (30) и (32), соответствующія однимъ и тѣмъ же значкамъ i, k, s , легко приходимъ къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} = \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{r+1}} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right),$$

$i=1, 2, \dots, q,$

$$\frac{dp_k}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \left(\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial x_k} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right) = 0,$$

$k=2, 3, \dots, n-q,$

$$\sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \left(\frac{dp_{n-q-i}}{dx_1} + \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \right) - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \psi_{r+1}}{\partial b_s} \left(\frac{dx_{r+1}}{dx_1} - \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right) = 0,$$

$s=1, 2, \dots, n-1.$

Въ силу неравенства (25), изъ послѣднихъ $n-1$ тождествъ вытекають слѣдующія тождества

$$\frac{dx_{r+1}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, \quad \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}},$$

$r=1, 2, \dots, n-q-1, \quad i=1, 2, \dots, q.$

На основаніи послѣднихъ, предыдущія двѣ системы тождествъ даютъ остальные искомыя тождества

$$\frac{dx_{n-q+i}}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}}, \quad \frac{dp_k}{dx_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_k},$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=2, 3, \dots, n-q.$

Такимъ образомъ полученныя тождества показываютъ, что значенія переменныхъ (29), опредѣляемыя уравненіями (26), утождествляютъ каноническую систему (23) и представляютъ, стало-быть, ея общій интеграль.

Легко дать еще другое новое, отличное отъ предыдущаго доказательство разсматриваемаго предложенія, приводящееся къ тому, чтобы показать, что разсматриваемая нами система уравненій (26) опредѣляетъ всѣ $2n-2$ интеграловъ каноническихъ уравненій (23). Въ силу неравенства (25), $n-1$ уравненій первой и второй строки системы (26) разрѣшимы относительно произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , и мы получаемъ такимъ образомъ $n-1$ слѣдующихъ интеграловъ уравненій (23)

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = b_s, \\ s=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Эти уравненія представляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи, какъ это слѣдуетъ изъ общихъ свойствъ полныхъ интегральныхъ собраній С. Ли, разсмотрѣнныхъ во второй главѣ. Поэтому скобки Пуассона, составленныя изъ всѣхъ функцій F_1, F_2, \dots, F_{n-1} попарно, уничтожаются тождественно, т. е. *существуетъ рядъ тождествъ*

$$(F_s, F_\sigma) = 0, \quad (34)$$

для всѣхъ различныхъ значеній s и σ , отъ 1 до $n-1$.

Внося функціональныя значенія b_s , опредѣляемыя уравненіями (33), въ послѣднія $n-1$ равенствъ (26), получаемъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} f_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = a_s, \\ s=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Мы приводимъ доказательство разсматриваемаго предложенія къ тому, чтобы показать, что послѣднія уравненія представляютъ $n-1$ остальныхъ интеграловъ системы (23), отличныхъ отъ интеграловъ (33).

Такъ какъ уравненія (33) и (35) являются преобразованиемъ системы (26), разрѣшимой относительно переменныхъ (29), то само собою разумѣется, что уравненія (35) представляютъ систему $n-1$ различныхъ равенствъ, отличныхъ отъ (33)-хъ. Кроме того легко видѣть, что функціи f_s представляютъ интегралы линейнаго уравненія съ частными производными функціи f , соответствующаго обыкновеннымъ уравненіямъ (23),

$$(p_1 + H, f) = 0, \quad (36)$$

гдѣ послѣднія скобки Пуассона распространяются на всѣ переменныя $x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n$.

Дѣйствительно, замѣчая, что функціи f_s имѣютъ значенія

$$f_s \equiv \theta_s(x_1, x_1, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}),$$

приводимъ выраженія скобокъ Пуассона

$$(p_1 + H, f_s)$$

къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned} (p_1 + H, f_s) \equiv & \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} + \\ & + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_r} (p_1 + H, F_r). \end{aligned}$$

Такъ какъ функціи F_r представляютъ интегралы уравненія (36), то имѣютъ мѣсто тождества

$$(p_1 + H, F_r) = 0,$$

для всѣхъ значеній r , отъ 1 до $n-1$. Поэтому предыдущія равенства становятся

$$(p_1 + H, f_s) \equiv \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}$$

и, на основаніи тождествъ (28), принимаютъ слѣдующее значеніе

$$(p_1 + H, f_s) \equiv \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}.$$

Легко видѣть, что правыя части послѣднихъ равенствъ представляютъ тождественный нуль. Дѣйствительно, такъ какъ уравненія (24) представляютъ полный интеграль С. Ли данного уравненія (22), то существуетъ тождество

$$\psi_1 + H(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n) = 0.$$

Дифференцируя послѣднее по b_s , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ (представленныхъ послѣднею строкою системы (32))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} = 0, \\ s=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Поэтому предыдущія равенства принимаютъ видъ

$$(p_1 + H, f_s) = 0,$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$, и показываютъ, что функции f_1, f_2, \dots, f_{n-1} служатъ интегралами линейнаго уравненія (36), т. е. уравненія (35) представляютъ $n-1$ интеграловъ канонической системы (23) и, вмѣстѣ съ уравненіями (33), представляютъ полную систему ея $2n-2$ различныхъ интеграловъ.

Мы приведемъ еще одно, третье по счету, и самое простое доказательство разсматриваемаго предложенія, представляющее распространеніе на полные интегралы С. Ли данного нами доказательства теоремы Якоби-Лиувилля, въ началѣ настоящей главы.

Съ этою цѣлью возвращаемся къ тождествамъ (37), представляющимъ непосредственное слѣдствіе существованія полного интегральнаго собранія С. Ли (24) данного уравненія (22). Въ силу слѣдующихъ изъ уравненій канонической системы (23)

$$\frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} = - \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}, \quad \frac{dx_k}{dx_1} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$i=1, 2, \dots, q, \quad k=2, 3, \dots, n-q,$

тождества (37) приводятъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} \frac{dx_k}{dx_1} = 0,$$

$s=1, 2, \dots, n-1.$

Принимая во внимание отмеченныя выше равенства

$$\frac{\partial \psi_\sigma}{\partial b_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\sigma \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\sigma \partial b_s} p_{n-q+i},$$

мы преобразовываем послѣднія уравненія къ такому виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1 \partial b_s} p_{n-q+i} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} \frac{dp_{n-q+i}}{dx_1} + \\ + \sum_{k=2}^{n-q} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_s \partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial x_k} p_{n-q+i} \right) \frac{dx_k}{dx_1} = 0, \end{aligned}$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-1$. Легко видѣть, что лѣвыя части написанныхъ уравненій представляютъ точные дифференціалы, такъ что изслѣдуемыя уравненія становятся въ полныхъ дифференціалахъ

$$d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right) = 0,$$

$s=1, 2, \dots, n-1.$

Итакъ искомыя интегральныя уравненія имѣютъ значенія

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} = a_s,$$

$s=1, 2, \dots, n-1.$

гдѣ a_1, a_2, \dots, a_{n-1} обозначаютъ произвольныя постоянныя величины.

6. Какъ извѣстно, каноническія системы дифференціальныя уравненій обыкновенныхъ и въ полныхъ дифференціалахъ обладаютъ такъ называемыми каноническими системами интеграловъ¹⁾. Легко показать, что уравненія (26) опредѣляютъ такую каноническую систему интеграловъ

¹⁾ См. мое изслѣдованіе: *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (Journal Jordan, 1899, p. 435).

уравнений (23), совершенно аналогично Гамильтонъ-Якобьевской теоріи, т. е. что интегралы (33) и (35) системы (23) являются каноническими, удовлетворяя условіямъ (34) и еще слѣдующимъ

$$(F_r, f_s) \equiv \begin{cases} 0, & s \geq r, \\ 1, & s = r, \end{cases} \quad (38)$$

$$(f_r, f_s) \equiv 0,$$

для всѣхъ значеній указателей r и s , отъ 1 до $n-1$.

Чтобы убѣдиться въ существованіи послѣднихъ равенствъ, составляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_\sigma} (F_r, F_\sigma),$$

которыя, въ силу условій (34), приводятся къ виду

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}. \quad (39)$$

Послѣднее равенство, на основаніи тождества (28), преобразовывается въ слѣдующее

$$(F_r, f_s) \equiv \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_k}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s}.$$

Въ виду того, что уравненія (33) представляютъ преобразование первыхъ $n-1$ уравненій (26), то результатъ подстановки опредѣляемыхъ ими значеній переменныхъ

$$x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_{n-q},$$

въ уравненія (33), представляетъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} F_r(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}, \\ p_{n-q+1}, \dots, p_n) = b_r, \\ r=1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Дифференцируя послѣднія по любой изъ величинъ b_s , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^q \frac{\partial F_r}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} + \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial b_s} = \begin{cases} 0, & s \geq r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

для всѣхъ значеній r и s , отъ 1 до $n-1$. Поэтому, вслѣдствіе полученныхъ тождествъ, предыдущія выраженія скобокъ (F_r, f_s) даютъ первый рядъ искомымъ нами условій (38)

$$(F_r, f_s) = \begin{cases} 0, & s \geq r, \\ 1, & s = r, \end{cases}$$

Наконецъ, для разысканія значенія скобокъ (f_r, f_s) , составляемъ слѣдующее выраженіе

$$\begin{aligned} (f_r, f_s) &\equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} (F_u, \theta'_s) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (\theta'_r, F_v) + \\ &+ \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-2} \frac{\partial \theta_r}{\partial b_u} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_u, F_v), \end{aligned}$$

гдѣ значки при θ_s и θ_r , въ первыхъ двухъ суммахъ, обозначаютъ, что функции θ_s, θ_r , при составленіи скобокъ Пуассона, дифференцируются только по тѣмъ переменнымъ x и p , которыя входятъ въ нихъ непосредственно. Поэтому мы имѣемъ

$$\begin{aligned} (F_u, \theta'_s) &\equiv \sum_{k=2}^q \frac{\partial F_u}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}}, \\ (\theta'_r, F_v) &\equiv \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial \theta_r}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} \frac{\partial \theta_r}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Первое изъ этихъ выраженій имѣетъ видъ правой части равенства (39), второе же отличается отъ послѣдняго обратнымъ знакомъ. Поэтому, на основаніи предыдущихъ вычисленій, заключаемъ, что

$$\begin{aligned} (F_u, \theta'_s) &= \begin{cases} 0, & u \geq s, \\ 1, & u = s, \end{cases} \\ (\theta'_r, F_v) &= \begin{cases} 0, & v \geq r, \\ -1, & v = r. \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

Въ силу послѣднихъ равенствъ и условій (34), выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$(f_r, f_s) \equiv \frac{\partial \theta_r}{\partial b_s} - \frac{\partial \theta_s}{\partial b_r}.$$

Такъ какъ выраженія производныхъ, въ правой части послѣдняго равенства, имѣютъ соотвѣтственно значенія

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial b_s} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_r \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_r \partial b_s} p_{n-q+i},$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial b_r} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_s \partial b_r} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_r} p_{n-q+i},$$

то мы приходимъ къ остальнымъ искомымъ условіямъ (38)

$$(f_r, f_s) \equiv 0,$$

которыя справедливы для всѣхъ значеній r и s , отъ 1 до $n-1$.

Въ дополненіе къ выведеннымъ равенствамъ прибавимъ еще слѣдующія.

На основаніи уравненій (33), первое уравненіе (24) приводится къ слѣдующему виду

$$z - F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = b_n, \quad (42)$$

гдѣ функція F имѣетъ значеніе

$$F \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}).$$

Такъ какъ уравненія (24) образуютъ замкнутую систему, то представляющія ихъ преобразование уравненія (22), (33) и (42) составляютъ также замкнутую систему, при чемъ, кромѣ условій (34) и (38), имѣютъ мѣсто еще слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} [p_1 + H, z - F] &= 0, \\ [F_s, z - F] &= 0, \\ s &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Въ виду того, что лѣвыя части послѣднихъ $n-1$ равенствъ не зависятъ отъ величинъ $p_1, b_1, b_2, \dots, b_n$, то эти равенства не могутъ быть слѣдствіемъ разсматриваемыхъ уравненій и, стало-быть, удовлетворяются

тождественно, тогда какъ первое равенство (43) является слѣдствіемъ даннаго уравненія (22).

Вычислимъ, наконецъ, значеніе скобокъ Вейлера

$$[z - F, f_s] \equiv [z, f_s] - [F, f_s].$$

Очевидно существуютъ слѣдующія равенства

$$[z, f_s] \equiv - \sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} - \sum_{\sigma=2}^n p_{\sigma} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} \frac{\partial F_v}{\partial p_{\sigma}},$$

$$[F, f_s] \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial b_u} (F_u, \theta'_s) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (\varphi', F_v) +$$

$$\sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial b_u} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_u, F_v).$$

Принимая во вниманіе условія (34), (41), значенія слѣдующихъ скобокъ Пуассона

$$(\varphi', F_v) \equiv - \sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial F_v}{\partial p_k},$$

и тождества (28), приходимъ къ слѣдующему выраженію разсматриваемыхъ скобокъ Вейлера

$$[z - F, f_s] \equiv \sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} \left(\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} - \sum_{\sigma=2}^n p_{\sigma} \frac{\partial F_v}{\partial p_{\sigma}} \right).$$

Легко видѣть, что выраженіе въ скобкахъ, находящееся въ послѣдней строкѣ, на основаніи уравненій послѣдней строки системы (24), приводится къ слѣдующему виду

$$\sum_{i=1}^q p_{n-q+i} \left(\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \frac{\partial F_v}{\partial p_k} - \frac{\partial F_v}{\partial p_{n-q+i}} \right). \quad (44)$$

Возвращаясь къ тождествамъ (40) и дифференцируя ихъ по переменнымъ p_{n-q+i} , мы получаемъ новыя тождества

$$\sum_{k=2}^{n-q} \frac{\partial F_r}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{n-q+i}} + \frac{\partial F_r}{\partial p_{n-q+i}} = 0.$$

Поэтому выражение (44) уничтожается тождественно. Такъ какъ во всѣхъ нашихъ вычисленияхъ величины b_s замѣнены ихъ функциональными значеніями F_s , то очевидно, что искомыя зависимости имѣютъ слѣдующій видъ

$$[z - F, f_s] = -f_s, \quad (45)$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$.

7. Воспользуемся выведенными каноническими свойствами (34), (38), (43) и (45) интеграловъ (33) и (35) канонической системы (23), для рѣшенія вопроса о переходѣ отъ полного интеграла С. Ли (24) даннаго уравненія (22) къ его полному интегралу Лагранжа. Благодаря каноническимъ свойствамъ разсматриваемыхъ интеграловъ, является возможность обойти необходимость составленія общаго интеграла системы (23), для рѣшенія поставленной задачи. Въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе неравенства нулю опредѣлителя (25), существуетъ, по меньшей мѣрѣ, одна пара его сопряженныхъ миноровъ, соотвѣтственно порядковъ q и $n-q-1$, которые отличны отъ нуля. Не нарушая общности разсужденій, мы можемъ предположить, что слѣдующіе два опредѣлителя отличны отъ нуля

$$\Delta_1 \equiv D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q}{b_1, b_2, \dots, b_q} \right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_q} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_q} & \dots & \frac{\partial \varphi_q}{\partial b_q} \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$\Delta_2 \equiv D \left(\frac{\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_{n-q}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}} \right) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{q+1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{q+1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{q+1}} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{q+2}} & \dots & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{q+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial b_{n-1}} & \frac{\partial \psi_3}{\partial b_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-q}}{\partial b_{n-1}} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Если послѣднія условія имѣютъ мѣсто, то легко доказать, что система n уравненій въ инволюціи, опредѣляющихъ, при помощи квадратуры, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), разсматриваемая какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, представляется совокупностью уравненія (22) и $n-1$ слѣдующихъ

$$\left. \begin{aligned} F_{q+k}(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= b_{q+k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-q-1, \\ f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= a_r, \\ r &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Такъ какъ указатели $q+k$ и r имѣютъ различныя значенія, то очевидно, что послѣдніе интегралы находятся въ инволюціи. Кроме того легко убѣдиться, что система интеграловъ (45) разрѣшима относительно всѣхъ переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n . Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (45) равносильны слѣдующимъ уравненіямъ, которыя представляютъ ихъ преобразованіе и составляютъ такимъ образомъ.

Прежде всего замѣтимъ, что въ силу условія $\Delta_1 \geq 0$, первыя q уравненій системы (26) разрѣшаются относительно величинъ b_1, b_2, \dots, b_q и опредѣляютъ ихъ значенія

$$\left. \begin{aligned} b_i &= \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, q. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Поэтому, въ силу неравенства нулю опредѣлителя (25), первыя $n-q-1$ уравненій (45) получаются изъ уравненій

$$p_k - \psi_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n-q,$$

путемъ исключенія изъ нихъ значеній b_1, b_2, \dots, b_q , опредѣляемыхъ предыдущими равенствами (46). Слѣдовательно, $n-q-1$ первыхъ уравненій (45) равнозначны уравненіямъ

$$p_k = (\psi_k), \quad k = 2, 3, \dots, n-q, \quad (47)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ указанной подстановки. Что касается остальныхъ уравненій (45), т. е. q послѣднихъ, то они равносильны уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_r} \right) - \sum_{i=1}^q \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_r} \right) p_{n-q+i} &= a_r, \\ r &= 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

гдѣ, какъ и раньше, скобки отмѣчаютъ результатъ подстановки значений b_1, b_2, \dots, b_q , опредѣляемыхъ уравненіями (46). Последняя система (48) линейна относительно переменныхъ $p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n$; определитель, составленный изъ коэффициентовъ при послѣднихъ переменныхъ, представляетъ выраженіе (Δ_1) , гдѣ скобки имѣютъ прежнее значеніе. Такъ какъ послѣдній определитель не равенъ нулю, то, слѣдовательно, уравненія (48) разрѣшимы относительно всѣхъ переменныхъ p_{n-q+i} . Внося значенія послѣднихъ въ уравненія (47), мы получаемъ изъ нихъ выраженія остальныхъ переменныхъ p . Такимъ образомъ получаютъся выраженія всѣхъ переменныхъ

$$p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+1}, \dots, p_n$$

въ функціяхъ величинъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_q, b_{q+1}, \dots, b_n.$$

Присоединяя сюда значеніе переменной p_1 , опредѣляемой въ видѣ функціи тѣхъ же самыхъ величинъ, при помощи даннаго уравненія (22), мы приводимъ къ квадратурѣ вопросъ о разысканіи полного интеграла Лагранжа послѣдняго уравненія, рассматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными.

Однако, благодаря выведеннымъ выше условіямъ (43) и (44), легко получить искомый интеграль, при помощи алгебраическихъ исключеній, воспользовавшись уравненіемъ (42), и обойтись такимъ образомъ безъ операціи интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, составляемъ выраженіе

$$\Phi \equiv z - F + \sum_{i=1}^q f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія слѣдующихъ скобокъ Вейлера

$$[p_1 + H, \Phi] \equiv [p_1 + H, z - F] + \sum_{i=1}^q \left[f_i(p_1 + H, F_i) + F_i(p_1 + H, f_i) \right],$$

$$[\Phi, F_{q+k}] \equiv [z - F, F_{q+k}] + \sum_{i=1}^q \left[f_i(F_i, F_{q+k}) + F_i(f_i, F_{q+k}) \right],$$

$$[\Phi, f_r] \equiv [z - F, f_r] + \sum_{i=1}^q \left[f_i(F_i, f_r) + F_i(f_i, f_r) \right],$$

соотвѣтствующихъ значеніямъ k , отъ 1 до $n-q-1$, и значеніямъ r , отъ 1 до q . Какъ легко видѣть, послѣднія выраженія уничтожаются на основаніи условій (34), (38), (43) и (44), и мы получаемъ слѣдующія равенства

$$[p_1 + H, \Phi] = 0,$$

$$[\Phi, F_{q+k}] = 0, [\Phi, f_r] = 0,$$

$$k=1, 2, \dots, n-q-1, \quad r=1, 2, \dots, q.$$

Такъ какъ равенства (43) удовлетворяются на основаніи уравненія (22), то отсюда слѣдуетъ, что совокупность уравненій (22), (45) и слѣдующаго

$$z = F - \sum_{i=1}^q f_i F_i + b, \quad (49)$$

гдѣ b обозначаетъ произвольную постоянную величину, образуетъ замкнутую систему $n+1$ уравненій, разрѣшимыхъ относительно переменныхъ z, p_1, p_2, \dots, p_n . Поэтому опредѣляемое послѣдними уравненіями значеніе переменной z , функцией переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_n и n произвольныхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b$, представляетъ искомый полный интеграль Лагранжа уравненія (22), разсматриваемаго какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными. Другими словами послѣдній интеграль получается какъ результатъ подстановки въ уравненіе (49) значеній величинъ p_2, p_3, \dots, p_n , опредѣляемыхъ уравненіями (45). Очевидно, что въ результатѣ послѣдней подстановки функции $f_1, f_2, \dots, f_q, F_{q+1}, \dots, F_{n-1}$ тождественно обращаются соответственно въ $a_1, a_2, \dots, a_q, b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}$, и мы получаемъ

$$z = \varphi [x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, (F_1), (F_2), \dots, (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}] - \left. \begin{aligned} & - \sum_{i=1}^q a_i (F_i) + b, \end{aligned} \right\} (50)$$

гдѣ скобки, въ выраженіяхъ (F_i) , обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Возьмемъ, на примѣръ, уравненіе ¹⁾

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_4 p_4) x_4 p_2}{x_1 p_3} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \quad (51)$$

Это уравненіе имѣетъ полное интегральное собраніе С. Ли второго класса, представленное совокупностью уравненій

$$z = b_4, \quad (52)$$

¹⁾ Послѣднее уравненіе, но только въ другихъ обозначеніяхъ, служило примѣромъ также въ $n^{\text{оз}}$ настоящей главы.

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= b_2(x_1 - b_1) - \frac{x_1 x_2}{b_3}, \\ x_4 &= \frac{b_3}{x_1 - b_1}, \\ p_1 &= \left(\frac{x_2}{b_3} - b_2 \right) p_3 + \frac{b_3}{(x_1 - b_1)^2} p_4, \\ p_2 &= \frac{x_1}{b_3} p_3, \end{aligned} \right\} (52)$$

при чемъ, въ настоящемъ случаѣ, слѣдующій функциональный определитель отличенъ отъ нуля

$$D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \psi_2}{b_1, b_2, b_3} \right) \equiv \frac{x_1 p_3}{b_3 (x_1 - b_1)} \geq 0.$$

Поэтому общій интегралъ канонической системы, соответствующей данному уравненію (51), опредѣляется совокупностью второго, третьяго и послѣдняго уравненія системы (52) и слѣдующими тремя уравненіями

$$\left. \begin{aligned} b_2 p_3 - \frac{b_3}{(x_1 - b_1)^2} p_4 &= a_1, \\ -(x_1 - b_1) p_3 &= a_2, \\ -\frac{x_1 x_2}{b_3^2} p_3 - \frac{1}{x_1 - b_1} p_4 &= a_3, \end{aligned} \right\} (53)$$

гдѣ a_1 , a_2 и a_3 обозначаютъ три новыхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Чтобы составить полный интегралъ Лагранжа данного уравненія (51), замѣчаемъ, что слѣдующихъ два сопряженныхъ минора разсматриваемого определителя не равны нулю:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_2} \end{array} \right| \equiv -\frac{b_3}{x_1 - b_1} \geq 0,$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial b_3} \equiv -\frac{x_1 p_3}{b_3^2} \geq 0.$$

Поэтому второе и третье уравнения системы (52) разрѣшаются относительно величинъ b_1 , b_2 и даютъ ихъ слѣдующія значенія

$$b_1 = x_1 - \frac{b_3}{x_4},$$

$$b_2 = \frac{x_4}{b_3} \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right).$$

Въ силу этихъ значеній b_1 и b_2 , первое и второе уравнения (53) опредѣляютъ значенія p_3 и p_4

$$p_3 = -\frac{a_2 x_4}{b_3}, \quad p_4 = -\left[\frac{a_1 b_3}{x_4^2} + \frac{a_2}{b_3} \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) \right].$$

Наконецъ, послѣднія два уравнения системы (52) даютъ выраженія

$$p_1 = -\left(a_1 + \frac{a_2 x_2 x_4}{b_3^2} \right), \quad p_2 = -\frac{a_2}{b_3^2} x_1 x_4.$$

Поэтому искомый полный интегралъ находится при помощи интегрированія точнаго дифференціала

$$dz = -a_1 dx_1 - a_1 b_3 \frac{dx_4}{x_4^2} - \frac{a_2}{b_3^2} \left[x_4 (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) + x_1 x_2 dx_4 \right] -$$

$$- \frac{a_2}{b_3} (x_4 dx_3 + x_3 dx_4),$$

или

$$dz = -a_1 dx_1 - a_1 b_3 \frac{dx_4}{x_4^2} - \frac{a_2}{b_3^2} d(x_1 x_2 x_4) - \frac{a_2}{b_3} d(x_3 x_4).$$

Отсюда, при помощи квадратуры, получаемъ

$$z = a_1 \left(\frac{b_3}{x_4} - x_1 \right) - \frac{a_2}{b_3} x_4 \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) + b,$$

гдѣ a_1 , a_2 , b_3 и b представляютъ четыре произвольныхъ постоянныхъ величины.

Прилагая къ настоящему случаю формулу (50), легко составить искомый полный интегралъ даннаго уравненія (51), исключительно исходя изъ

уравнений (52) и (53). Дѣйствительно, въ настоящемъ случаѣ формула (50) становится

$$z = -a_1(F_1) - a_2(F_2) + b,$$

и функции F_1, F_2 имѣютъ слѣдующія значенія

$$F_1 \equiv x_1 \left(1 - \frac{p_3}{x_4 p_2} \right), \quad F_2 \equiv (x_2 p_2 + x_3 p_3) \frac{x_4 p_2}{x_1 p_3^2}.$$

Подставляя сюда найденныя выше значенія переменныхъ p_2, p_3 и p_4 , въ функцияхъ всѣхъ переменныхъ x и постоянныхъ a_1, a_2, b_3 , получаемъ

$$(F_1) \equiv x_1 - \frac{b_3}{x_4}, \quad (F_2) \equiv \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) \frac{x_4}{b_3}.$$

Итакъ, искомый полный интегралъ выражается въ прежнемъ видѣ

$$z = a_1 \left(\frac{b_3}{x_4} - x_1 \right) - \frac{a_2}{b_3} x_4 \left(x_3 + \frac{x_1 x_2}{b_3} \right) + b.$$

8. На послѣдующихъ строкахъ имѣется въ виду отмѣтить еще два доказательства предложенія, приведеннаго въ n^0 5-мъ настоящей главы, которыя отличны отъ прежнихъ трехъ доказательствъ.

Такъ какъ полный интегралъ С. Ли (26) приводитъ къ $n-1$ интеграламъ въ инволюціи (33) канонической системы (23), которые разрѣшаются относительно переменныхъ $p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n$ (и неразрѣшима относительно каноническихъ переменныхъ второго класса), то всѣ разсужденія, которыми мы пользовались выше (см. n^0 3 настоящей главы) для доказательства теоремы Лувилля, примѣняются также и въ настоящемъ случаѣ. Поэтому, сохраняя наши обозначенія, получаемъ, примѣнительно къ разсматриваемымъ условіямъ, слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} &= \frac{\partial p_k}{\partial b_s}, & \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} &= -\frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-q, & i &= 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Очевидно, что послѣднія уравненія образуютъ интегрируемую систему. Кромѣ того такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ мѣсто полный интегралъ С. Ли (24), то поэтому существуютъ равенства

$$p_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} p_{n-q+i}, \quad x_{n-q+i} = \varphi_i,$$

для всѣхъ разсматриваемыхъ значений k , отъ 1 до $n-q$, и значений i , отъ 1 до q . Вслѣдствіе этого заключаемъ, что уравненія (54) приводятся къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial b_s} p_{n-q+i}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial p_{n-q+i}} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s},$$

$k=1, 2, \dots, n-q, \quad i=1, 2, \dots, q,$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-1$. Отсюда искомыя функціи θ_s опредѣляются при помощи квадратуръ

$$\theta_s = \int \left[\sum_{k=1}^{n-q} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_k \partial b_s} p_{n-q+i} \right) dx_k - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} dp_{n-q+i} \right],$$

$s=1, 2, \dots, n-1,$

при чемъ не принимаются въ расчетъ дополнительныя произвольныя постоянныя величины. Такъ какъ предыдущія уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$\theta_s = \int d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right),$$

$s=1, 2, \dots, n-1,$

то мы получаемъ прежній результатъ

$$\theta_s = \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i},$$

$s=1, 2, \dots, n-1.$

Къ тому же самому заключенію мы приходимъ также, прилагая въ настоящемъ случаѣ теорему Якоби-Лиувилля, изложенную въ концѣ n^0 3-ьяго настоящей главы. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (23) представимъ въ видѣ слѣдующей новой канонической системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_1} &= \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}}, & \frac{\partial (-p_{n-q+i})}{\partial x_1} &= \frac{\partial H}{\partial x_{n-q+i}}, \\ \frac{\partial p_{r+1}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial x_{r+1}}, & \frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial H}{\partial (-p_{n-q+i})}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$r=1, 2, \dots, n-q-1, \quad i=1, 2, \dots, q.$

Пусть известна для последней системы совокупность $n-1$ различных интеграловъ въ инволюціи, которые разрѣшаются относительно всѣхъ каноническихъ переменныхъ второго класса

$$p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n.$$

Поэтому представляя интеграль точнаго дифференціала

$$dz = \sum_{k=1}^{n-q} p_k dx_k + \sum_{i=1}^q -x_{n-q+i} dp_{n-q+i}$$

въ слѣдующемъ видѣ

$$z = U(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) + b, \quad (56)$$

гдѣ b —новая произвольная постоянная величина, мы выражаемъ общій интеграль канонической системы (55) при помощи уравненій

$$\left. \begin{aligned} p_{r+1} &= \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}}, & x_{n-q+i} &= -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}, \\ r=1, 2, \dots, n-q-1, & & i=1, 2, \dots, q, & \\ \frac{\partial U}{\partial b_s} &= a_s, & & \\ s=1, 2, \dots, n-1, & & & \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

гдѣ всѣ a_s обозначаютъ $n-1$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Предполагая, что интеграль (56) удовлетворяетъ условію

$$D \left(\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}, \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, \dots, \frac{\partial U}{\partial p_n} \right) \geq 0, \quad (58)$$

$b_1, b_2, \dots, b_{n-q-1}, b_{n-q}, \dots, b_{n-1}$

заключаемъ, что послѣднія $n-1$ уравненій (57) разрѣшимы относительно переменныхъ величинъ

$$x_2, x_3, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n.$$

Подставляя вмѣсто функціи U значение ея, выраженное при помощи интеграла, получаемъ

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \int \left(\sum_{k=1}^{n-q} \frac{\partial p_k}{\partial b_s} dx_k + \sum_{i=1}^q - \frac{\partial x_{n-q+i}}{\partial b_s} dp_{n-q+i} \right).$$

Если разсматриваемая нами система интеграловъ въ инволюціи представляется уравненіями (33), которые получаются изъ системы (24), то очевидно, что аналогично предыдущему, послѣднее равенство становится

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \int d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} \right),$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i},$$

для всѣхъ значеній s , отъ 1 до $n-1$. Такимъ образомъ оказывается, что изслѣдованныя нами уравненія

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_s} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_s} p_{n-q+i} = a_s,$$

$s = 1, 2, \dots, n-1,$

тождественны послѣднимъ $n-1$ уравненіямъ (57) и заключаются, стало бытъ, какъ частный случай въ общихъ формулахъ, соответствующихъ предположеніямъ Лиувилля, по отношенію къ которымъ условія, опредѣляющія полное интегральное собраніе С. Ли, являются лишь частнымъ случаемъ.

Какъ извѣстно, уравненія (57) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ и, для случая С. Ли, обращаются тождественно въ уравненія (26), какъ это легко видѣть, благодаря только что выведенному заключенію. Поэтому приведенное нами выше предложеніе, что уравненія (26) опредѣляютъ каноническую систему интеграловъ системы (23), является также частнымъ случаемъ общей теоріи каноническихъ уравненій.

Чтобы закончить рассмотрение вопроса о составлении общего интеграла канонических уравнений, исходя из полного интеграла С. Ли соответствующаго производнаго уравненія, слѣдуетъ отмѣтить, что выведенное выше выраженіе (50) полного интеграла Лагранжа уравненія (22), рассматриваемаго какъ дифференціальное съ частными производными, представляетъ обобщеніе упомянутыхъ выше результатовъ Майера, Дарбу и Бертрана. Легко видѣть, что выраженія полного интеграла уравненія (22), полученныя послѣдними геометрами, заключаются въ формулѣ (50) въ томъ частномъ случаѣ, когда начальныя значенія переменныхъ принимаются за произвольныя постоянныя величины въ общемъ интегралѣ канонической системы (23).

9. Мы имѣемъ въ виду далѣе распространить только что полученные результаты на общій интегралъ каноническихъ уравненій (23) въ самомъ общемъ предположеніи Лиувилля.

Пусть данныя $n-1$ интеграловъ въ инволюціи каноническихъ системъ (23), или (55) разрѣшаются относительно каноническихъ переменныхъ втораго класса по отношенію какъ къ первой такъ и ко второй канонической системѣ. Предположимъ, что, въ виду простоты вычисленій, мы разрѣшили рассматриваемыя интегралы относительно переменныхъ $p_2, p_3, \dots, p_{n-q}, x_{n-q+1}, x_{n-q+2}, \dots, x_n$. Въ такомъ случаѣ общій интегралъ обѣихъ рассматриваемыхъ каноническихъ системъ одновременно представляется уравненіями (57).

Очевидно, что, въ силу условія (58), уравненія (57) разрѣшимы относительно всѣхъ переменныхъ $x_2, x_3, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n$. Поэтому интегрированіе уравненія

$$dz = \left(p_1 + \sum_{r=1}^{n-1} p_{r+1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} \right) dx_1$$

совершается при помощи квадратуры, и затѣмъ полный интегралъ уравненія (22) опредѣляется на основаніи теоріи характеристикъ.

Наша задача, къ рѣшенію которой мы теперь переходимъ, состоитъ въ доказательствѣ, что достаточно уравненій (56) и (57) для составленія полного интеграла Лагранжа уравненія (22), при помощи алгебраическихъ преобразованій, не совершая указаннаго выше новаго интегрированія.

Въ самомъ дѣлѣ, необходимо отличны отъ нуля, по меньшей мѣрѣ, значенія одной пары сопряженныхъ миноровъ, порядковъ q -аго и $n-q-1$ -аго, опредѣлителя первой части неравенства (58). Поэтому, не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить

$$\left. \begin{aligned} \Delta'_1 &\equiv D \left(\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}}{b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}} \right) \geq 0, \\ \Delta'_2 &\equiv D \left(\frac{\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \dots, \frac{\partial U}{\partial p_n}}{b_1, b_2, \dots, b_q} \right) \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Въ силу второго изъ этихъ неравенствъ, послѣднія q уравненій первой строки системы (57) даютъ

$$b_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{n-q+1}, \dots, p_n, b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}), \\ i=1, 2, \dots, q.$$

Внося послѣднія значенія b_1, b_2, \dots, b_q въ $n-q-1$ первыя уравненія первой строки и въ q первыя уравненія второй строки системы (57), получаемъ равенства

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \right), \quad k=2, 3, \dots, n-q, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial b_r} \right) &= a_r, \quad r=1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

гдѣ скобки обозначаютъ результатъ произведенной подстановки.

Легко показать, что послѣднія уравненія (60) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ представляютъ собой преобразование интеграловъ въ инволюціи канонической системы (23).

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ въ слѣдующемъ видѣ полную систему интеграловъ системы (55), которые опредѣляются уравненіями (57),

$$\left. \begin{aligned} F_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= b_s, \\ f_s(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) &= a_s, \end{aligned} \right\} \quad (61) \\ s=1, 2, \dots, n-1.$$

Какъ хорошо извѣстно, послѣдніе интегралы образуютъ каноническую систему, по отношенію къ уравненіемъ (55). Въ виду того, что существуютъ зависимости

$$\sum_{u=1}^n \left(\frac{\partial F_s}{\partial p_u} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_u} - \frac{\partial F_s}{\partial x_u} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_u} \right) \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \left(\frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial F_s}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial f_\sigma}{\partial p_{r+1}} \right) + \\ + \sum_{i=1}^q \left[\frac{\partial F_s}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial f_\sigma}{\partial (-p_{n-q+i})} - \frac{\partial F_s}{\partial (-p_{n-q+i})} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_{n-q+i}} \right],$$

становится очевиднымъ, что уравненія (61) образуютъ каноническую систему интеграловъ также по отношенію къ исходной канонической системѣ (23). Слѣдовательно, уравненія (60) равнозначны $n-1$ уравненіямъ

$$\left. \begin{aligned} F_{q+k}(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n) &= b_{q+k}, \\ k &= 1, 2, \dots, n-q-1, \\ f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n) &= a_r, \\ r &= 1, 2, \dots, q, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

и опредѣляютъ систему $n-1$ интеграловъ въ инволюціи по отношенію къ канонической системѣ (23).

Такъ какъ исходные $n-1$ интеграловъ, согласно со сдѣланнымъ предположеніемъ, могутъ также разрѣшаться относительно переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n , то отсюда слѣдуетъ, что уравненія (62) вообще могутъ и не разрѣшаться относительно послѣднихъ переменныхъ.

Не останавливаясь сейчасъ на этомъ замѣчаніи, такъ какъ намъ придется разобрать его подробно, воспользуемся первыми $n-1$ интегралами (61), чтобы представить уравненіе (56) въ слѣдующемъ видѣ

$$z - F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_2, p_3, \dots, p_n) = b,$$

при чемъ имѣетъ мѣсто тождество

$$F \equiv U(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, \dots, p_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-1}).$$

Само собою разумѣется, что, составляя скобки Вейлера, по отношенію къ канонической системѣ (55), т. е. подраздѣляя каноническія переменныя на слѣдующіе два класса, соотвѣтствующіе обѣимъ строкамъ

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, & \quad - p_{n-q+1}, \quad - p_{n-q+2}, \dots, - p_n, \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-q}, & \quad x_{n-q+1}, \quad x_{n-q+2}, \dots, x_n, \end{aligned}$$

получаемъ слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} [p_1 + H, z - F] &= 0, \\ [F_s, z - F] &= 0, \quad s = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Вычислимъ, наконецъ, въ этомъ же предположеніи, значеніе скобокъ

$$[f_s, z - F] \equiv [f_s, z] - (f_s, F).$$

Вводимъ слѣдующія обозначенія

$$\frac{\partial U}{\partial b_s} \equiv \theta_s, \quad (64)$$

благодаря которым получаемъ тождества

$$f_s \equiv \theta_s (x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, p_{n-q+1}, p_{n-q+2}, \dots, p_n, F_1, F_2, \dots, F_{n-1});$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-1$. Поэтому имѣемъ

$$[f_s, z] \equiv \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} [F_v, z],$$

$$(f_s, F) \equiv \sum_{u=1}^{n-1} \frac{\partial U}{\partial b_u} (\theta'_s, F_u) + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} (F_v, U') + \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_u} \frac{\partial U}{\partial b_v} (F_u, F_v).$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ переменныя

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, -p_{n-q+1}, \dots, -p_n$$

являются каноническими перваго класса, то выраженія разсматриваемыхъ скобокъ становятся

$$[F_v, z] \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} x_{n-q+i},$$

$$(\theta'_s, F_u) \equiv - \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial \theta'_s}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial \theta'_s}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}},$$

$$(F_v, U') \equiv \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}}.$$

Въ виду того, что имѣютъ мѣсто тождества

$$F_u \left(x_1, x_2, \dots, x_{n-q}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+1}}, -\frac{\partial U}{\partial p_{n-q+2}}, \dots, -\frac{\partial U}{\partial p_n}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-q}}, p_{n-q+1}, \dots, p_n \right) \equiv b_u,$$

$$u = 1, 2, \dots, n-1,$$

то, дифференцируя ихъ по всѣмъ b_s , получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$-\sum_{i=1}^q \frac{\partial F_u}{\partial x_{n-q+i}} \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-q+i} \partial b_s} + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_u}{\partial p_{r+1}} \frac{\partial^2 U}{\partial x_{r+1} \partial b_s} \equiv \begin{cases} 0, & s \geq u, \\ 1, & s = u. \end{cases}$$

Поэтому, въ силу введенныхъ обозначеній (64), заключаемъ, что

$$(\theta'_s, F_u) \equiv \begin{cases} 0, & s \geq u, \\ -1, & s = u. \end{cases}$$

Кромѣ того принимая во вниманіе, что

$$(F_u, F_r) = 0,$$

приводимъ вычисляемые нами скобки Вейлера къ слѣдующему виду

$$[f_s, z - F] \equiv \frac{\partial U}{\partial b_s} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} \left(\sum_{r=1}^{n-q-1} p_{r+1} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} + \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \right) - \\ - \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_s}{\partial b_v} \left(\sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial U}{\partial x_{r+1}} \frac{\partial F_v}{\partial p_{r+1}} - \sum_{i=1}^q \frac{\partial U}{\partial p_{n-q+i}} \frac{\partial F_v}{\partial x_{n-q+i}} \right).$$

Въ силу тождествъ, въ которыя обращаются первыя $n-1$ уравненій (57), когда въ нихъ подставить значенія b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , опредѣляемые этими же уравненіями, выраженія суммъ обѣихъ послѣднихъ строчекъ равны; стало-быть, разность ихъ уничтожается, и мы получаемъ въ результатѣ равенства

$$[f_s, z - F] \equiv f_s, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (65)$$

Равенства (63) и (65) заключаютъ скобки Вейлера, составленныя относительно канонической системы (55).

Однако легко воспользоваться этими зависимостями, чтобы составить замкнутую систему $n+1$ уравненій по отношенію къ канонической системѣ (23). Въ силу условій (63) и (65), мы имѣемъ слѣдующія равенства

$$\left. \begin{aligned} p_1 + \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial H}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial H}{\partial p_{n-q+i}} x_{n-q+i} - (p_1 + H, F) &= 0, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial F_s}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial F_s}{\partial p_{n-q+i}} x_{n-q+i} - (F_s, F) &= 0, \\ \sum_{r=1}^{n-q-1} \frac{\partial f_s}{\partial p_{r+1}} p_{r+1} + \sum_{i=1}^q \frac{\partial f_s}{\partial p_{n-q+i}} x_{n-q+i} - (f_s, F) &= f_s, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

$s = 1, 2, \dots, n-1,$

при чемъ скобки Пуассона $(p_1 + H, F)$, (F_s, F) и (f_s, F) составлены здѣсь по отношенію къ канонической системѣ (23), т. е. въ предположеніи, что переменныя величины раздѣляются на два класса, соответствующіе двумъ строкамъ

$$\left. \begin{array}{l} x_2, x_3, \dots, x_n, \\ p_2, p_3, \dots, p_n. \end{array} \right\} \quad (67)$$

Составляемъ, наконецъ, слѣдующее выраженіе

$$\Phi \equiv z - F - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i} + \sum_{i=1}^q f_i F_i$$

и вычисляемъ значенія скобокъ Вейлера, въ канонической системѣ переменныхъ (67),

$$\begin{aligned} [p_1 + H, \Phi] &\equiv [p_1 + H, z - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (p_1 + H, F) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [f_i (p_1 + H, F_i) + F_i (p_1 + H, f_i)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F_{q+k}, \Phi] &\equiv [F_{q+k}, z - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (F_{q+k}, F) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [f_i (F_{q+k}, F_i) + F_i (F_{q+k}, f_i)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [f_r, \Phi] &\equiv [f_r, z - \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i}] - (f_r, F) + \\ &+ \sum_{i=1}^q [f_i (f_r, F_i) + F_i (f_r, f_i)], \end{aligned}$$

для всѣхъ значеній k , отъ 1 до $n-q-1$, и для значеній r , отъ 1 до q . Такъ какъ интегралы (61) образуютъ каноническую систему одновременно по отношенію къ каноническимъ системамъ какъ (23) такъ и (55), то, для разсматриваемыхъ сейчасъ формулъ, имѣютъ мѣсто равенства

$$(F_{q+k}, F_i) \equiv 0, \quad (f_r, f_i) \equiv 0,$$

$$(F_s, f_\sigma) \equiv \begin{cases} 0, & s \neq \sigma, \\ 1, & s = \sigma. \end{cases}$$

Кромѣ того, принимая въ расчетъ уравненія (66), мы приходимъ къ слѣдующимъ равенствамъ

$$[p_1 + H, \Phi] = 0, \quad [F_{q+k}, \Phi] = 0, \quad [f_r, \Phi] = 0,$$

$$k=1, 2, \dots, n-q-1, \quad r=1, 2, \dots, q.$$

Отсюда заключаемъ, что совокупность $n+1$ уравненій (22)-го (62)-ыхъ и слѣдующаго

$$z = F + \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} p_{n-q+i} - \sum_{i=1}^q f_i F_i + b_n$$

образуетъ замкнутую систему, при чемъ b_n представляетъ новую произвольную постоянную величину.

Здѣсь слѣдуетъ однако различать два случая, когда классъ представляемаго послѣдней системой полного интегральнаго собранія равенъ нулю, или отличенъ отъ него, въ зависимости отъ того, разрѣшаются ли уравненія (62) относительно переменныхъ p_2, p_3, \dots, p_n , или нѣтъ. Рассматриваемая въ первомъ случаѣ система уравненій, путемъ исключенія всѣхъ переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_n , приводитъ къ слѣдующему полному интегралу Лагранжа уравненія (22)

$$z = U[x_1, \dots, x_{n-q}, (p_{n-q+1}), \dots, (p_n), (F_1), \dots, (F_q), b_{q+1}, b_{q+2}, \dots, b_{n-1}] +$$

$$+ \sum_{i=1}^q x_{n-q+i} (p_{n-q+i}) - \sum_{i=1}^q a_i (F_i) + b_n,$$

гдѣ круглыми скобками обозначенъ результатъ подстановки въ выраженіе, заключенныя въ скобки, значений исключаемыхъ переменныхъ.

Если же уравненія (62) неразрѣшимы относительно всѣхъ переменныхъ p , то эта система (62) опредѣляетъ полный интегралъ С. Ли уравненія (22), рассматриваемаго какъ *производное* уравненіе С. Ли. Чтобы получить отсюда, при помощи алгебраическихъ исключеній, полный интегралъ Лагранжа уравненія (22), рассматривая его какъ дифференціальное уравненіе съ частными производными, остается воспользоваться результатами, доказанными въ 7-омъ настоящей главы.

Изложенныя соображенія, относительно составленія полныхъ интеграловъ Лагранжа одного дифференціального уравненія съ частными производными перваго порядка, распространяются безъ труда на какія угодно системы совокупныхъ уравненій какъ независящихъ явно отъ неизвѣстной функціи z , такъ и заключающихъ послѣднюю функциональную переменную. Это заключеніе ясно слѣдуетъ изъ всего изложенія настоящей главы. Поэтому мы не станемъ останавливаться на доказательствахъ указанныхъ здѣсь обобщеній и ограничимся только слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Только что разрѣшенная задача позволяетъ составлять полный интегралъ Лагранжа, на основаніи извѣстнаго полного интеграла С. Ли,

или даетъ возможность, для составленія полного интеграла Лагранжа, переходить отъ одного полного интегрального собранія нулевого класса къ другому для того, чтобы обойти тѣ или другія трудности вычисленій, которыя могутъ встрѣчаться при составленіи интеграловъ изслѣдуемыхъ уравненій. Разсматриваемая задача находится въ тѣсной связи съ такъ называемымъ *усовершенствованіемъ С. Ли* способа Якоби-Майера интегрированія частныхъ уравненій ¹⁾, съ той только разницей, что С. Ли прилагаетъ свою теорію къ своимъ *производнымъ* уравненіямъ, тогда какъ соображенія, изложенныя на послѣднихъ страницахъ, имѣютъ главною цѣлью интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Какъ мы раньше указывали ²⁾, рѣшеніе Майера послѣдняго вопроса было ошибочнымъ; что же касается моего предложеннаго раньше рѣшенія ³⁾, то оно требуетъ одной квадратуры больше, чѣмъ только что изложенное рѣшеніе, которое основывается исключительно на алгебраическихъ преобразованіяхъ ⁴⁾.

10. Воспользуемся полученными результатами, чтобы показать, какія видоизмѣненія, благодаря имъ, могутъ быть внесены въ извѣстный способъ Якоби-Майера интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи.

Пусть имѣемъ замкнутую систему m слѣдующихъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ i=1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

которыя, предположимъ, разрѣшимы относительно m какихъ либо частныхъ производныхъ. Для интегрированія данныхъ уравненій, намъ достаточно однако разрѣшить ихъ относительно m какихъ либо изъ переменныхъ съ различными значками. Пусть, на примѣръ, данныя уравненія разрѣшаются относительно переменныхъ

¹⁾ S. Lie, *Mathematische Annalen*, Bd. VIII, S. 215.

²⁾ См. мои сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 73 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer* (*Comptes rendus*, 26 juin 1899).

³⁾ См.: *Объ интегрированіи уравненій...* стр. 103 и *Considérations sur les travaux de M. M. S. Lie et A. Mayer* (*Comptes rendus*, 3 juillet 1899).

⁴⁾ Послѣдніе результаты были опубликованы мною въ двухъ статьяхъ: *Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange* (*Comptes rendus*, 10 août 1903) и *Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville* (*Comptes rendus*, 17 août 1903).

$$p_1, p_2, \dots, p_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m.$$

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующую систему уравненій въ инволюции

$$\left. \begin{aligned} p_i &= H_i(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n), \\ &\quad i=1, 2, \dots, k, \\ x_{k+j} &= L_j(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n), \\ &\quad j=1, 2, \dots, m-k. \end{aligned} \right\} (69)$$

Для опредѣленія искомага полнаго интеграла данныхъ уравненій начнемъ съ разысканія уравненія

$$F_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n) = b_1, \quad (70)$$

которое должно находиться въ инволюціи съ системой (69), при чемъ b_1 представляетъ произвольную постоянную величину. Для этого должны удовлетворяться условія

$$\left. \begin{aligned} (p_i - H_i, F_{m+1}) &= 0, & (x_{k+j} - L_j, F_{m+1}) &= 0, \\ & i=1, 2, \dots, k, & & j=1, 2, \dots, m-k. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому функція F_{m+1} должна служить интеграломъ слѣдующей яковиевской системы линейныхъ уравненій съ частными производными функціи f величинъ $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{m+1}, \dots, x_n, p_{k+1}, \dots, p_n$, разсматриваемыхъ какъ независимыя перемѣнныя,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{r=1}^{n-m} \left(\frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial p_{m+r}} \right) &= 0, \\ & i=1, 2, \dots, k, \\ - \frac{\partial f}{\partial p_{k+j}} + \sum_{r=1}^{n-m} \left(\frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial x_{m+r}} - \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial f}{\partial p_{m+r}} \right) &= 0, \\ & j=1, 2, \dots, m-k. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ уравненіе (70) представляетъ интеграль канонической системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ

$$\begin{aligned} dx_{m+r} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial H_i}{\partial p_{m+r}} dx_i - \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial L_j}{\partial p_{m+r}} dp_{k+j}, \\ dp_{m+r} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial H_i}{\partial x_{m+r}} dx_i + \sum_{j=1}^{m-k} \frac{\partial L_j}{\partial x_{m+r}} dp_{k+j}, \\ & r=1, 2, \dots, n-m. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, искомый интегралъ (70) опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка $2(m-n)$. Присоединяя уравненіе (70) къ исходной системѣ уравненій, получаемъ новую замкнутую систему $m+1$ уравненій, съ которой поступаемъ аналогично тому, какъ поступали съ первоначальной системой. Продолжая указаннныя дѣйствія, мы приходимъ, какъ въ способѣ Якоби-Майера и при помощи равнаго съ нимъ числа эквивалентныхъ операцій интегрированія, къ системѣ n уравненій въ инволюціи слѣдующаго общаго вида

$$p_i = H'_i(x_1, x_2, \dots, x_q, p_{q+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}),$$

$$i=1, 2, \dots, q.$$

$$x_{q+j} = L'_j(x_1, x_2, \dots, x_q, p_{q+1}, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}),$$

$$j=1, 2, \dots, n-q,$$

гдѣ b_1, b_2, \dots, b_{n-m} обозначаютъ $n-m$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Затѣмъ, при помощи одной квадратуры, получается уравненіе, выражающее въ общемъ случаѣ переменную z функціей остальныхъ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-m}$ и еще одной новой произвольной постоянной b . Мы приходимъ такимъ образомъ къ полному интегральному собранію данной системы уравненій (68), изъ котораго получается ихъ полный интегралъ Лагранжа, при помощи алгебраическихъ исключеній, какъ только что показано на предыдущихъ страницахъ.

Возьмемъ, на примѣръ, уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$p_1 + \frac{(x_2 p_2 - x_3 p_3) x_3 p_2}{x_1 p_4} + \frac{(x_3 x_4 - x_2) p_2}{x_1} = 0. \quad (71)$$

Слѣдующія два уравненія

$$\frac{x_1 p_4}{p_2} = b_1, \quad x_1 \left(1 - \frac{p_4}{x_3 p_2} \right) = b_2$$

образуютъ, совмѣстно съ даннымъ уравненіемъ (71), систему трехъ уравненій въ инволюціи, при чемъ b_1 и b_2 обозначаютъ двѣ произвольныхъ постоянныхъ величины. Эти уравненія приводятся къ слѣдующему виду

$$p_1 - \frac{b_1}{(x_1 - b_2)^2} p_3 + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1 (x_1 - b_2)} p_4 = 0,$$

$$p_2 - \frac{x_1 p_4}{b_1} = 0,$$

$$x_3 - \frac{b_1}{x_1 - b_2} = 0.$$

Соответствующая яacobевская система линейных уравнений съ частными производными функции

$$f(x_1, x_2, x_4, p_3, p_4)$$

становится

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1(x_1 - b_2)} \frac{\partial f}{\partial x_4} - \frac{p_4}{x_1 - b_2} \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{x_1}{b_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Поэтому задача приводится къ интегрированию слѣдующей канонической системы уравнений въ полныхъ дифференциалахъ

$$dx_4 = \frac{b_1 x_4 + b_2 x_2}{b_1(x_1 - b_2)} dx_1 - \frac{x_1}{b_1} dx_2,$$

$$dp_4 = -\frac{p_4}{x_1 - b_2} dx_1.$$

Каждое изъ написанныхъ уравненийъ интегрируется при помощи квадратуры. Если возьмемъ интеграль первого изъ послѣднихъ уравненийъ

$$\frac{b_1 x_4 - x_1 x_2}{b_1(x_1 - b_2)} = b_3,$$

гдѣ b_3 —новая произвольная постоянная величина, то, совершивъ еще одну квадратуру, получаемъ полный интеграль С. Ли второго класса даннаго уравненія (71), представленный слѣдующими тремя уравненіями

$$z = b_4,$$

$$x_3 = \frac{b_1}{x_1 - b_2},$$

$$x_4 = \frac{1}{b_1} x_1 x_2 + b_3 (x_1 - b_2),$$

гдѣ b_4 —новая произвольная постоянная величина. Прилагая въ настоящемъ случаѣ теорію, изложенную въ предыдущемъ *n*^o7-омъ, получаемъ полный интегралъ Лагранжа даннаго уравненія (71) въ слѣдующемъ видѣ

$$z = a_2 \left(\frac{b_1}{x_3} - x_1 \right) - \frac{a_3}{b_1} x_3 \left(x_4 + \frac{x_1 x_2}{b_1} \right) + b,$$

гдѣ a_2 , a_3 , b_1 и b обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.

Г Л А В А VIII.

Задача С. Ли.

1. Разрѣшенный С. Ли вопросъ, извѣстный въ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными подъ названіемъ *задачи С. Ли*, является однимъ изъ цѣнныхъ вкладовъ С. Ли въ научную область интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Благодаря ему обнаруживается практическое значеніе, которое представляетъ каждый интеграль дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для интегрированія соответствующихъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Какъ извѣстно, до С. Ли, послѣдній вопросъ оставался открытымъ, и всякій единичный интеграль дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, который не находится въ инволюціи съ ихъ остальными интегралами, не могъ быть использованъ при интегрированіи разсматриваемыхъ уравненій въ тѣхъ случаяхъ, когда общій интеграль дифференціальныхъ уравненій характеристикъ оставался неизвѣстнымъ. Кромѣ того разсматриваемая теорія даетъ новые случаи интегрированія при помощи квадратуръ уравненій каноническихъ и съ частными производными (см. мою статью: *Sur le problème de S. Lie, Comptes rendus, 24 août 1903*). Такимъ образомъ рѣшеніе задачи С. Ли является существеннымъ дополненіемъ и дальнѣйшимъ развитіемъ классической теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными.

С. Ли дважды возвращался въ своихъ изслѣдованіяхъ къ рѣшенію разсматриваемой задачи ¹⁾, при чемъ во второмъ изложеніи значительно усовершенствовалъ свою теорію. Рѣшеніе С. Ли, воспроизведенное во всѣхъ его существенныхъ чертахъ въ сочиненіяхъ Гурса и Э. Вебера ²⁾, основано на столь сложныхъ началахъ, что популяризація самой теоріи и примѣненіе ея для практическихъ цѣлей совершались до сихъ поръ въ самыхъ ограниченныхъ размѣрахъ ³⁾.

¹⁾ *Mathematische Annalen* Bd. VIII, S. 248, Bd. XI, S. 464.

²⁾ *Goursat, E.—Leçons sur l'intégration...* p. 304.

E. v. Weber.—Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 544.

³⁾ Едва-ли не единственное приложеніе разсматриваемой теоріи сдѣлано А. Майеромъ въ его мемуарѣ: *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie* (*Mathematische Annalen*, Bd. XVII, S. 332).

Основываясь на приведенныхъ соображеніяхъ относительно значенія разсматриваемой теоріи, мы изложимъ ее ниже съ точки зрѣніе развитія Якоби-Гамильтоновскаго способа интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными. Въ VII главѣ моего цитированнаго уже выше сочиненія: *Объ интегрированіи уравненій съ частными производными*, приведено рѣшеніе занимающей насъ задачи въ тѣхъ предѣлахъ, въ которыхъ разсматриваетъ ее С. Ли въ VIII томѣ *Mathematische Annalen*. Дальнѣйшее развитіе указанного рѣшенія опубликовано мною, въ краткихъ чертахъ, въ статьѣ: *Sur le problème de S. Lie* (*Comptes rendus*, 24 août 1903) и будетъ изложено подробно на послѣдующихъ страницахъ.

Необходимо, наконецъ, отмѣтить, что поставленная С. Ли задача уже раньше намѣчалась Якоби въ его трудахъ и разсматривалась имъ при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ и условіяхъ, которыя соотвѣтствовали современному той эпохѣ развитію теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій съ частными производными общаго вида и въ частности линейныхъ уравненій.

Въ самомъ дѣлѣ, Якоби вводилъ въ свои изслѣдованія разсмотрѣніе *функциональныхъ группъ интеграловъ* дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, соотвѣтствующихъ даннымъ частнымъ уравненіямъ. Но онъ не пользовался при этомъ терминомъ *функциональная группа интеграловъ*, введеннымъ только С. Ли, и не извлекъ изъ разсмотрѣнія интеграловъ въ общемъ случаѣ всѣхъ тѣхъ преимуществъ для интегрированія данныхъ уравненій, которыя открылъ С. Ли¹⁾. Тѣмъ не менѣе слѣдуетъ указать на одинъ частный случай относительно дифференціальныхъ уравненій движенія системъ точекъ, допускающихъ три *интеграла площадей*, когда Якоби пришелъ къ тѣмъ же результатамъ, которые вытекаютъ изъ разсматриваемой общей теоріи С. Ли²⁾. Наконецъ, Якоби отмѣтилъ нѣсколько частныхъ случаевъ въ своей общей теоріи, которые показываютъ его стремленія къ тому, чтобы использовать извѣстные интегралы дифференціальныхъ уравненій характеристикъ, для уменьшенія трудностей интегрированія соотвѣтствующихъ имъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными³⁾.

1) *Jacobi*.—*Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*. (*Gesammelte Werke*, Bd. V, S. 151).

2) *Jacobi*.—*Nova methodus*... S. 153—163.

3) *Jacobi*.—*Vorlesungen über Dynamik. Zweite Ausgabe*, 1884. S. 263.

Imschenetzky. V. G.—*Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. 1869. p.p. 68—69.

2. Пусть имѣемъ систему m дифференціальныхъ уравненій съ частными производными въ *инволюціи*

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, m. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Предположимъ, что послѣднія уравненія разрѣшимы относительно переменныхъ величинъ p_1, p_2, \dots, p_m , такъ что имѣетъ мѣсто слѣдующее неравенство

$$D \left(\frac{F_1, F_2, \dots, F_m}{p_1, p_2, \dots, p_m} \right) \geq 0. \quad (2)$$

Составляемъ систему линейныхъ уравненій въ *инволюціи*, соответствующую даннымъ уравненіямъ (1)

$$(F_i, f) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Предположимъ, наконецъ, что извѣстны $m+r$ ($r < 2n-2m$) слѣдующихъ различныхъ интеграловъ послѣднихъ уравненій

$$F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_r, \quad (4)$$

которые образуютъ *функциональную группу*, т. е. скобки Пуассона, составленныя изъ каждой пары интеграловъ (4), не представляютъ новыхъ интеграловъ системы (3), отличныхъ отъ интеграловъ (4)-ыхъ.

Какъ извѣстно, линейныя уравненія

$$U_k(f) \equiv (f_k, f) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} k=1, 2, \dots, r, \end{array} \right\} \quad (5)$$

образуютъ замкнутую систему совмѣстно съ уравненіями (3)¹⁾. Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы составить изъ послѣднихъ уравненій (5) такую замкнутую систему линейныхъ уравненій, которая имѣла бы интегралами функціи (4). Уравненія искомой системы должны имѣть слѣдующій видъ

$$V(f) \equiv \sum_{k=1}^r \Pi_k(F_1, F_2, \dots, f_r) U_k(f) = 0,$$

гдѣ Π_k представляютъ неизвѣстныя функціи.

¹⁾ Goursat, E.—Leçons sur l'intégration... p. 308.

Само собою разумѣется, что функціи F_1, F_2, \dots, F_m утождествляютъ всѣ уравненія предыдущаго вида. Чтобы удовлетворить поставленному условію относительно остальныхъ функцій (4), необходимо опредѣлить значенія всѣхъ Π_k такъ, чтобы имѣли мѣсто равенства

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^r \alpha_{ks} \Pi_k = 0, \\ s=1, 2, \dots, r, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\alpha_{ks} \equiv (f'_k, f'_s).$$

Такъ какъ уравненія (6) линейны и однородны относительно неизвѣстныхъ величинъ Π_k , то, чтобы послѣднія имѣли значенія, отличныя отъ нулей, необходимо долженъ обращаться въ нуль слѣдующій опредѣлитель

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{r1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{r2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{1r} & \alpha_{2r} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Предположимъ, что уничтожается не только послѣдній опредѣлитель S , но также и всѣ его миноры, отъ перваго до $q-1$ -аго порядка включительно, такъ что первый миноръ, не обращающійся въ нуль, представляетъ опредѣлитель $r-q$ -аго порядка. Въ виду того, что порядокъ, въ которомъ мы размѣщаемъ интегралы (4), вполне произволенъ и зависитъ отъ нашего усмотрѣнія, то мы можемъ, не нарушая общности разсужденій, обозначить извѣстные интегралы (4) такъ, чтобы первый неуничтожающійся миноръ опредѣлителя (7) представлялся слѣдующимъ опредѣлителемъ

$$D \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{r-q, 1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{r-q, 2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{1, r-q} & \alpha_{2, r-q} & \dots & \alpha_{r-q, r-q} \end{vmatrix}.$$

Такъ какъ послѣдній опредѣлитель косою симметрическій и, по условію, неравенъ нулю, то, стало-быть, порядокъ его является четнымъ числомъ, какъ это хорошо извѣстно изъ теоріи опредѣлителей. Называя его, на примѣръ, черезъ $2q$, мы получаемъ такимъ образомъ, что

$$r - q \equiv 2q, \quad (8)$$

т. е. разность $r - q$ является четнымъ числомъ.

Возвращаясь къ уравненіямъ (6), мы получаемъ изъ нихъ

$$\Pi_k = - \sum_{j=1}^q \frac{D_{kj}}{D} \Pi_{2\rho+j},$$

$$k=1, 2, \dots, 2\rho,$$

гдѣ D_{kj} обозначаетъ значеніе, которое принимаетъ опредѣлитель D , при замѣнѣ его элементовъ k -аго столбца соответственно величинами

$$\alpha_{2\rho+j, 1}, \alpha_{2\rho+j, 2}, \dots, \alpha_{2\rho+j, 2\rho}.$$

Благодаря вычисленнымъ значеніямъ Π_k , выраженіе $V(f)$ становится

$$V(f) \equiv \sum_{j=1}^q \Pi_{2\rho+j} V_j(f),$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$V_j(f) \equiv U_{2\rho+j}(f) - \sum_{k=1}^{2\rho} \frac{D_{kj}}{D} U_k(f),$$

$$j=1, 2, \dots, q.$$

Вслѣдствіе произвольности всѣхъ величинъ $\Pi_{2\rho+j}$, соответствующихъ различнымъ значеніямъ j , отъ 1 до q , становится очевиднымъ, что всѣ выраженія $V_j(f)$ обладаютъ свойствами, аналогичными выраженіямъ $V(f)$, т. е. уничтожаются для всѣхъ значеній (4) функціи f . Поэтому мы получаемъ систему q уравненій

$$V_j(f) = 0, \quad j=1, 2, \dots, q. \quad (9)$$

интегралами которой служатъ функціи (4).

Само собою разумѣется, что уравненія (3) и (9) образуютъ замкнутую систему, такъ какъ существуютъ общіе всѣмъ имъ интегралы (4). Кромѣ того изъ самаго строенія разсматриваемыхъ уравненій видно, что всѣ они различны между собой. Мы получаемъ такимъ образомъ, при помощи алгебраическихъ вычисленій, замкнутую систему $m+q$ различныхъ уравненій (3) и (9), для которой извѣстны $m+r$ различныхъ интеграловъ (4).

Очевидно, что задача интегрированія исходной системы уравненій (1) упрощается, въ смыслѣ пониженія порядка интегрированій, если

опредѣлять новые интегралы системы (3), отличные отъ (4)-ыхъ, какъ интегралы замкнутой системы, образованной совокупностью уравненій (3) и (9).

Такъ какъ извѣстны $m+r$ интеграловъ послѣдней системы, то ея новый интеграль опредѣляется при помощи операціи интегрированія, порядокъ которой выражается числомъ

$$2n - 2m - q - r.$$

Послѣднее, въ силу зависимости (8), является четнымъ и равно числу

$$2n - 2m - 2q - 2r.$$

Назовемъ черезъ f_{r+1} полученный такимъ образомъ интеграль разсматриваемой системы. Послѣдній интеграль, въ самомъ неблагоприятномъ случаѣ, образуетъ, совместно съ (41)-ыми, функциональную группу, которая очевидно имѣетъ по меньшей мѣрѣ одной *существенной функціей*¹⁾ больше сравнительно съ прежней группой, такъ какъ разность между числомъ всѣхъ функцій группы $m+r+1$ и числомъ прежнихъ *существенныхъ функцій* $m+q$ является нечетнымъ $2r+1$, что невозможно въ силу изложенныхъ выше соображеній. Предположимъ, что разсматриваемая группа имѣетъ только одной *существенной функціей* больше сравнительно съ предыдущей. Въ такомъ случаѣ мы составляемъ еще одно уравненіе

$$V_{q+1}(f) = 0,$$

образующее, совместно съ предыдущими, замкнутую систему $m+q+1$ уравненій, для которой извѣстны очевидно $m+r+1$ интеграловъ. Поэтому новый интеграль, который обозначимъ черезъ f_{r+2} , опредѣляется при помощи операціи интегрированія порядка

$$2n - 2m - 2q - 2r - 2.$$

Продолжая поступать аналогичнымъ образомъ и далѣе, приходимъ въ результатъ, при самомъ неблагоприятномъ случаѣ, послѣ $n-m-q-r$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія соотвѣтственно порядковъ

$$2n - 2m - 2q - 2r, \quad 2n - 2m - 2q - 2r - 2, \dots, 4, 2,$$

къ $n-m-q-r$ различнымъ новымъ интеграламъ системы (3)

¹⁾ *Существенными* (*ausgezeichnete, distinguée*) функціями группы называются такія, которыя находятся въ инволюціи какъ между собой, такъ и съ каждой изъ функцій группы въ отдѣльности (см. мое изслѣдованіе: *Объ интегрированіи уравненій...*, глава VIII).

$$f_{r+1}, f_{r+2}, \dots, f_{n-m+\rho},$$

(въ силу зависимости (8), число $n-m-q-\rho+r$ равняется $n-m+\rho$).

Такимъ образомъ въ результатѣ получается слѣдующая замкнутая система $n-\rho$ линейныхъ уравненій

$$\begin{aligned} (F_i, f) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ V_j(f) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, q+1, \dots, n-m-\rho, \end{aligned}$$

для которой извѣстна полная система ея $n+\rho$ различныхъ интеграловъ

$$F_1, F_2, \dots, F_m, f_1, f_2, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_{n-m+\rho}. \quad (10)$$

3. Согласно съ изложеннымъ, послѣдняя группа интеграловъ (10) имѣеть $n-\rho$ существенныхъ функций, въ числѣ которыхъ находятся m первыхъ интеграловъ (10).

Остальные $n-m-\rho$ существенныхъ функций, которыя мы обозначимъ черезъ

$$\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_q, \Phi_{q+1}, \dots, \Phi_{n-m-\rho} \quad (11)$$

могутъ быть вычислены, при помощи $n-m-\rho$ послѣдовательныхъ операцій интегрированія порядковъ

$$n-m-\rho, n-m-\rho-1, \dots, q, q-1, \dots, 2, 1.$$

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) очевидно привелась бы къ одной только квадратурѣ, если бы эти послѣднія функции были извѣстны. Квадратура эта состоитъ въ разысканіи послѣдняго интеграла системы линейныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ [\Phi_j, f] &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, q+1, \dots, n-m-\rho, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

гдѣ функция f разсматривается какъ зависящая отъ всѣхъ прежнихъ переменныхъ x, p и отъ новой переменной z .

Интегралами послѣдней системы служатъ очевидно всѣ функции (10). Приравнявъ m первыхъ изъ нихъ нулю, а всѣ остальные произвольнымъ постояннымъ, получаемъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= 0, \\ & i = 1, 2, \dots, m, \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= b_k, \\ & k = 1, 2, \dots, r, r+1, \dots, n-m+\rho, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

гдѣ всѣ b_k обозначаютъ произвольныя постоянныя величины. Последняя система представляетъ $n + \rho$ интегральныхъ уравненій системы уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соответствующихъ линейнымъ уравненіямъ (12). Последний ея интегралъ получается интегрированиемъ точнаго дифференціала, въ который обращается уравненіе

$$dz = \sum_{s=1}^n p_s dx_s, \quad (14)$$

на основаніи интегральныхъ уравненій (13) (ср. стр. 148). Такимъ образомъ послѣдній искомый интегралъ системы (12) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n). \quad (15)$$

Однако для рѣшенія разсматриваемой задачи интегрированія данныхъ уравненій (1), нѣтъ надобности вычислять функціи (11), но достаточно замѣтить, что всѣ уравненія $V_j(f) = 0$ равнозначны слѣдующимъ линейнымъ уравненіямъ ¹⁾

$$(\Phi_j, f) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, q + 1, \dots, n - m - \rho. \quad (16)$$

Это замѣчаніе является существеннымъ въ томъ отношеніи, что мы имѣемъ теперь теоретическое основаніе утверждать, что *уравненіе (14), въ силу системы уравненій (13), обращается въ точный дифференціалъ, интегрированиемъ котораго опредѣляется функція (15).*

4. Доказанныхъ предложеній достаточно, чтобы показать, что интегрированіе уравненій (1), на основаніи полученныхъ данныхъ, совершается при помощи операцій дифференцированія и алгебраическихъ исключеній.

Въ самомъ дѣлѣ, соответствующая даннымъ уравненіямъ (1) нормальная система линейныхъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} [F_i, f] = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

имѣетъ $n + \rho + 1$ различныхъ интеграловъ (10) и (15). Легко показать, что остальные $n - m - \rho$ интеграловъ этой системы (17) опредѣляются при помощи дифференцированія, и тогда очевидно, что задача интегрированія данныхъ уравненій (1) разрѣшается на основаніи теоріи характеристикъ.

¹⁾ См. *Объ интегрированіи уравненій...*, глава VII.

Чтобы составить эти послѣдніе недостающіе интегралы, приравниваемъ интеграль (15) произвольной постоянной величинѣ b . Не нарушая общности разсужденій, можемъ предположить, что полученное такимъ образомъ уравненіе и уравненія (13)-ья разрѣшаются относительно переменныхъ

$$z, x_{n-\rho+1}, x_{n-\rho+2}, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$$

и выражаютъ слѣдующимъ образомъ ихъ значенія въ функціяхъ остальныхъ переменныхъ и всѣхъ $n - m + \rho + 1$ произвольныхъ постоянныхъ

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}) + b, \\ x_{n-\rho+i} &= \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}), \\ p_s &= \psi_s(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}), \\ & \quad i=1, 2, \dots, \rho, \quad s=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Вслѣдствіе того, что результатъ исключенія всѣхъ постоянныхъ $b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}$, изъ $n + \rho$ послѣднихъ уравненій (18), приводитъ къ данной системѣ (1), разрѣшающейся относительно переменныхъ p_1, p_2, \dots, p_m , въ силу условія (2), то должно имѣть мѣсто слѣдующее неравенство

$$D \left(\frac{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho, \psi_{m+1}, \psi_{m+2}, \dots, \psi_n}{b_1, b_2, \dots, b_\rho, b_{\rho+1}, b_{\rho+2}, \dots, b_{n-m+\rho}} \right) \geq 0.$$

Напишемъ въ явной формѣ значеніе опредѣлителя лѣвой части послѣдняго неравенства

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-\rho}}{\partial b_1} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-\rho}}{\partial b_2} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-\rho}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{array} \right| \quad (19)$$

Такъ какъ равенство (14) утождествляется, на основаніи уравненій (18), то должны имѣть мѣсто тождества

$$\left. \begin{aligned} \psi_s \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \psi_{n-\rho+i}, \\ s=1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n-\rho. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Отсюда выводятся слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial b_k} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{m+j} \partial b_k} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_{m+j} \partial b_k} \psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m+j}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k} \right), \\ j=1, 2, \dots, n-m-\rho,$$

для всѣхъ значеній k , отъ 1 до $n-m+\rho$. Подставляемъ послѣднія значенія производныхъ $\frac{\partial \psi_{m+j}}{\partial b_k}$, вмѣсто элементовъ всѣхъ столбцовъ определителя (19), отъ $\rho+1$ -аго до $n-m$ -аго столбца включительно. Въ этихъ послѣднихъ выраженіяхъ элементовъ отбрасываемъ всѣ члены вида

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{m+j}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_k},$$

какъ пропорціональные элементамъ послѣднихъ ρ столбцовъ определителя (19), и прибавляемъ взамѣнъ ихъ члены, которые пропорціональны элементамъ первыхъ ρ столбцовъ разсматриваемаго определителя

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_k} \cdot \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial x_{m+j}}.$$

Благодаря послѣднимъ преобразованіямъ, предыдущій определитель представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \theta_1}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \theta_2}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial b_{n-m+\rho}} & \frac{\partial \theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial \theta_{n-m+\rho}}{\partial x_{n-\rho}} & \frac{\partial \psi_{n-\rho+1}}{\partial b_{n-m+\rho}} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial b_{n-m+\rho}} \end{vmatrix},$$

гдѣ обозначенія θ_k имѣютъ слѣдующія значенія

$$\theta_k \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_k} \psi_{n-\rho+i},$$

для всѣхъ значений k , отъ 1 до $n-m+\rho$.

Вслѣдствіе неравенства нулю послѣдняго опредѣлителя, не долженъ равняться нулю по меньшей мѣрѣ одинъ изъ его миноровъ $n-m-\rho$ -аго порядка, который составленъ изъ элементовъ $\rho+1, \rho+2, \dots, n-m$ -аго столбцовъ разсматриваемаго опредѣлителя. Пусть, напримѣръ, слѣдующій опредѣлитель-миноръ

$$D \left(\begin{array}{cccc} \theta_1, & \theta_2, & \dots & \theta_{n-m-\rho} \\ x_{m+1}, & x_{m+2}, & \dots & x_{n-\rho} \end{array} \right)$$

отличенъ отъ нуля. Отсюда слѣдуетъ, что уравненія

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} \psi_{n-\rho+i} = a_j, \\ j=1, 2, \dots, n-m-\rho, \end{array} \right\} \quad (21)$$

различны и разрѣшмы относительно всѣхъ переменныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{n-\rho},$$

при чемъ $a_1, a_2, \dots, a_{n-m-\rho}$ представляютъ $n-m-\rho$ различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величинъ.

Легко доказать, что уравненія (21) представляютъ недостающія $n-m-\rho$ интегральныхъ уравненій системы въ полныхъ дифференциалахъ, соответствующей линейнымъ уравненіямъ (17). Въ самомъ дѣлѣ, исключаемъ изъ выраженій θ_j значения $b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}$, опредѣляемые уравненіями (18). Обозначимъ полученные результаты соответственно черезъ

$$F_{m+1}, F_{m+2}, \dots, F_{n-\rho}. \quad (22)$$

Такъ какъ въ результатѣ произведенной подстановки функціи ψ_s принимаютъ тождественно значенія p_s , то функціи F_{m+j} выражаются слѣдующимъ образомъ

$$F_{m+j} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial b_j} - \sum_{i=2}^{\rho} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_1} p_{n-\rho+i},$$

при чемъ всѣ b_k замѣнены ихъ указанными выше функціональными значеніями.

Поэтому скобки Пуассона (F_σ, F_{m+j}) имѣютъ слѣдующее значеніе

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} + \\ + \sum_{k=1}^{n-m+\rho} \frac{\partial F_{m+j}}{\partial b_k} (F_\sigma, f_k).$$

Подставляя сюда выраженія

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial x_s} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j \partial x_s} p_{n-\rho+i},$$

$$\frac{\partial F_{m+j}}{\partial p_{n-\rho+i}} \equiv - \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j},$$

$$(F_\sigma, f_k) \equiv 0,$$

получаемъ въ результатѣ

$$(F_\sigma, F_{m+j}) \equiv \left. \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b_j \partial x_s} - \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_j \partial x_s} p_{n-\rho+i} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Съ другой стороны мы имѣемъ рядъ слѣдующихъ тождествъ

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-\rho}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\rho, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \equiv 0, \\ i=1, 2, \dots, m.$$

Дифференцируя послѣднія тождества по $b_1, b_2, \dots, b_{n-m-\rho}$, получаемъ рядъ новыхъ тождествъ

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_\sigma}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_\sigma}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv 0, \\ & \sigma=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n-m-\rho. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Вслѣдствіе равенствъ (20), имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial b_j} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial b_s \partial b_j} \psi_{n-\rho+i} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \right),$$

$s=1, 2, \dots, n-\rho,$

для всѣхъ значеній j , отъ 1 до $n-m-\rho$. Поэтому, послѣ подстановки значеній всѣхъ b_k , изъ уравненій (18), въ обѣ системы предыдущихъ равенствъ, тождества (24) становятся

$$\sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial x_{n-\rho+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_j} + \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} - \sum_{i=1}^{\rho} \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_s \partial b_j} \psi_{n-\rho+i} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \right) \right] + \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-\rho+i}} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_j} \equiv 0,$$

$\sigma=1, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n-m-\rho.$

Поэтому выраженія скобокъ Пуассона (23) принимаютъ слѣдующій видъ

$$(F_{\sigma}, F_{m+j}) \equiv \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial \psi_{n-\rho+i}}{\partial b_s} \left(\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-\rho+i}} - \sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} \right), \quad (25)$$

$\sigma=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n-m-\rho.$

5. Прежде чѣмъ вести дальше наши разсужденія необходимо остановиться на нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ слѣдующую замкнутую систему m различныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи f

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n X_i^k \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \\ i=1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

удовлетворяющихъ условію

$$\begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \dots & X_1^m \\ X_2^1 & X_2^2 & \dots & X_2^m \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ X_m^1 & X_m^2 & \dots & X_m^m \end{vmatrix} \neq 0,$$

при чемъ коэффициенты X_i^k представляютъ функции всѣхъ переменныхъ величинъ x_1, x_2, \dots, x_n .

Предположимъ, что функции

$$f_1, f_2, \dots, f_{n-m}$$

представляютъ полную систему $n-m$ различныхъ интеграловъ уравненій (26), такъ что имѣютъ мѣсто слѣдующія тождества

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n X_i^k \frac{\partial f_s}{\partial x_k} = 0, \\ i=1, 2, \dots, m, \quad s=1, 2, \dots, n-m. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Вслѣдствіе предыдущаго неравенства, послѣдніе интегралы должны удовлетворять условію

$$D \left(\frac{f_1, f_2, \dots, f_{n-m}}{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n} \right) \geq 0. \quad (28)$$

Поэтому слѣдующія уравненія

$$\left. \begin{aligned} f_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ s=1, 2, \dots, n-m, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

представляютъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференциалахъ, соответствующихъ линейной системѣ (26), и опредѣляютъ значенія переменныхъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n,$$

какъ функции остальныхъ переменныхъ x_1, x_2, \dots, x_m . Въ силу послѣднихъ значеній, уравненія (29) обращаются въ тождества и даютъ мѣсто новымъ тождествамъ

$$\frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0, \\ h=1, 2, \dots, m.$$

Умножая послѣднія тождества соответственно на X_i^h и складывая полученные результаты, получаемъ новый рядъ тождествъ

$$\sum_{h=1}^m X_i^h \frac{\partial f_s}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^m X_i^h \sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} = 0, \\ i=1, 2, \dots, m,$$

для всѣхъ значений s , отъ 1 до $n-m$. Послѣднія, въ силу равенствъ (27), приводятся къ слѣдующимъ тождествамъ

$$\sum_{r=1}^{n-m} \frac{\partial f_s}{\partial x_{m+r}} \left(\sum_{h=1}^m X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} \right) = 0,$$

$s=1, 2, \dots, n-m, \quad i=1, 2, \dots, m.$

Отсюда, вслѣдствіе неравенства (28), получаются искомыя нами тождества

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^m X_i^h \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_h} - X_i^{m+r} = 0, \\ i=1, 2, \dots, m, \quad r=1, 2, \dots, n-m, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

которымъ должно удовлетворять каждое рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференциалахъ, соответствующихъ данной системѣ линейныхъ уравненій (26).

6. Послѣ сдѣланнаго отступленія, возвращаемся къ формуламъ (25). Совокупность уравненій (18) представляетъ рѣшеніе уравненій въ полныхъ дифференциалахъ, соответствующихъ замкнутой системѣ линейныхъ уравненій (12), которую представимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\sum_{\sigma=1}^n \left(\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} - \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + \sum_{s=1}^n \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} p_s \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$\sigma=1, 2, \dots, m,$

$$\sum_{s=1}^n \left(A_j^s \frac{\partial f}{\partial x_s} + B_j^s \frac{\partial f}{\partial p_s} \right) + C_j \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$j=1, 2, \dots, q, q+1, \dots, n-m-\rho.$

Поэтому тождества (30) въ настоящемъ случаѣ, благодаря обозначеніямъ уравненій (18), становятся

$$\sum_{s=1}^{n-\rho} \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_s} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} - \frac{\partial F_{\sigma}}{\partial p_{n-\rho+i}} = 0,$$

$i=1, 2, \dots, \rho, \quad \sigma=1, 2, \dots, m,$

и т. д.

Для нашихъ цѣлей достаточно равенствъ написанной первой строки. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи послѣднихъ, скобки Пуассона (25) обращаются тождественно въ нуль, и мы получаемъ искомыя тождества

$$(F_{\sigma}, F_{m+j}) \equiv 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n - m - \rho.$$

Такимъ образомъ функціи (22) представляютъ $n - m - \rho$ искомымъ интеграловъ системы линейныхъ уравненій (17). Поэтому полный интегралъ данной системы уравненій въ инволюціи (1) опредѣляется совокупностью уравненій (18) и (21), при помощи операций алгебраическихъ исключеній, на основаніи *теоріи характеристикъ*. При этомъ произвольными постоянными служатъ всѣ $2n - 2m$ слѣдующихъ величинъ

$$b_1, b_2, \dots, b_{n-m+\rho}, b, a_1, a_2, \dots, a_{n-m-\rho}. \quad (31)$$

Если послѣднія не удовлетворяютъ указаннымъ въ теоріи характеристикъ условіямъ, то необходимо принять начальныя значенія слѣдующихъ переменныхъ величинъ

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n, \varepsilon - \sum_{j=1}^{n-m} x_{m+j} p_{m+j}, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$$

произвольными постоянными величинами, вмѣсто постоянныхъ (31).

Относительно предыдущихъ вычисленій слѣдуетъ замѣтить, что при послѣдовательномъ разысканіи интеграловъ уравненій (3), мы предполагали всегда самый неблагоприятный случай, когда, при каждомъ новомъ интегрированіи, число интеграловъ, соответствующихъ функциональныхъ группъ увеличивается только на единицу. Но если бы скобки Пуассона, составленныя изъ каждаго вновь полученнаго интеграла съ прежними, приводили къ новымъ интеграламъ разсматриваемыхъ уравненій, тогда, само собою разумѣется, что число указанныхъ операций интегрированія и порядокъ ихъ соответственно уменьшаются.

Наконецъ, если какой-либо изъ найденныхъ интеграловъ системы (3) находится въ инволюціи со всѣми остальными, то приравнивая его произвольной постоянной величинѣ и присоединяя полученное такимъ образомъ уравненіе къ исходнымъ (1), мы избѣгаемъ необходимости составлять одно изъ вспомогательныхъ уравненій вида $V(f) = 0$ и тѣмъ упрощаемъ вычисленія.

Итакъ, мы приходимъ къ слѣдующему результату:

Пусть даны m уравненій въ инволюціи (1); предположимъ, что ихъ дифференціальныя уравненія характеристикъ имѣютъ $m + r$ различныхъ интеграловъ (4), образующихъ функциональную группу съ $m + q$ существенными функціями. Въ такомъ случаѣ разность $r - q$ является некоторымъ четнымъ числомъ 2ρ , и задача интегрированія уравненій (1) разрѣшается,

въ самомъ неблагоприятномъ случаѣ, при помощи $n-t-q-q$ послѣдовательныхъ операций интегрированія соответственно порядковъ

$$2(n-t-q-q), 2(n-t-q-q-1), \dots, 4, 2,$$

одной квадратуры и при помощи алгебраическихъ исключеній.

Проинтегрируемъ, на примѣръ, слѣдующее дифференціальное уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$F_1 \equiv x_1 p_1 - e^{x_2} p_2 (p_3 - p_4) = 0. \quad (32)$$

Соотвѣтствующее линейное уравненіе

$$(F_1, f) = 0 \quad (33)$$

имѣеть, кромѣ интеграла F_1 , еще слѣдующихъ три интеграла

$$f_1 \equiv p_3, \quad f_2 \equiv x_3 p_4 + x_4 p_3 - p_2, \quad f_3 \equiv p_4,$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$(f_1, f_2) \equiv f_3, \quad (f_1, f_3) \equiv 0, \quad (f_2, f_3) \equiv f_1.$$

Значеніе соотвѣтствующаго опредѣлителя S

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 & 0 \\ f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & -f_1 & 0 \end{vmatrix}$$

равняется нулю. Первый ненулевой миноръ послѣдняго опредѣлителя принадлежитъ первому порядку

$$\begin{vmatrix} 0 & -f_3 \\ f_3 & 0 \end{vmatrix} \equiv f_3^2.$$

Поэтому существуетъ одно линейное уравненіе

$$(f_3, f) - \frac{f_1}{f_3} (f_1, f) = 0, \quad (34)$$

образующее замкнутую систему съ уравненіемъ (33). Послѣдняя система линейныхъ уравненій (33) и (34) имѣеть слѣдующій интегралъ

$$F_2 \equiv x_1 p_1,$$

находящийся въ инволюціи съ извѣстными интегралами f_1, f_2, f_3 .

Составляемъ поэтому слѣдующую систему уравненій

$$F_1 = 0, \quad F_2 = C_1,$$

$$f_1 = b_1, \quad f_2 = b_2, \quad f_3 = b_3,$$

гдѣ C_1, b_1, b_2, b_3 обозначаютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины. Послѣдняя система уравненій даетъ

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3}, \quad p_3 = b_1, \quad p_4 = b_3, \\ x_4 &= \frac{1}{b_1} \left(\frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3} + b_2 - b_3 x_3 \right). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Въ силу послѣднихъ зависимостей, дифференціальное уравненіе

$$dz = \sum_{s=1}^4 p_s dx_s$$

даетъ, при помощи квадратуры, интеграль

$$z = \left(b_1 - \frac{b_3^2}{b_1} \right) x_3 - \frac{C_1}{b_1} e^{-x_2} + C_1 \lg x_1 + b, \quad (36)$$

гдѣ b —новая произвольная постоянная величина.

Итакъ составляемъ систему двухъ уравненій

$$F_1 = 0, \quad F_2 = C_1. \quad (37)$$

Система уравненій въ полныхъ дифференціалахъ, соотвѣтствующая линейнымъ уравненіямъ

$$[F_1, f] = 0, \quad [F_2, f] = 0,$$

имѣетъ рѣшеніе, представленное совокупностью уравненій (35), (36) и слѣдующаго

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_3} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_3} \psi_4 = a_3,$$

выраженного въ прежнихъ обозначеніемъ. Въ настоящемъ случаѣ послѣднее уравненіе становится

$$-\frac{b_3}{b_1} \left[x_3 + \frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)} \right] = a_3.$$

Поэтому совокупность этого уравненія съ (35)-ыми и (36)-ымъ опредѣляетъ слѣдующія выраженія

$$\left. \begin{aligned} z &= -\frac{2 C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)} + C_1 \lg x_1 + b', \\ x_3 &= -\frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)^2} - \frac{b_1 a_3}{b_3}, \quad x_4 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{(b_1 - b_3)^2} + \frac{b_2}{b_1} + a_3, \\ p_1 &= \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{b_1 - b_3}, \quad p_3 = b_1, \quad p_4 = b_3, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

гдѣ b' обозначаетъ новую произвольную постоянную величину, связанную слѣдующимъ образомъ съ постоянной b ,

$$b' = b + \frac{a_3}{b_3} (b_3^2 - b_1^2).$$

Вводимъ, вмѣсто обозначенія произвольныхъ постоянныхъ b_1, b_2, b_3, a_3 и b' , величины

$$x_3^0, x_4^0, a, p_3^0, p_4^0,$$

представляющія начальныя значенія переменныхъ

$$x_3, x_4, z - x_3 p_3 - x_4 p_4, p_3, p_4,$$

соотвѣтствующія начальнымъ значеніямъ x_1^0 и x_2^0 независимыхъ переменныхъ x_1 и x_2 .

Въ такомъ случаѣ уравненія (38) преобразовываются въ слѣдующія

$$\begin{aligned} z &= \frac{2 C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{p_3^0 - p_4^0} + C_1 \lg \frac{x_1}{x_1^0} + a + x_3^0 p_3^0 + x_4^0 p_4^0, \\ x &= \frac{C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{(p_3^0 - p_4^0)^2} + x_3^0, \quad x_4 = \frac{C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{(p_3^0 - p_4^0)^2} + x_4^0, \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{C_1}{x_1}, \quad p_2 = \frac{C_1 e^{-x_2}}{p_3^0 - p_4^0}, \quad p_3 = p_3^0, \quad p_4 = p_4^0.$$

Исключая x_3^0 и x_4^0 , из первых трех уравнений сейчас написанной системы, получаемъ полный интегралъ системы уравнений (37)

$$z = \frac{C_1 (e^{-x_2^0} - e^{-x_2})}{p_3^0 - p_4^0} + C_1 \lg \frac{x_1}{x_1^0} + p_3^0 x_3 + p_4^0 x_4 + a.$$

при чемъ p_3^0 , p_4^0 и a являются тремя различными произвольными постоянными величинами.

Принимая въ послѣдней формулѣ C_1 также за произвольную постоянную величину, мы выражаемъ этимъ же самымъ уравненіемъ искомый полный интегралъ даннаго уравненія (32), при чемъ C_1 , p_3^0 , p_4^0 , a представляютъ четыре различныхъ произвольныхъ постоянныхъ величины.